

**Задача 3.** Вагон массой 12 тонн, получив толчок, начал двигаться равнозамедленно, пройдя расстояние 18 метров за 30 секунд, он остановился. Определить начальную скорость вагона, силу трения и коэффициент трения.

*Решение:* Пусть  $v_0$  – начальная скорость вагона,  $s$  – пройденный путь,  $m$  – масса вагона, а  $a$  – модуль его ускорения. В момент времени  $t$  после толчка до остановки скорость вагона  $v(t) = v_0 - at$ . Вагон остановится, когда скорость станет нулевой, то есть в момент времени  $t_0 = v_0/a$ . За это время вагон переместится на  $v_0 t_0 - at_0^2/2 = at_0^2 - at_0^2/2 = at_0^2/2 = 450a$ . По условию  $450a = s$ , т.е.  $a = s/450 = 0,04$  (м/с<sup>2</sup>),  $v_0 = at_0 = 30s/450 = 1,2$  (м/с). Т.к. вагон тормозит сила трения, то по второму закону Ньютона (в проекции на горизонтальную ось):  $F_{\text{тр}} = ma = 480$  (Н). Обозначим коэффициент трения  $\alpha$ , тогда  $F_{\text{тр}} = \alpha F_{\text{н}}$ , где  $F_{\text{н}}$  – нормальная реакция опоры, по модулю равная весу вагона, т.е.  $mg$ . Отсюда  $\alpha = ma/mg = a/g$ , что приближённо равно 0,004.

**Задача 5.** Тело, имея начальную скорость 14 м/с, падает с высоты 240 метров и углубляется на 0.2 метра. Определить среднюю силу сопротивления для тела массой 1 кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

*Решение:* Предположим, что начальная скорость направлена вертикально вниз. Пусть  $h(t)$  – высота тела в момент времени  $t$  после начала падения,  $v_0 = 14$  (м/с) – начальная скорость на начальной высоте  $h_0 = 240$  (м). До достижения земли на тело действует только сила тяжести,  $h(t) = h_0 - v_0 t - gt^2/2$ . Определим, когда тело достигнет земли. Для этого решим уравнение  $h(t) = 0$ . Получим корень  $t_1 = (-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0})/g$ . В этот момент скорость тела по модулю равна  $v_1 = v_0 + g \cdot t_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$ . Далее кроме силы тяжести на тело начинает ещё действовать сила сопротивления со стороны земли, направленная вверх. Если она непостоянна, то и ускорение будет меняться по второму закону Ньютона. Но движение тела с переменным ускорением до момента остановки можно заменить на движение с постоянным ускорением, равному среднему ускорению за этот промежуток времени, что будет соответствовать усреднению силы сопротивления со стороны земли. Таким образом если считать силу постоянной и равной  $F_{\text{ср}}$ , то по второму закону Ньютона в проекции на ось, направленную вверх,  $ma_{\text{ср}} = F_{\text{ср}} - mg$ , т.е.  $a_{\text{ср}} = F_{\text{ср}}/m - g$ , где  $m$  – масса тела. Пусть тело остановилось в земле в момент времени  $t_2$ , тогда скорость в этот момент равна нулю, то есть  $v_1 = a_{\text{ср}}(t_2 - t_1)$ ,  $t_2 - t_1 = v_1/a_{\text{ср}}$ . Так как с момента времени  $t_1$  до момента времени  $t_2$  тело прошло путь  $s = 0,2$  (м) вниз, то

$$-s = -v_1(t_2 - t_1) + a_{\text{ср}}(t_2 - t_1)^2/2 = -a_{\text{ср}}(t_2 - t_1)^2 + a_{\text{ср}}(t_2 - t_1)^2/2 = -a_{\text{ср}}(t_2 - t_1)^2/2,$$

поэтому  $s = a_{\text{ср}}v_1^2/(2a_{\text{ср}}^2) = v_1^2/2a_{\text{ср}}$ , откуда  $v_1^2/(2s) = a_{\text{ср}} = F_{\text{ср}}/m - g$ . Поэтому  $F_{\text{ср}} = m(v_1^2/(2s) + g) = m((v_0^2 + 2gh_0)/(2s) + g)$ , что приближённо равно 12272 (Н).

Рассуждение можно провести и другим способом. Пусть на уровне  $h$  относительно земли сила сопротивления равна  $F(h)$ . Тогда по закону изменения энергии  $mv_1^2/2 + mgs = \int_{-s}^0 F(h)dh$ , отсюда среднее значение силы сопротивления

$$F_{\text{ср}} = \frac{\int_{-0,2}^0 F(h)dh}{0,2} = \frac{m(v_0^2/2 + gh_0 + gs)}{0,2} \approx 12272 \text{ (Н)}.$$

**Задача 6.** Диск радиусом 20 см и массой 10 кг вращается по инерции, делая 12 оборотов в секунду. При торможении диск останавливается, сделав 10 оборотов от начала торможения до остановки. Определить момент силы торможения.

*Решение:* Частота 12 об/с соответствует угловой скорости  $\omega_0 = 24\pi$  рад/с. Согласно уравнению динамики вращения твёрдого тела  $J\varepsilon = M$ , где  $J$  – момент инерции диска относительно оси вращения,  $\varepsilon$  – модуль углового ускорения,  $M$  – модуль момента силы торможения относительно оси вращения. Известно, что  $J = mr^2/2$ , где  $m$  – масса диска,  $r$  – его радиус. Таким образом численно  $\varepsilon = 2M/(mr^2)$ . Угловая скорость диска в момент времени  $t$  от момента торможения до момента остановки,  $w(t) = \omega_0 - t\varepsilon$ . Остановка диска происходит через  $t_0 = \omega_0/\varepsilon$  сек. За это время

поворот диска составит  $w_0 t_0 - \varepsilon t_0^2/2$  радиан. Поскольку 10 оборотов соответствуют  $20\pi$  радиан, то по условию

$$\begin{aligned} w_0 t_0 - \varepsilon t_0^2/2 = 20\pi &\iff w_0^2/\varepsilon - w_0^2/2\varepsilon = 20\pi \iff \varepsilon = w_0^2/40\pi \iff \\ &\iff 2M/(mr^2) = w_0^2/40\pi \iff M = mr^2 w_0^2/(80\pi), \end{aligned}$$

что приблизительно равно 9 (Н).

**Задача 7.** Диск массой 2 кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью 2 м/с. Найдите кинетическую энергию диска.

*Решение:* Кинетическая энергия  $E$  катящегося диска равна  $mv^2/2 + Jw^2/2$ , где  $m$  – масса диска,  $v$  – линейная скорость движения диска,  $w$  – его угловая скорость,  $J$  – его момент инерции относительно оси вращения. Если диск катится без проскальзывания, то линейная и угловая скорости связаны соотношением  $w = v/r$ , где  $r$  – радиус диска. Момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно ему  $J = mr^2/2$ . Отсюда получаем  $E = mv^2/2 + mr^2 v^2/(4r^2) = 3mv^2/4 = 6$  (Дж).