Задача 1. *Из колоды в 36 карт берут наудачу 6 карт. Найти вероятность того, что среди взятых карт будут туз, король и дама пик, а остальные карты будут других мастей.*

Решение: Вероятность наступления события при проведении опыта при условии, что все исходы опыта равновероятны, есть число исходов, благоприятствующих наступлению события, делёное на общее количество всевозможных исходов опыта. В данном случае опыт состоит в вытягивании из колоды в 36 карт наудачу 6 карт.

Число сочетаний из n по m (при $0 \leq m \leq n$),

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

есть количество способов выбрать m элементов из множества, состоящего из n элементов.

Поэтому общее число исходов опыта равно C_{36}^6. Подсчитаем число благоприятных исходов, когда есть туз король и дама пик, а остальные карты другой масти. Это эквивалентно вытягиванию из 27 карт мастей, отличных от пик, трёх карт (остальные три предопределены быть тузом, королём и дамой пик). Поэтому количество благоприятных вариантов равно C_{27}^3.

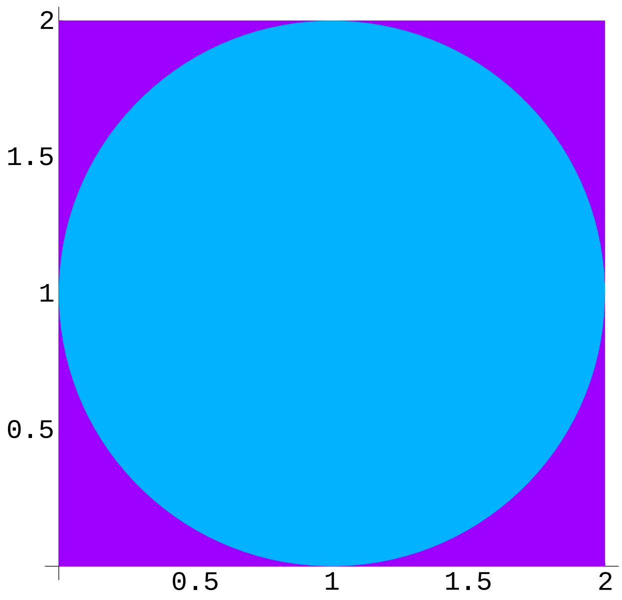
Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{C_{27}^3}{C_{36}^6} = \frac{27! \cdot 6! \cdot 30!}{36! \cdot 24! \cdot 3!} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} \approx 0,0015017.$$

Ответ: приближённо 0,0015017.

Задача 2. *Действительная и мнимая части комплексного числа z произвольным образом выбираются из отрезка* $[0, 2]$. *Найти вероятность того, что* $|z - 1 - i| > 1$.

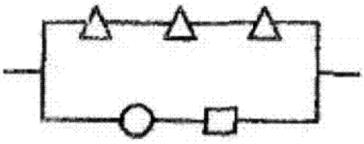
Решение: Заметим, что при таком выборе числа z оно равновероятно может соответствовать любой из точек квадрата со стороной 2, левая нижняя вершина которого есть 0, а верхняя правая соответствует числу $2+2i$. Поэтому вероятность того, что $|z-1-i| > 1$ - это площадь пересечения области $|z - 1 - i| > 1$ вышеуказанным квадратом, делёная на площадь квадрата.



Область $|z - 1 - i| > 1$ соответствует множеству комплексных чисел, расстояние от которых до $1 + i$ больше 1, то есть внешности круга с центром $1 + i$ и радиусом 1. Точка $1 + i$ есть центр квадрата, и круг с радиусом 1 в этой точке точно вписывается в квадрат, площадь круга равна π, площадь квадрата равна 4, площадь точек квадрата, лежащих вне круга (на картинке эти точки сиреневые), равна $4 - \pi$, и искомая вероятность равна $\dfrac{4-\pi}{4} = 1 - \pi/4$.

Ответ: $1 - \pi/4$.

Задача 3. *Вычислить надёжность схемы, полагая, что надёжность круглых элементов равна* $0,9$*, прямоугольных -* $0,8$ *и треугольных -* $0,75$.



Решение: Надёжность простой схемы, в которой все элементы соединены последовательно, равно произведению надёжностей входящих в схему элементов. Поэтому надёжность верхней цепочки равна $0,75^3$, нижней цепочки - $0,9 \cdot 0,8 = 0,72$, отсюда схему можно представить как состоящую из 2 элементов, включённых параллельно, надёжность одного из которых равна $0,75^3$, а другого $0,72$. При параллельном включении двух элементов схема отказывает, когда отказывают оба элемента, поэтому её надёжность равна $1-(1-0,75^3)(1-0,72) = 1-0,161875 = 0,838125$.
Ответ: $0,838125$.

Задача 4. *В группе спортсменов 15 лыжников и 10 велосипедистов. Вероятность выполнения квалификационной нормы лыжником и велодипедистом составляет соответственно* $0,8$ *и* $0,7$. *Из группы произвольным образом выбирают двух спортсменов. Вычислить вероятность того, что оба спортсмена лыжники, если известно, что один из них выполнил норму, а другой нет.*

Решение: Рассмотрим сначала опыт по выделению двух участников группы и события
(1) A_1, заключающееся в том, что оба лыжники;
(2) A_2, заключающееся в том, что оба велосипедисты;
(3) A_3, заключающееся в том, что один из них лыжник, а другой - велосипедист.

Поскольку всего в группе 25 человек, и события A_1, A_2 и A_3 образуют разбиение вероятностного пространства (не пересекаются и вместе дают всё множество исходов), то

$$P(A_1) = C_{15}^2/C_{25}^2 = \frac{14\cdot 15}{24\cdot 25} = 7/20,$$
$$P(A_2) = C_{10}^2/C_{25}^2 = \frac{9\cdot 10}{24\cdot 25} = 3/20,$$
$$P(A_3) = 1 - P(A_1) - P(A_2) = 1/2.$$

Пусть H - событие, заключающееся в том, что один из двух человек выполнил норму, а другой нет. Требуется найти условную вероятность события A_1 при условии H.

Напоминание: условная вероятность события A при условии наступления события B обозначается $P(A|B)$ и формально определяется следующим образом

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

По формуле Байеса

$$P(A_1|H) = \frac{P(H|A_1)P(A_1)}{P(H|A_1)P(A_1) + P(H|A_2)P(A_2) + P(H|A_3)P(A_3)}.$$

Чтобы посчитать $P(H|A_1)$, заметим, что это событие случается в двух ситуациях - когда первый лыжник выполнил норму, а второй нет, и наоборот, поэтому

$$P(H|A_1) = 0,8\cdot 0,2 + 0,2\cdot 0,8 = 0,32.$$

Аналогично

$$P(H|A_2) = 0,7\cdot 0,3 + 0,3\cdot 0,7 = 0,42,$$
$$P(H|A_3) = 0,7\cdot 0,2 + 0,8\cdot 0,3 = 0,38.$$

Таким образом

$$P(A_1|H) = \frac{0,32\cdot 0,35}{0,32\cdot 0,35 + 0,42\cdot 0,15 + 0,38\cdot 0,5} \approx 0,307.$$

Ответ: $\approx 0,307$.

Перед следующими задачами ещё несколько напоминаний:
если случайная величина X принимает значения $x_1,\ x_2,\ldots,x_k$ с вероятностями $p_1,\ p_2,\ldots,p_k$ (это утверждение называется рядом распределения X), то математическое ожидание X

$$M_X = x_1P(X=x_1) + x_2P(X=x_2) + \ldots + x_kP(X=x_k) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_kp_k,$$

дисперсия X

$$D_X = M_{X^2} - M_X^2 = x_1^2P(X=x_1) + x_2^2P(X=x_2) + \ldots + x_k^2P(X=x_k) - (x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_kp_k)^2$$
$$= x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_k^2p_k - (x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_kp_k)^2,$$

среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_X = \sqrt{D_X}.$$

Испытания по схеме Бернулли: если проходят испытания, результаты которых не зависят друг от друга, и в каждом испытании вероятность одного результата равна p, а второго $q = 1-p$, то вероятность получить первый результат k раз в n испытаниях равна

$$C_n^kp^kq^{n-k}.$$

Задача 5. *Стрелок произвёл 3 выстрела по круглой мишени, состояшей из "яблочка" и охватывающего его кольца. При попадании в "яблочко" стрелку начисляется 4 очка, при попадании в кольцо - 1 очко, при непопадании в мишень - 0 очков. Стрелок попадает в яблочко с вероятностью $0,4$ и в кольцо с вероятностью $0,4$.*

Пусть ξ - сумма наибольшего k_{max} и наименьшего k_{min} числа выбитых очков (если были случаи непопадания в мишень, то $k_{min}=0$). Найти ряд распределения случайной величины ξ, её математическое ожидание M_ξ, дисперсию D_ξ и среднеквадратичное отклонение σ_ξ. Построить график распределения случайной величины ξ. Найти $P(|\xi - M_\xi| < \sigma_\xi)$.

Решение: Заметим, что стрелок промахивается с вероятностью $1-0,4-0,4 = 0,2$. Для значений k_{min} и k_{max} есть следующие возможности:

k_{max}	4	4	4	1	1	0
k_{min}	4	1	0	1	0	0

, поэтому ξ может принимать только значения 8,5,4,2,1,0.

(1) Значение 0 получается в случае, если при всех трёх выстрелах стрелок промахнулся, вероятность чего $0,2^3 = 0,008$.

(2) Значение 1 получается только в том случаем когда стрелок, сделав 3 выстрела, либо 2 раза попал в кольцо и один раз промахнулся, либо два раза промахнулся и один раз попал в кольцо.

Посчитаем вероятность того, что стрелок 2 раза попал в кольцо и один раз промахнулся. Из трёх выстрелов те 2, в которых могло произойти попадание в кольцо, можно выбрать $C_3^2 = 3$ вариантами. В каждом из этих вариантов вероятность того, что стрелок действительно 2 раза попал в кольцо равна $0,4^2$. Вероятность того, что при оставшемся выстреле стрелок промахнулся равна $0,2$. Поэтому вероятность того, что стрелок 2 раза попал в кольцо и один раз промахнулся равна $3\cdot(0,4)^2\cdot 0,2 = 0,096$.

Аналогично можно подсчитать, что вероятность того, что при 3 выстрелах стрелок 2 раза промахнулся и один раз попал в кольцо равна $3\cdot(0,2)^2\cdot 0,4 = 0,048$.

Вышеуказанные два события, как гений и злодейство, есть вещи несовместные, поэтому вероятность того, что произошло из них, есть сумма их вероятностей, т.е. $0,096 + 0,048 = 0,144$.

Напоминание: события A и B несовместны, если

$$A \cap B = \emptyset,$$

т.е. у них нет ничего общего. Для таких событий

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B).$$

(3) Значение 2 получается в случае, если при всех трёх выстрелах стрелок попал в кольцо, вероятность чего $0,4^3 = 0,064$.

(4) Значение 5 получается только если стрелок либо попадал в “яблочко”, либо в кольцо, причём должно быть как минимум одно попадание в “яблочко” и как минимум одно попадание в кольцо. Аналогично рассуждениям, проведённым про случай $\xi = 1$, вероятность в этом случае равна $3 \cdot (0,4)^2 \cdot 0,4 + 3 \cdot (0,4)^2 \cdot 0,4 = 0,384$.

(5) Значение 8 получается в случае, если при всех трёх выстрелах стрелок попал в “яблочко”, вероятность чего $0,4^3 = 0,064$.

(6) Случайная величниа ξ принимает значение 4 в том и только в том случае, если она не принимает ни одного из значений, вероятность которых была уже посчитана, поэтому вероятность этого значения дополняет сумму вероятностей других значений до 1, т.е. равна $1 - 0,064 - 0,384 - 0,064 - 0,144 - 0,008 = 0,336$.

Таким образом ряд распределения случайной величины ξ следующий:

ξ	0	1	2	4	5	8
P	0,008	0,144	0,064	0,336	0,384	0,064

$$M_\xi = 0 \cdot 0,008 + 1 \cdot 0,144 + 2 \cdot 0,064 + 4 \cdot 0,336 + 5 \cdot 0,384 + 8 \cdot 0,064 = 4,048,$$

$$M_{\xi^2} = 0^2 \cdot 0,008 + 1^2 \cdot 0,144 + 2^2 \cdot 0,064 + 4^2 \cdot 0,336 + 5^2 \cdot 0,384 + 8^2 \cdot 0,064 = 19,472,$$

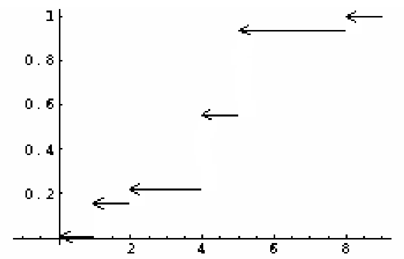
$$D_\xi = M_{\xi^2} - M_\xi^2 = 3,085696,$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} \approx 1,7566.$$

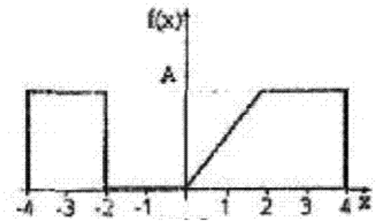
Поскольку величина ξ принимает только значения 0,1,2,4,5,8, то

$$P(|\xi - M_\xi| < \sigma_\xi) = P(-\sigma_\xi < \xi - M_\xi < \sigma_\xi) = P(M_\xi - \sigma_\xi < \xi < M_\xi + \sigma_\xi) = P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0,72.$$

График распределения случайной величны ξ - это график функции $F_\xi(x) = P(\xi < x)$. Он приведён на рисунке ниже.



Задача 6. *Плотность распределения вероятностей величины ξ имеет вид, изображённый на рисунке:*



Найти значение параметра A, функцию распределения ξ, M_ξ и D_ξ, $P(|\xi| < 2)$.

Решение: Для случайной величины непрерывного типа $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$, что является площадью под вышеприведённым графиком функции $f(x)$ на интервале (a, b). Так как

$$P(-\infty < X < +\infty) = 1,$$

то параметр A должен быть таким, чтобы общая площадь под графиком была равна 1. Последняя складывается из площади левого прямоугольника со сторонами 2 и A, и площади правой трапеции с полусуммой оснований 3 и высотой A. Таким образом $2A + 3A = 1$, то есть

$$A = 1/5.$$

Аналогичным образом приходим к тому, что

$$P(|\xi| < 2) = P(-2 < \xi < 2) = \frac{2 \cdot 1/5}{2} = 1/5,$$

поскольку площадь под графиком на этом промежутке представляет собой площадь прямоугольного треугольника с катетами 2 и A.

Запишем $f(x)$ формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -4 \\ 1/5, & -4 < x < -2 \\ 0, & -2 < x \leq 0 \\ x/10, & 0 \leq x < 2 \\ 1/5, & 2 \leq x < 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}.$$

Напоминание:

$$M_\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

$$M_{\xi^2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Поэтому

$$M_\xi = \int\limits_{-4}^{-2} \frac{x}{5} dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{x^2}{10} dx + \int\limits_{2}^{4} \frac{x}{5} dx = \left.\frac{x^3}{30}\right|_0^2 = 4/15,$$

$$M_{\xi^2} = \int\limits_{-2}^{-4} \frac{x^2}{5} dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{x^3}{10} dx + \int\limits_{2}^{4} \frac{x^2}{5} dx = \left.\frac{x^3}{15}\right|_{-4}^{-2} + \left.\frac{x^4}{40}\right|_0^2 + \left.\frac{x^3}{15}\right|_2^4 = \frac{128}{15} - \frac{16}{15} + \frac{16}{40} = \frac{112}{15} - 0,4,$$

$$D_\xi = \frac{112}{15} - 0,4 - \frac{16}{225} \approx 7.$$

Функция распределения случайной величины ξ, $F_\xi(x) = P(-\infty < \xi < x)$, можно сосчитать как площадь под графиком $f(x)$ на интервале $(-\infty, x)$. Итак,

$$F_\xi(x) = P(-\infty < \xi < x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4 \\ (x+4)/5, & -4 \leq x \leq -2 \\ 2/5, & -2 \leq x \leq 0 \\ 2/5 + x^2/20, & 0 \leq x \leq 2 \\ 3/5 + (x-2)/5 = (x+1)/5, & 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}.$$

Задача 7. *Опыт состоит в метании двух игральных костей, и считается успешным, если сумма выпавших очков окажется не меньше 11. Рассматривается случайная величина ξ, равная числу успешных опытов при n брасаниях костей. Найти n, такое что*

$$P(|\xi/n - p| < 0,01) = 0,75,$$

где p - вероятность успеха в одном опыте.

Решение: Найдём p. Пронумеруем кости цифрами 1 и 2. Всего способов, которыми может выпасть первая кость 6. Вторая кость тоже может выпасть 6 способами. Поэтому общее число вариантов, которые описывают, как могут выпасть первая и вторая кости - 6x6=36. Благоприятны те варианты, в которых

(1) на первой кости выпало 5, на второй - 6;

(2) на первой кости выпало 6, на второй - 5; и
(3) на первой кости выпало 6, на второй тоже шесть.

Таким образом $p = 3/36 = 1/12$. Мат.ожидание количества успехов в одном опыте равно

$$1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p.$$

Таким образом

$$E[\xi] = np$$

(т.е. мат. ожидание количества успехов в n опытах есть сумма мат.ожиданий. количества успехов в каждом опыте). Мат.ожидание количества квадрата количества успехов в одном опыте равно

$$1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p,$$

поэтому дисперсия количества успехов в одном опыте $D_1 = p - p^2 = p(1-p)$. Дисперсия количества успехов в n опытах, так как их результаты независимы

$$D = np(1-p) = 11n/144.$$

Попытаемся найти n, такое что вероятность приближённо равна 0,75. Для этого используем интегральную теорему Муавра-Лапласа, которая гласит, что

$$P(k_1 \le \xi \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{k_1 - np}{\sqrt{D}}}^{\frac{k_2 - np}{\sqrt{D}}} e^{-x^2/2} dx.$$

В самом деле

$$P(|\xi/n - p| < 0,01) = P(-0,01 < \xi/n - p < 0,01) = P(p - 0,01 < \xi/n < p + 0,01) =$$

$$= P(np - 0,01 \cdot n < \xi < np + 0,01 \cdot n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{-0,01n}{\sqrt{D}}}^{\frac{0,01n}{\sqrt{D}}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{-0,12\sqrt{n}}{\sqrt{11}}}^{\frac{0,12\sqrt{n}}{\sqrt{11}}} e^{-x^2/2} dx.$$

Глядя в таблицу нормального распределения, заключаем, что

$$\frac{0,12\sqrt{n}}{\sqrt{11}} \approx 1,15,$$

$$n \approx \left(\frac{1,15}{0,12} \cdot \sqrt{11}\right)^2 = 11 \cdot \left(\frac{1,15}{0,12}\right)^2 \approx 1010.$$

Можно доказать, что точное равенство вероятности 0,75 не выполняется ни для каких значений n.

Ответ: равенство вероятности числу 0,75 выполняется приближённо при $n = 1010$, причём близкие значения n также подойдут для приближённого равенства.

Если у Вас есть вопросы по решениям, вы можете их задать в системе обмена сообщениями личным сообщением решающему.