Решение задания 1.5, вариант 1 (рисунок 1.1).

Функция, заданная на рисунке 1.1, может быть записана следующим образом:

$$F(v) = \begin{cases} A, & \text{если} \quad v \in [0,2) \\ A(3-v), & \text{если} \quad v \in [2,3) \\ 0, & \text{если} \quad v \in [3,\infty) \end{cases}$$

Используем это выражение при нахождении интегралов.

1. Константу A находим из условия нормировки

$$\int_0^\infty F(v)\ dv = 1.$$

Для заданной F(v) имеем:

$$\int_0^\infty F(v)\ dv = \int_0^2 A\ dv + \int_2^3 A(3-v)\ dv = 2\ A + 0.5\ A = 2.5\ A\ ,$$

откуда находим: $A = 1/2.5 = 0.4$ с/км (помним про размерности физических величин: dv имеет размерность скорости, а $F(v)$ - обратную, так как интеграл равен безразмерной единице).

2. Средняя скорость:

$$< v >= \int_0^\infty vF(v)\ dv = A\int_0^2 v\ dv + A\int_2^3 v(3-v)\ dv =$$

$$= A\left(2 + \frac{7}{6}\right) = A\ 3\frac{1}{6} = 1.2667 \quad \text{км/с} = 1266.7 \quad \text{м/с}$$

3. Функция $F(v)$ заданного вида имеет максимальное значение при любом v из интервала $[0, 2]$ км/с, поэтому любое значение из этого интервала - наивероятнейшее.

4. Средний квадрат скорости:

$$< v^2 >= \int_0^\infty v^2F(v)\ dv = A\int_0^2 v^2\ dv + A\int_2^3 v^2(3-v)\ dv =$$

$$= A\ \frac{8}{3} + A\ \frac{11}{4} = A\ 5\frac{5}{12} = 2.1667 \quad (\text{км/с})^2.$$

теперь средняя квадратичная скорость:

$$v\ \text{ср.кв} = \sqrt{< v^2 >} = 1.472 \quad \text{км/ч}$$

5. Для нахождения средней длины свободного пробега пользуемся формулой 1.19 методички:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}.$$

В условии задано $n = 10^{24}$ m^{-3} и $\sigma = 2\ 10^{-20}$ m^2 (первый вариант, водород). Получаем

$$\lambda = 3.536\ 10^{-5} \quad \text{м}.$$

6. Температуру будем находить из формулы

$$T = \frac{\mu < v^2 >}{3R},$$

(переписанная формула 1.9 методички) где $\mu = 2\ 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса водорода, а $R = 8.3145$ Дж/(К моль) — универсальная газовая постоянная. Получим

$$T = 173.7 \quad \text{К}.$$

Пояснение: при вычислении надо использовать $< v^2 >$ выраженное в м/с. То есть средний квадрат скорости из пункта 4 умножается на 10^6. И оговорка: вообще-то использованная формула правильная для максвелловского распределения по скоростям, а здесь явно другое распределение, поэтому вместо формулы 1.9 методички еще можно было использовать формулу 1.8, при этом получилась бы другая температура.

7. Для определения коэффициентов вязкости, диффузии и теплопроводности пользуемся соответственно формулами 1.22, 1.26 и 1.24 методички:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho < v > \lambda$$

(коэффициент вязкости)

$$D = \frac{1}{3} < v > \lambda$$

(коэффициент диффузии)

$$\kappa = \frac{1}{3}\rho < v > \lambda C_V$$

(коэффициент диффузии). Здесь ρ — плотность газа, C_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Удельная теплоемкость двухатомного газа (пять степеней свободы у одной молекулы) равна

$$C_V = \frac{5R}{2\mu}.$$

(μ — молярная масса, для водорода $2\ 10^{-3}$ кг/моль) Для заданного в условии водорода получим

$$C_V = 5197 \quad \text{Дж/(К кг)}.$$

Найдем также плотность:

$$\rho = \frac{n\mu}{N_A} = 0.003321 \quad \text{кг}/m^3,$$

где $N_A = 6.0221413\ 10^{23}$ — число Авогадро. Значения $< v >$ и λ возьмем из пунктов 2 и 5, при этом $< v >$ возьмем выраженное в м/с. Получим для коэффициента диффузии значение

$$D = 0.015 \quad m^2/c,$$

для коэффициента вязкости

$$\eta = \rho D = 4.96\ 10^{-5} \quad \text{кг/(м с)},$$

и для теплопроводности

$$\kappa = C_V \eta = 0.26 \quad \text{Дж/(К м с)}.$$

8. Число соударений одной молекулы в секунду:

$$\nu = \sqrt{2}\sigma < v > n = 6.13\ 10^7 \quad 1/c$$

(формула получена комбинацией формул 1.16 и 1.17 методички)

Решение задания 2.4, вариант 1, рисунок 2.1.

На рисунке 2.1 в переменных p-V изображен замкнутый цикл, состоящий из следующих политропических процессов: участок 1-2 — изобара (горизонтальная линия в переменных $p - V$), участок 2-3 — адиабата (подпись к рисунку, система не получает тепла), участок 3-1 — изотерма (подпись к рисунку). Рабочее тело — двухатомный газ, число степеней свободы двухатомной молекулы $i = 5$, поэтому молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = 2.5R$ (формула 2.2 методички). Здесь R — универсальная газовая постоянная, $R = 8.3145$ Дж/К. Из формул 2.3 и 2.4 методички находим показатель адиабаты $\gamma = 7/5 = 1.4$. Согласно условию число молей: $\nu = 1$ моль.

1. Параметры характерных точек. В таблице заданы $p_1 = p_2 = 0.3$ атм., $V_1 = 0.2\ m^3$, $V_2 = 0.5\ m^3$. Надо найти T_1, T_2, T_3, p_3, V_3. Уравнение состояния идеального газа

$$pV = \nu RT.$$

Учитывая заданные значения, в частности $\nu = 1$, из уравнения находим

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{R\nu} = 722 = 7.22\ 10^2\ \text{К},$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{R\nu} = 1800 = 18\ 10^2\ \text{К}$$

(в таблицу надо занести ответ в *сотнях* Кельвинов). Так как участок 3-2 — изотерма, то мы нашли также $T_3 = T_1 = 722 = 7.22\ 10^2$ К. Чтобы найти p_3 и V_3 используем уравнения

$$p_1 V_1 = p_3 V_3, \quad p_1 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma.$$

первое — следствие того что 3-1 изотерма, второе — того что 2-3 — адиабата, еще учтено $p_1 = p_2$. Поделив уравнения друг на друга, найдем

$$V_3 = \left(\frac{V_2^\gamma}{V_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 4.94\ m^3.$$

И теперь

$$p_3 = \frac{\nu R T_3}{V_3} = 0.012 \text{ атм.}$$

2. Рисунки прилагаются в отдельном файле. Цикл изображен схематически, без соблюдения пропорций (соблюсти пропорции было бы сложно из-за большого различия в числах). При построении учитываем, что в переменных $p - T$ изобара изображается горизонтальной линией, изотерма — горизонтальной линией, а адиабата в этих переменных записывается как $p \sim T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. А в переменных $V - T$ изотерма изображается вертикальной линией, изобара имеет уравнение $V \sim T$ и изображается прямой линией, проходящей через начало координат, а адиабата имеет уравнение $V \sim T^{1-\gamma}$.

3. Работа в политропических процессах. Изобара 1-2, используем формулу 2.10 методички:

$$A_{1-2} = p_1(V_2 - V_1) = 9000 \text{ Дж} = 9 \text{ кДж.}$$

Адиабата 2-3, используем формулу 2.12, отношение масс заменяем на $\nu = 1$:

$$A_{2-3} = \frac{\nu R T_2}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}\right) = 22500 \text{ Дж} = 22.5 \text{ кДж.}$$

Изотерма 3-1, используем формулу 2.11 методички, в которой отношение масс заменяется на $\nu = 1$:

$$A_{3-1} = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right) = -19242 \text{ Дж} = -19.2 \text{ кДж.}$$

Отрицательное значение работы газа на этом участке цикла соответствует совершению положительной работы той же величины над газом.

4. Количество теплоты, полученное газом в политропических процессах. Изобара 1-2, используем формулы 2.14 и 2.3 методички:

$$Q_{1-2} = \nu C_p(T_2 - T_1) = \frac{7}{2}\nu R(T_2 - T_1) = 31500 \text{ Дж} = 31.5 \text{ кДж.}$$

Адиабата 2-3: по определению адиабаты, количество полученного газом тепла равно нулю, $Q_{2-3} = 0$. Изотерма 3-1: так как внутренняя энергия идеального газа при изотермическом процессе не изменяется (учитываем, что количество вещества не изменяется), то по первому началу термодинамики (закон сохранения энергии, формула 2.13 методички) количество тепла, полученное идеальным газом на изотерме, равно совершенной работе. То есть

$$Q_{3-1} = A_{3-1} = -19242 \text{ Дж} = -19.2 \text{ кДж.}$$

Отрицательное значение полученного количества тепла означает, что газ отдает такое же по величине положительное количество тепла.

5. КПД цикла. Пользуемся формулой 2.15 методички. Так как рабочее тело получает тепло на участке 1-2, а отдает — на участке 3-1, то

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{3-1}|}{Q_{1-2}} = 0.39.$$

6. КПД цикла Карно в том же интервале температур. Максимальная температура рабочего тела в цикле равна T_2 и достигается в точке 2 (конец нагрева 1-2), а минимальная — равна $T_3 = T_1$. КПД соответствующего цикла Карно (формула 2.16 методички):

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.6$$

7. Показатели политропы процессов. В переменных $p - V$ политропический процесс описывается уравнением $pV^n = \mathrm{const}$, где n — показатель политропы . Поэтому изобаре 1-2, $p = \mathrm{const}$, соответствует показатель политропы $n = 0$. Адиабате 2-3 идеального двухатомного газа, $pV^\gamma = \mathrm{const}$, соответствует $n = \gamma = C_p/C_V = 7/5 = 1.4$. Изотерме 3-1, $pV = \mathrm{const}$, соответствует $n = 1$.

8. Рассмотренный цикл принадлежит тепловой машине, так как работа за цикл положительна:

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-1} = 12258 \text{ Дж} = 12.3 \text{ кДж}.$$

9. Изменение энтропии. Используем формулу 2.20 методички, в которой отношение масс заменено на количество молей $\nu = 1$. Для изобары 1-2:

$$\Delta S_{1-2} = \nu \left(C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right) = 26.7 \text{ Дж/К}.$$

Использовали, что для двухатомного газа $C_V = 2.5R$. На адиабате 2-3 в силу второго начала термодинамики (формула 2.18 методички) изменение энтропии равно нулю, $\Delta S_{2-3} = 0$. На изотерме 3-1 имеем:

$$\Delta S_{3-1} = \nu \left(C_V \ln\left(\frac{T_1}{T_3}\right) + R \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right)\right) = -26.7 \text{ Дж/К}.$$

10. Изменение энтропии за цикл равно нулю:

$$\Delta S = \Delta S_{1-2} + \Delta S_{2-3} + \Delta S_{3-1} = 0$$

Это является проявлением того, что энтропия — однозначная функция термодинамического состояния системы.

11. У трехатомной молекулы число степеней свободы $i = 6$ отличается от числа степеней свободы двухатомной молекулы. Поэтому при расчетах процесса для трехатомного идеального газа надо использовать другое значение теплоемкости $C_V = R\ i/2 = 3R$, что приводит к изменению показателя адиабаты, значение которого становится $\gamma = 4/3$. Значения величин, при вычислении которых используются C_V и γ, изменятся. Уравнение состояния идеального газа

$$pV = \nu RT$$

не изменяется при рассмотрении трехатомного газа, поэтому значения величин, расчет которых производился на основе уравнения состояния, не изменятся.

Итак, значения T_1, T_2, T_3 не изменятся, а значения p_3 и V_3 изменятся. A_{1-2} не изменится, A_{2-3} и A_{3-1} изменятся. Q_{2-3} не изменится, Q_{1-2} и Q_{3-1} изменятся. КПД цикла η изменится, а КПД цикла Карно не изменится, так как не изменится интервал температур. Показатели политропических процессов изобары и изотермы не изменятся, а показатель адиабаты станет равен 4/3. ΔS_{2-3} не изменится (2-3 — адиабата), а ΔS_{1-2} и ΔS_{3-1} изменятся. Изменение энтропии за цикл не изменится, оно останется равным нулю и для трехатомного газа.