**Задача №5**  Цепь Маркова управляет матрицей

 $p=\left(\begin{matrix}p\_{1}&1-p\_{1}\\1-p\_{2}&p\_{2}\end{matrix}\right)$, 0 <$ p\_{1}$< 1, 0 < $p\_{2}$ < 1.

1. Убедитесь в применимости теоремы Маркова к этой цепи;
2. Найдите предельные вероятности.

Вычислим матрицу $p^{2}:$

$$p^{2}=\left(\begin{matrix}p\_{1}&1-p\_{1}\\1-p\_{2}&p\_{2}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}p\_{1}&1-p\_{1}\\1-p\_{2}&p\_{2}\end{matrix}\right)=$$

$$=\left(\begin{matrix}p\_{1}^{2}+\left(1-p\_{1}\right)\left(1-p\_{2}\right)&p\_{1}-p\_{1}^{2}+p\_{2}-p\_{1}p\_{2}\\p\_{1}-p\_{1}p\_{2}+p\_{2}-p\_{2}^{2}&p\_{2}^{2}+\left(1-p\_{1}\right)\left(1-p\_{2}\right)\end{matrix}\right)$$

Все элементы этой матрицы положительны:

$$p\_{1}^{2}+\left(1-p\_{1}\right)\left(1-p\_{2}\right)>0$$

$$p\_{1}-p\_{1}^{2}+p\_{2}-p\_{1}p\_{2}=p\_{1}\left(1-p\_{1}\right)+p\_{2}\left(1-p\_{1}\right)=\left(1-p\_{1}\right)\left(p\_{1}+p\_{2}\right)>0$$

$$p\_{1}-p\_{1}p\_{2}+p\_{2}-p\_{2}^{2}=p\_{1}\left(1-p\_{2}\right)+p\_{2}\left(1-p\_{2}\right)=\left(1-p\_{2}\right)\left(p\_{1}+p\_{2}\right)>0$$

$$p\_{1}^{2}+\left(1-p\_{1}\right)\left(1-p\_{2}\right)>0$$

По теореме Маркова, поскольку существует натуральное число $n$ такое, что все элементы матрицы $p^{n}$ положительны, то существуют предельные вероятности.

Предельные вероятности находим из системы:

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=1\\x\_{1}=p\_{1}x\_{1}+\left(1-p\_{2}\right)x\_{2}\\x\_{2}=\left(1-p\_{1}\right)x\_{1}+p\_{2}x\_{2}\end{array}\right.$$

$$x\_{1}=p\_{1}x\_{1}+\left(1-p\_{2}\right)\left(1-x\_{1}\right)$$

$$x\_{1}=p\_{1}x\_{1}+1-p\_{2}-x\_{1}+p\_{2}x\_{1}$$

$$x\_{1}\left(2-p\_{1}-p\_{2}\right)=1-p\_{2}$$

$$x\_{1}=\frac{1-p\_{2}}{2-p\_{1}-p\_{2}} ; x\_{2}=1-x\_{1}=\frac{1-p\_{1}}{2-p\_{1}-p\_{2}}$$

Предельные вероятности:

$$p\_{1}^{\*}=\frac{1-p\_{2}}{2-p\_{1}-p\_{2}} ; p\_{2}^{\*}=\frac{1-p\_{1}}{2-p\_{1}-p\_{2}}$$