Задача № 15 Вариант № 2

Дано:

$p_0 := 0.2MPa$ $\rho := 0.80 \cdot 10^3 \cdot \frac{kg}{m^3}$ $a := 2m$ $R := 1.5m$ $z_0 := 2m$

$[\,\sigma\,] := 100MPa$ $b := 9m$ $D := 2R = 3\,m$ Критерий прочности Сен-Венана

Найти: h — толщина стенки сосуда

Построить эпюры напряжений

Решение:

Для удобства обозначим новые переменные и некоторые константы:

$$g = 9.807\,\frac{m}{s^2}$$ — ускорение свободного падения

Сечения сосуда:

$$y_1 := z_0 = 2\,m$$

$$y_2 := z_0 + \frac{b}{2} = 6.5\,m$$

$$y_3 := z_0 + \frac{b}{2} + a = 8.5\,m$$

нужна только для удобства, вы в решениях используете их длины, очень легко запутаться, проще и надежнее использовать именно сечения

Упрощения: не учитываем собственный вес сосуда

условное напряжение - напряжение домноженное на толщину сосуда, позволяет определить самое напряженное сечение в сосуде

Определение условных окружных и меридианных напряжений сосуда :

$$\rho_t = \rho_\theta$$ — это одно и то же, допускается использовать оба варианта написания, я использую первый вариант, т.к. он читабельней

1) $0 < z < y_1$

Оболочка - цилиндр

$\rho_t := R$ — Радиус кривизны окружной поверхности

$\rho_m := \infty$ — Радиус кривизны меридианной поверхности

это параметры оболочки

Объем отсеченной части сосуда на уровне z

нужен для расчета

$$V(z) := \pi(R)^2 \cdot z$$ объем цилиндра от высоты

Внутреннее давление на уровне z

$$p(z) := p_0 + \rho \cdot g \cdot (y_1 - z)$$ давление воды и газа

Уравнение Лапласа: $$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h}$$ $\rho_m := \infty$ $\rho_t := R$

Из уравнения Лапласа $$\sigma_t = \frac{p \cdot R}{h}$$

Окружные напряжения в оболочке

$$h\sigma_t(z) := p(z) \cdot R \quad = \quad \left[p_0 + \rho \cdot g \cdot (y_1 - z)\right] \cdot R$$

все напряжения домножены на h, так как она неизвестна

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

Меридианные напряжения в оболочке

$$h\sigma_m(z) := \frac{p(z)\cdot\pi\cdot R^2 + \rho\cdot g\cdot V(z)}{2\pi R} = \frac{\left[p_0 + \rho\cdot g\cdot(y_1 - z)\right]\cdot\left(\pi\cdot R^2\right) + \rho\cdot g\cdot\left[\pi(R)^2\cdot z\right]}{2\pi R}$$

$$h\sigma_m(0) = 0.162\cdot MPa\cdot m \qquad h\sigma_t(0) = 0.324\cdot MPa\cdot m$$

$$h\sigma_m\left(\frac{y_1}{2}\right) = 0.162\cdot MPa\cdot m \qquad h\sigma_t\left(\frac{y_1}{2}\right) = 0.312\cdot MPa\cdot m$$

$$h\sigma_m(y_1) = 0.162\cdot MPa\cdot m \qquad h\sigma_t(y_1) = 0.3\cdot MPa\cdot m$$

Линейная зависимость

Дальше мы считать не можем т.к. не знаем силу реакций опорного кольца на уровне y_1, чтобы обойти это ограничение будем считать оставшуюся часть сосуда сверху вниз.

Ввиду того, что сверху вниз считать предстоит несколько составных частей сосуда, лучше изменить некоторые переменные высоты, чтобы не запутаться.

Сечения сосуда: $y_3 := 0m$

$$y_2 := a = 2m$$

$$y_1 := a + \frac{b}{2} = 6.5m$$

2) $y_3 < z < y_2$

Оболочка - конус

$$\beta := \operatorname{atan}\left(\frac{R}{a}\right) = 36.87\cdot deg$$ — угол между осью y и поверхностью

$$\cos(\beta) = 0.8$$

$$\rho_t(z) := \frac{z\cdot\tan(\beta)}{\cos(\beta)}$$ — Радиус кривизны окружной поверхности

$$\rho_m := \infty$$ — Радиус кривизны меридианной поверхности

$$R_y(z) := z\cdot\tan(\beta)$$ — Радиус сечения конуса на высоте z

Внутреннее давление в сосуде на уровне y — только давление газа

$$p(z) := p_0$$

Меридианные напряжения в оболочке

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

$$h\sigma_m(z) := \frac{p_0}{2}\cdot\frac{R_y(z)}{\cos(\beta)} = \frac{p_0}{2}\cdot\frac{z\cdot\tan(\beta)}{\cos(\beta)}$$

Из уравнения Лапласа $\sigma_t = \frac{p\cdot\rho_t}{h}$

Окружные напряжения в оболочке

$$h\sigma_t(z) := p_0\cdot\rho_t(z) = \frac{p_0\cdot z\cdot\tan(\beta)}{\cos(\beta)}$$

Строим эпюры :

$h\sigma_m(y_3) = 0 \cdot MPa \cdot m$

$h\sigma_m\left(\frac{y_2}{2}\right) = 0.094 \cdot MPa \cdot m$

$h\sigma_m(y_2) = 0.188 \cdot MPa \cdot m$

$h\sigma_t(y_3) = 0 \cdot MPa \cdot m$

$h\sigma_t\left(\frac{y_2}{2}\right) = 0.188 \cdot MPa \cdot m$

$h\sigma_t(y_2) = 0.375 \cdot MPa \cdot m$

Линейная зависимость

3) $y_2 < y < y_1$

Оболочка - цилиндр

$\rho_t := R$ — Радиус кривизны окружной поверхности — не зависит от высоты сосуда

$\rho_m := \infty$ — Радиус кривизны меридианной поверхности — не зависит от высоты сосуда

Внутреннее давление на уровне y — только давление газа

$$p(y) := p_0$$

Из уравнения Лапласа $\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{h}$

Окружные напряжения в оболочке — все напряжения домножены на h, так как она неизвестна

$$h\sigma_t(y) := p(y) \cdot \rho_t$$

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

Меридианные напряжения в оболочке

$$h\sigma_m(y) := \frac{p(y) \cdot \pi \cdot \rho_t^{\,2}}{2\pi\,\rho_t}$$

Строим эпюры :

$h\sigma_m(y_2) = 0.15 \cdot MPa \cdot m$

$h\sigma_m\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0.15 \cdot MPa \cdot m$

$h\sigma_m(y_1) = 0.15 \cdot MPa \cdot m$

$h\sigma_t(y_2) = 0.3 \cdot MPa \cdot m$

$h\sigma_t\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0.3 \cdot MPa \cdot m$

$h\sigma_t(y_1) = 0.3 \cdot MPa \cdot m$

Линейная зависимость

После построения эпюр стало ясно, что самое напряженное состояние в сечение y_2 месте пересечения конической и цилиндрической оболочек.

$h\sigma_1 := 0.375 \ MPa \cdot m$

$h\sigma_2 := 0.188 \ MPa \cdot m$

В безмоментной теории оболочек принято принебрегать радиальным напряжением, т.к. его порядок в уравнении Лапласса много меньше двух других главных напряжений, и рассматривать напряжекние как плоское.

$\sigma_3 := 0$

Тогда по 3-й теории прочности (критерий пластичности Треска – Сен-Венана)

$$\sigma_{экв} = \frac{h\sigma_1 - \sigma_3}{h} \le [\sigma]$$

$$h \ge \frac{h\sigma_1 - \sigma_3}{[\sigma]}$$

$$h := \frac{h\sigma_1 - \sigma_3}{[\sigma]} = 3.750 \cdot mm$$

Из ГОСТа 6636-69 допустимо использовать такую толщину.

Сопоставим результаты расчета с расчетом по соответствующим формулам ГОСТ 14249-89 «Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность»

Используем формулу для конуса

$$h = \frac{p \cdot R}{(\phi \cdot \sigma - 0.5p)\cos(\alpha)} + C = \frac{p \cdot D}{2\sigma \cdot \cos(\alpha)}$$

где $p := p_0 = 200 \cdot kPa$

$$h := \frac{p \cdot D}{2[\sigma] \cdot \cos(\beta)} = 3.75 \cdot mm$$

Различие в результате при разных способах расчета составляет

$$\Delta := \frac{3.750mm - 3.75\ mm}{\left(\frac{3.750mm + 3.75\ mm}{2}\right)} = 0 \cdot \%$$

Теперь найдем действительные напряжения в сосуде и построим эпюры

$$h \equiv 3.750mm$$

$$\sigma_m(y) := \frac{h\sigma_m(y)}{h} \qquad \sigma_t(y) := \frac{h\sigma_t(y)}{h}$$

1) $0 < y < y_1$

$\sigma_m(0) = 43.138 \cdot MPa$ $\qquad$ $\sigma_t(0) = 86.276 \cdot MPa$

$\sigma_m\left(\frac{y_1}{2}\right) = 43.138 \cdot MPa$ $\qquad$ $\sigma_t\left(\frac{y_1}{2}\right) = 83.138 \cdot MPa$

$\sigma_m(y_1) = 43.138 \cdot MPa$ $\qquad$ $\sigma_t(y_1) = 80 \cdot MPa$

2) $y_3 < y < y_2$

$\sigma_m(y_3) = 0 \cdot MPa$ $\qquad$ $\sigma_t(y_3) = 0 \cdot MPa$

$\sigma_m\left(\frac{y_2}{2}\right) = 25 \cdot MPa$ $\qquad$ $\sigma_t\left(\frac{y_2}{2}\right) = 50 \cdot MPa$

$\sigma_m(y_2) = 50 \cdot MPa$ $\qquad$ $\sigma_t(y_2) = 100 \cdot MPa$

3) $y_2 < y < y_1$

$$\sigma_m(y_2) = 40 \cdot MPa \qquad \sigma_t(y_2) = 80 \cdot MPa$$

$$\sigma_m\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 40 \cdot MPa \qquad \sigma_t\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 80 \cdot MPa$$

$$\sigma_m(y_1) = 40 \cdot MPa \qquad \sigma_t(y_1) = 80 \cdot MPa$$

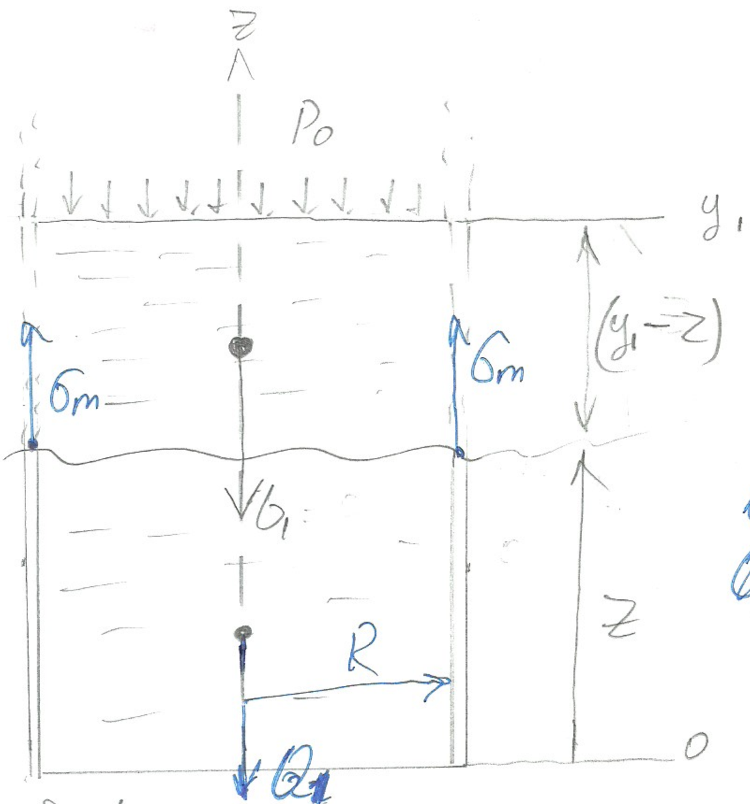


Рис 1. отсеченная часть цилиндра

~~внешнее давление на сечение~~
~~$Q_2 = \sigma_1\cdot\pi R^2 + P_0\cdot\pi R^2$~~

$\sigma_1 = \rho\cdot g\cdot(y_1 - z)$ — ~~да~~ гидростатическое давление верхнего слоя жидкости

P_0 — давление газа

$Q_1 = \rho\cdot g\cdot\pi R^2\cdot z$ — вес воды в отсеченной части сосуда

σ_m — напряжение

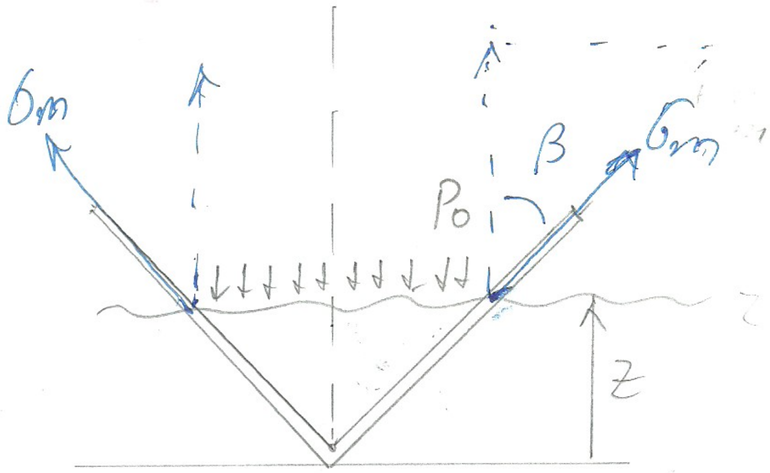
составлеем ур-ние баланса.

$$\sigma_m\cdot(2\pi R\cdot h) - Q_1 - \sigma_1\cdot\cancel{2}\pi R^2 - P_0\cdot\pi R^2 = 0$$

площадь сечения оболочки

внутреннее давление $p(z)\cdot\pi R^2$

$$h\cdot\sigma_m = \frac{Q_1 + \sigma_1\pi R^2 + P_0\pi R^2}{2\pi R}$$



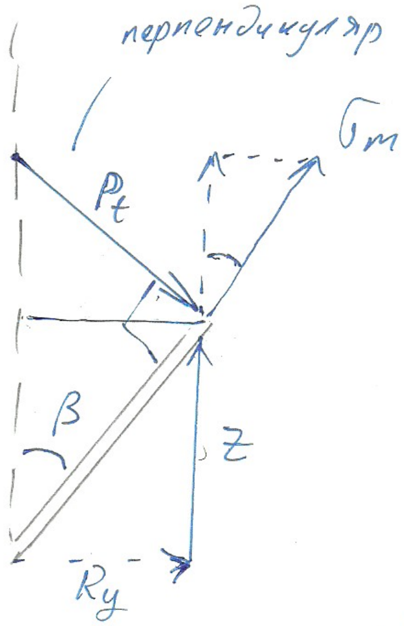


рис 2. отсечённая часть конуса.

P_0 – давление газа

σ_m – напряжение

ρ_t – радиус кривизны окр. поверхн (зависит от z)

$$\rho_t = \left(\frac{z}{\cos\beta}\right)\cdot tg\,\beta = \frac{z\cdot\sin\beta}{\cos^2\beta}$$

$$\rho_t = \frac{R_y}{\cos\beta}$$

$$R_y = z\cdot tg\,\beta$$

Составляем ур-ние баланса:

$$\sigma_m\cdot\underbrace{(2\pi R_y\cdot h)}_{\text{площадь сечения оболочки}}\cdot\cos\beta - P_0\cdot\pi R_y^2 = 0$$

$$h\sigma_m = \frac{P_0\pi R_y^2}{2\pi R_y\cos\beta} = \frac{P_0 R_y}{2\cos\beta}$$

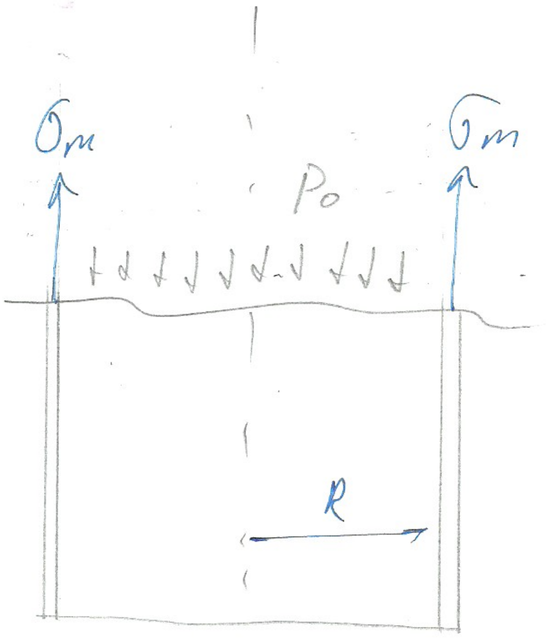


рис 3. отсечённая часть цилиндра

p_0 - давление газа

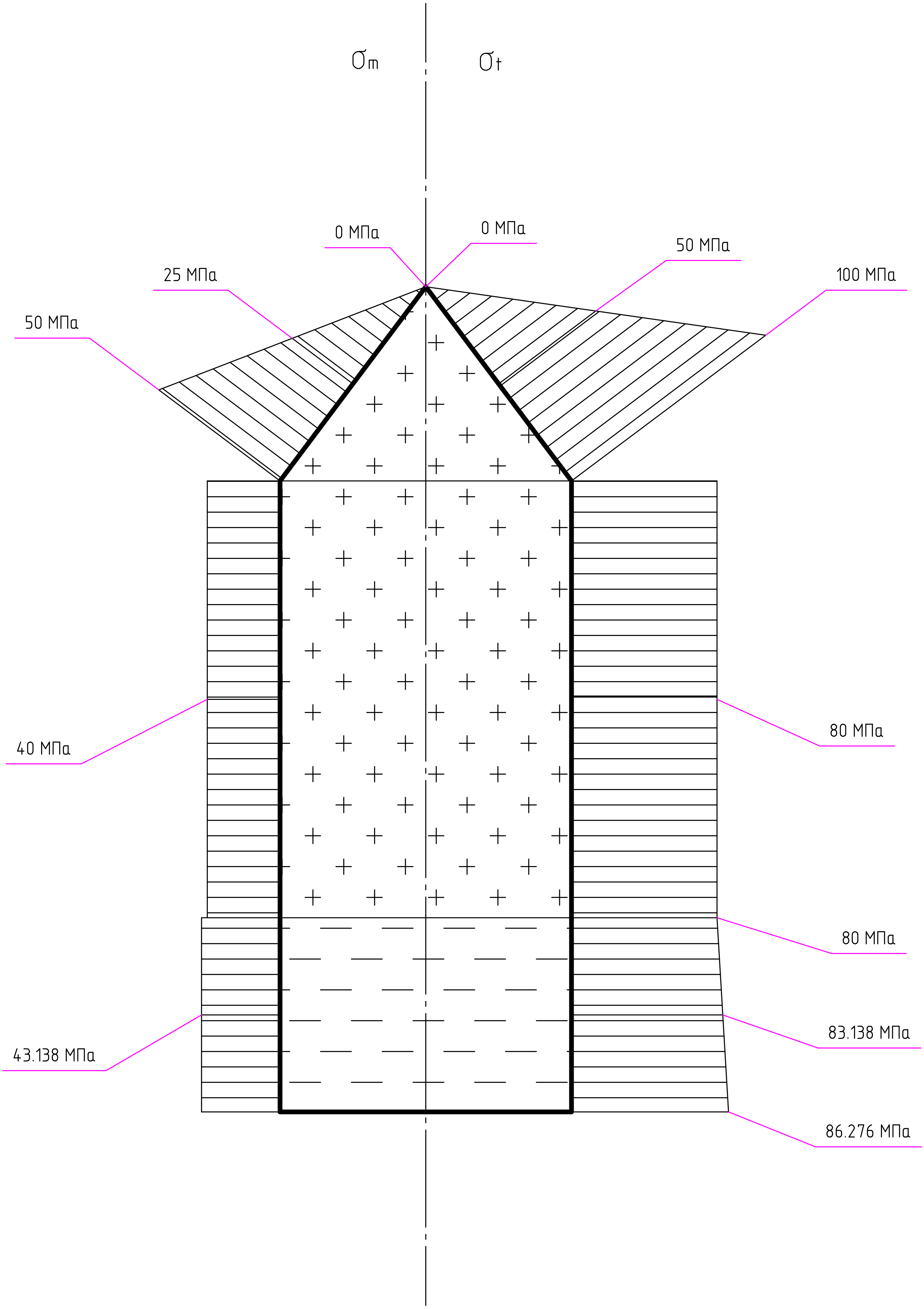
ур-ние баланса

$$\sigma_m \cdot (2\pi R \cdot h) - p_0 \cdot \pi R^2 = 0$$

площадь сечения оболочки

$$h\sigma_m = \frac{p_0 \pi R^2}{2\pi R} = \frac{p_0 R}{2}$$

$$\sigma_t = \frac{p_0 \cdot R}{h} \rightarrow \quad h\sigma_t = p_0 R$$



σm
σt
0 МПа
0 МПа
50 МПа
25 МПа
100 МПа
50 МПа
40 МПа
80 МПа
80 МПа
83.138 МПа
43.138 МПа
86.276 МПа