

Задача № 15 Вариант № 5

Дано:

$$p_0 := 0.25 \text{ МПа} \quad \rho := 0.80 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad a := 2 \text{ м} \quad R := 1 \text{ м} \quad z_0 := 2 \text{ м}$$

$$[\sigma] := 100 \text{ МПа} \quad b := 4 \text{ м} \quad D := 2R = 2 \text{ м} \quad \text{Критерий прочности Сен-Венана}$$

Найти: h — толщина стенки сосуда

Построить эпюры напряжений

Решение:

Для удобства обозначим новые переменные и некоторые константы:

$$g = 9.807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{— ускорение свободного падения}$$

Сечения сосуда:

$$y_1 := \frac{R}{2} = 0.5 \text{ м}$$

$$y_2 := z_0 + \frac{R}{2} = 2.5 \text{ м}$$

$$y_3 := b + \frac{R}{2} = 4.5 \text{ м}$$

нужна только для удобства, вы в решениях используете их длины, очень легко запутаться, проще и надежнее использовать именно сечения

Упрощения: не учитываем собственный вес сосуда

условное напряжение - напряжение, умноженное на толщину сосуда, позволяет определить самое напряженное сечение в сосуда

Определение условных окружных и меридианных напряжений сосуда :

$$\rho_t = \rho_\theta \quad \text{— это одно и то же, допускается использовать оба варианта написания, я использую первый вариант, т.к. он читабельней}$$

1) $0 < z < y_1$

Оболочка - конус

$$\beta := \text{atan}\left(\frac{2R}{R}\right) = 63.435 \cdot \text{deg} \quad \text{— угол между осью } y \text{ и поверхностью}$$

$$\cos(\beta) = 0.447$$

$$\rho_t(z) := \frac{z \cdot \tan(\beta)}{\cos(\beta)} \quad \text{— Радиус кривизны окружной поверхности}$$

$$\rho_m := \infty \quad \text{— Радиус кривизны меридианной поверхности}$$

$$R_y(z) := z \cdot \tan(\beta) \quad \text{— Радиус сечения конуса на высоте } z$$

Внутреннее давление в сосуда на уровне y

$$p(z) := p_0 + \rho \cdot g \cdot (y_2 - z) \quad \text{давление воды и газа}$$

Вес жидкости в отсеченной части сосуда на уровне z

$$Q(z) := \rho \cdot g \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R_y(z)^2 \cdot z$$

Меридианные напряжения в оболочке

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

$$h\sigma_m(z) := \frac{Q(z) + p(z) \cdot \pi R_y(z)^2}{2\pi R_y(z)}$$

развернутое уравнение смотри в конце

Из уравнения Лапласа $\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{h}$

Окружные напряжения в оболочке

$$h\sigma_t(z) := p(z) \cdot \rho_t(z) = \frac{p(z) \cdot z \cdot \tan(\beta)}{\cos(\beta)}$$

Строим эпюры :

$$h\sigma_m(0.00001m) = 0 \cdot \text{MPa} \cdot m$$

$$h\sigma_t(0) = 0 \cdot \text{MPa} \cdot m$$

$$h\sigma_m\left(\frac{y_1}{2}\right) = 0.067 \cdot \text{MPa} \cdot m$$

$$h\sigma_t\left(\frac{y_1}{2}\right) = 0.299 \cdot \text{MPa} \cdot m$$

$$h\sigma_m(y_1) = 0.133 \cdot \text{MPa} \cdot m$$

$$h\sigma_t(y_1) = 0.594 \cdot \text{MPa} \cdot m$$

Линейная зависимость

Дальше мы считать не можем т.к. не знаем силу реакций опорного кольца на уровне y_1 , чтобы обойти это ограничение будем считать оставшуюся часть сосуда сверху вниз.

Ввиду того, что сверху вниз считать предстоит несколько составных частей сосуда, лучше изменить некоторые переменные высоты, чтобы не запутаться.

Сечения сосуда: $y_3 := 0m$

$$y_2 := b - z_0 = 2m$$

$$y_1 := b = 4m$$

$$2) \quad y_3 < z < y_2$$

Оболочка - цилиндр

$\rho_t := R$ — Радиус кривизны окружной поверхности

не зависит от высоты сосуда

$\rho_m := \infty$ — Радиус кривизны меридианной поверхности

не зависит от высоты сосуда

Внутреннее давление на уровне y

только давление газа

$$p(z) := p_0$$

Из уравнения Лапласа $\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{h}$

Окружные напряжения в оболочке

все напряжения домножены на h ,
так как она неизвестна

$$h\sigma_t(z) := p(z) \cdot \rho_t$$

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

Меридианные напряжения в оболочке

$$h\sigma_m(z) := \frac{p(z) \cdot \pi \cdot \rho_t^2}{2\pi \rho_t}$$

Строим эпюры :

$$h\sigma_m(y_3) = 0.125 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

$$h\sigma_t(y_3) = 0.25 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

$$h\sigma_m\left(\frac{y_3 + y_2}{2}\right) = 0.125 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

$$h\sigma_t\left(\frac{y_3 + y_2}{2}\right) = 0.25 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

$$h\sigma_m(y_2) = 0.125 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

$$h\sigma_t(y_2) = 0.25 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

Линейная зависимость

3) $y_2 < z < y_1$

Оболочка - цилиндр

$\rho_t := R$ — Радиус кривизны окружной поверхности

не зависит от высоты сосуда

$\rho_m := \infty$ — Радиус кривизны меридианной поверхности

не зависит от высоты сосуда

Внутреннее давление на уровне y

давление газа и жидкости

$$p(z) := p_0 - \rho \cdot g \cdot (z - y_2)$$

Из уравнения Лапласа $\sigma_t = \frac{p \cdot \rho_t}{h}$

Окружные напряжения в оболочке

все напряжения домножены на h ,
так как она неизвестна

$$h\sigma_t(z) := p(z) \cdot R$$

Из условия равновесия нижней отсеченной части сосуда

Меридианные напряжения в оболочке

$$h\sigma_m(z) := \frac{p(z) \cdot \pi \cdot R^2 + \rho \cdot g \cdot \pi R^2 \cdot (z - y_2)}{2\pi R}$$

Строим эпюры :

$$h\sigma_m(y_2) = 0.125 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

$$h\sigma_t(y_2) = 0.25 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

$$h\sigma_m\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0.125 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

$$h\sigma_t\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0.242 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

$$h\sigma_m(y_1) = 0.125 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

$$h\sigma_t(y_1) = 0.234 \cdot \text{МПа} \cdot \text{м}$$

Линейная зависимость

После построения эпюр стало ясно, что самое напряженное состояние в сечении y_1 месте пересечения конической и цилиндрической оболочек.

$$h\sigma_1 := 0.594 \text{ МПа} \cdot \text{м}$$

$$h\sigma_2 := 0.133 \text{ МПа} \cdot \text{м}$$

В безмоментной теории оболочек принято пренебрегать радиальным напряжением, т.к. его порядок в

уравнении Лапласа много меньше двух других главных напряжений, и рассматривать напряженное состояние как плоское.

$$\sigma_3 := 0$$

Тогда по 3-й теории прочности (критерий пластичности Треска – Сен-Венана)

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{h\sigma_1 - \sigma_3}{h} \leq [\sigma]$$

$$h \geq \frac{h\sigma_1 - \sigma_3}{[\sigma]}$$

$$h := \frac{h\sigma_1 - \sigma_3}{[\sigma]} = 5.940 \cdot \text{mm}$$

Из ГОСТа 6636-69 допустимо использовать такую толщину.

Сопоставим результаты расчета с расчетом по соответствующим формулам ГОСТ 14249-89 «Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность»

Используем формулу для конуса

$$h = \frac{p \cdot R}{(\phi \cdot \sigma - 0.5p) \cos(\alpha)} + C = \frac{p \cdot D}{2\sigma \cdot \cos(\alpha)}$$

$$\text{где } p := p_0 + \rho \cdot g \cdot z_0 = 265.691 \cdot \text{kPa}$$

$$h := \frac{p \cdot D}{2[\sigma] \cdot \cos(\beta)} = 5.941 \cdot \text{mm}$$

Различие в результате при разных способах расчета составляет

$$\Delta := \frac{5.941 \cdot \text{mm} - 5.940 \cdot \text{mm}}{\left(\frac{5.941 \text{mm} + 5.940 \cdot \text{mm}}{2} \right)} = 0.017 \cdot \%$$

Теперь найдем действительные напряжения в сосуде и построим эпюры

$$h \equiv 5.940 \text{mm}$$

$$\sigma_m(y) := \frac{h\sigma_m(y)}{h}$$

$$1) \quad 0 < y < y_1$$

$$\sigma_m(0.00001m) = 0 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m\left(\frac{y_1}{2}\right) = 11.292 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y_1) = 22.475 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y) := \frac{h\sigma_m(y)}{h}$$

$$2) \quad y_3 < z < y_2$$

$$\sigma_m(y_3) = 21.044 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m\left(\frac{y_3 + y_2}{2}\right) = 21.044 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y_2) = 21.044 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y) := \frac{h\sigma_m(y)}{h}$$

$$3) \quad y_2 < y < y_1$$

$$\sigma_m(y_2) = 21.044 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 21.044 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_m(y_1) = 21.044 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y) := \frac{h\sigma_t(y)}{h}$$

$$\sigma_t(0) = 0 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t\left(\frac{y_1}{2}\right) = 50.378 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_1) = 100.017 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y) := \frac{h\sigma_t(y)}{h}$$

$$\sigma_t(y_3) = 42.088 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t\left(\frac{y_3 + y_2}{2}\right) = 42.088 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_2) = 42.088 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y) := \frac{h\sigma_t(y)}{h}$$

$$\sigma_t(y_2) = 42.088 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 40.767 \cdot \text{MPa}$$

$$\sigma_t(y_1) = 39.446 \cdot \text{MPa}$$

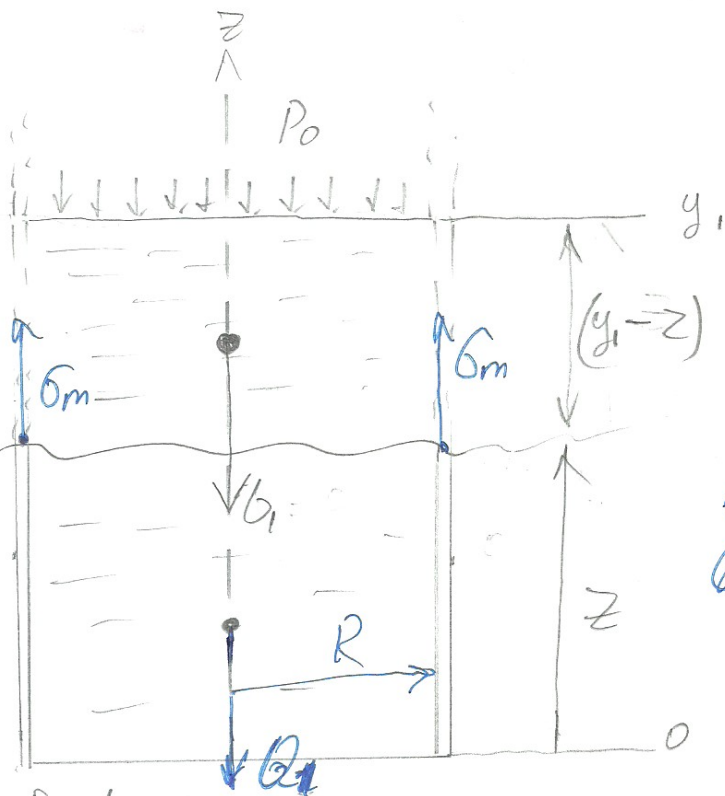


Рис 1. Отсеченная часть цилиндра

$G_1 = \rho \cdot g \cdot (y_1 - z) \cdot \pi R^2$ - вес жидкости

внешнее давление на средине
 $Q_2 = G_1 \cdot 2\pi R^2 + P_0 \cdot \pi R^2$

$G_1 = \rho \cdot g \cdot (y_1 - z) \cdot \pi R^2$ - гидростатическое давление верхнего слоя жидкости

P_0 - давление газа

$Q_1 = \rho \cdot g \cdot \pi R^2 \cdot z$ - вес воды в отсеченной части сосуда

G_m - напряжение
 составим уравнение баланса.

$$G_m \cdot (2\pi R \cdot h) - Q_1 - G_1 \cdot 2\pi R^2 - P_0 \cdot \pi R^2 = 0$$

площадь
 сечения
 оболочки

$$h \cdot G_m = \frac{Q_1 + G_1 \pi R^2 + P_0 \pi R^2}{2\pi R}$$

внутреннее
 давление
 $P(z) \cdot \pi R^2$

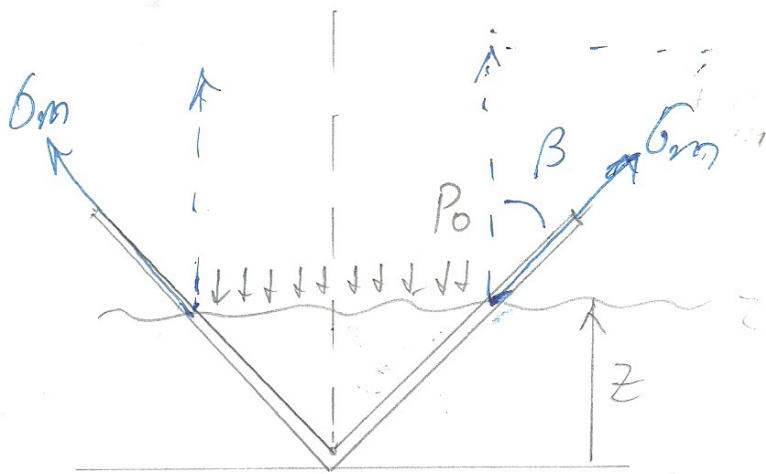


рис 2. отсечённая часть конуса.

p_0 - давление газа

σ_m - напряжение

R_t - радиус кривизны окр. поверхности (зависит от z)

и

$$R_t = \left(\frac{z}{\cos \beta} \right) \cdot \tan \beta = \frac{z \cdot \sin \beta}{\cos^2 \beta}$$

$$R_t = \frac{R_y}{\cos \beta}$$

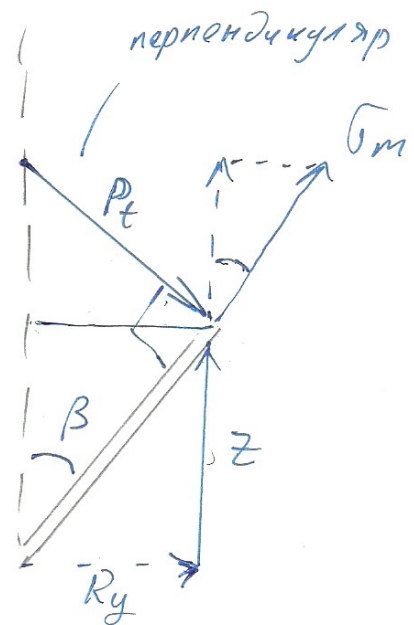
$$R_y = z \cdot \tan \beta$$

Составляем уравнение баланса:

$$\sigma_m \cdot (2\pi R_y \cdot h) \cdot \cos \beta - p_0 \cdot \pi R_y^2 = 0$$

площадь сечения оболочки

$$h \sigma_m = \frac{p_0 \pi R_y^2}{2\pi R_y \cos \beta} = \frac{p_0 R_y}{2 \cos \beta}$$



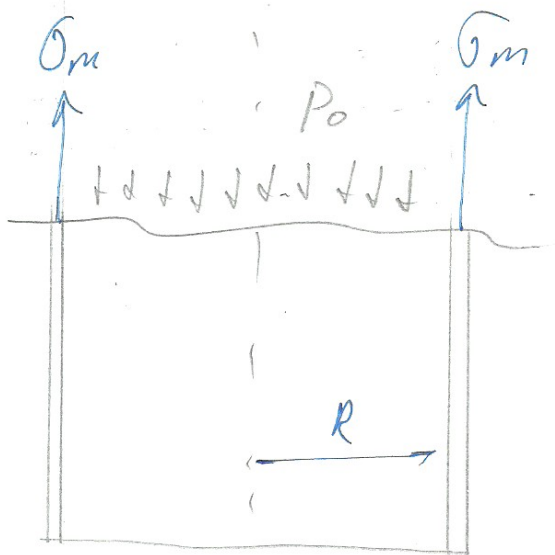


рис 3. Оси́йная часть
цилиндра

P_0 - Давление газа
уравнение баланса

$$\sigma_t \cdot (2\pi R \cdot h) - P_0 \cdot \pi R^2 = 0$$

площадь
сечения
оболочки

$$h \sigma_t = \frac{P_0 \pi R^2}{2\pi R} = \frac{P_0 R}{2}$$

$$\sigma_t = \frac{P_0 \cdot R}{h} \rightarrow h \sigma_t = P_0 R$$

σ_m

σ_t

