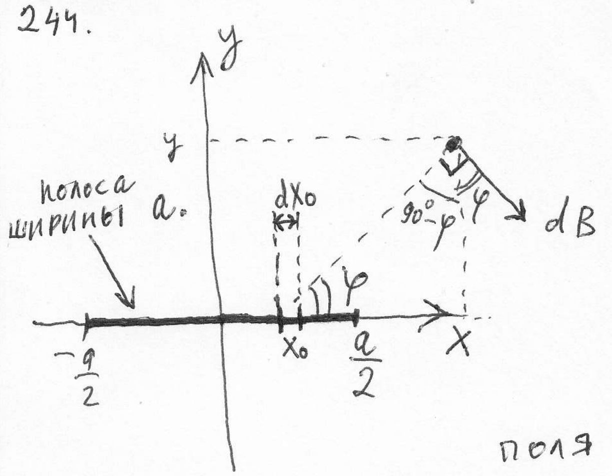
244.



Очевидно поле не зависит от координаты z перпендикулярной чертежу. (z направлено вдоль полосы).

Рассмотрим элемент ширины dx_0 (см. рис.)

По нему течет ток $dI = \frac{I}{a}\cdot dx_0$

Используя формулу для магнитного поля бесконечно длинного провода получаем, что элемент dx_0 создает в точке с координатами x, y магнитное поле, которое $\perp$ оси провода,

$$dB = \frac{2\,dI}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2+(x-x_0)^2}},$$

$\sqrt{y^2+(x-x_0)^2}$ – расстояние от точки $(x_0, 0)$ до точки (x, y)

Проекции dB на координатные оси: $dB_z = 0$

$$dB_x = dB\cdot\sin\varphi = \frac{2I\,dx_0}{ac}\frac{1}{\sqrt{y^2+(x-x_0)^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+(x-x_0)^2}} = \frac{2Iy}{ac}\,\frac{dx_0}{y^2+(x-x_0)^2}$$

$$dB_y = -dB\cdot\cos\varphi = -\frac{2I\,dx_0}{ac}\frac{1}{\sqrt{y^2+(x-x_0)^2}}\cdot\frac{x-x_0}{\sqrt{y^2+(x-x_0)^2}} = \frac{2I}{ac}\cdot\frac{(x_0-x)\,dx_0}{y^2+(x-x_0)^2}$$

Интегрируя от $x_0 = -\frac{a}{2}$ до $x_0 = \frac{a}{2}$ получаем полное магн. поле в точке x, y:

$$B_x = \frac{2Iy}{ac}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{dx_0}{y^2+(x-x_0)^2} = \frac{2I}{ac}\int_{-\frac{a+2x}{2y}}^{\frac{a-2x}{2y}}\frac{d\,\frac{x_0-x}{y}}{1+\left(\frac{x_0-x}{y}\right)^2} = \frac{2I}{ac}\,\mathrm{arctg}\,\xi\Big|_{\xi=-\frac{a+2x}{2y}}^{\frac{a-2x}{2y}} =$$

$$= \frac{2I}{ac}\cdot\left[\mathrm{arctg}\,\frac{a-2x}{2y} + \mathrm{arctg}\,\frac{a+2x}{2y}\right]$$

$$B_y = \frac{2I}{ac}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{(x_0-x)\,dx_0}{y^2+(x-x_0)^2} = \frac{I}{ac}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{d\left[(x_0-x)^2+y^2\right]}{(x-x_0)^2+y^2} = \frac{I}{ac}\ln\left[y^2+(x_0-x)^2\right]\Big|_{x_0=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{I}{ac}\cdot\ln\frac{y^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}{y^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2}, \quad B_z = 0.$$

При $|x|, |y| \gg a$ получаем, разлагая по степеням $\frac{a}{|x|}, \frac{a}{|y|}$:

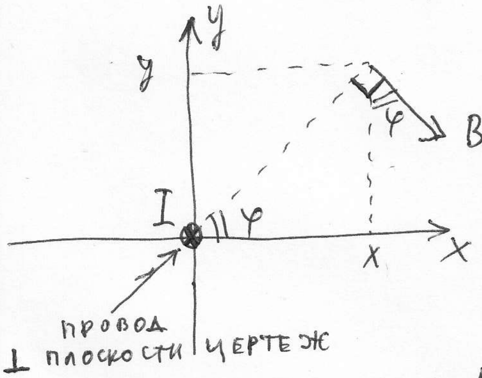
$$B_x = \frac{2I}{ac}\cdot\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}+\frac{a}{2y}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}-\frac{a}{2y}\right)\right] \approx$$

$$\approx \frac{2I}{ac}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} + \frac{a}{2y}\cdot(\mathrm{arctg}\,\xi)'\Big|_{\xi=\frac{x}{y}} - \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} - \left(-\frac{a}{2y}\right)\cdot(\mathrm{arctg}\,\xi)'\Big|_{\xi=\frac{x}{y}}\right] =$$

$$= \frac{2I}{ac}\cdot\frac{a}{y}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}\Big|_{\xi=\frac{x}{y}} = \frac{2I}{c}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$B_y = \frac{I}{ac}\ln\frac{x^2+y^2+\frac{a^2}{4}-ax}{x^2+y^2+\frac{a^2}{4}+ax} = \frac{I}{ac}\left[\ln\left(1-\frac{ax}{x^2+y^2+\frac{a^2}{4}}\right)-\ln\left(1+\frac{ax}{x^2+y^2+\frac{a^2}{4}}\right)\right]\approx$$

$$\approx\frac{I}{ac}\cdot\left[-\frac{ax}{x^2+y^2+\frac{a^2}{4}}-\frac{ax}{x^2+y^2+\frac{a^2}{4}}\right]\approx\frac{-2Ix}{c(x^2+y^2)}$$

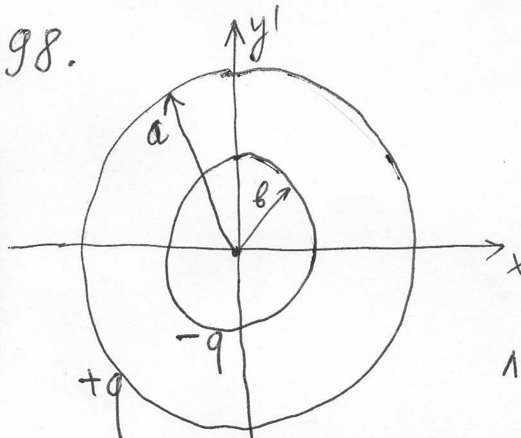


Это поле действительно совпадает с полем бесконечно длинного провода с током I, $B = \frac{2I}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (см. рис.)

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

проекции $B_x = B\cdot\sin\varphi$, $B_y = -B\cos\varphi$, $B_z = 0$.

98.



$x' = r'\cos\varphi'$, $y' = r'\sin\varphi'$

где $r' = b$ для внутреннего кольца и $r' = a$ для внешнего кольца.

Воспользуемся формулами (11.8'), где вместо объемных плотностей используем линейные плотности $\rho_a = \frac{q}{2\pi a}$, $\rho_b = -\frac{q}{2\pi b}$ и интегрируем по линейным элементам окружностей $dl'_a = a\,d\varphi'$ и $dl'_b = b\,d\varphi'$, а не по объему.

Очевидно, полный заряд системы равен 0.

Вычислим компоненты дипольного момента:

$$P_x = \int\rho_a x'\,dl'_a + \int\rho_b x'\,dl'_b = \int_0^{2\pi}\frac{q}{2\pi a}\cdot a\cos\varphi'\cdot a\,d\varphi' - \int_0^{2\pi}\frac{q}{2\pi b}\cdot b\cos\varphi'\cdot b\,d\varphi' =$$

$$= \frac{q(a-b)}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$$

совершенно аналогично $P_y = 0$.

$P_z = 0$, так как система плоская.

В итоге $\vec{P} = 0$, т.е. дипольный момент отсутствует.

Вычисляем квадрупольный момент:

ТАК КАК СИСТЕМА ПЛОСКАЯ, ТО СРАЗУ ПОЛУЧАЕМ

$Q_{xz} = Q_{yz} = Q_{zz} = 0.$

$$Q_{xx} = \int \rho_a \cdot x'x' \cdot dl'_a + \int \rho_b \cdot x'x' \cdot dl'_b = \int_0^{2\pi} \frac{q}{2\pi a} \cdot a^2 \cos^2\varphi' \cdot a\, d\varphi' - \int_0^{2\pi} \frac{q}{2\pi b} \cdot b^2 \cos^2\varphi' \cdot b\, d\varphi' =$$

$$= \frac{q}{2\pi}(a^2 - b^2) \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{q}{2\pi}(a^2 - b^2) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{q}{2\pi}(a^2 - b^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{q}{2}(a^2 - b^2)$$

ИЗ СИММЕТРИИ ЗАДАЧИ ЯСНО, ЧТО $Q_{yy} = Q_{xx}$.

$$Q_{xy} = \int \rho_a \cdot x'y' \cdot dl'_a + \int \rho_b \cdot x'y' \cdot dl'_b = \int_0^{2\pi} \frac{q}{2\pi a} \cdot a^2 \cos\varphi' \sin\varphi' \cdot a\, d\varphi' -$$

$$- \int_0^{2\pi} \frac{q}{2\pi b} \cdot b^2 \cos\varphi' \sin\varphi' \cdot b\, d\varphi' = \frac{q}{2\pi}(a^2 - b^2) \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{q}{2\pi}(a^2 - b^2) \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi\, d\varphi = 0$$

ИСПОЛЬЗУЯ ФОРМУЛУ (11.9') НАХОДИМ ПОТЕНЦИАЛ СИСТЕМЫ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ (ТАК КАК ПОЛНЫЙ ЗАРЯД И ДИПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ РАВНЫ 0, ТО ВКЛАД ДАЕТ ТОЛЬКО КВАДРУПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ):

$$\varphi = \frac{1}{2r^5}\left[(3x^2 - r^2)Q_{xx} + (3y^2 - r^2)Q_{yy}\right] = \frac{q(a^2 - b^2)}{4r^5} \cdot (3x^2 + 3y^2 - 2r^2), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ИСПОЛЬЗУЯ СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ ПОЛУЧАЕМ

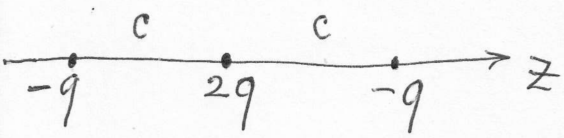
$$\varphi = \frac{q(a^2 - b^2)}{4r^5} \cdot (3r^2 - 3z^2 - 2r^2) = \frac{q(a^2 - b^2)}{4r^3} \cdot \left(1 - 3\frac{z^2}{r^2}\right) = \frac{q(a^2 - b^2)}{4r^3} \cdot (1 - 3\cos^2\theta)$$

ИСПОЛЬЗУЯ ПОЛИНОМ ЛЕЖАНДРА $P_2(\cos\theta) = \dfrac{3\cos^2\theta - 1}{2}$ ПОЛУЧАЕМ

$$\varphi = -\frac{q(a^2 - b^2)}{2} \cdot \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3}$$

СРАВНИМ φ С ПОТЕНЦИАЛОМ ЛИНЕЙНОГО КВАДРУПОЛЯ ИЗ ЗАДАЧИ 94.

В ПУНКТЕ а) ЗАДАЧИ 94 НАЙДЕН ПОТЕНЦИАЛ ЛИНЕЙНОГО КВАДРУПОЛЯ (СМ. РИС.):



$$-2qc^2 \cdot \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3}$$

ЭТО ВЫРАЖЕНИЕ СОВПАДАЕТ С ПОТЕНЦИАЛОМ φ ЕСЛИ ПОЛОЖИТЬ $-\dfrac{q(a^2 - b^2)}{2} = -2qc^2 \Rightarrow c^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{4}$, Т.Е. $c = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$.

563 $w^i = \frac{du^i}{d\tau}$, где $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ – четырехмерная скорость

$d\tau = dt \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ – собственное время, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Используя явное выражение для u^i получаем

$$u^i = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$w^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{du^i}{dt} = \gamma\frac{du^i}{dt}$$

$$w^0 = \gamma \cdot \frac{du^0}{dt} = \gamma \cdot \frac{d}{dt}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma c \cdot \frac{\frac{1}{c^2}\frac{dv^2}{dt}}{2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{\gamma^4}{2c}\frac{dv^2}{dt}$$

так как $v^2 = (\vec{v}\vec{v})$, то $\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(\vec{v}\vec{v})}{dt} = 2\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = 2(\vec{v}\dot{\vec{v}})$

поэтому $w^0 = \frac{\gamma^4}{c}(\vec{v}\dot{\vec{v}})$.

Аналогично вычисляем пространственные компоненты:

$$\vec{w} = \gamma\frac{d}{dt}\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] =$$

$$= \gamma\left[\gamma\dot{\vec{v}} + \vec{v} \cdot \frac{\frac{1}{c^2}\frac{dv^2}{dt}}{2\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right] = \gamma\left[\gamma\dot{\vec{v}} + \frac{\vec{v}\gamma^3}{2c^2}\cdot 2(\vec{v}\dot{\vec{v}})\right] = \gamma^2\left(\dot{\vec{v}} + \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v}\dot{\vec{v}})\gamma^2\right)$$

В итоге получаем четырехмерное ускорение

$$w^i = \gamma^2 \cdot \left(\frac{\gamma^2}{c}(\vec{v}\dot{\vec{v}}), \dot{\vec{v}} + \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v}\dot{\vec{v}})\gamma^2\right)$$

$$w^i w_i = (w^0)^2 - (\vec{w})^2 = \frac{\gamma^8}{c^2}(\vec{v}\dot{\vec{v}})^2 - \gamma^4\left[\dot{\vec{v}} + \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{v}\dot{\vec{v}})\gamma^2\right]^2 =$$

$$= \gamma^4 \cdot \left[\frac{(\vec{v}\dot{\vec{v}})^2\gamma^4}{c^2} - \left((\dot{\vec{v}})^2 + \frac{2(\dot{\vec{v}}\vec{v})}{c^2}(\vec{v}\dot{\vec{v}})\gamma^2 + \frac{v^2}{c^4}(\vec{v}\dot{\vec{v}})^2\gamma^4\right)\right] =$$

$$= \gamma^4 \cdot \left[-(\dot{\vec{v}})^2 + \frac{(\vec{v}\dot{\vec{v}})^2\gamma^4}{c^2} - \frac{2\gamma^2(\vec{v}\dot{\vec{v}})^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^4}(\vec{v}\dot{\vec{v}})^2\gamma^4\right] =$$

$$= \gamma^4\left[-(\dot{\vec{v}})^2 - \frac{2\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\dot{\vec{v}})^2 + \frac{\gamma^4(\vec{v}\dot{\vec{v}})^2}{c^2} \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \gamma^4\left[-(\dot{\vec{v}})^2 - \frac{2\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\dot{\vec{v}})^2 + \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\dot{\vec{v}})^2\right] =$$

$$= \gamma^4\left(-(\dot{\vec{v}})^2 - \frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{v}\dot{\vec{v}})^2\right) < 0$$

Видно, что $w_i w^i$ – квадрат четырехмерного ускорения, отрицателен, поэтому w^i – пространственноподобный вектор.