$y=-\frac{8x}{x^2+4}$

1) Область определения функции: $x^2+4\neq 0 \quad x\in R$

2) Точки пересечения с осями.

С осью OY: $x=0 \quad \to \quad y=-\frac{8\cdot 0}{0^2+4}=0 \quad A(0;0)$

С осью OX: $y=0 \quad \to \quad -\frac{8x}{x^2+4}=0 \quad \to \quad x=0 \quad B(0;0)$

Значит график пересекает оси координат только в точке $O(0;0)$

3) Чётность/нечётность: $y(-x)=-\frac{8\cdot(-x)}{(-x)^2+4}=\frac{8x}{x^2+4}=-y(x) \quad \to \quad y(x)-$нечётная функция

4) Асимптоты:

(а) Вертикальных асимптот нет, так как функция не имеет точек разрыва и определена везде

(б) Горизонтальные асимптоты: $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{8x}{x^2+4})=\lim\limits_{x\to\infty}(-\frac{\frac{8}{x}}{1+\frac{4}{x^2}})=-\frac{0}{1+0}=0$

$y=0$ является горизонтальной асимптотой при $x\to\pm\infty$

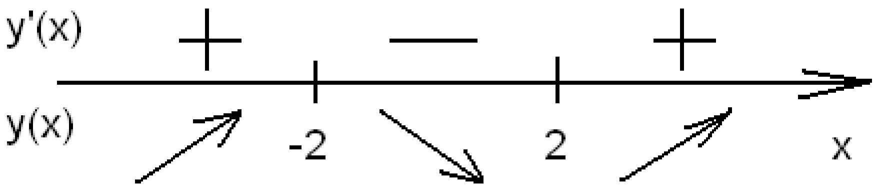
(в) Наклонных асимптот нет, так как при $x\to\pm\infty$ найдены горизонтальные

5) Производная и экстремумы:

$$y'=\left(-\frac{8x}{x^2+4}\right)'=-\frac{8(x^2+4)-2x\cdot 8x}{(x^2+4)^2}=\frac{-8x^2-32+16x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{8x^2-32}{(x^2+4)^2}=\frac{8(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$$

$x^2-4=0 \quad x=\pm 2$ критические точки

Находим локальные экстремумы методом интервалов, используя правило чередования:



$x=-2$ точка максимума, $y(-2)=-\frac{8\cdot(-2)}{(-2)^2+4}=\frac{16}{8}=2$

$x=2$ точка минимума, $y(2)=-\frac{8\cdot 2}{2^2+4}=-\frac{16}{8}=-2$

Промежутки возрастания: $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$

Промежуток убывания: $(-2;2)$

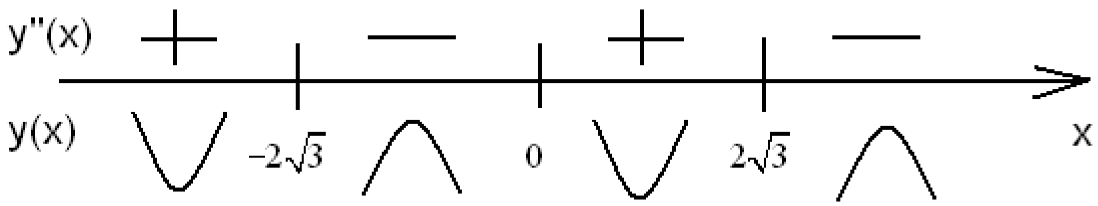
6) Вторая производная и точки перегиба:

$$y''=\left(\frac{8(x^2-4)}{(x^2+4)^2}\right)'=8\cdot\frac{2x\cdot(x^2+4)^2-2x\cdot 2(x^2+4)\cdot(x^2-4)}{(x^2+4)^4}=8\cdot\frac{2x\cdot(x^2+4)-2x\cdot 2\cdot(x^2-4)}{(x^2+4)^3}=$$

$$=16\cdot\frac{x\cdot(x^2+4)-2x\cdot(x^2-4)}{(x^2+4)^3}=16\cdot\frac{x^3+4x-2x^3+8x}{(x^2+4)^3}=16\cdot\frac{-x^3+12x}{(x^2+4)^3}=-\frac{16x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$$

$16x(x^2-12)=0 \quad x=0,\ x=\pm 2\sqrt{3}$ точки, подозрительные на перегиб

Находим промежутки выпуклости и вогнутости методом интервалов, пользуясь чередованием

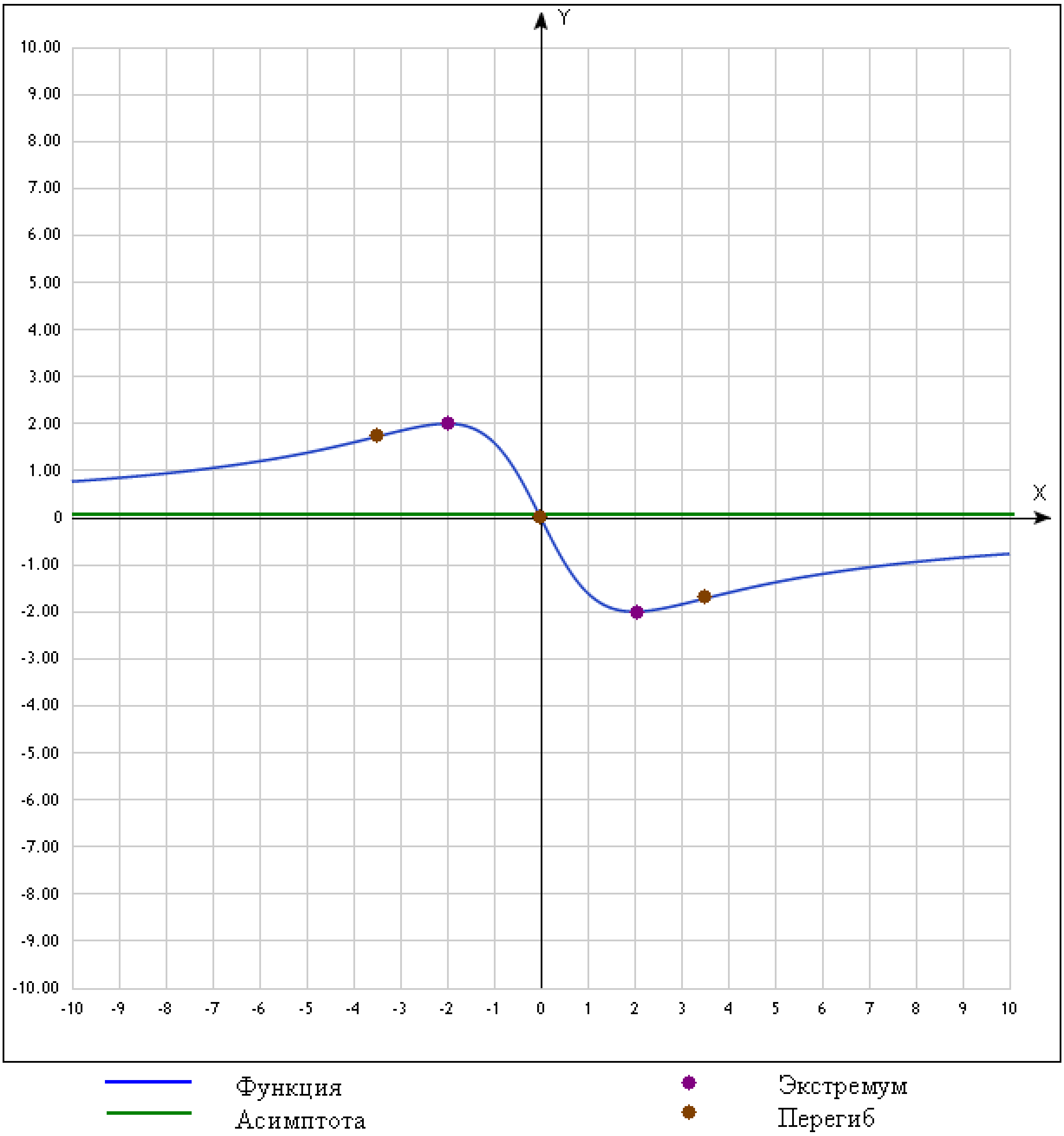


$x=0,\ x=\pm 2\sqrt{3}$ точки перегиба

Промежутки вогнутости: $(-\infty;-2\sqrt{3})$ и $(0;2\sqrt{3})$

Промежуток выпуклости: $(-2\sqrt{3};0)$ и $(2\sqrt{3};+\infty)$

7) График функции и область значений функции

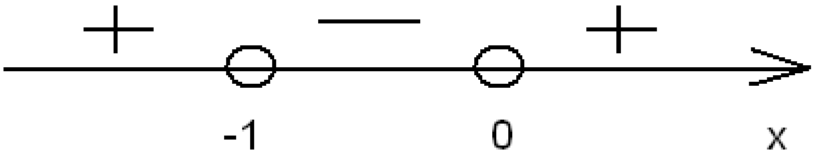


Из графика видно, что $y \in [-2;2]$

$y=2\ln\frac{x}{x+1}-1$

1) Область определения функции.

$\frac{x}{x+1}>0$ Находим область определения методом интервалов:



Выбирая необходимые промежутки, получаем: $x\in\ -\infty;-1\ \cup(0;+\infty)$

2) Точки пересечения с осями.

С осью OY пересечений нет, так как функция не определена при $x=0$

С осью OX : $y=0 \quad\to\quad 2\ln\frac{x}{x+1}-1=0 \quad\to\quad \ln\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2} \quad\to\quad \frac{x}{x+1}=\sqrt{e}$

$x=\sqrt{e}x+\sqrt{e} \quad\to\quad x=\frac{\sqrt{e}}{1-\sqrt{e}}\approx\frac{\sqrt{2,72}}{1-\sqrt{2,72}}\approx\frac{1,65}{1-1,65}\approx-2,54 \quad\to\quad A(-2,54;0)$

3) Чётность/нечётность. Функция имеет несимметричную область определения, значит она автоматически является функцией общего вида.

4) Асимптоты:

а) Вертикальные асимптоты могут существовать в точках $x=-1$ (слева) и $x=0$ (справа)

$$\lim_{x\to-1-0}y(x)=\lim_{x\to-1}\left(2\ln\frac{x}{x+1}-1\right)=2\ln\frac{-1-0}{-1-0+1}-1=2\ln\frac{-1}{-0}-1=2\ln(+\infty)-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to+0}y(x)=\lim_{x\to+0}\left(2\ln\frac{x}{x+1}-1\right)=2\ln\frac{+0}{+0+1}-1=2\ln\frac{+0}{+1}-1=2\ln(+0)-1=-\infty$$

$x=-1$ (слева) и $x=0$ (справа) являются вертикальными асимптотами

б) Горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty}y(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2\ln\frac{x}{x+1}-1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2\ln\frac{1}{1+\frac{1}{x}}-1\right)=2\ln 1-1=-1$$

$y=-1$ является горизонтальной асимптотой при $x\to\pm\infty$

в) Наклонных асимптот нет, так как при $x\to\pm\infty$ найдены горизонтальные

5) Производная и экстремумы:

$$y'=\left(2\ln\frac{x}{x+1}-1\right)'=2\ \ \ln x-\ln\ \ x+1\ \ \ '=2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=2\cdot\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{2}{x(x+1)}$$

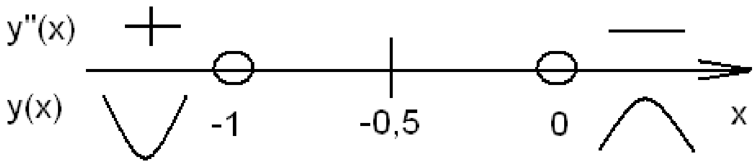
Производная нигде не обращается в ноль, а функция не определена в нулях знаменателя производной, поэтому экстремумов нет.

6) Вторая производная и точки перегиба:

$$y''=\left(\frac{2}{x(x+1)}\right)'=2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)'=2\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}\right)=2\cdot\frac{x^2-(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}=2\cdot\frac{x^2-x^2-2x-1}{x^2(x+1)^2}=$$

$$=2\cdot\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}=-\frac{4(x+0,5)}{x^2(x+1)^2}$$ $x=-0,5$ не принадлежит области определения

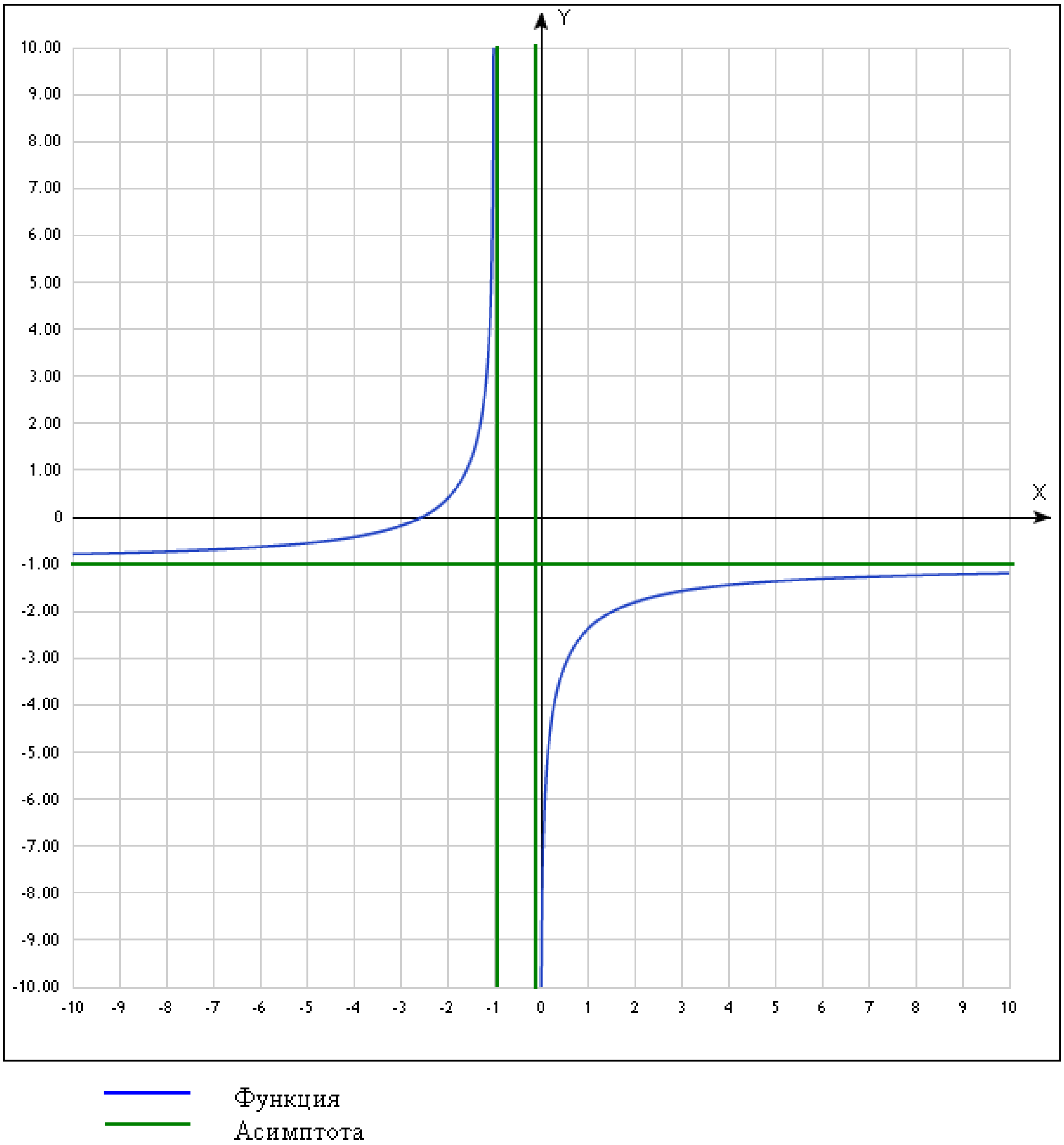
Находим промежутки выпуклости и вогнутости методом интервалов, пользуясь чередованием. Учитываем, что $x=0$ и $x=-1$ являются нулями знаменателя второй кратности



Промежуток вогнутости: $(-\infty;-1)$

Промежуток выпуклости: $(0;+\infty)$

7) График функции и область значений функции:



Из графика видно, что $y\in R\setminus\{-1\}$