Пояснения к тексту: знак $\iff$ читается как "равносильно" и обозначает, что у уравнений справа от знака и слева от знака множество решений совпадает, знак $\mathbb{R}$ обозначает ммножество вещественных чисел, знак $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел, знак $\Rightarrow$ обозначает, что из левой части до стрелки следует правая часть после стрелки, для уравнений это означает, что множество решений правой части может быть шире множества решений левой части. Текст свёрстан в типографической системе LaTeX, 12-кеглем, с использованием пакета amsart, затем переведён в формат pdf. Ввиду того, что наборщик и корректор текста являлся одним и тем же лицом, полное отсутствие опечаток представляется нереальным. Знак $\Re$ обозначает вещественную часть числа или вектора, $\Im$ – чисто мнимую. Если я что-то не так понял, поправьте меня.

Задача 396. *Решить уравнение* $y' = \dfrac{e^y}{t+4}$.

Решение: Заметим, что условие задачи исключает случай $t = -4$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^y}{t+4} \iff e^{-y}dy = \frac{dt}{t+4} \iff -e^{-y} = \ln|t+4| + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R} \iff$$

$$C_1 + e^{-y} = -\ln|t+4|,\ C_1 \in \mathbb{R} \iff e^{C_1} \cdot e^{e^{-y}} = 1/|t+4|,\ C_1 \in \mathbb{R} \iff C_2 e^{e^{-y}} = 1/|t+4|,\ C_2 > 0 \iff$$

$$\iff t + 4 = C_3 e^{-e^{-y}},\ C_3 \neq 0 \iff t = C_3 e^{-e^{-y}} - 4,\ C_3 \neq 0.$$

Если требуется выразить y через t, то первая строчка вычислений продолжается иначе:

$$\iff e^{-y} = -\ln|t+4| - C_1,\ C_1 \in \mathbb{R} \iff -y = \ln(C_5 - \ln|t+4|) \text{ и } \ln|t+4| < C_5,\ C_5 \in \mathbb{R}$$

$$\iff y = -\ln(C_5 - \ln|t+4|) \text{ и } \ln|t+4| < C_5,\ C_5 \in \mathbb{R}.$$

Задача 406. *Решить задачу Коши* $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{y}{t} = \dfrac{t+1}{t}e^t$, $y(1) = e$.

Решение: До ответа можно догадаться безо всяких вычислений: $y(t) = e^t$ подходит. Заметим, что условие задачи заведомо исключает случай $t = 0$, который в дальнейшем рассматриваться не будет. Теперь можно приняться за решение по схемам, предлагаемым в учебных заведениях: это линейное неоднородное уравнение. Сначала решим соответствующее линейное однородное уравнение $y'(t) + y/t = 0$ (оставляя за скобками вычислений случай $y(t) = 0$, который, очевидно, является одним из решений однородного уравнения):

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = 0 \iff \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{t} \iff \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{t} \iff \ln|y| + C = -\ln|t|,\ C \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff |y|e^C = \frac{1}{|t|},\ C \in R \iff |y|C_1 = \frac{1}{|t|},\ C_1 > 0 \iff y = C_2/t,\ C_2 \neq 0.$$

Вкупе с решением $y = 0$, это даёт формулу $y = C_3/t$, где C_3 – произвольное вещественное число.

Для нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения применяем метод вариации произвольной постоянной, а именно, пусть $y(t) = C(t)/t$, где $C(t)$ - некоторая дифференцируемая функция. Тогда $y'(t) = C'(t)/t - C(t)/t^2$, и

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = \frac{t+1}{t}e^t \iff C'(t)/t - C(t)/t^2 + C(t)/t^2 = \frac{t+1}{t}e^t \iff C'(t)/t = \frac{t+1}{t}e^t$$

$$\iff C'(t) = (1+t)e^t \iff C(t) = \int (1+t)e^t dt \iff C(t) = \int (1+t)d(e^t) \iff$$

$$\iff C(t) = (1+t)e^t - \int e^t dt \iff C(t) = (1+t)e^t - e^t + C_4,\ C_4 \in \mathbb{R} \iff C(t) = te^t + C_4,\ C_4 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом общее решение дифференциального уравнения – $y(t) = e^t + C_4/t$, $C_4 \in \mathbb{R}$. Решением задачи Коши $y(1) = e$ будет функция $y(t) = e^t$, когда $C_4 = 0$.

Задача 416. *Понизить порядок уравнения, решить дифференциальное уравнение второго порядка* $y'' \operatorname{tg} t - y' + \dfrac{1}{\sin t} = 0$.

Решение: Положим $y'(t) = p(t)$. Тогда уравнение можно переписать в форме $p' \operatorname{tg} t - p = -1/\sin t$, которое является линейным неоднородным уравнением первого порядка относительно функции $p(t)$. Сначала решим соответствующее линейное однородное уравнение (оставляя за скобками вычислений случай $p(t) = 0$, который, очевидно, является одним из решений однородного уравнения):

$$\frac{dp}{dt} \operatorname{tg} t = p \iff \frac{dp}{p} = \frac{dt}{\operatorname{tg} t} \iff \ln|p| = \ln|\sin t| + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R} \iff |p| = |\sin t| e^{C_1},\ C_1 \in R \iff$$

$$\iff |p| = C_2 |\sin t|,\ C_2 > 0 \iff p = C_3 \sin t,\ C_3 \neq 0.$$

Вкупе с решением $p = 0$, это даёт формулу $p = C_4 \sin t$, где C_4 – произвольное вещественное число.

Для нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения применяем метод вариации произвольной постоянной, а именно, пусть $y(t) = C(t) \sin t$, где $C(t)$ - некоторая дифференцируемая функция. Тогда $p'(t) = C'(t) \sin t + C(t) \cos t$, и

$$p'(t) \operatorname{tg} t - p + 1/\sin t = 0 \iff [C'(t) \sin t + C(t) \cos t] \operatorname{tg} t - C(t) \sin t + 1/\sin t = 0 \iff$$

$$\iff C'(t) \sin^2 t/\cos t + 1/\sin t = 0 \iff C'(t) = -\cos t/\sin^2 t \iff C(t) = -\int \frac{d \sin t}{\sin^3 t} \iff$$

$$\iff C(t) = \frac{1}{2} \sin^{-2} t + C_5,\ C_5 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом общее решение дифференциального уравнения – $p(t) = \frac{1}{2\sin t} + C_5 \sin t,\ C_5 \in \mathbb{R}$. А общее решение первоначального дифференциального уравнения получается интегрированием $p(t)$ относительно переменной t:

$$y(t) = \int \left[\frac{1}{2\sin t} + C_5 \sin t\right] dt = -C_5 \cos t + \int \frac{dt}{4 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = -C_5 \cos t + \int \frac{\sin^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}}{4 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} dt =$$

$$= -C_5 \cos t + \int \frac{\sin \frac{t}{2} dt}{4 \cos \frac{t}{2}} + \int \frac{\cos \frac{t}{2} dt}{4 \sin \frac{t}{2}} == -C_5 \cos t - \int \frac{d \cos \frac{t}{2}}{2 \cos \frac{t}{2}} + \int \frac{d \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} =$$

$$= -C_5 \cos t - \frac{1}{2} \ln \left|\cos \frac{t}{2}\right| + \frac{1}{2} \ln \left|\sin \frac{t}{2}\right| + C_6 = C_6 - C_5 \cos t - \frac{1}{2} \ln \left|\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right|,$$

где C_5, C_6 – произвольные вещественные числа.

Задача 426. *Найти частное решение ОЛДУ второго порядка $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.*

Решение: Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$ имеет единственный корень $\lambda = -3$, поэтому базис множества решений дифференциального уравнения образуют функции e^{-3t} и te^{-3t}. Подберём константы $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, так чтобы для решения $y_0(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 te^{-3t}$ выполнялось $y_0(0) = 1$ и $y'(0) = -1$. Заметим, что $y_0(0) = C_1$, поэтому $C_1 = 1$. Заметим, что $y_0'(t) = -3e^{-3t} + C_2 e^{-3t} - 3C_2 te^{-3t}$. Поэтому $y_0'(0) = -3 + C_2$, что равно -1 тогда и только тогда, когда $C_2 = 2$.
Ответ: $e^{-3t} + 2te^{-3t}$.

Задача 436. *Найти общее решение ЛДУ второго порядка при помощи интеграла наложения $y'' + 25y = \cos 5t$.*

Решение: Рассмотрим соответствующее однородное уравнение: $z'' + 25z = 0$. Его характеристический многочлен $\lambda^2 + 25 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm 5i$, а общее решение записывается в виде $y_0(t) = C_1 \sin 5t + C_2 \cos 5t$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Так как первоначальное уравнение неоднородно, то его решение записывается в виде $y(t) = y_n + y_0$, где y_n – произвольное частное решение первоначального неоднородного уравнения $y'' + 25y = \cos 5t$. Это последнее решение мы и будем искать при помощи интеграла наложения. Согласно методичке импульсная характеристика в этом случае $h(t) = \frac{1}{5} \sin 5t$, и частное решение $y_n(t)$ ищется в виде интеграла наложения

$$y_n(t) = \int_0^t h(t-s) \cos 5s ds = \frac{1}{5} \int_0^t \sin 5(t-s) \cos 5s ds.$$

Используя формулу
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2},$$
продолжаем
$$y_n(t)=\frac{1}{5}\int\limits_0^t\sin 5(t-s)\cos 5s ds=\frac{1}{10}\int\limits_0^t(\sin 5t+\sin(5t-10s))ds=\frac{1}{10}t\sin 5t+\frac{1}{100}\int\limits_0^t d\cos(5t-10s)=$$
$$=\frac{t\sin 5t}{10}+\frac{1}{100}\cos(5t-10s)\Big|_{s=0}^{s=t}=\frac{t\sin 5t}{10}+\frac{1}{100}\cos(-5t)-\frac{1}{100}\cos 5t=\frac{t\sin 5t}{10}.$$
Ответ: $y(t)=\frac{t\sin 5t}{10}+C_1\sin 5t+C_2\cos 5t$, где C_1,C_2 – произвольные вещественные числа.

Задача 446. *Найти общее решение ЛДУ второго порядка, используя метод подбора частного решения* $y''-3y'=t+5$.

Решение: Поскольку в виде линейной комбинации производных частного решения должен получиться полином, то естественно искать частное решение в классе полиномов. Если у такого полинома степень n, то степень левой части должна быть $n-1$. Поскольку степень правой части равна 1, то $n=2$. Поэтому ищем частное решение в виде $y_0=Ct^2+Dt$, где $C,D\in\mathbb{R}$:
$$y_0''-3y_0'=2C-6Ct-3D=t+5\iff\begin{cases}-6C=1\\2C-3D=5\end{cases}\iff\begin{cases}C=-1/6\\D=-16/9\end{cases}.$$
Таким образом частное решение данного неоднородного дифференциального уравнения $y_0=-t^2/6-16t/9$. Общее решение первоначального дифференциального уравнения представляется в виде $y=y_0+y_1$, где y_1 - общее решение однородного уравнения $y''-3y'=0$. Сделаем замену переменной $p=y'$. Тогда $p=0$, даёт решение $y=C_1$, где $C_1\in\mathbb{R}$, либо
$$p'/p=3\iff\ln|p|=3t+C_2,\ C_2\in\mathbb{R}\iff|p|=e^{C_2}e^{3t},\ C_2\in\mathbb{R}\iff|p|=C_3e^{3t},\ C_3>0\iff$$
$$\iff p=C_4e^{3t},\ C_4\neq 0.$$
Объединяя только что полученное решение и решение $p=0$, получаем $p(t)=C_5e^{3t}$, где C_5 – произвольное вещественное число. Интегрируя $p(t)$, получаем общее решение однородного дифференциального уравнения.
Ответ: $y(t)=-t^2/6-16t/9+C_6e^{3t}+C_7$, где C_6,C_7 – произвольные вещественные числа.

Задача 456. *Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:*
$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}=2y+9z\\\frac{dz}{dt}=-y+2z\end{cases}.$$

Решение: Составим матрицу этой системы дифференциальных уравнений $A=\begin{pmatrix}2&9\\-1&2\end{pmatrix}$. Найдём её собственные числа: $\det\begin{pmatrix}2-\lambda&9\\-1&2-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda-2)^2+9=0\iff\lambda-2=\pm 3i\iff$ $\begin{cases}\lambda=2+3i\\\lambda=2-3i\end{cases}$. Они комплексно сопряжены. Найдём хотя бы один собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу $\lambda=2+3i$. Для этого надо найти хотя бы одно решение системы $\begin{cases}-3ix_1+9x_2=0\\-x_1-3ix_2=0\end{cases}$, которое нетрудно угадать: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3i\\-1\end{bmatrix}$.

Заметим, что $e^{(2+3i)t}3i=e^{2t}e^{i3t}3i=e^{2t}(\cos 3t+i\sin 3t)3i=e^{2t}(3i\cos 3t-3\sin 3t)$, и $e^{(2+3i)t}\cdot(-1)=-e^{2t}e^{i3t}=e^{2t}(-\cos 3t-i\sin 3t)$, откуда находим пару действительных частных решений системы: $\Re\left(\begin{bmatrix}3i\\-1\end{bmatrix}e^{(2+3i)t}\right)=e^{2t}\begin{bmatrix}-3\sin 3t\\-\cos 3t\end{bmatrix}$ и $\Im\left(\begin{bmatrix}3i\\-1\end{bmatrix}e^{(2+3i)t}\right)=e^{2t}\begin{bmatrix}3\cos 3t\\-\sin 3t\end{bmatrix}$.

Окончательно, получаем общее решение

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -3\sin 3t \\ -\cos 3t \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 3\cos 3t \\ -\sin 3t \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t \\ -C_1 \cos 3t - C_2 \sin 3t \end{bmatrix} e^{2t},$$

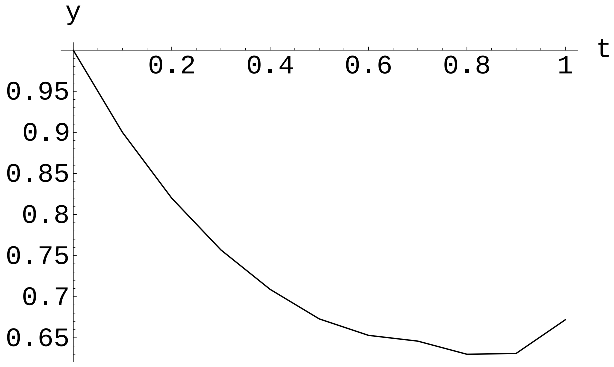
где C_1, C_2 – произвольные вещественные числа.

Задача 466. *Методом Эйлера построить таблицу значений решения для заданного ДУ с начальным условием $y(0) = 1$. В таблице указать значения решения на интервале $[0, 1]$ с шагом $h = 0,1$. По таблице построить график решения. $y' = t^2 - y^2$.*

Решение: Положим $f(y, t) = t^2 - y^2$. По методу Эйлера в точке $t_{k+1} = (k+1)h$, $k = 0, 1, \ldots, 9$ приближённое значение функции y находится по формуле $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(y_k, t_k)$. Исходя из этого, строим таблицу

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	1	0,9	0,82	0,757	0,709	0,673	0,653	0,646	0,63	0,631	0,672
$f(y_k, t_k)$	-1	-0,8	-0,632	-0,483	-0,363	-0,203	-0,066	-0,156	0,01	0,412	

График решения, приближенного согласно данной таблице, изображён ниже:



Задача 476. *Найти радиус сходимости и указать область сходимости ряда. Выписать первые три члена ряда.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n 7^n}{n \cdot 3^n}$

Решение:

(a) Первый член ряда при $n = 0$ равен 0. Второй член ряда при $n = 1$ равен x. Третий член ряда при $n = 2$ равен $4x^2/2 = 2x^2$. Положим $a_n = n^2/n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 (n+1)!}{(n+1)^2 n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) \frac{n^2}{(n+1)^2} = +\infty.$$

Поэтому ряд сходится для любого $x \in \mathbb{R}$.

(b) Первый член ряда при $n = 1$ равен $7(x-5)/3$. Второй член ряда при $n = 2$ равен $49(x-5)^2/18$. Третий член ряда при $n = 3$ равен $343(x-5)^3/81$. Положим $a_n = \frac{7^n}{n \cdot 3^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n (n+1) 3^{(n+1)}}{7^{(n+1)} 3^n n} = \frac{3}{7} \lim_{n\to\infty} (n+1)/n = 3/7.$$

Поэтому на интервале $(5-3/7, 5+3/7)$ ряд сходится. Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала. Пусть $x = 5 + 3/7$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n 7^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = +\infty,$$

и ряд расходится. При $x = 5 - 3/7$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n 7^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$$

представляет собой знакопеременный ряд с убывающими по модулю слагаемыми, стремящимися к нулю, и поэтому по признаку Лейбница он сходится. В этом пункте областью сходимости ряда является полуоткрытый интервал $[32/7, 38/7)$.

Задача 486. *Пользуясь известными разложениями в ряд Маклорена, вычислить предел*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}.$$

Решение: Как известно, $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^3/3! + \cdots$, $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! - \cdots$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + x^4/2 - 1 + x^2/2 - x^4/24}{x^2} = 3/2.$$

Задача 496. *Вычислить приближённо определённый интеграл* $\int\limits_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2} dx$, *пользуясь разложением в ряд Маклорена. Ограничиваясь двумя членами ряда, оценить погрешность вычислений.*

Решение: Как известно $\sin x \approx x - x^3/6$. При этом погрешность на отрезке $[0, 1]$ этого приближения можно оценить с помощью остаточного члена в форме Лагранжа $(0 < t < 1)$:
$|R_4(x)| \le |\frac{\sin^{(4)}(tx)}{3!}(1-t)^3 x^4| \le \sin 1/6 \le 0,14$. Поскольку $\sin x^2 \approx x^2 - x^6/6$ и погрешность приближения не превосходит 0,14, то $\int\limits_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2} dx$ можно оценить как $\int\limits_0^1 (1 - x^4/6)dx = 1 - x^5/30\Big|_0^1 = 29/30$ с погрешностью не превышающей 0,14. Ещё лучщую оценку погрешности можно получить, если заметить, что $\sin x$ является суммой своего ряда Тейлора, который на отрезке $[0, 1]$ представляет собой знакопеременный ряд со слагаемыми, убывающими по модулю, и стремящимися к 0. Поэтому ошибка приближения по модулю не превосходит следующего члена этого ряда $x^5/120$, который на отрезке $[0, 1]$ не превосходит $1/120$. Поскольку интегрирование ведётся на отрезке $[0, 1]$, то это и будет оценкой погрешности результата приближённого вычисления интеграла, что и является улучшением погрешности относительно первоначально полученных 0,14.

Задача 506. *Найти первые пять ненулевых членов разложения в ряд решения ДУ* $y' = x^2 + y^3$ *с начальным условием* $y(0) = 1$.

Решение:

Поскольку $y(0) = 1$, то согласно уравнению $y'(0) = 0^2 + 1^3 = 1$.

Продифференцируем уравнение по x: $y'' = 2x + 3y^2 y'$.

Подставляя в него $x = 0$, получаем $y''(0) = 3$.

Продифференцируем уравнение ещё раз по x: $y''' = 2 + 6yy'^2 + 3y^2 y''$.

Подставляя в него $x = 0$, получаем $y'''(0) = 2 + 6 + 9 = 17$.

Продифференцируем уравнение ещё раз по x: $y^{(4)} = 6y'^3 + 12yy'y'' + 6yy'y'' + 3y^2 y''' = 6y'^3 + 18yy'y'' + 3y^2 y'''$.

Подставляя в него $x = 0$, получаем $y^{(4)}(0) = 6 + 54 + 51 = 111$.

Отсюда $y(x) = 1 + x/1! + 3x^2/2! + 17x^3/3! + 111x^4/4! + \cdots$.

Ответ: $y(x) = 1 + x + 3x^2/2 + 17x^3/6 + 37x^4/8 + \cdots$

Задача 516. *Разложить функцию* $f(x) = \begin{cases} 5, & -2 < x \le 0 \\ -5, & 0 < x \le 2 \end{cases}$ *в ряд Фурье. Изобразить график суммы ряда* $S(x)$ *и спектр амплитуд при помощи диаграмм.*

Решение: Поскольку функция $f(x)$ нечётная, то ненулевыми будут только коэффициенты при синусах. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливо

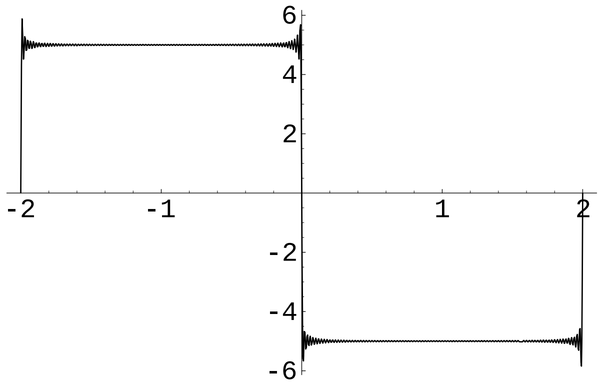
$$b_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\sin(n\pi x/2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} 5\sin(n\pi x/2)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}(-5)\sin(n\pi x/2)dx = -5\int\limits_{0}^{2}\sin(n\pi x/2)dx =$$

$$= 5\int\limits_{0}^{2}\frac{2}{n\pi}d\cos(n\pi x/2) = \frac{10}{n\pi}\cos(n\pi x/2)|_0^2 = \frac{10}{n\pi}\cos(\pi n) - \frac{10}{n\pi} = \begin{cases} 0, & n \text{ чётное} \\ \frac{-20}{n\pi}, & n \text{ нечётное} \end{cases}.$$

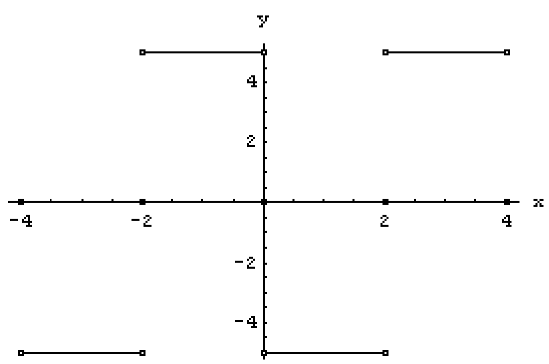
Таким образом для функции $f(x)$ ряд Фурье

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-20}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)\pi x/2).$$

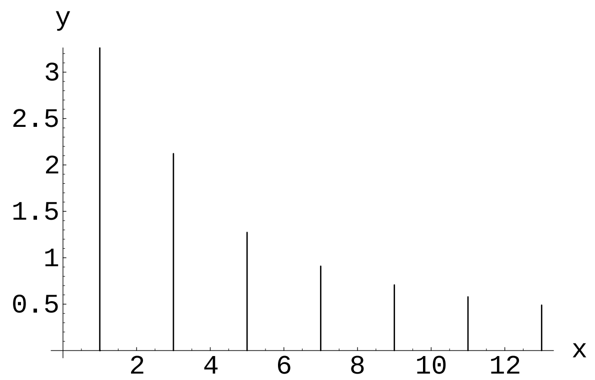
График частичной суммы ряда (первые 100 слагаемых) изображён ниже:



Поскольку в точках разрыва функции $f(x)$, продолженной по периодичности, ряд $S(x)$ будет сходиться в каждой точке к полусумме пределов слева и справа (а при отсутствии разрыва к самому значению), то график $S(x)$ будет выглядеть следующим образом:



Поскольку $a_n = 0$, то амплитуда будет равна $|b_n| = \begin{cases} 0, & n \text{ чётное} \\ \frac{20}{n\pi}, & n \text{ нечётное} \end{cases}$. Изображая амплитуды на диаграмме, получаем следующую картинку:

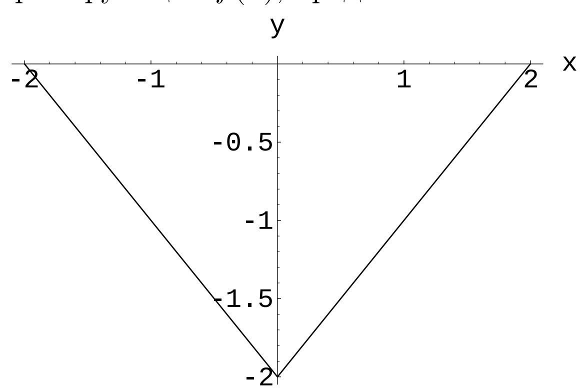


Задача 526. *Разложить функцию $f(x) = x - 2,\ 0 < x \le 2$ в ряд Фурье по косинусам, продолжив её в симметричный интервал. Нарисовать график суммы ряда $S(x)$. Найти $S(1)$, $S(11)$.*

Решение: Поскольку функцию надо разложить в ряд Фурье по косинусам, то продолжим её симметрично относительно начала координат по чётности, таким образом

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x-2, & 0 < x \le 2 \\ -x-2, & -2 \le x \le 0 \end{cases} = |x| - 2,\ -2 \le x \le 2.$$

График функции $f(x)$, продолженной по чётности на отрезок $[-2, 2]$, изображён ниже:



Так как $\hat{f}(-2) = \hat{f}(2) = 0$ и функция $\hat{f}(x)$ непрерывна, то при продолжении её по периодичности мы получим непрерывную функцию. Известно, что ряд Фурье непрерывной периодической функции сходится к ней самой. Посчитаем $a_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} \hat{f}(x)dx$, что равняется половине площади между графиком функции $\hat{f}(x)$ и осью Ox, взятой со знаком минус, т.е. -2.

Теперь для $n \in \mathbb{N}$ подсчитаем

$$a_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} \hat{f}(x)\cos(n\pi x/2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} \hat{f}(x)\cos(n\pi x/2)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} \hat{f}(x)\cos(n\pi x/2)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}(-x-2)\cos(n\pi x/2)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}(x-2)\cos(n\pi x/2)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} x\cos(n\pi x/2)dx - \int\limits_{-2}^{0}\cos(n\pi x/2)dx +$$

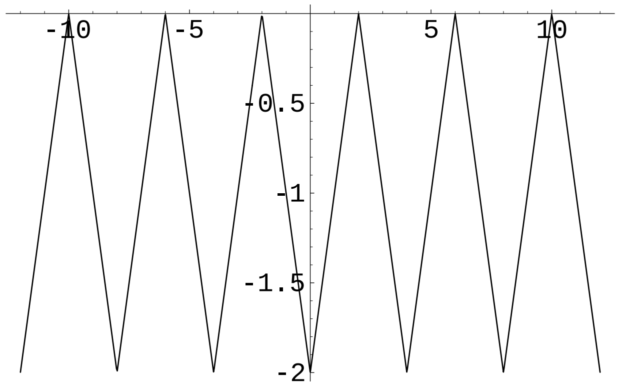
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x\cos(n\pi x/2)dx - \int\limits_{0}^{2}\cos(n\pi x/2)dx = \int\limits_{0}^{2} x\cos(n\pi x/2)dx - \int\limits_{-2}^{2}\cos(n\pi x/2)dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int\limits_{0}^{2} x d\sin(n\pi x/2) - \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi x/2)\Big|_{-2}^{2}.$$

Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо $\sin n\pi = 0$, то последнее равенство может быть продолжено согласно формуле интегрирования по частям следующим образом:

$$\frac{2}{n\pi} x \sin(n\pi x/2)\Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int\limits_0^2 \sin(n\pi x/2)dx = \frac{4}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x/2)\Big|_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0, & n \text{ чётное} \\ \frac{-8}{n^2\pi^2}, & n \text{ нечётное} \end{cases}.$$

Таким образом ряд Фурье $S(x) = -1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{-8\cos((2k-1)\pi x/2)}{(2k-1)^2\pi^2}$. График суммы ряда $S(x)$ (она периодична с периодом 4) будет состоять из множества треугольников как на предыдущей картинке, сдвинутых так, чтобы не налегать друг на друга (см. ниже).



$S(1) = f(1) = -1$, $S(11) = S(7) = S(3) = S(-1) = \hat{f}(-1) = -1$.