

Задача 3. Вагон массой 12 тонн, получив толчок, начал двигаться равнозамедленно, пройдя расстояние 18 метров за 30 секунд, он остановился. Определить начальную скорость вагона, силу трения и коэффициент трения.

Решение: Пусть v_0 – начальная скорость вагона, s – пройденный путь, m – масса вагона, а a – модуль его ускорения. В момент времени t после толчка до остановки скорость вагона $v(t) = v_0 - at$. Вагон остановится, когда скорость станет нулевой, то есть в момент времени $t_0 = v_0/a$. За это время вагон переместится на $v_0 t_0 - at_0^2/2 = at_0^2 - at_0^2/2 = at_0^2/2 = 450a$. По условию $450a = s$, т.е. $a = s/450 = 0,04$ (м/с²), $v_0 = at_0 = 30s/450 = 1,2$ (м/с). Т.к. вагон тормозит сила трения, то по второму закону Ньютона (в проекции на горизонтальную ось): $F_{\text{тр}} = ma = 480$ (Н). Обозначим коэффициент трения α , тогда $F_{\text{тр}} = \alpha F_{\text{н}}$, где $F_{\text{н}}$ – нормальная реакция опоры, по модулю равная весу вагона, т.е. mg . Отсюда $\alpha = ma/mg = a/g$, что приближённо равно 0,004.

Задача 5. Тело, имея начальную скорость 14 м/с, падает с высоты 240 метров и углубляется на 0,2 метра. Определить среднюю силу сопротивления для тела массой 1 кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение: Предположим, что начальная скорость направлена вертикально вниз. Пусть $h(t)$ – высота тела в момент времени t после начала падения, $v_0 = 14$ (м/с) – начальная скорость на начальной высоте $h_0 = 240$ (м). До достижения земли на тело действует только сила тяжести, $h(t) = h_0 - v_0 t - gt^2/2$. Определим, когда тело достигнет земли. Для этого решим уравнение $h(t) = 0$. Получим корень $t_1 = (-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0})/g$. В этот момент скорость тела по модулю равна $v_1 = v_0 + g \cdot t_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$. Далее кроме силы тяжести на тело начинает ещё действовать сила сопротивления со стороны земли, направленная вверх. Если она непостоянна, то и ускорение будет меняться по второму закону Ньютона. Но движение тела с переменным ускорением до момента остановки можно заменить на движение с постоянным ускорением, равному среднему ускорению за этот промежуток времени, что будет соответствовать усреднению силы сопротивления со стороны земли. Таким образом если считать силу постоянной и равной $F_{\text{ср}}$, то по второму закону Ньютона в проекции на ось, направленную вверх, $ma_{\text{ср}} = F_{\text{ср}} - mg$, т.е. $a_{\text{ср}} = F_{\text{ср}}/m - g$, где m – масса тела. Пусть тело остановилось в земле в момент времени t_2 , тогда скорость в этот момент равна нулю, то есть $v_1 = a_{\text{ср}}(t_2 - t_1)$, $t_2 - t_1 = v_1/a_{\text{ср}}$. Так как с момента времени t_1 до момента времени t_2 тело прошло путь $s = 0,2$ (м) вниз, то

$$-s = -v_1(t_2 - t_1) + a_{\text{ср}}(t_2 - t_1)^2/2 = -a_{\text{ср}}(t_2 - t_1)^2 + a_{\text{ср}}(t_2 - t_1)^2/2 = -a_{\text{ср}}(t_2 - t_1)^2/2,$$

поэтому $s = a_{\text{ср}}v_1^2/(2a_{\text{ср}}^2) = v_1^2/2a_{\text{ср}}$, откуда $v_1^2/(2s) = a_{\text{ср}} = F_{\text{ср}}/m - g$. Поэтому $F_{\text{ср}} = m(v_1^2/(2s) + g) = m((v_0^2 + 2gh_0)/(2s) + g)$, что приближённо равно 12272 (Н).

Рассуждение можно провести и другим способом. Пусть на уровне h относительно земли сила сопротивления равна $F(h)$. Тогда по закону изменения энергии $mv_1^2/2 + mgs = \int_{-s}^0 F(h)dh$, отсюда среднее значение силы сопротивления

$$F_{\text{ср}} = \frac{\int_{-0,2}^0 F(h)dh}{0,2} = \frac{m(v_0^2/2 + gh_0 + gs)}{0,2} \approx 12272 \text{ (Н)}.$$

Задача 6. Диск радиусом 20 см и массой 10 кг вращается по инерции, делая 12 оборотов в секунду. При торможении диск останавливается, сделав 10 оборотов от начала торможения до остановки. Определить момент силы торможения.

Решение: Частота 12 об/с соответствует угловой скорости $\omega_0 = 24\pi$ рад/с. Согласно уравнению динамики вращения твёрдого тела $J\varepsilon = M$, где J – момент инерции диска относительно оси вращения, ε – модуль углового ускорения, M – модуль момента силы торможения относительно оси вращения. Известно, что $J = mr^2/2$, где m – масса диска, r – его радиус. Таким образом численно $\varepsilon = 2M/(mr^2)$. Угловая скорость диска в момент времени t от момента торможения до момента остановки, $\omega(t) = \omega_0 - t\varepsilon$. Остановка диска происходит через $t_0 = \omega_0/\varepsilon$ сек. За это время

поворот диска составит $w_0 t_0 - \varepsilon t_0^2/2$ радиан. Поскольку 10 оборотов соответствуют 20π радиан, то по условию

$$\begin{aligned} w_0 t_0 - \varepsilon t_0^2/2 = 20\pi &\iff w_0^2/\varepsilon - w_0^2/2\varepsilon = 20\pi \iff \varepsilon = w_0^2/40\pi \iff \\ &\iff 2M/(mr^2) = w_0^2/40\pi \iff M = mr^2 w_0^2/(80\pi), \end{aligned}$$

что приблизительно равно 9 (Н).

Задача 7. Диск массой 2 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью 2 м/с. Найдите кинетическую энергию диска.

Решение: Кинетическая энергия E катящегося диска равна $mv^2/2 + Jw^2/2$, где m – масса диска, v – линейная скорость движения диска, w – его угловая скорость, J – его момент инерции относительно оси вращения. Если диск катится без проскальзывания, то линейная и угловая скорости связаны соотношением $w = v/r$, где r – радиус диска. Момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно ему $J = mr^2/2$. Отсюда получаем $E = mv^2/2 + mr^2 v^2/(4r^2) = 3mv^2/4 = 6$ (Дж).