Задание 9

Найти все конечные особые точки функций и определить их характер.

а) $\dfrac{1}{z^2}$; б) $\dfrac{1+z}{\cos z}$.

Решение:

а)

$$f(z) = \frac{1}{z^2}$$

Функция имеет одну конечную изолированную особую точку: $z_0 = 0$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{z^2} = \infty$$

$\Rightarrow z_0 = 0$ — полюс функции $f(z)$. Определим его порядок.

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lim_{z \to 0} (z - 0)^m \frac{1}{z^2} = \lim_{z \to 0} z^{m-2} \neq 0 \text{ при } m = 2$$

$\Rightarrow z_0 = 0$ — полюс 2-го порядка.

б)

$$f(z) = \frac{1+z}{\cos z}$$

Поскольку числитель дроби — функция, аналитичная во всей комплексной плоскости, то особыми точками являются нули значенателя, т.е. корни уравнения

$$\cos z = 0$$

$$z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{z \to z_n} f(z) = \lim_{z \to z_n} \frac{1+z}{\cos z} = \infty$$

$\Rightarrow z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ — полюсы функции $f(z)$.

В окрестности точки $z_0 = \frac{\pi}{2}$ имеем разложение в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1+z}{\cos z} =$$

$$-\frac{1 + \frac{\pi}{2}}{(z - \frac{\pi}{2})} - 1 - \frac{1}{6}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + O\left(\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

Отсюда видно, что главная часть ряда имеет один член с отрицательной степенью, $\Rightarrow z_0 = \frac{\pi}{2}$ — простой полюс.

Пусть

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{\cos z}{1+z}$$

Тогда

$$\varphi'(z_n) = \left(\frac{\cos z}{1+z}\right)\Big|_{z_k} = -\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\pi k)}{(z_n+1)^2} - \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\pi k)}{z_k+1} =$$
$$= \frac{\sin \pi k}{(z_k+1)^2} - \frac{\cos \pi k}{z_k+1} = -\frac{\cos \pi k}{z_k+1} \neq 0$$

$\Rightarrow z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = \pm 1, \pm 2,$ — простые нули для $\varphi(z)$ или простые полюсы для $f(z)$.

Задание 8

Найти: а) разложения функций в ряд Лорана по степеням $z-z_0$; б) области сходимости полученных разложений.

$\frac{1}{z(z+1)}, \quad z_0=-1.$

Решение:

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)}, \quad z_0 = -1$$

Чтобы разложить функцию в ряд, преобразуем ее к виду, допускающему использование стандартных разложений.

Функция имеет имеет особые точки $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, которые определяют области, где разложения имеют место:

$$|z+1| < 1, \quad 1 < |z+1| < \infty$$

1) Рассмотрим разложение функции в области $|z+1| < 1$. Используем известное разложение

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ |z| < 1}$$

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left\{z+1 = a,\ z = a-1\right\} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{1-a} - \frac{1}{a} =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} a^n - \frac{1}{a} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n - \frac{1}{z+1}$$

Итак имеем

$$\boxed{f(z) = -\frac{1}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n,\ |z+1| < 1}$$

$-\dfrac{1}{z+1}$ — главная часть ряда Лорана

$-\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n$ — правильная часть ряда Лорана

2) Рассмотрим разложение функции в области $1 < |z+1| < \infty$. Используем

известное разложение

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\ |z| > 1$$

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}},\ |z| > 1}$$

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = -\frac{1}{1-a} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{a}}\right) - \frac{1}{a} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}} - \frac{1}{(z+1)}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}} - \frac{1}{(z+1)},\ \ 1 < |z+1| < \infty}$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}} - \frac{1}{(z+1)}$ — главная часть ряда Лорана

правильная часть ряда Лорана отсутствует