Решение типового варианта из "Домашнее задание 3 для магистров (лектор Шахов Е.М.)"

Задача 11. Решить краевую задачу

$$-y'' + y = f(x),\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} -x, x \le 0.5 \\ 0, \quad x > 0.5 \end{cases}$$

методом Галеркина (конечных элементов) и аналитически.

Решение. Найдем сначала аналитическое решение. На отрезке [0, 0.5] общее решение уравнения имеет вид $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$, а на отрезке [0.5, 1] − $y_2 = C_3 e^x + C_4 e^{-x}$. Константы C_1, C_2, C_3, C_4 определим из граничных условий

$$y(0) = 0 = y_1(0) = C_1 + C_2 \text{ и } y(1) = 0 = y_2(1) = C_3 e + C_4 e^{-1}$$

И условия непрерывности функции y и непрерывности ее производной y' в точке $x = 0.5$

$$y_1(0.5) = y_2(0.5) \text{ и } y_1'(0.5) = y_2'(0.5)$$

Из первого условия получаем

$$C_1 e^{1/2} + C_2 e^{-1/2} - 1/2 = C_3 e^{1/2} + C_4 e^{-1/2}$$

Из второго

$$C_1 e^{1/2} - C_2 e^{-1/2} - 1 = C_3 e^{1/2} - C_4 e^{-1/2}$$

Таким образом, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_3 e + C_4 e^{-1} = 0 \\ C_1 e^{1/2} + C_2 e^{-1/2} - 1/2 = C_3 e^{1/2} + C_4 e^{-1/2} \\ C_1 e^{1/2} - C_2 e^{-1/2} - 1 = C_3 e^{1/2} - C_4 e^{-1/2} \end{cases}$$

Откуда

$$C_1 = \frac{\sqrt{e}(3e-1)}{4(e^2-1)},\ C_2 = -\frac{\sqrt{e}(3e-1)}{4(e^2-1)},\ C_3 = -\frac{e-3}{4\sqrt{e}(e^2-1)},\ C_3 = \frac{(e-3)e^{3/2}}{4(e^2-1)}$$

Окончательно получаем аналитическое решение

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{e}(3e-1)}{4(e^2-1)}\left(e^x - e^{-x}\right) - x, x \in [0, 0.5] \\ \dfrac{\sqrt{e}(e-3)}{4(e^2-1)}\left(-e^x + e^{-x+2}\right) - x, x \in (0.5, 1] \end{cases}$$

Для численного решения используем формулы метода Галеркина, которые для данного уравнения имеют вид

$$a_k y_{k-1} - b_k y_k + c_k y_{k+1} = -F_k\,,\ k = 2,\ \dots,\ n,\ \ y_1 = 0\,,\ \ y_{n+1} = 0$$

где

$$a_k = \frac{p_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1/2}} - \frac{\Delta x_{k-1/2}}{6} q_{k-1/2}\,,\ \ c_k = \frac{p_{k+1/2}}{\Delta x_{k+1/2}} - \frac{\Delta x_{k+1/2}}{6} q_{k+1/2}\,,$$

$$b_k = \frac{p_{k+1/2}}{\Delta x_{k+1/2}} + \frac{p_{k-1/2}}{\Delta x_{k-1/2}} + \frac{1}{3}\left(\Delta x_{k+1/2} q_{k+1/2} + \Delta x_{k-1/2} q_{k-1/2}\right)$$

$$p_{k+1/2} = \frac{1}{\Delta x_{k+1/2}} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} p(x)dx\,,\ \ q_{k+1/2}^{i,j} = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_i \omega_j q(x)dx$$

$$F_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f\,\omega_1 dx + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f\,\omega_2 dx = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f\,\omega_k dx$$

Файл, помогающий считать по этим формулами: z11graph3.m (также используется tridiag.m). Результаты расчетов и сравнение с аналитическим решением показаны на рис. 1.

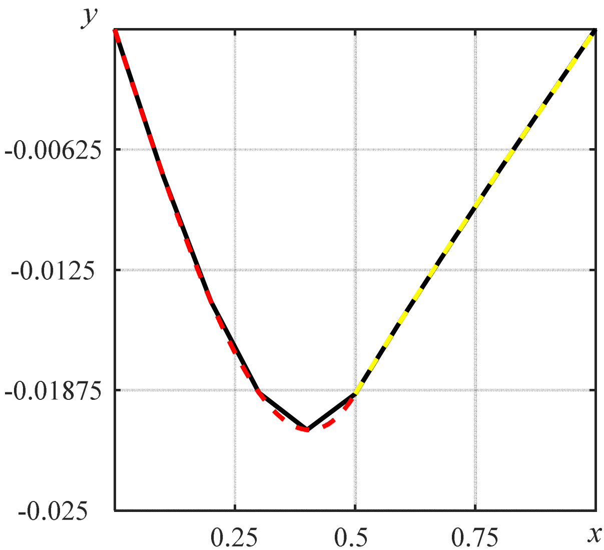


Рис. 1. Результаты расчетов для примера 2; красная пунктирная кривая − точное решение на отрезке [0, 0.5]; желтая пунктирная кривая − точное решение на отрезке [0.5, 1]; черная сплошная − решение, полученное с помощью метода Галеркина (отрезок [0, 1] разбит на 10 равных частей).

Задача 12. Решить задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-1,\ u\big|_{\partial\Omega}=0,(x,y)\in\partial\Omega\,,\ \Omega=\{(x,y),0<x,y<1\}$$

Построить линии уровня функции *u*.

Решение. Подробная инструкция дана в занятии 12. Здесь покажем только результат (файл z12graph1.m).

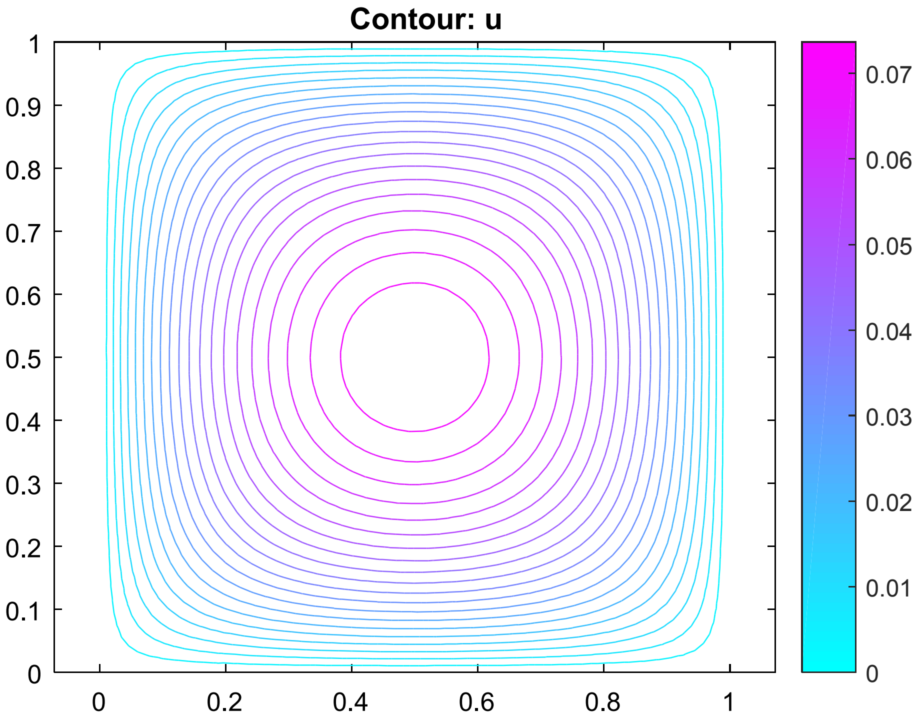
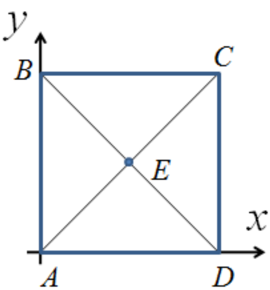


Рис. 2. Результат решения задачи 12.

Задача 13. Пусть функция $u(x, y)$ в квадрате $\Omega=\{(x,y),0<x,y<1\}$



удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-1 \qquad (1)$$

Известно также, что $u(0, 0) = u_A$, $u(0, 1) = u_B$, $u(1, 1) = u_C$, $u(1, 0) = u_D$. С помощью метода конечных элементов найти приближенное значение $u(0.5, 0.5)$.

Решение. Умножим уравнение (1) на кусочно-непрерывную функцию φ и проинтегрируем его по квадрату Ω

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \varphi dxdy = -\int_\Omega \varphi dxdy$$

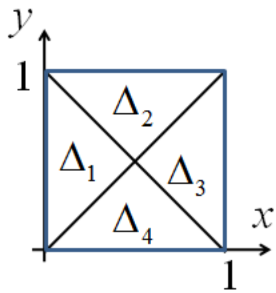
Преобразуем полученное равенство с помощью формулы

$$\int_\Omega \varphi \Delta u dxdy = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dxdy - \int_\Gamma \frac{\partial u(s)}{\partial n} \varphi(s) ds$$

к виду

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dxdy - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_\Omega \varphi dxdy \qquad (2)$$

Полученное равенство справедливо для всех φ из выбранного пространства, в том числе и для такой функции, которая равна нулю на сторонах квадрата и единице в его середине. Для построения такой функции разобьем квадрат на треугольники, как показано на рисунке (данное разбиение отличается от того, которое было рассмотрено на прошлом занятии). Функция φ будет иметь вид



$$\varphi = \begin{cases} 2x, & (x,y) \in \Delta_1 \\ 2(1-y), & (x,y) \in \Delta_2 \\ 2(1-x), & (x,y) \in \Delta_3 \\ 2y, & (x,y) \in \Delta_4 \end{cases}$$

Вне треугольников функция φ равна нулю. Функцию u^h в соответствии с методом конечных элементов будем искать в виде

$$u^h = u_E \varphi + u_A \varphi_A + u_B \varphi_B + u_C \varphi_C + u_D \varphi_D$$

Здесь u_E − приближенное значение $u(x, y)$ в точке (0.5, 0.5). Функции $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C, \varphi_D$ подберем так, чтобы каждая из них равнялась нулю в точке (0.5, 0.5) и единице в точке *A*, *B*, *C*, *D* соответственно

$$\varphi_A = \begin{cases} 1-x-y, (x,y) \in \Delta_1 \cup \Delta_4 \\ 0, \qquad (x,y) \notin \Delta_1 \cup \Delta_4 \end{cases}, \quad \varphi_B = \begin{cases} y-x, (x,y) \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \\ 0, \qquad (x,y) \notin \Delta_1 \cup \Delta_2 \end{cases}$$

$$\varphi_C = \begin{cases} x+y-1, (x,y) \in \Delta_2 \cup \Delta_3 \\ 0, \qquad (x,y) \notin \Delta_2 \cup \Delta_3 \end{cases}, \quad \varphi_D = \begin{cases} x-y, (x,y) \in \Delta_3 \cup \Delta_4 \\ 0, \qquad (x,y) \notin \Delta_3 \cup \Delta_4 \end{cases},$$

Перед вычислением интегралов в (2) заметим, что функция φ равна нулю на границе, поэтому второе слагаемое в (2) равно нулю и формулу (2) можно упростить

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dxdy = \int_\Omega \varphi dxdy \qquad (3)$$

Разобьем область интегрирования (квадрат Ω) на выбранные треугольники и на каждом из них посчитаем левую часть равенства (3). Займемся подсчетом интеграла из левой части (3) по треугольнику Δ_1. Вычислим φ'_x и φ'_y

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2\,,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0$$

В треугольнике Δ_1 не равны нулю только функции $\varphi, \varphi_A, \varphi_B$, поэтому

$$u^h = 2u_E x + u_A(1-x-y) + u_B(y-x)$$

Так как $\varphi'_y = 0$, то нужно вычислить только

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(2u_E x + u_A(1-x-y) + u_B(y-x)\big) = 2u_E - u_A - u_B$$

Таким образом

$$\int\limits_{\Delta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{\Delta_1}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dxdy = \int\limits_{\Delta_1} 2\big(2u_E - u_A - u_B\big)dxdy =$$

$$= 2\big(2u_E - u_A - u_B\big)\int\limits_{\Delta_1} dxdy = 2\big(2u_E - u_A - u_B\big)\cdot\frac{1}{4} = 0.5\big(2u_E - u_A - u_B\big)$$

Аналогично, можно получить значения интеграла из левой части (3) для треугольников Δ_2, Δ_3 и Δ_4

$$\int\limits_{\Delta_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy = 0.5\big(2u_E - u_B - u_C\big)$$

$$\int\limits_{\Delta_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy = 0.5\big(2u_E - u_C - u_D\big)$$

$$\int\limits_{\Delta_4}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy = 0.5\big(2u_E - u_D - u_A\big)$$

И в сумме получаем

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dxdy = 4u_E - u_A - u_B - u_C - u_D \qquad (4)$$

Для подсчета левой части (3) также разобьем интеграл на четыре части и заметим, что значения интеграла по каждой из них равны

$$\int\limits_{\Omega}\varphi dxdy = 4\int\limits_{\Delta_1}\varphi dxdy = 4\int\limits_0^{0.5} dx\int\limits_x^{1-x} 2xdy = 8\int\limits_0^{0.5} x\big(1-x-x\big)\,dx = \frac{1}{3} \qquad (5)$$

Так как (4) и (5) равны друг другу (это две части одного равенства), получаем, что

$$u_E = \frac{1}{4}\left(u_A + u_B + u_C + u_D\right) + \frac{1}{12}$$

Задача 14. Функция удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (6)$$

в треугольнике OAB ($O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$) и следующим граничным условиям

$$u = 1 \text{ на } AB,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \text{ на } OA,\ \frac{\partial u}{\partial x} + u = 1 \text{ на } OB$$

Треугольник OAB разбить на 9 малых треугольников, подобных данному (конечные элементы). Определить неизвестные значения функции в узлах сетки, применяя проекционно-сеточный Метод Галеркина (вариант МКЭ).

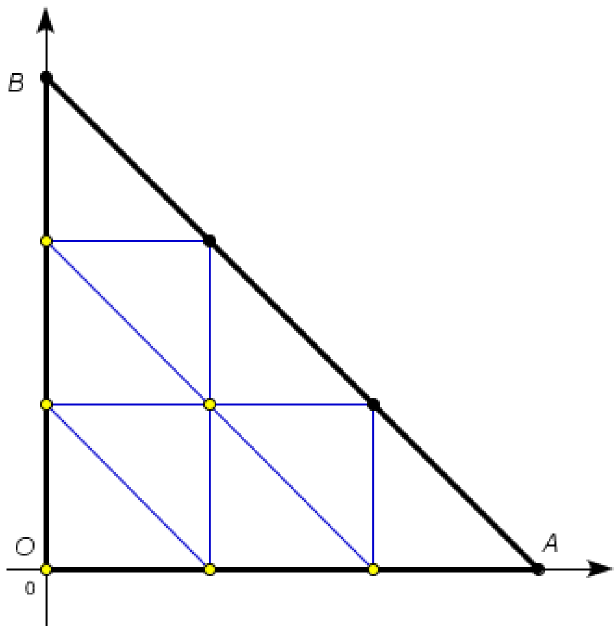


Рис. 3. К задаче 14.

Указание. Воспользуемся результатами, полученными на занятии 11. Предположим, что классическое решение этой задачи существует. Умножим обе части уравнения (6) на функцию φ, частные производные которой являются кусочно-непрерывными и $\varphi\big|_{AB} = 0$. Интегрируя по треугольнику и используя формулу интегрирования по частям получим

$$\int\limits_{OAB}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\varphi dxdy=\int\limits_{OAB}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\varphi dxdy+\int\limits_{OAB}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\varphi dxdy=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\varphi dx+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\varphi dy=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\varphi d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\varphi d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx-\int_0^1\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_0^{1-y}dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}dy-\int_0^1\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx-\int_0^1\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_0^{1-y}dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}dy-\int_0^1\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=0$$

Так как $\varphi|_{AB}=0$, то $\varphi|_{x=1-y}=0$ и $\varphi|_{y=1-x}=0$

$$\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}dy+\int_0^1\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}dy+\int_0^1\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0}dx=0$$

Учитывая граничные условия $\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$ на *OA* и $\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=1$ на *OB*, упростим полученное равенство

$$\int\limits_{OAB}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+\int_0^1\left(1-u(0,y)\right)\varphi dy+\int_0^1\varphi dx=0 \qquad (7)$$

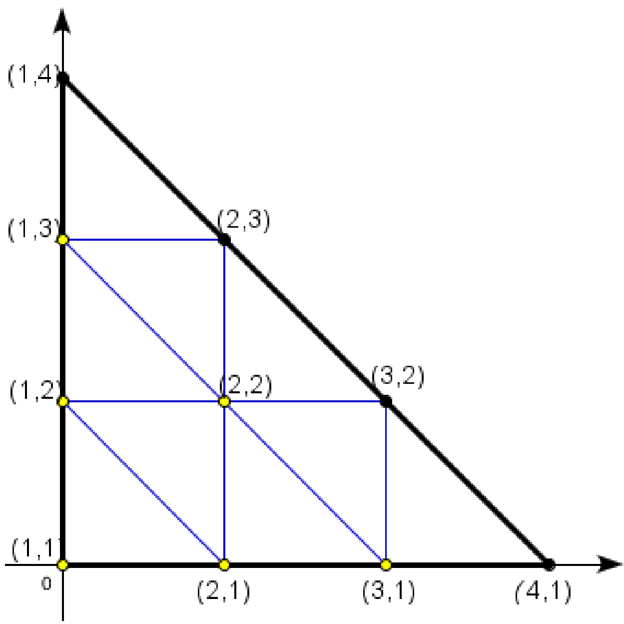
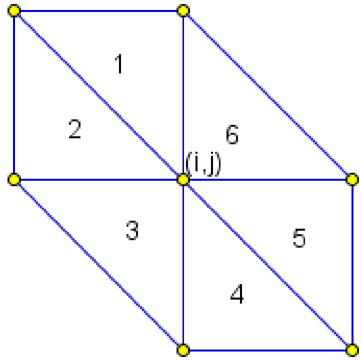


Рис .4. Нумерация вершин.

Пронумеруем вершины как показано на рис. 4. Требуется определить значения функции u в желтых точках (значения в черных известны из граничных условий). Будем искать приближенное значение u в виде

$$u^h = \sum_{i,j} u_{ij}\varphi_{ij}, \ 2 \le i + j \le 5 \tag{8}$$

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} 1+3(y_j - y), & (x,y)\in\Delta_1 \\ 1-3(x_i - x), & (x,y)\in\Delta_2 \\ 1+3(x_i - x)+3(y_j - y), & (x,y)\in\Delta_3 \\ 1-3(y_j - y), & (x,y)\in\Delta_4 \\ 1+3(x_i - x), & (x,y)\in\Delta_5 \\ 1-3(x_i - x)-3(y_j - y), & (x,y)\in\Delta_6 \end{cases}$$



Подставим (8) в (7)

$$\int_{OAB}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sum_{i,j}u_{ij}\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\sum_{i,j}u_{ij}\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\right)dxdy+\int_0^1\left(1-\sum_{i,j}u_{ij}\varphi_{ij}\right)\varphi dy+\int_0^1\varphi dx=0$$

Вместо φ нужно подставить все те φ_{mn}, для которых u_{mn} неизвестно.

1) $m = 1$, $n = 1$

$$\int_{OAB}\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}\sum_{i,j}u_{ij}\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\sum_{i,j}u_{ij}\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\right)dxdy+\int_0^1\left(1-\sum_{i,j}u_{ij}\varphi_{ij}\right)\varphi_{11}dy+\int_0^1\varphi_{11}dx=0$$

$$\int_{\Delta}\left(3\left(3u_{11}+3u_{21}\right)+3\left(3u_{11}+3u_{12}\right)\right)dxdy+$$

$$+\int_0^{1/3}\left(1-\left(u_{11}\left(1+3y\right)+u_{12}\left(1-3(1/3-y)\right)\right)\right)\left(1+3y\right)dy+\int_0^{1/3}\left(1+3x\right)dx=0$$

$$\left(18u_{11}+9u_{12}+9u_{21}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{7}{9}u_{11}-\frac{5}{18}u_{12}+\frac{1}{2}=0$$

$$\left(2u_{11}+u_{12}+u_{21}\right)+-\frac{14}{9}u_{11}-\frac{5}{9}u_{12}=-2$$

$$4u_{11}+4u_{12}+9u_{21}=-2$$

Похожим образом следует выписать уравнения в оставшихся точках и решить систему линейных уравнений.

Список литературы

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – 1989.

2. Федотов А.А., Храпов П.В. Численные методы. Электронное учебное издание. Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу "Численные методы". − 2012.
3. Владимиров В. С. Сборник задач по уравнениям математической физики. – "Наука" Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1982.
4. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3: Учебное пособие для втузов /Под общ. ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова. − 4-е изд. перераб. и доп. − М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. − 576 с. − ISBN 5-94052-036-7 (Ч. 3).
5. Марчук Г.И. Методы математической физики. М.Наука. 1980.
6. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: наука, 1987. – Т. 598. – №. 6.3.