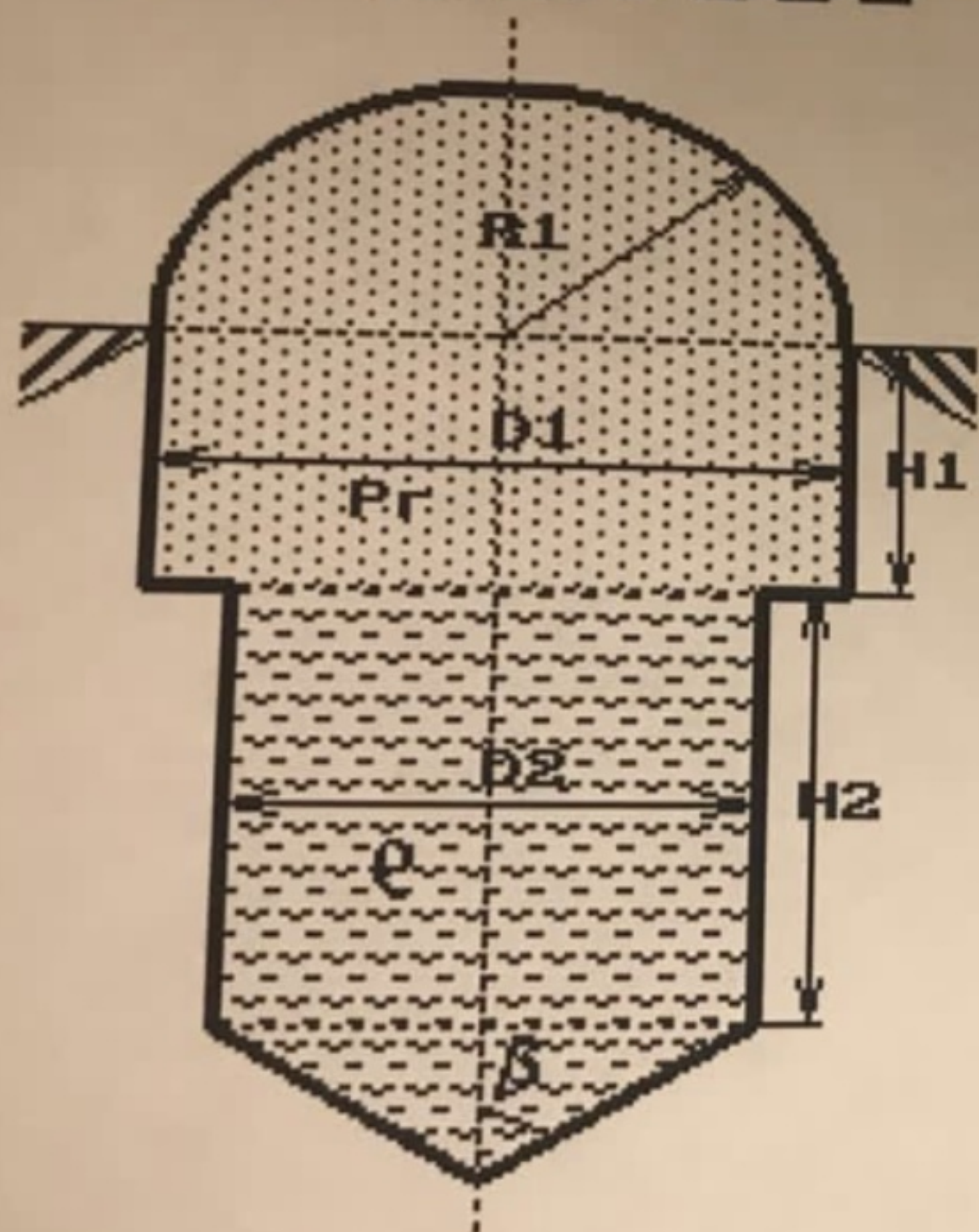


ВАРИАНТ 563



ДАНО:

$$D_1 = 8 \text{ м.}$$

$$H_1 = 6 \text{ м.}$$

$$R_1 = 0.5 \cdot D_1.$$

$$D_2 = 6 \text{ м.}$$

$$H_2 = 10 \text{ м.}$$

$$\beta = 60^\circ$$

$S = 20 \text{ мм.}$ – толщина
стенки сосуда.

$\rho = 1.4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ –
– плотность жидкости.

$[G] = 150 \text{ МПа.}$ –
– доп. напряжение.

1. ОПРЕДЕЛИТЬ :

P_g – давление газа.

2. ВЫЧИСЛИТЬ :

значения напряжений.

Вариант № 563

Дано : $D1 := 8\text{ m}$ $H1 := 6\text{ m}$ $R1 := 0.5 \cdot D1 = 4\text{ m}$ $[\sigma] := 150 \cdot \text{MPa}$ — допустимое напряжение
 $D2 := 6\text{ m}$ $H2 := 10\text{ m}$ $\beta := 60 \cdot \text{deg}$
 $S := 20\text{ mm}$ — толщина стенки сосуда $\rho := 1.4 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ — плотность жидкости

Найти : p_0 — давление газа

Построить эпюры нагружения

Решение :

Для удобства обозначим новые переменные и некоторые константы :

$$g = 9.807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{— ускорение свободного падения}$$

$$\gamma := \rho \cdot g = 1.4 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.807 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 13.73 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \quad \text{— удельный вес жидкости}$$

$$a := \frac{\frac{D2}{2}}{\tan(\beta)} = \frac{\frac{6 \cdot \text{m}}{2}}{\tan(60 \cdot \text{deg})} = 1.732 \text{ m} \quad \text{— высота конической части сосуда}$$

Высота сосуда :

$$y_1 := a = 1.732 \text{ m}$$

$$y_2 := a + H2 = 11.732 \text{ m}$$

$$y_3 := a + H2 + H1 = 17.732 \text{ m}$$

$$y_4 := a + H2 + H1 + R1 = 21.732 \text{ m}$$

Упрощения: не учитываем собственный вес сосуда

Для начала найдем сечение с самым напряженным состоянием для этого условно возьмем давление газа равным 4 барам.

$$p_0 := 4\text{ bar} = 0.4 \cdot \text{MPa}$$

Определение окружных и меридианных напряжений сосуда

$$1) \quad 0 < y < y_1$$

Оболочка - конус

$$\beta = 60 \cdot \text{deg} \quad \text{— угол между осью } y \text{ и поверхностью}$$

$$\cos(\beta) = 0.5$$

$$\rho_t(y) := \frac{y}{\cos(\beta)} \quad \text{— Радиус кривизны окружной поверхности}$$

$$\rho_m := \infty \quad \text{— Радиус кривизны меридианной поверхности}$$

Объем отсеченной части сосуда на уровне y

$$V(y) := \frac{1}{3} \pi y \cdot (\rho_t(y))^2$$

Внутреннее давление в сосуда на уровне y

давление воды и газа

$$p(y) := p_0 + \gamma \cdot (y_2 - y)$$

Меридианные напряжения в оболочке

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

$$\sigma_m(y) := \frac{p(y) \cdot \pi \cdot \rho_t(y)^2 + \gamma \cdot V(y)}{2\pi \cdot \rho_t(y) \cdot S \cdot \cos(\beta)}$$

Из уравнения Лапласа $\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{S}$

Окружные напряжения в оболочке

$$\sigma_t(y) := \frac{p(y) \cdot \rho_t(y)}{S}$$

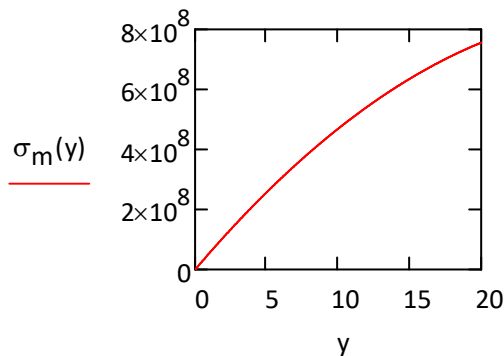
Строим эпюры

$$\sigma_m(0.000001m) = 0 \cdot \text{MPa}$$

(мы не можем найти значение в точке 0 т.к. придется делить на 0, но при $y \rightarrow 0$, $\sigma_m \rightarrow 0$)

$$\sigma_m\left(\frac{y_1}{2}\right) = 47.904 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y_1) = 94.436 \cdot \text{MPa}$$

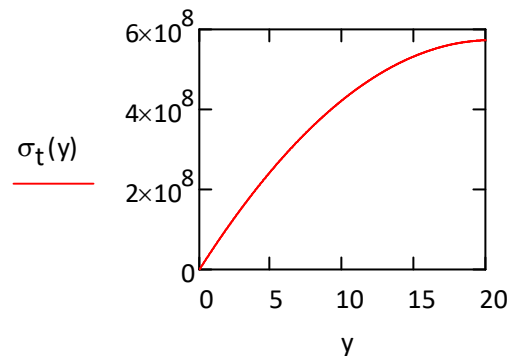


$$\sigma_t(0.000001m) = 0 \cdot \text{MPa}$$

(мы не можем найти значение в точке 0 т.к. придется делить на 0, но при $y \rightarrow 0$, $\sigma_m \rightarrow 0$)

$$\sigma_t\left(\frac{y_1}{2}\right) = 47.561 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_1) = 93.063 \cdot \text{MPa}$$



Обрати внимание: зависимость нелинейная

2) $y_1 < y < y_2$

Оболочка - цилиндр

$$\rho_t := \frac{D_2}{2} \quad \text{- Радиус кривизны окружной поверхности}$$

не зависит от высоты сосуда

$$\rho_m := \infty \quad \text{- Радиус кривизны меридианной поверхности}$$

Объем отсеченной части сосуда на уровне y

$$V(y) := \pi(\rho_t)^2 \cdot (y - y_1) + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\rho_t)^2 \cdot a$$

Внутреннее давление в сосуде на уровне y

давление воды и газа

$$p(y) := p_0 + \gamma \cdot (y_2 - y)$$

Из уравнения Лапласа $\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{S}$

Окружные напряжения в оболочке

$$\sigma_t(y) := \frac{\rho(y) \cdot \rho_t}{S}$$

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

Меридианные напряжения в оболочке

$$\sigma_m(y) := \frac{\rho(y) \cdot \pi \cdot \rho_t^2 + \gamma \cdot V(y)}{2\pi \cdot \rho_t \cdot S}$$

Строим эпюры

$$\sigma_m(y_1) = 40.892 \cdot \text{MPa}$$

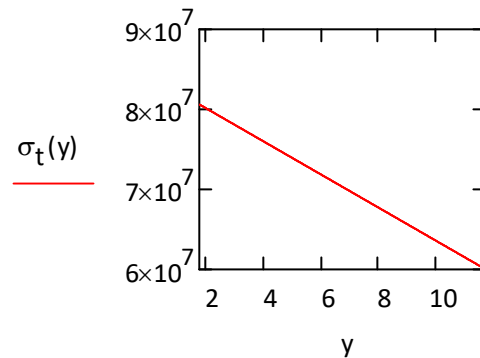
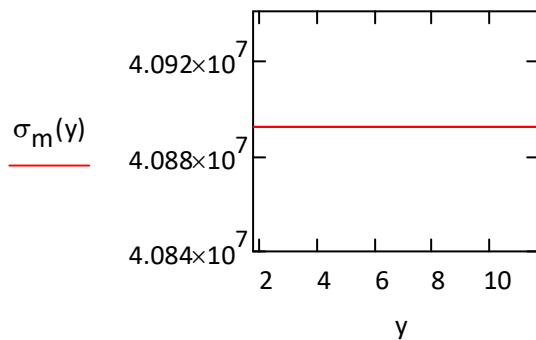
$$\sigma_m\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 40.892 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y_2) = 40.892 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_1) = 80.595 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 70.297 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_2) = 60 \cdot \text{MPa}$$



Обрати внимание: зависимость линейная

3) $y_2 < y < y_3$

Оболочка - цилиндр

$$\rho_t := \frac{D1}{2} \quad \text{- Радиус кривизны окружной поверхности}$$

не зависит от высоты сосуда

$$\rho_m := \infty \quad \text{- Радиус кривизны меридианной поверхности}$$

Объем отсеченной части сосуда с водой

$$V := \pi \left(\frac{D1}{2} \right)^2 \cdot (y_2 - y_1) + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D1}{2} \right)^2 \cdot a$$

не зависит от высоты сосуда

Внутреннее давление в сосуде на уровне y

только давление газа

$$p := p_0$$

не зависит от высоты сосуда

Из уравнения Лапласа

$$\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{S}$$

Окружные напряжения в оболочке

$$\sigma_t(y) := \frac{p \cdot \rho_t}{S}$$

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

Меридианные напряжения в оболочке

$$\sigma_m(y) := \frac{p \cdot \pi \cdot \rho_t^2 + \gamma \cdot V}{2\pi \cdot \rho_t \cdot S}$$

Строим эпюры

$$\sigma_m(y_2) = 54.522 \cdot \text{MPa}$$

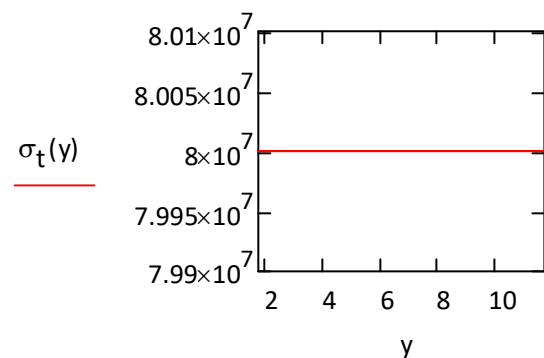
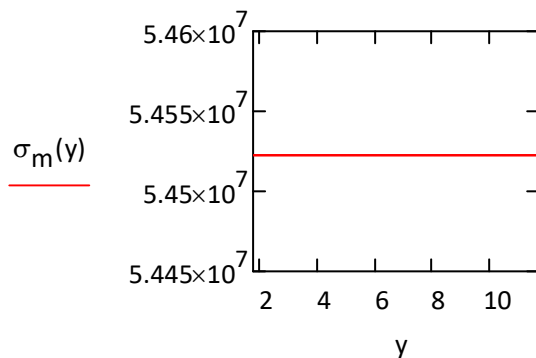
$$\sigma_m\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) = 54.522 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y_3) = 54.522 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_2) = 80 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) = 80 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_3) = 80 \cdot \text{MPa}$$



Обрати внимание: напряжения одинаковы по всей длине сосуда, так получилось потому что мы не учитываем вес самого сосуда

Дальше мы считать не можем т.к. не знаем силу реакций опорного кольца на уровне y_3 , чтобы обойти это ограничение будем считать оставшуюся часть сосуда сверху вниз.

4) $0 < y < y_4 - y_3$

Оболочка - полусфера

$\rho_t := R1$ - Радиус кривизны окружной поверхности

$\rho_m := R1$ - Радиус кривизны меридианной поверхности

Внутреннее давление в сосуде на уровне y

только давление газа

$$p := p_0$$

не зависит от высоты сосуда

Из уравнения Лапласа $\sigma_t + \sigma_m = \frac{p \cdot R}{S}$

Газ создает симметричную нагрузку $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$

Тогда преобразуем уравнение Лапласа $\sigma_t = \sigma_m = \frac{p \cdot R}{2S}$

Окружные напряжения в оболочке $\sigma_t(y) := \frac{p \cdot R1}{2S}$

Меридиональные напряжения в оболочке $\sigma_m(y) := \frac{p \cdot R1}{2S}$

Строим эпюры

$$\sigma_m(0) = 40 \cdot \text{MPa}$$

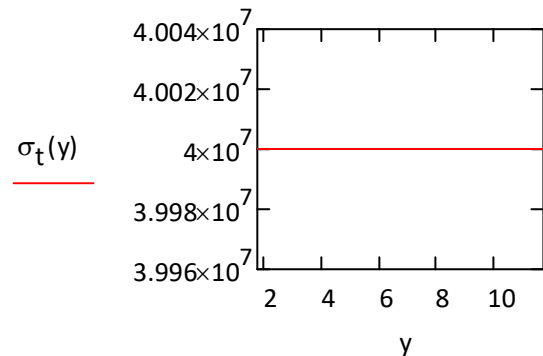
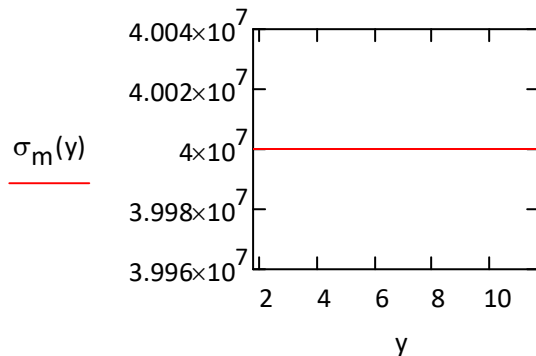
$$\sigma_m\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 40 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y_2) = 40 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(0) = 40 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 40 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_2) = 40 \cdot \text{MPa}$$



Обрати внимание: напряжения одинаковы по всей длине сосуда, так получилось потому что мы не учитываем вес самого сосуда

После построения эпюр стало ясно, что самое напряженное состояние в сечении y_1 месте пересечения конической и цилиндрической оболочек.

$$\sigma_1 := 191.617 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 := 186.125 \text{ MPa}$$

Мы так же можем рассчитать для этой точки радиальное напряжение, оно будет равно гидростатическому давлению воды в этой точке

$$\sigma_3 := \gamma \cdot (y_2 - y_1) + p_0 = 0.537 \cdot \text{MPa}$$

Мы нашли самое напряженное сечение в сосуде, теперь пора вспомнить, что давление газа мы выбрали условно. Сейчас нам надо пересчитать это сечение, взяв давление газа как неизвестное.

$$\text{Сечение } y_1 = 1.732 \text{ m}$$

Оболочка - конус

$$\beta = 60 \cdot \text{deg} \quad - \text{угол между осью } y \text{ и поверхностью}$$

$$\cos(\beta) = 0.5$$

$$\rho_t := \frac{y_1}{\cos(\beta)} = 3.464 \text{ m} \quad - \text{Радиус кривизны окружной поверхности}$$

$$\rho_m := \infty \quad - \text{Радиус кривизны меридианной поверхности}$$

Объем отсеченной части сосуда на уровне $y_1 = 1.732 \text{ m}$

$$V := \frac{1}{3} \pi y_1 \cdot (\rho_t)^2 = 21.766 \cdot \text{m}^3$$

Внутреннее давление в сосуде на уровне y_1

давление воды и газа

$$p(p_0) := p_0 + \gamma \cdot (y_2 - y_1)$$

Меридианные напряжения в оболочке

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

$$\sigma_m(p_0) := \frac{p(p_0) \cdot \pi \cdot \rho_t^2 + \gamma \cdot V}{2\pi \cdot \rho_t \cdot S \cdot \cos(\beta)}$$

Из уравнения Лапласа

$$\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{S}$$

Окружные напряжения в оболочке

$$\sigma_t(p_0) := \frac{p(p_0) \cdot \rho_t}{S}$$

Радиальные напряжения в оболочке

$$\sigma_r(p_0) := \gamma \cdot (y_2 - y_1) + p_0$$

Расчитаем давление газа используя 4-ую теорию прочности Мизеса

$$\sigma_{\text{э}}(p_0) := \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\sigma_m(p_0) - \sigma_t(p_0) \right)^2 + \left(\sigma_m(p_0) - \sigma_r(p_0) \right)^2 + \left(\sigma_t(p_0) - \sigma_r(p_0) \right)^2 \right]}$$

эквивалентное напряжение в сечении

Условие прочности: $\sigma_{\text{э}}(p_0) \leq [\sigma]$

Напишем функцию удовлетворяющее нашему условию только в нуле (почему-то Маткад смог решить уравнение только таким способом)

$$H(p_0) := \sigma_{\text{э}}(p_0) - [\sigma]$$

Найдем корень этого уравнения, он и будет являться искомым давлением газа

$$p_0 := \text{root}(H(p_0), p_0)$$

$$p_0 = 7.001 \cdot \text{bar}$$

Проверка

$$\sigma_{\text{э}}(p_0) = 150 \cdot \text{MPa} \quad \text{Условие прочности выполняется}$$

Теперь пересчитаем все напряжения в сосуде используя действительное давление газа

Определение окружных и меридианных напряжений сосуда

$$1) \quad 0 < y < y_1$$

Оболочка - конус

$$\beta = 60 \cdot \text{deg} \quad - \text{угол между осью } y \text{ и поверхностью}$$

$$\cos(\beta) = 0.5$$

$$\rho_t(y) := \frac{y}{\cos(\beta)} \quad - \text{Радиус кривизны окружной поверхности}$$

$$\rho_m := \infty \quad - \text{Радиус кривизны меридианной поверхности}$$

Объем отсеченной части сосуда на уровне y

$$V(y) := \frac{1}{3} \pi y \cdot (\rho_t(y))^2$$

Внутреннее давление в сосуде на уровне y

давление воды и газа

$$p(y) := p_0 + \gamma \cdot (y_2 - y)$$

Меридианные напряжения в оболочке

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

$$\sigma_m(y) := \frac{p(y) \cdot \pi \cdot \rho_t(y)^2 + \gamma \cdot V(y)}{2\pi \cdot \rho_t(y) \cdot S \cdot \cos(\beta)}$$

Из уравнения Лапласа

$$\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{S}$$

Окружные напряжения в оболочке

$$\sigma_t(y) := \frac{p(y) \cdot \rho_t(y)}{S}$$

Строим эпюры

$$\sigma_m(0.000001m) = 0 \cdot \text{MPa}$$

(мы не можем найти значение в точке 0 т.к. придется делить на 0, но при $y \rightarrow 0$, $\sigma_m \rightarrow 0$)

$$\sigma_m\left(\frac{y_1}{2}\right) = 73.895 \cdot \text{MPa}$$

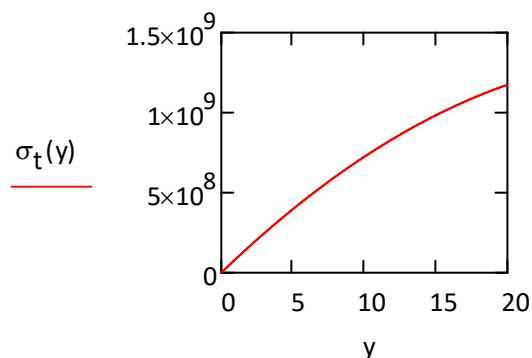
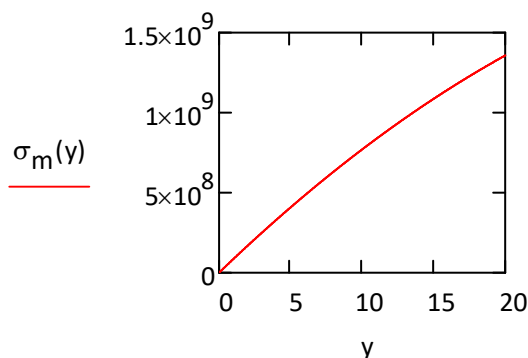
$$\sigma_m(y_1) = 146.417 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(0.000001m) = 0 \cdot \text{MPa}$$

(мы не можем найти значение в точке 0 т.к. придется делить на 0, но при $y \rightarrow 0$, $\sigma_m \rightarrow 0$)

$$\sigma_t\left(\frac{y_1}{2}\right) = 73.552 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_1) = 145.044 \cdot \text{MPa}$$



Обрати внимание: зависимость нелинейная

$$2) \quad y_1 < y < y_2$$

Оболочка - цилиндр

$$\rho_t := \frac{D_2}{2} \quad - \text{Радиус кривизны окружной поверхности}$$

НЕ ЗАВИСИТ ОТ ВЫСОТЫ СОСУДА

$$\rho_m := \infty \quad - \text{Радиус кривизны меридианной поверхности}$$

Объем отсеченной части сосуда на уровне y

$$V(y) := \pi (\rho_t)^2 \cdot (y - y_1) + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\rho_t)^2 \cdot a$$

Внутреннее давление в сосуде на уровне y

давление воды и газа

$$p(y) := p_0 + \gamma \cdot (y_2 - y)$$

Из уравнения Лапласа

$$\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{S}$$

Окружные напряжения в оболочке

$$\sigma_t(y) := \frac{p(y) \cdot \rho_t}{S}$$

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

Меридианные напряжения в оболочке

$$\sigma_m(y) := \frac{p(y) \cdot \pi \cdot \rho_t^2 + \gamma \cdot V(y)}{2\pi \cdot \rho_t \cdot S}$$

Строим эпюры

$$\sigma_m(y_1) = 63.4 \cdot \text{MPa}$$

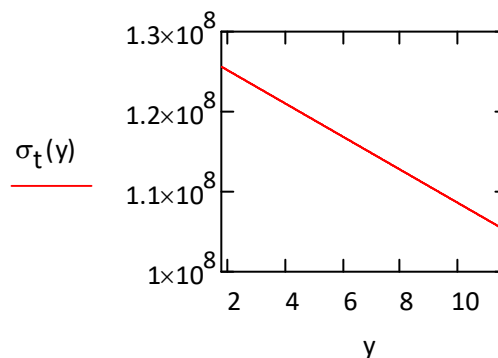
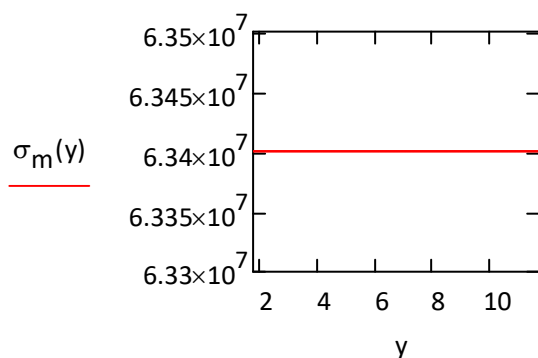
$$\sigma_t(y_1) = 125.611 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 63.4 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 115.314 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y_2) = 63.4 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_2) = 105.017 \cdot \text{MPa}$$



Обрати внимание: зависимость линейная

$$3) \quad y_2 < y < y_3$$

Оболочка - цилиндр

$$\rho_t := \frac{D1}{2} \quad - \text{Радиус кривизны окружной поверхности} \quad \text{НЕ ЗАВИСИТ ОТ ВЫСОТЫ СОСУДА}$$

$$\rho_m := \infty \quad - \text{Радиус кривизны меридианной поверхности}$$

Объем отсеченной части сосуда с водой

$$V := \pi \left(\frac{D1}{2} \right)^2 \cdot (y_2 - y_1) + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D1}{2} \right)^2 \cdot a \quad \text{НЕ ЗАВИСИТ ОТ ВЫСОТЫ СОСУДА}$$

Внутреннее давление в сосуде на уровне y ТОЛЬКО ДАВЛЕНИЕ ГАЗА

$$p := p_0 \quad \text{НЕ ЗАВИСИТ ОТ ВЫСОТЫ СОСУДА}$$

Из уравнения Лапласа $\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{S}$

Окружные напряжения в оболочке

$$\sigma_t(y) := \frac{p \cdot \rho_t}{S}$$

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

Меридианные напряжения в оболочке

$$\sigma_m(y) := \frac{p \cdot \pi \cdot \rho_t^2 + \gamma \cdot V}{2\pi \cdot \rho_t \cdot S}$$

Строим эпюры

$$\sigma_m(y_2) = 84.534 \cdot \text{MPa}$$

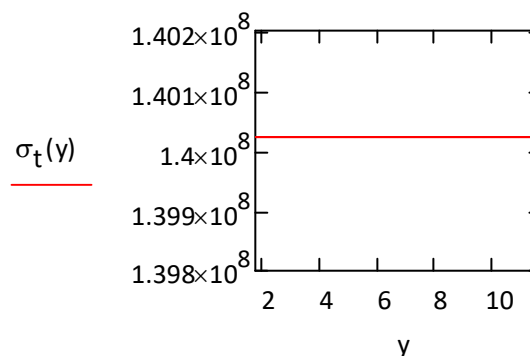
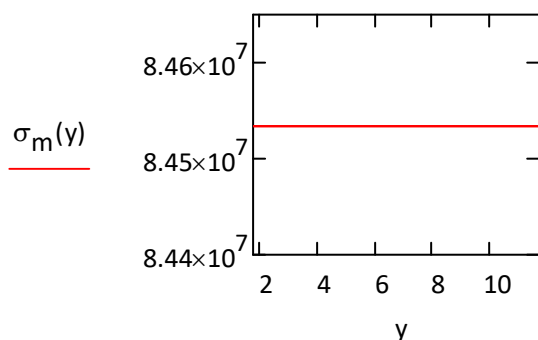
$$\sigma_t(y_2) = 140.022 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) = 84.534 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) = 140.022 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y_3) = 84.534 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_3) = 140.022 \cdot \text{MPa}$$



Обрати внимание: напряжения одинаковы по всей длине сосуда, так получилось потому что мы не учитываем вес самого сосуда

Дальше мы считать не можем т.к. не знаем силу реакций опорного кольца на уровне y_3 , чтобы обойти это ограничение будем считать оставшуюся часть сосуда сверху вниз.

$$4) \ 0 < y < y_4 - y_3$$

Оболочка - полусфера

$\rho_t := R1$ - Радиус кривизны окружной поверхности

$\rho_m := R1$ - Радиус кривизны меридианной поверхности

Внутреннее давление в сосуде на уровне y

только давление газа

$$p := p_0$$

не зависит от высоты сосуда

Из уравнения Лапласа $\sigma_t + \sigma_m = \frac{p \cdot R}{S}$

Газ создает симметричную нагрузку $\sigma_t = \sigma_m = \sigma$

Тогда преобразуем уравнение Лапласа $\sigma_t = \sigma_m = \frac{p \cdot R}{2S}$

Окружные напряжения в оболочке $\sigma_t(y) := \frac{p \cdot R1}{2S}$

Меридиональные напряжения в оболочке $\sigma_m(y) := \frac{p \cdot R1}{2S}$

Строим эпюры

$$\sigma_m(0) = 70.011 \cdot \text{MPa}$$

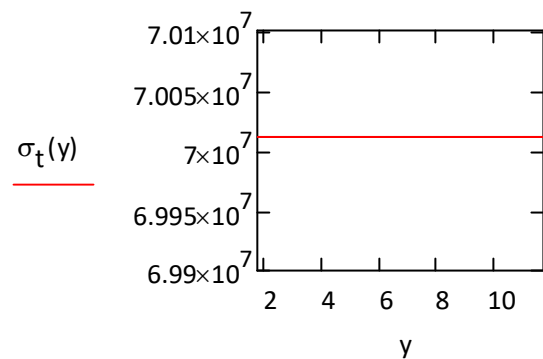
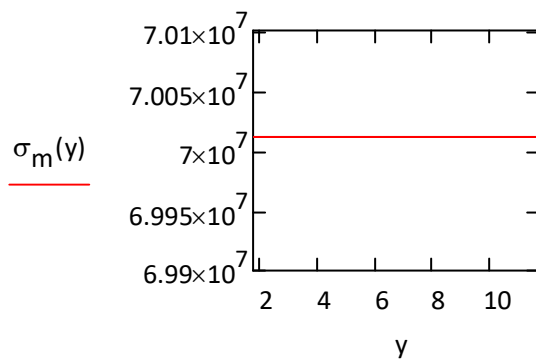
$$\sigma_t(0) = 70.011 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 70.011 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 70.011 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y_2) = 70.011 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_2) = 70.011 \cdot \text{MPa}$$



Обрати внимание: напряжения одинаковы по всей длине сосуда, так получилось потому что мы не учитываем вес самого сосуда

На этом решение закончено, теперь будем строить эпюры в масштабе.

$$\frac{23.464\text{M}}{y4}$$

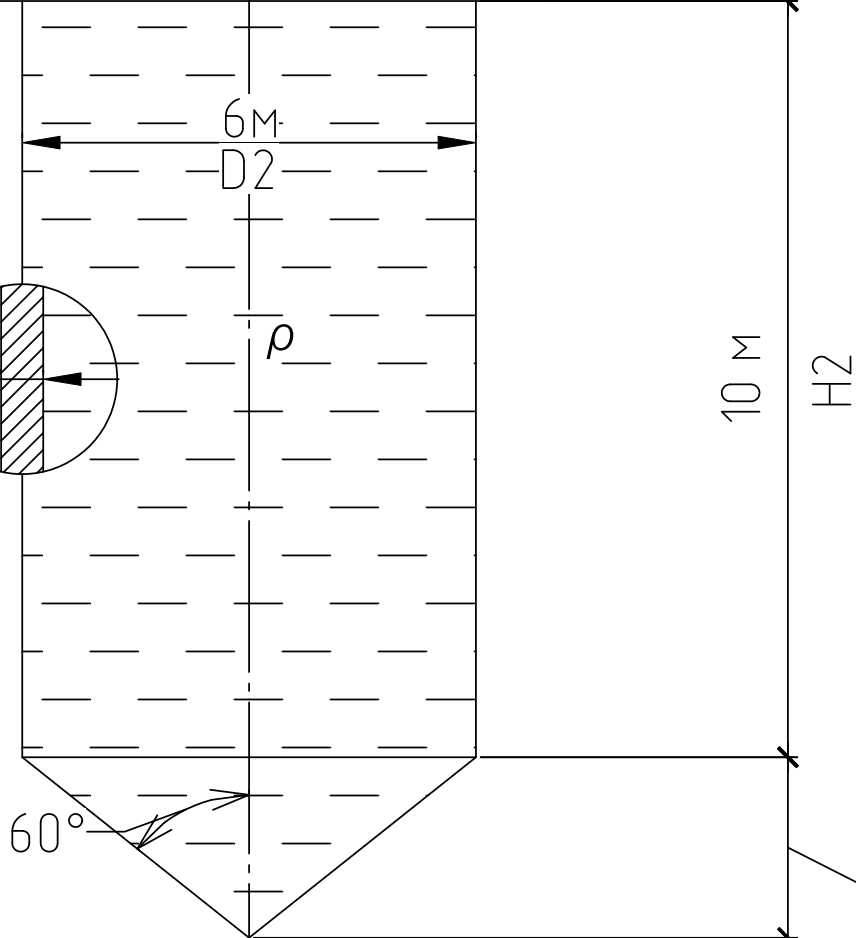
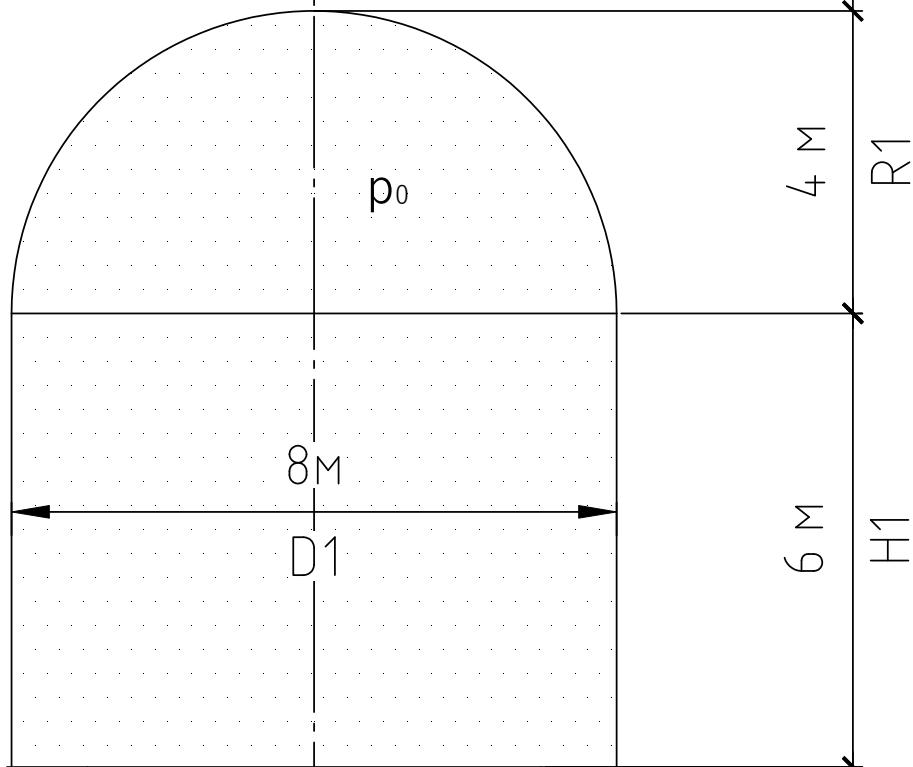
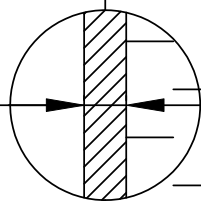
$$\frac{19.464\text{M}}{y3}$$

$$\frac{13.464\text{M}}{y2}$$

$$\frac{3.464\text{M}}{y1}$$

$$\frac{0\text{M}}{0}$$

20MM



60°

$$\frac{3.464\text{M}}{a}$$

