

Задача 3.

Определить положение центра тяжести и главные центральные оси. Вычислить главные центральные моменты инерции, моменты сопротивления, радиусы инерции относительно главных центральных осей.

$$\begin{aligned} \text{Дано: } F_1 &:= 28.3 \cdot \text{см}^2 & J_{z_1} &:= 952 \cdot \text{см}^4 & J_{y_1} &:= 276 \cdot \text{см}^4 & h_1 &:= 18 \cdot \text{см} & b_1 &:= 11 \cdot \text{см} & z_{o_1} &:= 2.44 \cdot \text{см} & y_{o_1} &:= 5.88 \cdot \text{см} \\ J_{\min_1} &:= 8.48 \cdot \text{см}^4 & J_{zy_1} &:= -\sqrt{(J_{z_1} - J_{\min_1}) \cdot (J_{y_1} - J_{\min_1})} & J_{zy_1} &= -502.405 \text{ см}^4 & & & & & y_{o_2} &:= 2.42 \cdot \text{см} \\ F_2 &:= 30.6 \cdot \text{см}^2 & J_{z_2} &:= 208 \cdot \text{см}^4 & J_{y_2} &:= 2900 \cdot \text{см}^4 & h_2 &:= 9 \cdot \text{см} & b_2 &:= 24 \cdot \text{см} \\ h_3 &:= 3 \cdot \text{см} & b_3 &:= 35 \cdot \text{см} & F_3 &:= b_3 \cdot h_3 & F_3 &= 105 \text{ см}^2 & J_{z_3} &:= \frac{b_3 (h_3)^3}{12} & J_{z_3} &= 78.75 \text{ см}^4 \\ J_{y_3} &:= \frac{h_3 (b_3)^3}{12} & J_{y_3} &= 1.072 \times 10^4 \text{ см}^4 & J_{zy_3} &:= 0 \cdot \text{см}^4 \end{aligned}$$

Решение

1. Проведем вспомогательные оси z, y. Определим в них центры тяжести каждой из фигур.

$$\begin{aligned} z_1 &:= b_2 + z_{o_1} & z_1 &= 26.44 \text{ см} & y_1 &:= h_3 + y_{o_1} & y_1 &= 8.88 \text{ см} \\ z_2 &:= \frac{b_2}{2} & z_2 &= 12 \text{ см} & y_2 &:= -y_{o_2} & y_2 &= -2.42 \text{ см} \\ z_3 &:= \frac{b_3}{2} & z_3 &= 17.5 \text{ см} & y_3 &:= \frac{h_3}{2} & y_3 &= 1.5 \text{ см} \end{aligned}$$

Определим положение центра тяжести фигуры в осях z, y.

$$Z_c := \frac{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 + F_3 \cdot z_3}{F_1 + F_2 + F_3} \quad Z_c = 18.017 \text{ см} \quad Y_c := \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3}{F_1 + F_2 + F_3} \quad Y_c = 2.042 \text{ см}$$

Проведем центральные оси Z₀ Y₀ через точку C с координатами Z_c Y_c.

Определим значение моментов инерции относительно собственных осей фигур.

Определим расстояния от собственных осей фигур до общего центра тяжести.

$$\begin{aligned} a_1 &:= y_1 - Y_c & a_1 &= 6.838 \text{ см} & b_1 &:= z_1 - Z_c & b_1 &= 8.423 \text{ см} \\ a_2 &:= y_2 - Y_c & a_2 &= -4.462 \text{ см} & b_2 &:= z_2 - Z_c & b_2 &= -6.017 \text{ см} \\ a_3 &:= y_3 - Y_c & a_3 &= -0.542 \text{ см} & b_3 &:= z_3 - Z_c & b_3 &= -0.517 \text{ см} \end{aligned}$$

Определим значения моментов инерции для центральных осей Z₀ Y₀.

$$\begin{aligned} J_{z_1} &:= J_{z_1} + (a_1)^2 \cdot F_1 & J_{z_1} &= 2.275 \times 10^3 \text{ см}^4 & J_{y_1} &:= J_{y_1} + (b_1)^2 \cdot F_1 & J_{y_1} &= 2.284 \times 10^3 \text{ см}^4 \\ J_{z_2} &:= J_{z_2} + (a_2)^2 \cdot F_2 & J_{z_2} &= 817.343 \text{ см}^4 & J_{y_2} &:= J_{y_2} + (b_2)^2 \cdot F_2 & J_{y_2} &= 4.008 \times 10^3 \text{ см}^4 \\ J_{z_3} &:= J_{z_3} + (a_3)^2 \cdot F_3 & J_{z_3} &= 109.643 \text{ см}^4 & J_{y_3} &:= J_{y_3} + (b_3)^2 \cdot F_3 & J_{y_3} &= 1.075 \times 10^4 \text{ см}^4 \\ J_{zy_1} &:= J_{zy_1} + a_1 \cdot b_1 \cdot F_1 & J_{zy_1} &= 1.128 \times 10^3 \text{ см}^4 & J_{zy_2} &:= J_{zy_2} + a_2 \cdot b_2 \cdot F_2 & J_{zy_2} &= 821.592 \text{ см}^4 \\ J_{zy_3} &:= J_{zy_3} + a_3 \cdot b_3 \cdot F_3 & J_{zy_3} &= 29.433 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

Определим значение общих моментов инерции:

$$\begin{aligned} J_z &:= J_{z_1} + J_{z_2} + J_{z_3} & J_z &= 3.202 \times 10^3 \text{ см}^4 & J_y &:= J_{y_1} + J_{y_2} + J_{y_3} & J_y &= 1.704 \times 10^4 \text{ см}^4 \\ J_{zy} &:= J_{zy_1} + J_{zy_2} + J_{zy_3} & J_{zy} &= 1.979 \times 10^3 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

Определим положение главных осей инерции u и v :

$$\alpha_0 := \frac{1}{2} \cdot \text{atan} \left(-\frac{2 \cdot J_{zy}}{J_z - J_y} \right) \quad \alpha_0 = 7.98^\circ$$

Определим значение главных моментов инерции

$$J_{\max} := \frac{J_z + J_y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \quad J_{\max} = 1.732 \times 10^4 \text{ см}^4$$

$$J_{\min} := \frac{J_z + J_y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_z - J_y)^2 + 4J_{zy}^2} \quad J_{\min} = 2.925 \times 10^3 \text{ см}^4$$

Главный радиусы инерции

$$i_{\max} := \sqrt{\frac{J_{\max}}{F_1 + F_2 + F_3}} \quad i_{\max} = 10.279 \text{ см} \quad i_{\min} := \sqrt{\frac{J_{\min}}{F_1 + F_2 + F_3}} \quad i_{\min} = 4.224 \text{ см}$$

