Задача 5.

Монета бросается до тех пор, пока два раза подряд она выпадет одной и той же стороной. Найти вероятность того, что опыт окончится до шестого бросания.

Решение

Событие A - опыт закончится до шестого бросания, тогда $\overline{A}$ - до шестого бросания будут чередоваться орел/решка.

$$P(\overline{A}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Ответ: $\frac{15}{16}$

Задача 15. Даны независимые случайные величины X и Y. Найти математическое ожидание произведения $X \bullet Y$ и суммы $(X+Y)$ дискретных случайных величин. Вычислить дисперсию $Д(X)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$.

15.

x_i	-0,5	0,5
p_i	0,3	0,7

y_i	3	4
q_i	0,2	0,8

Решение

Так как X и Y – независимые величины, то мы имеем

$$M(XY) = MX \cdot MY \qquad M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{DX}$$

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad MX^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$

$$MX = -0.15 + 0.35 = 0.2$$

$$MY = 0.6 + 3.2 = 3.8$$

$$M(XY) = 0.76$$

$$M(X+Y) = 4$$

$$MX^2 = 0.25 \cdot 0.3 + 0.25 \cdot 0.7 = 0.25$$

$$DX = 0.25 - 0.04 = 0.21$$

$$\sigma(X) = 0.458$$

Задача 25. Задана непрерывная случайная величина X функцией распределения $F(x)$. Требуется: 1) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$; 2) схематично построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$; 3) найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X; 4) найти вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^{3/2}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}\qquad \alpha=\frac{1}{4},\quad \beta=1.$$

Решение:

Плотность распределения будем искать как производную от функции распределения. $f(x)=F'(x)$

$$f(x)=\begin{cases}0\quad, & x\le 0,\ x>1\\ \dfrac{3\sqrt{x}}{2} & ,\ 0\le x\le 1\end{cases}$$

График $f(x)$

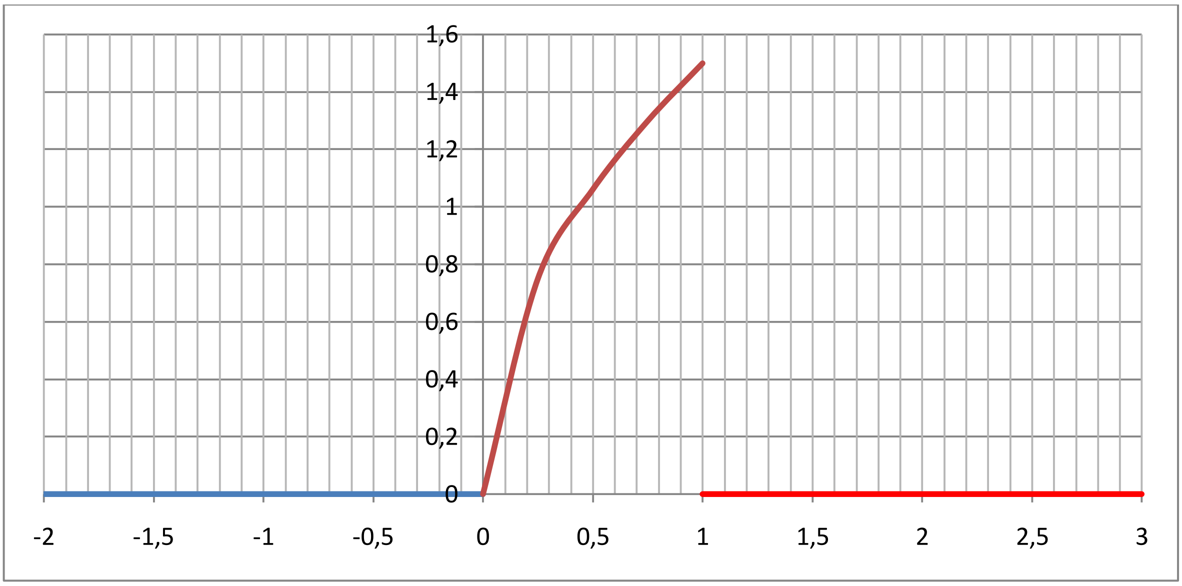
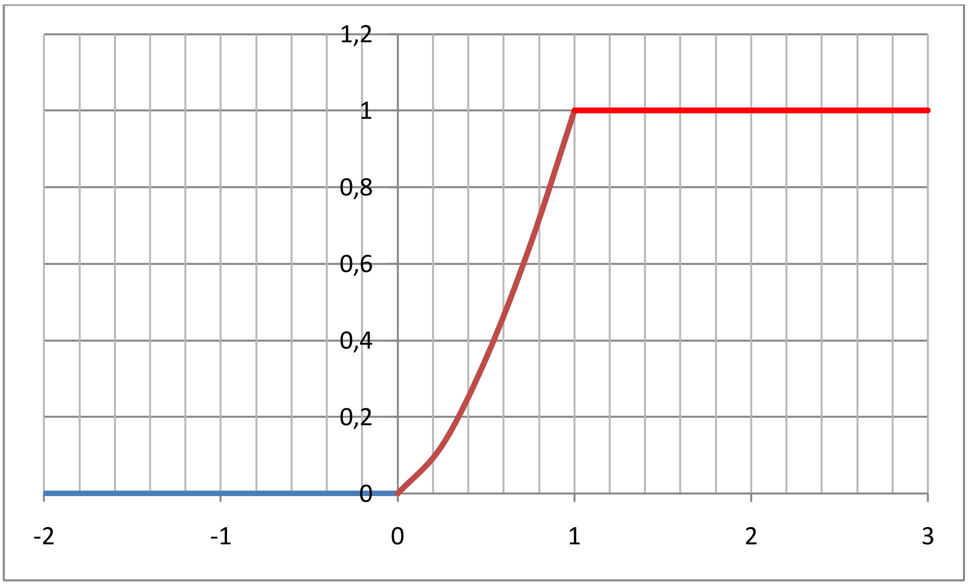


График $F(x)$



$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \qquad MX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{DX}$$

$$MX = \int_0^1 \frac{3x^{3/2}}{2} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{3}{5}$$

$$MX^2 = \int_0^1 \frac{3x^{5/2}}{2} dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot x^{7/2} \Big|_0^1 = \frac{3}{7}$$

$$DX = \frac{3}{7} - \frac{9}{25} = \frac{12}{175} \approx 0.069 \qquad \sigma(X) = 0.262$$

Вероятность попадания на отрезок $[\alpha; \beta]$ будем искать по формуле $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

$$P(\frac{1}{4} \le x < 1) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} = 0.875$$

Задача 35 Заданы среднеквадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X, выборочная средняя $\bar{x}_B$, объем выборки n. Требуется: 1) найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания *a* с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$; 2) принимая $a \cong \bar{x}_B$, написать теоретическую плотность распределения вероятностей и схематично построить ее график; 3) следуя правилу “трех сигм”, определить приближенно максимальное и минимальное значения случайной величины X; 4) оценить вероятность того, что X примет значение, превышающее β.

35. $\bar{x}_B = 11, \quad n = 64, \quad \sigma = 2, \quad \beta = 13.$

Решение:

Интервальную оценку математического ожидания будем искать по формуле

$$\overline{x_в} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$$

Параметр t будем находить как аргумент функции Лапласа, принимая

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0.475$$

$$t = 1.96$$

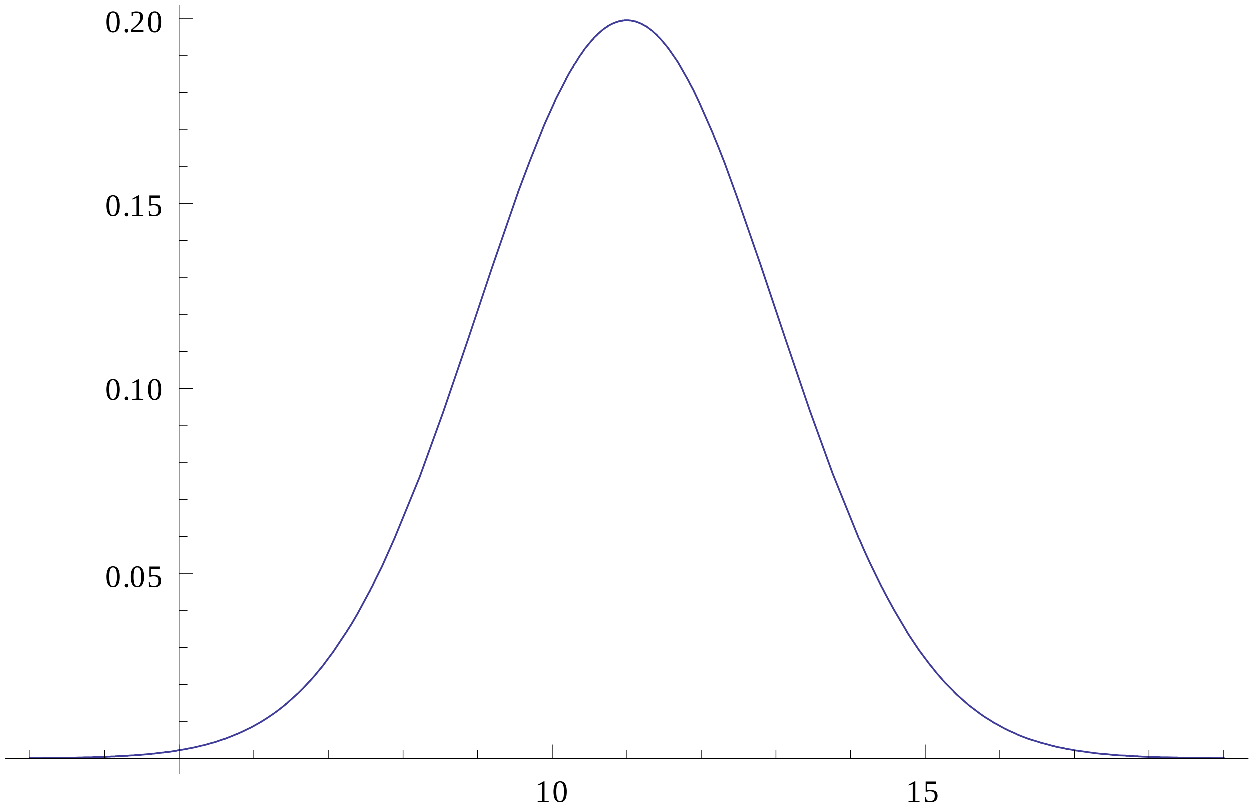
$$\overline{x_в} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = 11 - \frac{1.96 \cdot 2}{8} = 11 - 0.49 = 10.51$$

$$\overline{x_в} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = 11 + 0.49 = 11.49$$

$$10.51 < a < 11.49$$

Так как СВ X распределена нормально, то плотность распределения будет иметь вид $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x-11)^2}{8}}$$



По правилу “трех сигм” почти все значения СВ X лежат в промежутке $[a-3\sigma; a+3\sigma]$

$x_{\max} = 11+6 = 17$

$x_{\min} = 11-6 = 5$

Для нормального распределения функция распределения запишется $F(x) = 1+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$. Вероятность попадания на отрезок $[\alpha;\ \beta]$ будем искать по формуле $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

$$P(13 < x < \infty) = 2-1-\Phi\left(\frac{13-11}{2}\right) = 1-\Phi(1) = 1-0.3413 = 0.6587$$

Задача 45 Отдел технического контроля проверил n партий изделий и установил, что число X нестандартных изделий в одной партии имеет следующее эмпирическое распределение, сведенное в таблицу, где x_i - число нестандартных изделий в одной партии; n_i - число партий, содержащих x_i нестандартных изделий. Требуется при уровне значимости α проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена по закону Пуассона. Использовать критерий согласия Пирсона $\left(X^2\right)$.

45. n=350; б=0,01

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	139	118	61	22	6	2	2

Решение

Находим выборочную среднюю $\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i$

$\overline{x_в} = 1{,}006$

В качестве оценки параметра λ распределения Пуассона $P_n(x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$ выберем полученное значение выборочного среднего $\lambda = 1{,}006$

Расчет теоретических частот $np_i = 350P(x_i)$

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{M}\frac{\left(p_i - p_i^*\right)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^{M}\frac{\left(\nu_i - np_i\right)^2}{np_i}$$

x(i)	n(i)	P(xi)	np(i)
0	139	0,365821	128,0375
1	118	0,367911	128,7689
2	61	0,185059	64,77077
3	22	0,062057	21,7198
4	6	0,015607	5,462529
5	2	0,00314	1,099061
6	2	0,000527	0,184276

Малочисленные частоты $n \le 5$ можно объединить, и при этом объединить соответствующие им теоретические частоты

n(i)	np(i)	(n(i)-np(i))^2/np(i)
139	128,0374943	0,938604204
118	128,7689267	0,900603787

61	64,77077015	0,219523521
22	21,71979826	0,003614813
6	5,462529262	0,052882974
4	1,283336763	5,750835912
	СУММА	7,866065212

Получили $\chi_{набл} = 7.866$

Найдем число степеней свободы k=s-r-1

Так как проверяется гипотеза о распределении Пуассона r=1

s=6, так как после объединения малочисленных частот осталось 6 строк

k=4

$\chi_{кр} = 13{,}28$

Так как $\chi_{набл} < \chi_{кр}$ то гипотеза о том, что СВ X распределена по закону Пуассона принимается.

Задача 55. В процессе эксплуатации ЭВМ возникают неисправности (сбои). Поток сбоев считаем простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно *m*. Найти вероятности следующих событий: А – за *n* суток нет ни одного сбоя; В – за одни сутки будет хотя бы один сбой; С – за неделю произойдет не менее *k* сбоев.

55. $m = 1{,}5, \quad n = 4, \qquad k = 2.$

Решение задачи будем искать по формуле $P_t(k) = \frac{(mt)^k}{k!} e^{-mt}$

А – за 4 суток ни одного сбоя.

$P(A) = P_4(0) = e^{-6} \approx 0.0025$

В – за сутки хотя бы один сбой. Этому событию противоположно событие $\overline{B}$ - за сутки ни одного сбоя

$P(\overline{B}) = P_1(0) = e^{-1{,}5} \approx 0.224$

$P(B) = 1 - 0.224 = 0.776$

C – за неделю произошло не менее 2-х сбоев. Этому событию противоположно событие $\overline{C}$ - за неделю произошло 0, 1 сбоев

$$P(\overline{C}) = P_7(0) + P_7(1) = e^{-10,5}(1+10,5) \approx 0.000327$$
$$P(C) = 1 - 0.000327 = 0.999673$$

Задача 65. Задана матрица P_1 вероятностей перехода дискретной цепи Маркова из состояния i (i=1,2) в состояние j (j=1,2) за один шаг. Распределение вероятностей по состояниям в момент t=0 определяется вектором $\vec{q}$. Найти: 1) матрицу P_2 перехода из состояния i в состояние j за два шага;

2) распределение вероятностей по состояниям в момент t=2;

3) вероятность того, что в момент t=1 состоянием цепи будет i=2;

4) стационарное распределение.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, \qquad \vec{q} = (0,1;\ 0,9).$$

Решение.

1) матрица вероятностей перехода за два шага

$$P_2 = P_1^2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.32 & 0.68 \end{pmatrix}$$

2) распределение вероятностей по состояниям в момент $t=2$

$\vec{q}_2 = \vec{q} \cdot P_2$, так как из состояния в момент времени $t=0$ в состояние в момент времени $t=2$ система переходит за два шага.

$$\vec{q}_2 = \vec{q} \cdot P_2 = (0.1; 0.9) \cdot \begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.32 & 0.68 \end{pmatrix} = (0.356;\ 0.644)$$

3) Распределение вероятностей по состояниям в момент $t=1$

$$\vec{q}_1 = \vec{q} \cdot P_1 = (0.1; 0.9) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.26;\ 0.74)$$

Вероятность того, что в момент $t=1$ состоянием цепи будет $i=2$,

$p_2(t=1) = 0.74$.

4) Для определения стационарного распределения вероятностей составляем систему уравнений $p_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, p_i, \quad j = 1,..,n.$

$n = 2$ - число состояний системы.

$$\begin{cases} p_1 = p_{11}\, p_1 + p_{21}\, p_2, \\ p_2 = p_{12}\, p_1 + p_{22}\, p_2. \end{cases}$$

p_{ij} - элементы матрицы P_1.

Отбросив 2-е уравнение, добавим условие нормировки $p_1 + p_2 = 1$.

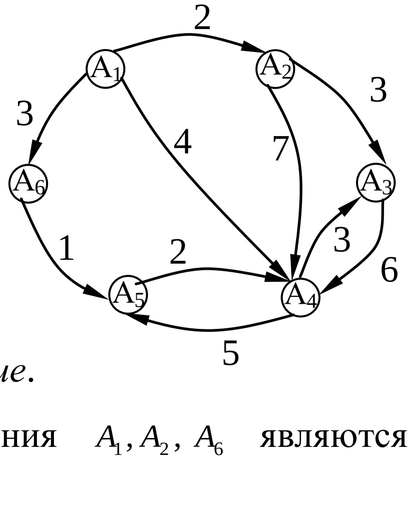
$$\begin{cases} p_1 = p_{11}\, p_1 + p_{21}\, p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} p_1 = 0.8 p_1 + 0.2 p_2 \\ \quad p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0.2 p_1 = 0.2 p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 p_1 = 2 p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_2 = p_1 \\ p_1 + p_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2} \\ p_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\bar{q}_{стац} = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) = (0.5;\ \ 0.5)$- стационарное распределение вероятностей.

Задача 75. Определить, существует ли стационарный режим для марковского случайного процесса, размеченный граф состояний которого изображен на рисунке. Если стационарный режим существует, то найти стационарное распределение вероятностей.

Указание. Проведите классификацию состояний системы и примените следствия из теоремы Маркова.



Решение.

Состояния A_1, A_2, A_6 являются несущественными, так как из каждого состояния A_j, достижимого из A_i $(i=1, 2, 6)$, возврат обратно в A_i невозможен.

Состояния A_3, A_4, A_5 являются сообщающимися, так как из каждого состояния A_3, A_4, A_5 система может попасть в любое другое из A_3, A_4, A_5.

Состояния A_3, A_4, A_5 являются существенными, так как из каждого состояния A_j, достижимого из A_i $(i=3, 4, 5)$, система может вернуться обратно в A_i.

Конечное множество состояний E системы состоит из двух классов: класс $E_0=\{A_1, A_2, A_6\}$ несущественных состояний и единственный класс $E_1=\{A_3, A_4, A_5\}$ сообщающихся существенных состояний, $E=E_0 \cup E_1$.

Следовательно, данный процесс – эргодический и для него существует стационарный режим.

Предельные вероятности несущественных состояний равны нулю, $p_1=p_2=p_6=0$.

Для вычисления предельных вероятностей существенных состояний составляем систему уравнений

$$p_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}p_j}{\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}}, \quad (i=1,\dots,n).$$

λ_{ji} - интенсивность перехода из j-го в i-е состояние,

$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}$ - сумма интенсивностей переходов из i-го в j-е состояния,

$n=3$ - число состояний.

$$p_3=\frac{\sum_{j=1}^{3}\lambda_{j3}p_j}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_{3j}}=\frac{3p_4}{6}=\frac{p_4}{2}$$

$$p_4=\frac{\sum_{j=1}^{3}\lambda_{j4}p_j}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_{4j}}=\frac{\lambda_{34}p_3+\lambda_{54}p_5}{\lambda_{45}+\lambda_{43}}=\frac{6p_3+2p_5}{8},$$

$$p_5=\frac{\sum_{j=1}^{3}\lambda_{j5}p_j}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_{5j}}=\frac{5p_4}{2},$$

$$\begin{cases} p_3=\dfrac{p_4}{2} \\ p_4=\dfrac{6p_3+2p_5}{8} \\ p_5=\dfrac{5p_4}{2} \end{cases}.$$

Отбросим 2-е уравнение и добавим условие нормировки $p_3+p_4+p_5=1$.

$$\begin{cases} p_3=\dfrac{p_4}{2} \\ p_5=\dfrac{5p_4}{2} \\ p_3+p_4+p_5=1 \end{cases}$$

$$\frac{p_4}{2}+\frac{5p_4}{2}+p_4=1, \quad p_4=\frac{1}{4}, \quad p_3=\frac{1}{8}, \quad p_5=\frac{5}{8}$$

Стационарное распределение вероятностей

$$\bar{q}_{стац}=\left(0;\ 0;\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{4};\frac{5}{8};\ 0\right)=\left(0;\ 0;\ 0.125;\ 0.25;\ 0.625;\ 0\right)$$

Задача 85. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции X(t), если ее корреляционная функция имеет вид:

$$k_x(\tau)=\begin{cases}1-0{,}5|\tau|, & |\tau|\le 2, \\ 0, & |\tau|>2\end{cases}.$$

Решение:

Спектральную плотность будем находить по формуле $s_x(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}k_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau$

$$s_x(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^2(1-0.5\tau)\cos\omega\tau d\tau=\frac{1}{\pi}\int_0^2\cos\omega\tau d\tau-\frac{0.5}{\pi}\int_0^2\tau\cos\omega\tau d\tau=\begin{bmatrix} u=\tau & du=\tau \\ dv=\cos\omega\tau d\tau & v=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega\tau \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\omega\pi}\sin\omega\tau\Big|_0^2-\frac{1}{2\omega\pi}\tau\sin\omega\tau\Big|_0^2+\frac{1}{2\pi\omega^2}\int_0^2\sin\omega\tau d\tau=\frac{\sin 2\omega}{\pi\omega}-\frac{\sin 2\omega}{\pi\omega}-\frac{1}{2\pi\omega^2}\cos 2\omega\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{2\pi\omega^2}(1-\cos 2\omega)=\frac{2\sin^2\frac{2\omega}{2}}{2\pi\omega}=\frac{\sin^2\omega}{\pi\omega}$$

$$\text{Ответ}:\ s_x(\omega)=\frac{\sin^2\omega}{\pi\omega}$$

Задача 95 На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарная случайная функция X(t) с математическим ожиданием m_x и корреляционной функцией $k_x(\tau)$. Найти: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию случайной функции Y(t) на выходе системы в установившемся режиме.

95. $2Y'(t)+Y(t)=X'(t)+3X(t),\qquad m_x=4,\qquad k_x(\tau)=3e^{-|\tau|}.$

Решение:

Математическое ожидание производной стационарной случайной величины равна 0. Отсюда имеем

$$M[2Y'(t)+Y(t)]=M[X'(t)+3X(t)]$$

$$m_y=3m_x$$

$$m_y=12$$

$$D_x=k_x(0)=3\qquad \alpha=1$$

Находим спектральную плотность

$$s_x(\omega)=\frac{\alpha D_x}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}=\frac{3}{\pi(1+\omega^2)}$$

Найдем передаточную функцию системы. Для этого запишем заданное дифференциальное уравнение в операторной форме

$$(2p+1)Y(t)=(p+3)X(t)$$

$$Y(t)=\frac{p+3}{2p+1}X(t)$$

$$\Phi(p)=\frac{p+3}{2p+1} - \textit{передаточная функция}$$

Найдем частотную характеристику системы, приняв $p=\omega i$

$$\Phi(\omega i)=\frac{\omega i+3}{2\omega i+1}$$

Спектральную плотность У(t) находим по формуле $s_y(\omega)=s_x(\omega)\cdot\left|\Phi(\omega i)\right|^2$

$$s_y(\omega)=\frac{3}{\pi(1+\omega^2)}\cdot\frac{\omega^2+9}{4\omega^2+1}$$

Найдем дисперсию У(t)

$$D_y=\int_{-\infty}^{\infty}s_y(\omega)d\omega=\frac{6}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega^2+9}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}d\omega=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\dfrac{A\omega+B}{1+\omega^2}+\dfrac{C\omega+D}{1+4\omega^2}=\dfrac{\omega^3(4A+C)+\omega^2(4B+D)+\omega(A+9)+B+D}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}=\dfrac{\omega^2+9}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}\\ \begin{cases}4A+C=0\\A+C=0\\4B+D=1\\B+D=9\end{cases}\quad\begin{cases}A=C=0\\3B=-8\\D=1-4B\end{cases}\quad\begin{cases}A=C=0\\B=-\dfrac{8}{3}\\D=\dfrac{35}{3}\end{cases}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{6}{\pi}\left(-\frac{8}{3}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{1+\omega^2}+\frac{35}{3}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{1+4\omega^2}\right)=\frac{6}{\pi}\left(-\frac{8}{3}arctg\,\omega\Big|_0^{\infty}+\frac{35}{6}arctg\,2\omega\Big|_0^{\infty}\right)=$$

$$=\frac{6}{\pi}\left(-\frac{8\pi}{6}+\frac{35\pi}{12}\right)=-8+\frac{35}{2}=\frac{19}{2}$$