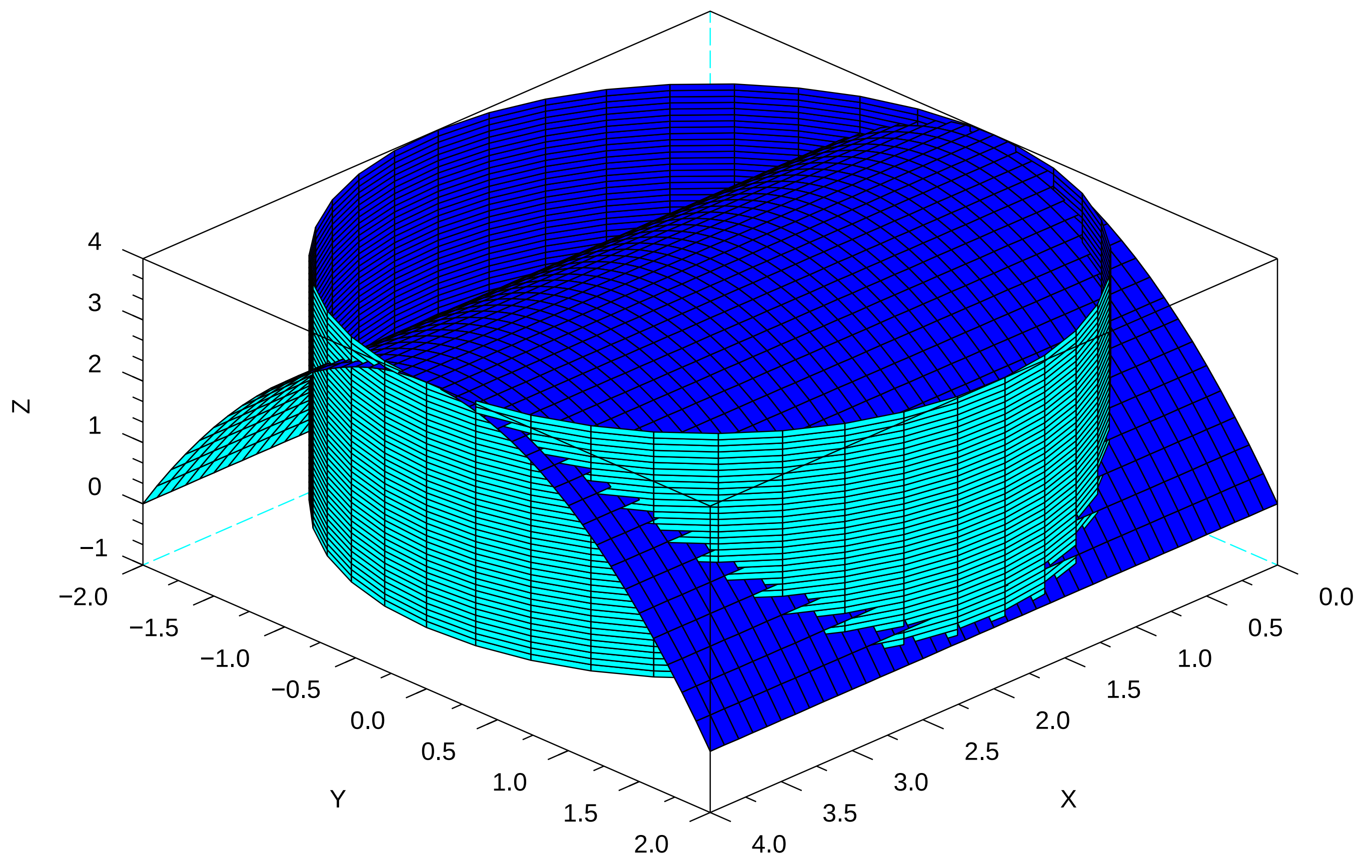
Задача 1. *С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями* $z = 4 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4x$, $z > 0$. *Сделать чертёж.*

Решение: Чертёж приведен ниже.



В основании лежит окружность $(x-2)^2 + y^2 = 4$, и для каждой точки на окружности переменная z может варьироваться от 0 до $4 - y^2$. Отсюда объём равен

$$\int\limits_0^4 dx \int\limits_{-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} dy \int\limits_0^{4-y^2} dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} (4-y^2)dy = \int\limits_0^4 (4y - y^3/3)\Big|_{-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^4 \left(8\sqrt{4-(x-2)^2} - \frac{2}{3}(4-(x-2)^2)^{3/2}\right) dx = [2\cos t = x-2, dx = -2\sin t] =$$

$$= \int\limits_\pi^0 \left(8\sqrt{4-4\cos^2 t} - \frac{2}{3}(4-4\cos^2 t)^{3/2}\right)(-2\sin t)dt = \int\limits_0^\pi \left(16\sin t - \frac{16}{3}\sin^3 t\right) 2\sin t dt =$$

$$= 32\int_0^\pi \sin^2 t dt - \frac{32}{3}\int\limits_0^\pi \sin^4 t dt.$$

Для подсчёта первого интеграла заметим, что

$$2\int_0^\pi \sin^2 t dt = \int_0^\pi (1-\cos 2t)dt = \pi - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^\pi = \pi.$$

Второй интеграл можно подсчитать так (по частям):

$$8\int_0^\pi \sin^4 tdt = 8\int_0^\pi \sin^3 td(-\cos t) = -8\sin^3 t\cos t|_0^\pi + 8\int_0^\pi \cos t(3\sin^2\cos t)dt = 3\int_0^\pi 8\sin^2 t\cos^2 tdt =$$

$$= 3\int_0^\pi 2\sin^2 2tdt = 3\int_0^\pi (1-\cos 2t)dt = 3\pi - \frac{3}{2}\sin 2t\Big|_0^\pi = 3\pi.$$

Поэтому ответ равен $16\pi - \frac{4}{3}3\pi = 12\pi$.
Ответ: 12π.

Задача 2. *Посчитать интеграл от выражения x^2+y^2 по окружности $x^2+y^2=4$.*

Решение: Заметим, что окружность эта с центром в начале координат и её радиус 2, поэтому её длина равна 4π. Так как выражение x^2+y^2 на окружности постоянно и равно 4, то интеграл от него по окружности будет 4, умноженное на длину окружности, то есть 16π.
Ответ: 16π.

Задача 3. *Вычислить интеграл*

$$\int_L \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}dy - \frac{y^2}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}dx,$$

где L – дуга астроиды $x(t) = 2\cos^3 t$, $y(t) = 2\sin^3 t$ от точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.

Решение: Точке A соответствует значение $t=0$, точке B – $t=\pi/2$. Данный интеграл является криволинейным интегралом второго рода, его можно записать как

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4\cos^6 t}{\sqrt[3]{32}(\cos^5 t+\sin^5 t)}6\sin^2 t\cos tdt - \frac{4\sin^6 t}{\sqrt[3]{32}(\cos^5 t+\sin^5 t)}6\cos^2 t(-\sin t)dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{24\sin^2 t\cos^7 t + 24\sin^7 t\cos^2 t}{\sqrt[3]{32}(\cos^5 t+\sin^5 t)}dt = 24\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^5 t+\sin^5 t)}{\sqrt[3]{32}(\cos^5 t+\sin^5 t)}dt = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin 2t)^2 dt =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\left(\pi/2 - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{3\pi\sqrt[3]{2}}{8}.$$

Ответ: $3\pi\sqrt[3]{2}/8$.

Задача 4. *Найти момент инерции относительно осей координат отрезка однородной прямой $2x+y=1$, лежащей между этими осями.*

Решение: Считаем, что плотность отрезка 1. Отрезок соединяет точки $(0,1)$ и $(1/2,0)$ –обозначим его через L. Его можно параметризовать так: $x=t$, $y=1-2t$, $0\le t\le 1/2$. Тогда момент инерции относительно оси OX равен

$$\int_L y^2dx = \int_0^{1/2}(1-2t)^2dt = (-1/6)(1-2t)^3\Big|_0^{1/2} = (-1/6)\cdot 0 + (1/6) = 1/6,$$

момент инерции относительно оси OY (по отрезку должны идти сонаправленно с осью, поэтому меняем пределы интегрирования местами) равен

$$\int_L x^2dy = \int_{1/2}^0 t^2(-2dt) = 2t^3/3\Big|_0^{1/2} = 1/12.$$

Ответ: момент инерции относительно оси OX равен $1/6$, относительно оси OY равен $1/12$.