

### Задача 1.

$$\text{Дано:} \quad P := 100 \cdot \text{кН} \quad M_0 := 40 \cdot \text{кН} \cdot \text{м} \quad q := 60 \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad [\sigma] := 150 \text{ МПа} \quad E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$$

### Решение

#### 1. Определение опорных реакций.

$$\Sigma M_{A,i} = 0 \quad -M_0 - q \cdot 2.5 \text{ м} \cdot 0.25 \text{ м} + P \cdot 2.5 \text{ м} - V_b \cdot 8 \text{ м} + 2q \cdot 1.5 \text{ м} \cdot 7.25 \text{ м} = 0$$

$$V_b = 184.688 \text{ кН}$$

$$\Sigma M_{B,i} = 0 \quad V_a \cdot 8 \text{ м} - q \cdot 2.5 \text{ м} \cdot 8.25 \text{ м} - M_0 - P \cdot 5.5 \text{ м} - 2q \cdot \frac{(1.5 \text{ м})^2}{2} = 0$$

$$V_a = 245.313 \text{ кН}$$

$$\text{Проверка:} \quad \Sigma Y_i = 0 \quad V_a + V_b - P - q \cdot 2.5 \text{ м} - 2q \cdot 1.5 \text{ м} = 0 \text{ кН}$$

#### 2. Вычисление значений поперечных сил и изгибающих моментов, построение эпюр.

Разбиваем стержень на  $K := 5$  участков. Обозначим начало каждого участка  $a_{H,i}$ , а конец -  $a_{K,i}$ .

**1-й участок:**  $a_{H,1} = 0 \text{ м} < x < a_{K,1} = 1.5 \text{ м}$

$$Q1(x) := -q \cdot x$$

$$Q1(a_{H,1}) = 0 \text{ кН}$$

$$Q1(a_{K,1}) = -90 \text{ кН}$$

$$M1(x) := -q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M1(a_{H,1}) = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M1(a_{K,1}) = -67.5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

**2-й участок:**  $a_{H,2} = 1.5 \text{ м} < x < a_{K,2} = 2.5 \text{ м}$

$$Q2(x) := -q \cdot x + V_a$$

$$Q2(a_{H,2}) = 155.313 \text{ кН} \quad Q2(a_{K,2}) = 95.313 \text{ кН}$$

$$M2(x) := -q \cdot \frac{x^2}{2} + V_a \cdot (x - 1.5 \text{ м})$$

$$M2(a_{H,2}) = -67.5 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad M2(a_{K,2}) = 57.813 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

**5-й участок:**  $a_{H,5} = 0 \text{ м} < x < a_{K,5} = 1.5 \text{ м}$

$$Q5(x) := -V_b + 2q \cdot x$$

$$Q5(a_{H,5}) = -184.688 \text{ кН} \quad Q5(a_{K,5}) = -4.688 \text{ кН}$$

$$M5(x) := V_b \cdot x - 2q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M5(a_{H,5}) = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M5(a_{K,5}) = 142.031 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

**4-й участок:**  $a_{H,4} = 1.5 \text{ м} < x < a_{K,4} = 5.5 \text{ м}$

$$Q4(x) := -V_b + 2q \cdot 1.5 \text{ м}$$

$$Q4(a_{H,4}) = -4.688 \text{ кН}$$

$$Q4(a_{K,4}) = -4.688 \text{ кН}$$

$$M4(x) := V_b \cdot x - 2 \cdot q \cdot 1.5 \text{ м} \cdot (x - 0.75 \text{ м})$$

$$M4(a_{H,4}) = 142.031 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M4(a_{K,4}) = 160.781 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

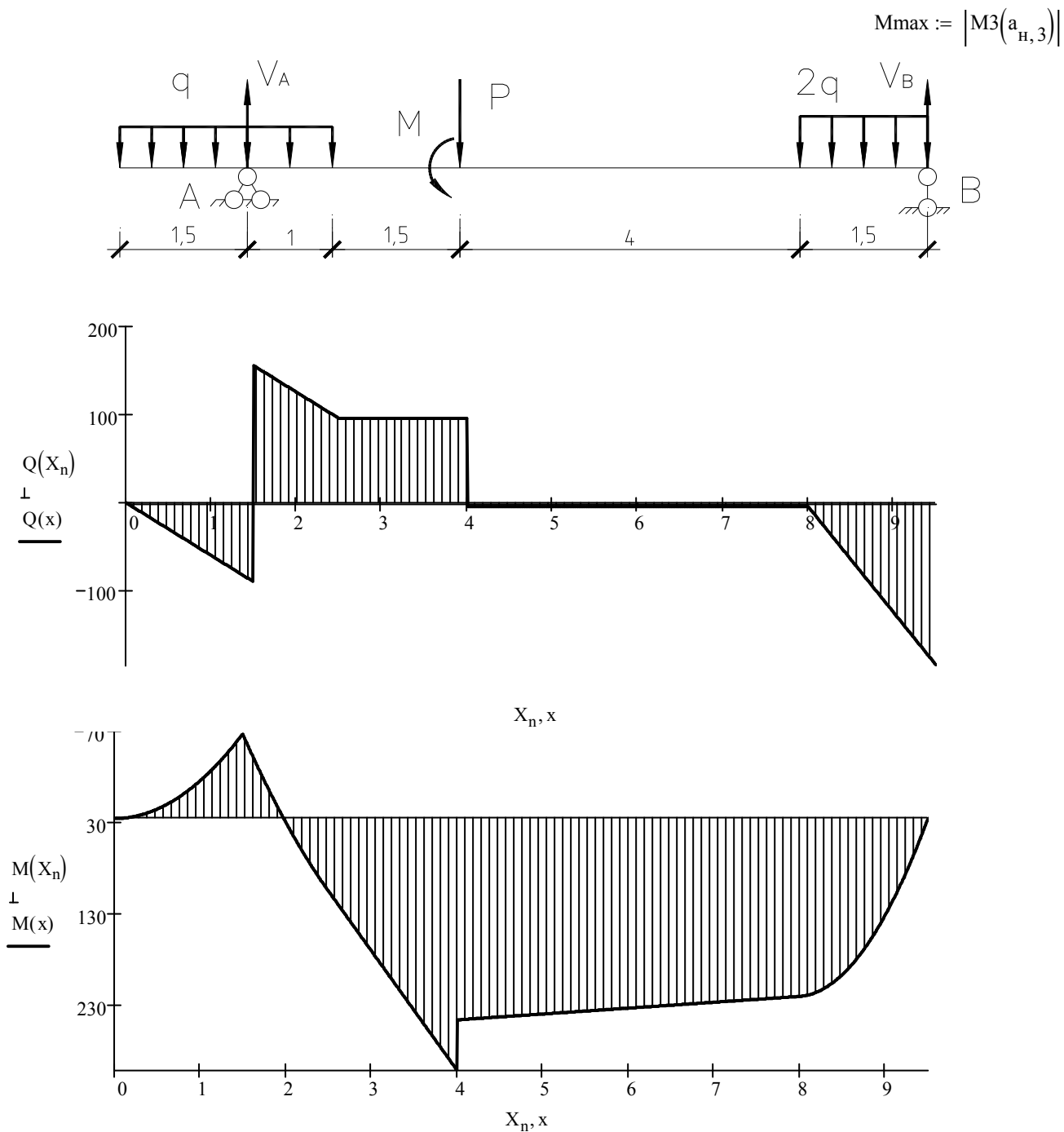
**3-й участок:**  $a_{H,3} = 5.5 \text{ м} < x < a_{K,3} = 7 \text{ м}$

$$Q3(x) := -V_b + 2q \cdot 1.5 \text{ м} + P$$

$$Q3(a_{H,3}) = 95.313 \text{ кН}$$

$$Q3(a_{K,3}) = 95.313 \text{ кН}$$

$$M3(x) := V_b \cdot x - 2 \cdot q \cdot 1.5 \text{ м} \cdot (x - 0.75 \text{ м}) - P \cdot (x - 5.5 \text{ м}) + M_0 \quad M3(a_{H,3}) = 200.781 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad M3(a_{K,3}) = 57.813 \text{ кН} \cdot \text{м}$$



Опасным является сечения 3 участка, где изгибающий момент максимален.

$$M_{\max} = 200.781 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Подбор сечения. Запишем условие прочности.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{\text{тр}}} < [\sigma]$$

$$W := \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \quad W = 1.339 \times 10^3 \text{ см}^3 \quad \text{- требуемый момент сопротивления сечения}$$

Прямоугольное сечение:  $\frac{h}{b} = 2 \quad h = 2 \cdot b$

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3} \quad b := \sqrt[3]{\frac{3W}{2}} \quad b = 12.616 \text{ см} \quad h := 2 \cdot b \quad F2 := b \cdot h \quad F2 = 318.306 \text{ см}^2$$

$$\text{Круглое сечение:} \quad W = 0.1 \cdot d^3 \quad d := \sqrt[3]{\frac{W}{0.1}} \quad d = 23.743 \text{ см} \quad F3 := \pi \cdot \frac{d^2}{4} \quad F3 = 442.77 \text{ см}^2$$

$$\mathbf{I}_{\text{№50}} \quad W := 1570 \cdot \text{см}^3 \quad J_z := 39290 \text{ см}^4 \quad S := 905 \text{ см}^3 \quad h := 50 \text{ см} \quad b := 17 \text{ см} \quad d := 0.95 \text{ см} \quad t := 1.52 \text{ см}$$

Для заданного сечения  $Q := 95.3 \text{ кН}$   $M := 200.8 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Строим эпюру нормальных напряжений. Наибольшие напряжения в сечении равны

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 := \frac{M}{W} \quad \sigma_1 = 127.898 \text{ МПа}$$

Строим эпюру касательных напряжений. Наибольшие напряжения в сечении равны

$$\tau_{\max} = \tau_1 := \frac{Q \cdot S}{d \cdot J_z} \quad \tau_1 = 23.107 \text{ МПа}$$

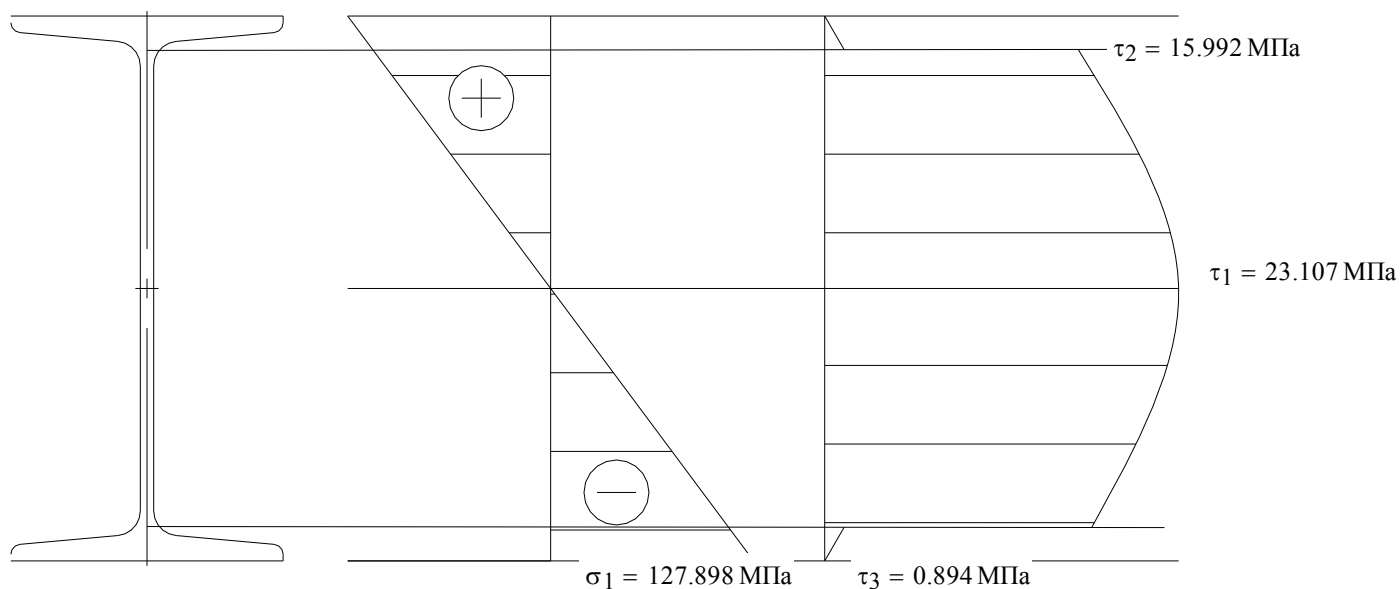
$$S' := b \cdot t \cdot \frac{h-t}{2} \quad S' = 626.362 \text{ см}^3 \quad \text{статический момент полки относительно центральных осей}$$

$$\tau_2 := \frac{Q \cdot S'}{d \cdot J_z} \quad \tau_2 = 15.992 \text{ МПа} \quad \text{Касательные напряжения в месте стыка - в стенке}$$

$$\tau_3 := \frac{Q \cdot S'}{b \cdot J_z} \quad \tau_3 = 0.894 \text{ МПа} \quad \text{в полке}$$

$$\sigma_2 := \frac{M_{\max} \cdot (1 \cdot h - 2d)}{W \cdot h} \quad \sigma_2 = 123.026 \text{ МПа} \quad \text{Нормальные напряжения в месте стыка}$$

$$\begin{array}{cc} \text{Эп} & \sigma \\ & (\text{МПа}) \end{array} \quad \begin{array}{cc} \text{Эп} & \tau \\ & (\text{МПа}) \end{array}$$



4. По методу начальных параметров определить угол поворота в заданном сечении.

Определим начальные параметры из условия того, что прогиб балки на опорах А и В равен 0.

$$EJy(A) = EJy_0 + EJ\phi_0 \cdot 1.5 \text{ м} - \frac{q \cdot (1.5 \cdot \text{м})^4}{24} = 0$$

$$EJy(B) = EJy_0 + EJ\phi_0 \cdot 9.5 \cdot \text{м} - \frac{q \cdot (9.5 \cdot \text{м})^4}{24} + \frac{V_a \cdot (8 \cdot \text{м})^3}{6} + \frac{q \cdot (7 \cdot \text{м})^4}{24} - \frac{M_0 \cdot (5.5 \cdot \text{м})^2}{2} - \frac{P \cdot (5.5 \cdot \text{м})^3}{6} - \frac{2q \cdot (1.5 \cdot \text{м})^4}{24} = 0$$

$$EJy_0 = 609.395 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \quad EJ\phi_0 = -397.826 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

Строим эпюры прогибов и углов поворота

Запишем уравнение для первого участка

$$y_1(x) := \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left( E J y_0 + E J \phi_0 \cdot x - \frac{q \cdot x^4}{24} \right)$$

$$y_1(0\text{m}) = 0.776 \text{ cm} \quad y_1(0.75\text{m}) = 0.395 \text{ cm} \quad y_1(1.5\text{m}) = 0 \text{ cm}$$

$$\phi_1(x) := \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left( E J \phi_0 - \frac{q \cdot x^3}{6} \right)$$

$$\phi_1(0\text{m}) = -0.29^\circ \quad \phi_1(0.75\text{m}) = -0.293^\circ \quad \phi_1(1.5\text{m}) = -0.315^\circ$$

Запишем уравнение для второго участка

$$y_2(x) := \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ E J y_0 + E J \phi_0 \cdot x - \frac{q \cdot x^4}{24} + \frac{V a \cdot (x - 1.5\text{m})^3}{6} \right]$$

$$y_2(2.5\text{m}) = -0.562 \text{ cm}$$

$$\phi_2(x) := \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ E J \phi_0 - \frac{q \cdot x^3}{6} + \frac{V a \cdot (x - 1.5\text{m})^2}{2} \right]$$

$$\phi_2(2.5\text{m}) = -0.315^\circ$$

Запишем уравнение для третьего участка

$$y_3(x) := \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ E J y_0 + E J \phi_0 \cdot x - \frac{q \cdot x^4}{24} + \frac{V a \cdot (x - 1.5\text{m})^3}{6} + \frac{q \cdot (x - 2.5\text{m})^4}{24} \right]$$

$$y_3(4\text{m}) = -1.235 \text{ cm}$$

$$\phi_3(x) := \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ E J \phi_0 - \frac{q \cdot x^3}{6} + \frac{V a \cdot (x - 1.5\text{m})^2}{2} + \frac{q \cdot (x - 2.5\text{m})^3}{6} \right]$$

$$\phi_3(4\text{m}) = -0.173^\circ$$

Запишем уравнение для четвертого участка

$$y_4(x) := \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ E J y_0 + E J \phi_0 \cdot x - \frac{q \cdot x^4}{24} + \frac{V a \cdot (x - 1.5\text{m})^3}{6} + \frac{q \cdot (x - 2.5\text{m})^4}{24} - \frac{M o \cdot (x - 4\text{m})^2}{2} - \frac{P \cdot (x - 4\text{m})^3}{6} \right]$$

$$y_4(6\text{m}) = -1.438 \text{ cm} \quad y_4(8\text{m}) = -0.871 \text{ cm}$$

$$\phi_4(x) := \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ E J \phi_0 - \frac{q \cdot x^3}{6} + \frac{V a \cdot (x - 1.5\text{m})^2}{2} + \frac{q \cdot (x - 2.5\text{m})^3}{6} - \frac{M o \cdot (x - 4\text{m})^1}{1} - \frac{P \cdot (x - 4\text{m})^2}{2} \right]$$

$$\phi_4(6\text{m}) = 0.054^\circ \quad \phi_4(8\text{m}) = 0.268^\circ$$

Запишем уравнение для 5 участка

$$y_5(x) := \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ E J y_0 + E J \phi_0 \cdot x - \frac{q \cdot x^4}{24} + \frac{V a \cdot (x - 1.5\text{m})^3}{6} + \frac{q \cdot (x - 2.5\text{m})^4}{24} - \frac{M o \cdot (x - 4\text{m})^2}{2} - \frac{P \cdot (x - 4\text{m})^3}{6} - \frac{2q \cdot (x - 8\text{m})^4}{24} \right]$$

$$y_5(9.5\text{m}) = 0$$

$$\phi_5(x) := \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ E J \phi_0 - \frac{q \cdot x^3}{6} + \frac{V a \cdot (x - 1.5\text{m})^2}{2} + \frac{q \cdot (x - 2.5\text{m})^3}{6} - \frac{M o \cdot (x - 4\text{m})^1}{1} - \frac{P \cdot (x - 4\text{m})^2}{2} - \frac{2q \cdot (x - 8\text{m})^3}{6} \right]$$

$$\phi_5(9.5\text{m}) = 0.371^\circ$$

