Заказ 1299.

Доказать что G является группой с операцией *, Проверить является ли H подгруппой группы (G*).
G=Q\{1} a*b=ab-a-b+2
H=N\{1}

Решение:
Для того, чтобы доказать, что некоторое множество с бинарной операцией является группой, достаточно доказать, что выполнены 4 условия:

1. Для любых элементов $a, b \in G$ результат действия операции над ними $a * b$ также является элементом множества G .
2. Существует единичный элемент $e \in G$, такой что для любого элемента $a \in G$ справедливо $a * e = e * a = a$.
3. Для любого элемента $a \in G$ существует обратный элемент $a^{-1} \in G$ такой что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.
4. Операция * ассоциативна, то есть для любых трёх элементов $a, b, c \in G$ справедливо $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Доказательство свойства 1:
Заметим, что если $a, b \in G$ - два произвольных элемента, то $a * b = ab - a - b + 2 = (a-1)(b-1) + 1$ является, безусловно, рациональным числом, и равенство $a * b = 1$ может достигаться только тогда, когда $(a-1)(b-1) = 0$, т.е. одно из чисел a или b равны 1, что невозможно в силу определения множества $G.$ Из этого следует, что $a * b \in G.$ Более того, $a * b = (a-1)(b-1) + 1 = b * a,$ т.е. операция * на множестве G коммутативна.

Доказательство свойства 2:
Единичным элементом e будет число 2 , т.е. $e = 2$. Оно, очевидно, является рациональным и не равным 1, а потому является элементом множества $G,$ и, кроме того, для произвольного числа $a \in G$ согласно формуле, приведённой в доказательстве свойства 1, справедливо $a * 2 = 2 * a = (a-1)(2-1) + 1 = a - 1 + 1 = a.$

Доказательство свойства 3:
Пусть $a \in G.$ Решим относительно b уравнение $a * b = e$. Согласно формуле, приведённой в доказательстве свойства 1, получаем, что $(a-1)(b-1) + 1 = 2,$ т.е. $b - 1 = \frac{1}{a-1},$ или $b = 1 + \frac{1}{a-1}.$ Заметим, что так как a является рациональным числом, не равным 1, то и число число b также рационально. Оно не может получиться равным 1, т.к. в этом случае дробь $\frac{1}{a-1}$ равнялась бы 0, что невозможно. Поэтому $b \in G,$ и мы можем положить $a^{-1} = 1 + \frac{1}{a-1}.$ В силу вышеизложенного, и, в частности, коммутативности операции * на множестве G , свойство 3 на этом доказано.

Доказательство свойства 4:
Пусть $a, b, c \in G.$ Тогда $(a * b) * c = ((a-1)(b-1) + 1) * c = (a-1)(b-1)(c-1) + 1,$ и $a * (b * c) = a * ((b-1)(c-1) + 1) = (a-1)(b-1)(c-1) + 1,$ откуда видно, что $(a * b) * c = a * (b * c)$, что и требовалось доказать.

Для того чтобы подмножество группы было подгруппой необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто относительно групповой операции (*) и операции взятия обратного элемента в группе. Очевидно, что $3 \in H$, но множество H не содержит обратного элемента к 3, так как согласно доказательству свойства 3 элемент $3^{-1} = 1 + \frac{1}{3-1} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$, а потому $3^{-1} \notin H$, и так как подмножество H группы G незамкнуто относительно операции взятия обратного элемента в группе, то подгруппой оно являться не может.