6.36. На какое расстояние $r_{\min}$ может приблизиться к неподвижному ядру атома золота α-частица при центральном «соударении», если скорость частицы на большом расстоянии от ядра $v=3{,}00\cdot 10^7$ м/с?

Решение:

Из условия задачи видно, что скорость α –частицы релятивистская ($v \sim c$). Действительно, из выражения для лоренц-фактора

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{1}$$

находим

$$v = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = c\sqrt{1-\left(\frac{3\cdot 10^7}{3\cdot 10^8}\right)^2} = 0.99499c \tag{2}$$

Рассмотрим центральное "соударение" заряженной частицы (α –частицы) и ядра атома золота (движение в кулоновском поле) в рамках релятивистской динамики. Будем считать, что налетающая частица имеет заряд $q_1 = +2e$, и массу $m = m_\alpha$, а неподвижный рассеивающий центр имеет заряд $q_2 = +Ze$. (Z — зарядовое число (количество протонов в ядре)) Кулоновские силы являются центральными. При движении в поле центральных сил выполняется закон сохранения энергии рассматриваемой системы.

При столкновении α –частицы с ядром вся её энергия E переходит в потенциальную энергию взаимодействия с ядром и энергию покоя. Таким образом, имеем следующий закон сохранения энергии

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{\min}} + E_0 \tag{3}$$

где $r_{\min}$ — минимальное расстояние от ядра до альфа-частицы, ε_0 — электрическая постоянная в единицах измерения СИ, или

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{\min}} + mc^2 \tag{3*}$$

Найдем отсюда $r_{\min}$

$$\boxed{r_{\min} = \frac{q_1 q_2}{4\pi mc^2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)^{-1}} \tag{4}$$

или

$$\boxed{r_{\min} = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 m_\alpha c^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)^{-1}} \tag{5}$$

Подставляя числовые данные, получаем

$$\underline{r_{\min}} = \frac{79\cdot(1.6\cdot 10^{-19})^2}{2\cdot 3.14\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 6.7\cdot 10^{-27}\cdot(3\cdot 10^8)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3\cdot 10^7}{3\cdot 10^8}\right)^2}}-1\right)^{-1} =$$

$$= 1.1979\cdot 10^{-14}\text{м} \approx \underline{1.2\cdot 10^{-14}\text{м}}$$

Примечание

При нерелятивистских скоростях α –частиц ($v \ll c$) выполняется принцип соответствия. Разложим энергию частицы в ряд по малому параметру $X \equiv \left(\frac{v}{c}\right)^2$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = mc^2\frac{1}{\sqrt{1-X}} = mc^2\left(1+\frac{1}{2}X+\ldots\right) \simeq mc^2 + \frac{mc^2}{2}X \Rightarrow$$

Таким образом, получаем

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \overset{v\ll c}{=} mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{\min}} + mc^2 \overset{v\ll c}{\to} mc^2 + \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{\min}} + mc^2$$

или

$$\boxed{\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{\min}}}$$

что совпадает с классическим соотношением.

6.92. Написать выражение для дебройлевской длины волны λ релятивистской частицы массы m: а) через ее скорость v, б) через кинетическую энергию $E_к$.

Решение:

Соотношение де Бройля, связывающее импульс квантовой частицы p с длиной волны λ, которая ее описывает, имеет вид

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \tag{1}$$

а) Импульс релятивистской частицы равен

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \tag{2}$$

Используя соотношения (1) и (2),выразим длину волны частицы λ через её скорость:

$$p = |\vec{p}| = \frac{m|\vec{v}|}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \tag{3}$$

б) Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы определяется соотношением

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \tag{4}$$

С другой стороны, полная энергия движущейся частицы равна сумме её кинетической энергии и энергии покоя

$$E = E_к + mc^2 \tag{5}$$

Используя соотношения (1), (4) и (5), находим

$$p^2c^2 = E^2 - m^2c^4$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{(E_к + mc^2)^2 - m^2c^4} =$$
$$= \frac{1}{c}\sqrt{E_к^2 + 2mc^2E_к + m^2c^4 - m^2c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{E_к^2 + 2mc^2E_к} =$$
$$= \frac{1}{c}\sqrt{2mc^2E_к\left(1 + \frac{E_к}{2mc^2}\right)} = \sqrt{2mE_к\left(1 + \frac{E_к}{2mc^2}\right)}$$

$$p = \sqrt{2mE_к\left(1 + \frac{E_к}{2mc^2}\right)} \qquad (6)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_к\left(1+\frac{E_к}{2mc^2}\right)}}} \qquad (7)$$

6.81. Длина волны линии K_α у ванадия $(Z=23)$ $\lambda_V = 0{,}25073$ нм, а у меди $(Z=29)$ $\lambda_{Cu} = 0{,}15443$ нм.

а) Исходя из этих данных, найти значения констант C и σ в уравнении закона Мозли: $\sqrt{\omega} = C(Z-\sigma)$. Сравнить найденное значение C с величиной, равной $\sqrt{3R/4}$ (R — постоянная Ридберга).

б) Определить атомный номер Z элемента, у которого длина волны линии K_α $\lambda = 0{,}19399$ нм. Что это за элемент?

Решение:

Согласно закону Мозли, корень квадратный из частоты данной спектральной линии характеристического излучения элемента есть линейная функция его порядкового номера в таблице Менделеева Z:

$$\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma) \qquad (1)$$

где C, σ — постоянные, атомный номер Z имеет смысл электрического заряда ядра и равен числу протонов в ядре.

Связь между длиной волны и циклической частотой электромагнитного излучеия (в вакууме) определяется соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \qquad (2)$$

где c — скорость света.

а) Запишем, с учетом (2), закон Мозли для каждого элемента из условия задачи и найдем значения постоянных C и σ.

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\tfrac{2\pi c}{\lambda_V}} &= C(Z_V - \sigma), \\ \sqrt{\tfrac{2\pi c}{\lambda_{Cu}}} &= C(Z_{Cu} - \sigma) \end{aligned}\right\}(-) \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{2\pi c}{\lambda_V}} - \sqrt{\frac{2\pi c}{\lambda_{Cu}}}\right) = C(Z_V - \sigma) - C(Z_{Cu} - \sigma) \Rightarrow$$

$$\sqrt{2\pi c}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}\right) = C(Z_V - Z_{Cu}) \Rightarrow$$

$$\boxed{C = \frac{\sqrt{2\pi c}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}\right)}{Z_V - Z_{Cu}}} \qquad (3)$$

или

$$\boxed{C = \frac{\sqrt{2\pi c}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}\right)}{Z_{Cu}-Z_V}} \tag{3*}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{2\pi c}{\lambda_V}} &= C(Z_V-\sigma),\\ \sqrt{\frac{2\pi c}{\lambda_{Cu}}} &= C(Z_{Cu}-\sigma)\end{aligned}\right\}(+) \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{2\pi c}{\lambda_V}}+\sqrt{\frac{2\pi c}{\lambda_{Cu}}}\right) = C(Z_V-\sigma)+C(Z_{Cu}-\sigma) \Rightarrow$$

$$\sqrt{2\pi c}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}\right) = C(Z_V+Z_{Cu})-2C\sigma \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{1}{2C}\left[C(Z_V+Z_{Cu})-\sqrt{2\pi c}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(Z_V+Z_{Cu})-\frac{\sqrt{2\pi c}}{C}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(Z_V+Z_{Cu})-\frac{1}{\frac{\sqrt{2\pi c}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}\right)}{Z_{Cu}-Z_V}}\sqrt{2\pi c}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(Z_V+Z_{Cu})-\frac{Z_{Cu}-Z_V}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(Z_V+Z_{Cu})\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}\right)-(Z_{Cu}-Z_V)\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\frac{Z_V}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}-\frac{2}{\sqrt{\lambda_V}}Z_{Cu}}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}} = \frac{\frac{Z_V}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}-\frac{Z_{Cu}}{\sqrt{\lambda_V}}}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\frac{Z_V}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}-\frac{Z_{Cu}}{\sqrt{\lambda_V}}}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_{Cu}}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_V}}}} \tag{4}$$

Найдем численное значение C:

$$C = \frac{\sqrt{2\cdot 3.14\cdot 3\cdot 10^8}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{0.15443\cdot 10^{-9}}}-\frac{1}{\sqrt{0.25073\cdot 10^{-9}}}\right)}{29-23} = 1.2527\cdot 10^8 c^{-1/2}$$

проверка размерности

$$[C] = [м^{1/2}\cdot c^{-1/2}\cdot м^{1/2}] = [c^{-1/2}]$$

Сравним полученное значение C с с величиной, равной $\sqrt{\frac{3R}{4}}$, где $R = 2{,}0670687\cdot 10^{16}c^{-1}$ — постоянная Ридберга

$$\frac{C}{\sqrt{\frac{3R}{4}}} = \frac{1.2527\cdot 10^8}{\sqrt{\frac{3\cdot 2.0670687\cdot 10^{16}}{4}}} = 1.0061 \Rightarrow$$

$$C = 1.006\sqrt{\frac{3R}{4}}$$

Найдем численное значение σ :

$$\sigma = \frac{\frac{23}{\sqrt{0.15443 \cdot 10^{-9}}} - \frac{29}{\sqrt{0.25073 \cdot 10^{-9}}}}{\frac{1}{\sqrt{0.15443 \cdot 10^{-9}}} - \frac{1}{\sqrt{0.25073 \cdot 10^{-9}}}} = 1.1181 \simeq 1.12$$

б) Найдем из (1), с учетом (2), величину Z

$$\sqrt{\frac{2\pi c}{\lambda_X}} = C(Z_X - \sigma) \Rightarrow$$

$$\boxed{Z_X = \sigma + \frac{1}{C}\sqrt{\frac{2\pi c}{\lambda_X}}} \qquad (5)$$

$$Z_X = 1.12 + \frac{1}{1.2527 \cdot 10^8}\sqrt{\frac{2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^8}{0.19399 \cdot 10^{-9}}} = 25.997 \simeq 26$$

Согласно таблице Менделеева, элемент с порядковым номером $Z = 26$ — железо.

6.61. Потенциал ионизации водородного атома равен 13,6 В. Исходя из этого, определить, сколько линий серии Бальмера попадают в видимую часть спектра.

Решение:

Согласно теории атома водорода набор допустимых значений энергии атома определяется соотношением

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \qquad (1)$$

где n — главное квантовое число.

Для атома водорода основное состояние — состояние с наименьшей энергией $E_1 = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}$, в котором он может находится неограниченно долго.

Энергия ионизации атома водорода — минимальная энергия, необходимая для выбивания электрона из атома, находящегося в основном состоянии

$$W_H = E_\infty - E_1 = eV$$

где E_∞ — граница ионизации, V — потенциал ионизации атома водорода..

Полагая $E_\infty = 0,$ получаем для энергии ионизации атома водорода

$$W_H = -E_1 = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = eV \qquad (2)$$

Тогда дискретные уровни энергии можно выразить через потенциал ионизации следующим образом

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{eV}{n^2} \qquad (3)$$

Обобщенная формула Бальмера.для вычисления частот и длин волн спектра атома водорода в терминах потенциала ионизации:

$$\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar} = \frac{m_e e^4}{2\hbar^3}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (4)$$

$$\omega = \frac{eV}{\hbar}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (4^*)$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{eV}{\hbar}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{eV}{2\pi\hbar c}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (5)$$

Длины волн спектра атома водорода образуют серии, характеризующиеся фиксированным значением m в (5). Все длины волн данной серии излучаются при переходах на уровень E_m с вышележащих энергетических уровней E_m $(n = m+1, m+2, m+3, \dots)$.

Переходы на второй уровень $(m = 2)$ образуют серию Бальмера. В этом случае (5) принимает вид

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{eV}{2\pi\hbar c}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (6)$$

Спектру видимого излучения соответствует диапазон длин волн $\lambda = 380 - 780$*нм*.

Определим, сколько линий серии Бальмера попадают в видимую часть спектра, рассмотрев несколько энергетический уровней

$$m = 2, n = 3 : \ \lambda_1 = \left(\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 13.6}{2 \cdot 3.14 \cdot 1.054 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^2}\right)\right)^{-1} \approx 657 \cdot 10^{-9} = 657\text{нм}$$

$$m = 2, n = 4 : \ \lambda_2 = \left(\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 13.6}{2 \cdot 3.14 \cdot 1.054 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}\right)\right)^{-1} \approx 487 \cdot 10^{-9} = 487\text{нм}$$

$$m = 2, n = 5 : \ \lambda_3 = \left(\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 13.6}{2 \cdot 3.14 \cdot 1.054 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5^2}\right)\right)^{-1} \approx 434 \cdot 10^{-9} = 434\text{нм}$$

$$m = 2, n = 6 : \ \lambda_4 = \left(\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 13.6}{2 \cdot 3.14 \cdot 1.054 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6^2}\right)\right)^{-1} \approx 410 \cdot 10^{-9} = 410\text{нм}$$

$$m = 2, n = 7 : \ \lambda_5 = \left(\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 13.6}{2 \cdot 3.14 \cdot 1.054 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7^2}\right)\right)^{-1} \approx 397 \cdot 10^{-9} = 397\text{нм}$$

Лишь первые четыре линии излучения серии Бальмера лежат в видимом диапазоне $(n = 3, 4, 5, 6)$. Линия с $n = 7$. $\lambda = 397$*нм* уже соответствует излучению в ультрафиолетовой области спектра (ультрафиолет А, диапазон $\lambda = 315 - 400$*нм*).

6.121. Какие из термов: 1) $^2S_1$, 2) $^2P_1$, 3) $^3P_{1/2}$, 4) $^3P_3$, 5) $^5D_0$, 6) $^1F_0$, 7) $^8F_{13/2}$ написаны неверно?

Решение:

Определенное энергетическое состояние атома называется атомным термом.

Состояния с различными значениями полного орбитального момента L обозначаются большими буквами латинского алфавита со следующим соответствием [1]

$L =$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
S	P	D	F	G	H	I	K	L	M	N ...

Атомный терм обозачается следующим образом

$$^{2S+1}(L)_J$$

где $2S+1$ — мультиплетность терма, S — полное спиновое квантовое число, атома, J — квантовое число полного углового момента атома, которое может пробегать значения

$$J = \{L+S, L+S-1, \dots, |L-S|+1, |L-S|\}$$

При $L > S$ число возможных состояний равно $J = 2S+1$, при $L < S$ $J = 2L+1$

¹) При $2S+1=1, 2, 3, \ldots$ говорят соответственно о синглетиом, дублетном, триплетном уровнях.

$\boxed{1)\ {}^2S_1}$

$L=0.$

$2S+1=2 \Rightarrow S=\frac{1}{2}.$

$L<S \Rightarrow$ число возможных состояний $J=2L+1=1$, возможные значения $J=\{0+\frac{1}{2},\ldots,\left|0-\frac{1}{2}\right|\}=\frac{1}{2}$. По условию здачи $J=1 \Rightarrow$ терм ${}^2S_1$ записан неверно.

$\boxed{2)\ {}^2P_1}$

$L=1,$

$2S+1=2 \Rightarrow S=\frac{1}{2},$

$L>S \Rightarrow$ число возможных состояний $J=2S+1=2$, возможные значения $J=\{1+\frac{1}{2},\ldots,\left|1-\frac{1}{2}\right|\}=\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\}$. По условию здачи $J=1 \Rightarrow$ терм ${}^2P_1$ записан неверно.

$\boxed{3)\ {}^3P_{1/2}}$

$L=1,$

$2S+1=3 \Rightarrow S=1,$

$L=S \Rightarrow$ число возможных состояний $J=2S+1=2L+1=3$, возможные значения $J=\{1+1,\ldots,|1-1|\}=\{2,1,0\}$. По условию здачи $J=1/2 \Rightarrow$ терм ${}^3P_{1/2}$ записан неверно.

$\boxed{4)\ {}^3P_3}$

$L=1,$

$2S+1=3 \Rightarrow S=1,$

$L=S \Rightarrow$ число возможных состояний $J=2S+1=2L+1=3$, возможные значения $J=\{1+1,\ldots,|1-1|\}=\{2,1,0\}$. По условию здачи $J=3 \Rightarrow$ терм ${}^3P_3$ записан неверно.

$\boxed{5)\ {}^5D_0}$

$L=2,$

$2S+1=5 \Rightarrow S=2,$

$L=S \Rightarrow$ число возможных состояний $J=2S+1=2L+1=5$, возможные значения $J=\{2+2,\ldots,|2-2|\}=\{4,3,2,1,0\}$. По условию здачи $J=0 \Rightarrow$ терм ${}^5D_0$ записан верно.

$\boxed{6)\ {}^1F_0}$

$L=3,$

$2S+1=1 \Rightarrow S=0,$

$L>S \Rightarrow$ число возможных состояний $J=2S+1=1$, возможные значения $J=\{3+0,\ldots,|3-0|\}=3$. По условию здачи $J=0 \Rightarrow$ терм ${}^1F_0$ записан неверно.

$\boxed{7)\ {}^8F_{1\,3/2}}$

$L=3,$

$2S+1=8 \Rightarrow S=7/2,$

$L<S \Rightarrow$ число возможных состояний $J=2L+1=7$, возможные значения $J=\{3+7/2,\ldots,|3-7/2|\}=\{6\frac{1}{2},5\frac{1}{2},4\frac{1}{2},3\frac{1}{2},2\frac{1}{2},1\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$. По условию здачи $J=1\frac{3}{2}=2\frac{1}{2} \Rightarrow$ терм ${}^8F_{1\,3/2}$ записан верно.

Литература:

1.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. **Теоретическая физика:** Учеб. пособие для вузов. В 10 т. Т. III. **Квантован механика** (нерелятивистская теория). — 4-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989, 768 с. —

47.31. Узкий пучок атомарного водорода пропускается в опыте Штерна и Герлаха через поперечное неоднородное ($\partial B/\partial z = 2 \times \times 10^3$ Тл/м) магнитное поле протяженностью $l = 8$ см. Скорость v атомов водорода равна 4 км/с. Определить расстояние b между компонентами расщепленного пучка атомов по выходе его из магнитного поля. Все атомы водорода в пучке находятся в основном состоянии.

Решение:

На атом, обладающий магнитным моментом $\vec{\mu}$ и движущийся в неоднородном вдоль Z магнитном поле $\vec{B}$ (рис.1), действует сила

$$\vec{F} = \left(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B} \tag{1}$$

которая отклоняет его от первоначального направления движения. Проекция силы в направлении оси Z

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \tag{2}$$

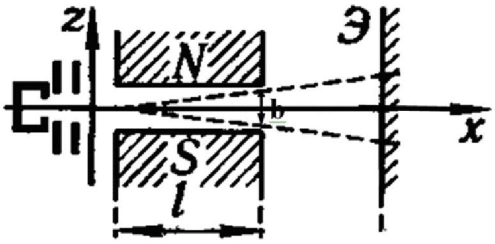

Рис.1

Расщепление пучка атомов на 2 компоненты симметрично смещенны относительно первичного направления распространения на величину $\Delta = b/2$. Отклонение Δ можно вычислить следующимобразом. Запишем уравнение движения атомов пучка

$$m_H\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m_H a = F_z \tag{3}$$

где m_H — масса атома водорода. Считая движение атомов вдоль оси Z в пределах неоднородного магнитного поля равноускоренным, можно записать

$$\Delta = \frac{at^2}{2} \tag{4}$$

где t — время движения через поле.

Вектор полного магнитный момент атома равен

$$\vec{\mu} \equiv \vec{\mu_J} = \vec{\mu_L} + \vec{\mu_S} \tag{5}$$

где $\vec{\mu_L}$ — орбитальный магнитный момент атома,

$$\mu_L = \mu_Б\sqrt{L(L+1)} \tag{6}$$

L — орбитальное квантовое число; $\vec{\mu_S}$ — спиновый магнитный момент атома,

$$\mu_S = 2\mu_Б\sqrt{S(S+1)} \tag{7}$$

S — спиновое квантовое число, $\mu_Б = \frac{e\hbar}{2m_e}$ — магнетон Бора. Значение полного магнитного момента

$$\mu_J = \mu_Б g_J\sqrt{J(J+1)} \tag{8}$$

где J — квантовое число полного углового момента атома, g_J — фактор Ланде.
Проекции магнитных моментов на произвольную ось Z определяются как:

$$(\mu_S)_z = 2\mu_Б m_S \tag{9}$$

$m_S = S, S-1, \ldots, -S$ — спиновое магнитное квантовое число;

$$(\mu_L)_z = \mu_Б m_L \tag{10}$$

$m_L = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm L$ — орбитальное магнитное квантовое число;

$$\mu_z = (\mu_J)_z = \mu_Б g m_J \tag{11}$$

$m_S = J, J-1, \ldots, -J.$

Для атома водорода в основном состоянии имеем: $L = 0,\ J = S = 1/2,\ \mu_J = \mu_S,\ g_J = g_S = 2.$
Проекция магнитного момента на произвольную ось Z определяется следующим образом

$$\mu_z = (\mu_J)_z = (\mu_S)_z = 2\mu_Б m_S \tag{12}$$

где $m_S = \pm1/2$ — спиновое магнитное квантовое число.
Таким образом, из (3) и (4), с учетом (9), находим

$$\triangle = \frac{b}{2} = \frac{F_z t^2}{2m_H} = \frac{F_z (l/v)^2}{2m_H} = \mu_z \frac{l^2}{2m_H v^2}\frac{\partial B}{\partial z} = 2\mu_Б m_S \frac{l^2}{2m_H v^2}\frac{\partial B}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\boxed{b = \frac{2\mu_Б m_S l^2}{m_H v^2}\frac{\partial B}{\partial z}} \tag{13}$$

Подставляя численные значения, получаем

$$b = \frac{2 \cdot 1/2 \cdot 9.274096 \cdot 10^{-24} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot (0.08)^2}{1.661 \cdot 10^{-27} \cdot (4 \cdot 10^3)^2} = 4.46 \cdot 10^{-3} = 4.46 мм$$