Домашнее задание 3 для магистров (лектор Шахов Е.М.)

Задача 11 (6 баллов). Решить краевую задачу

$$-(py')' + qy = f(x),\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

методом Галеркина (конечных элементов) и аналитически. В численном решении рассмотреть два разбиения отрезка [0, 1]:

1) $x_1 = 0$, $x_2 = c$, $x_3 = 1$

2) $x_k = (k-1)/10$, $k = 1,...,11$.

В каждом случае сравнить на графике точное и приближенное решение. Функции p, q, $f(x)$ и константу c взять из таблицы.

№	p	q	$f(x)$	c
1	4	16	$\begin{cases} e^x, x < c \\ 0, \ x \ge c \end{cases}$	0.1
2	2	8	$\begin{cases} 0, \quad x < c \\ e^{-x}, x \ge c \end{cases}$	0.3
3	3	3	$\begin{cases} x^2, x < c \\ 0, \ x \ge c \end{cases}$	0.5
4	1	4	$\begin{cases} 0, \quad x < c \\ e^{-2x}, x \ge c \end{cases}$	0.7

№	p	q	$f(x)$	c
5	4	4	$\begin{cases} x+1, x < c \\ 0, \ x \ge c \end{cases}$	0.8
6	3	12	$\begin{cases} 0, \quad x < c \\ -x^2, x \ge c \end{cases}$	0.6
7	2	8	$\begin{cases} x^2-1, x < c \\ 0, \ x \ge c \end{cases}$	0.4
8	1	9	$\begin{cases} 0, \quad x < c \\ xe^{-x}, x \ge c \end{cases}$	0.2

Задача 12 (6 баллов). Решить задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y),\ u\big|_{\partial\Omega} = \alpha(x, y), (x, y) \in \partial\Omega$$

Найти решение конечно-элементным методом с помощью системы MATLAB. Построить линии уровня функции u.

Во всех вариантах область представляет собой комбинацию прямоугольника (П), и двух кругов (К$_1$ и К$_2$).

№	$f(x, y)$	П, К$_1$, К$_2$	$\alpha(x, y)$
1	4	Область Ω = П + К$_1$ − К$_2$ $\text{П} = \{(x, y), 0 < x < 1, -1 < y < 1\}$ $\text{К}_1 = \{(x, y), x^2 + (y-0.5)^2 < 0.25\}$ $\text{К}_2 = \{(x, y), (x-1)^2 + (y+0.5)^2 < 0.25\}$	$u\big\|_{\text{П}} = 0$ $u\big\|_{\text{К}_1} = 0.1$ $u\big\|_{\text{К}_2} = -0.1$
2	2	Область Ω = П − К$_1$ + К$_2$ $\text{П} = \{(x, y), 0 < x < 1, -1 < y < 1\}$ $\text{К}_1 = \{(x, y), x^2 + (y+0.5)^2 < 0.25\}$	$u\big\|_{\text{П}} = 0.1$ $u\big\|_{\text{К}_1} = 0$ $u\big\|_{\text{К}_2} = -0.1$

		$К_2 = \{(x,y),\ (x-0.5)^2+(y-1)^2<0.25\}$	
3	3	Область $\Omega = П + К_1 + К_2$ $П = \{(x,y),\ 0<x<2, 0<y<1\}$ $К_1 = \{(x,y),\ x^2+(y-1)^2<0.25\}$ $К_2 = \{(x,y),\ (x-1)^2+y^2<0.25\}$	$u\vert_{П} = -0.1$ $u\vert_{К_1} = 0.1$ $u\vert_{К_2} = 0$
4	1	Область $\Omega = П - К_1 - К_2$ $П = \{(x,y),\ -1<x<1, -1<y<1\}$ $К_1 = \{(x,y),\ x^2+y^2<0.25\}$ $К_2 = \{(x,y),\ (x-1)^2+(y-1)^2<0.25\}$	$u\vert_{П} = 0$ $u\vert_{К_1} = 0.2$ $u\vert_{К_2} = -0.3$
5	7	Область $\Omega = П + К_1 - К_2$ $П = \{(x,y),\ 0<x<2, -1<y<0\}$ $К_1 = \{(x,y),\ (x-1)^2+y^2<1\}$ $К_2 = \{(x,y),\ (x-1)^2+y^2<0.25\}$	$u\vert_{П} = 0.2$ $u\vert_{К_1} = 0$ $u\vert_{К_2} = -0.1$
6	−1	Область $\Omega = П + К_1 - К_2$ $П = \{(x,y),\ 0<x<1, 0<y<1\}$ $К_1 = \{(x,y),\ (x-1)^2+(y-1)^2<1\}$ $К_2 = \{(x,y),\ (x-1)^2+(y+1)^2<0.25\}$	$u\vert_{П} = -0.1$ $u\vert_{К_1} = 0.1$ $u\vert_{К_2} = 0$
7	10	Область $\Omega = П - К_1 - К_2$ $П = \{(x,y),\ 0<x<2, 0<y<1\}$ $К_1 = \{(x,y),\ x^2+(y-0.5)^2<0.25\}$ $К_2 = \{(x,y),\ (x-2)^2+(y-0.5)^2<0.25\}$	$u\vert_{П} = 0.3$ $u\vert_{К_1} = 0$ $u\vert_{К_2} = -0.3$
8	−2	Область $\Omega = П + К_1 + К_2$ $П = \{(x,y),\ 0<x<1, 0<y<3\}$ $К_1 = \{(x,y),\ (x-0.5)^2+(y-3)^2<1\}$ $К_2 = \{(x,y),\ (x-0.5)^2+y^2<1\}$	$u\vert_{П} = 0.1$ $u\vert_{К_1} = -0.1$ $u\vert_{К_2} = 0$

Задача 13 (6 баллов). Пусть функция $u(x, y)$ в четырехугольнике $ABCD$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y)$$

Известно также, что $u(A) = u_A$, $u(B) = u_B$, $u(C) = u_C$, $u(D) = u_D$. С помощью метода конечных элементов найти приближенное значение $u(E)$, где E − точка пересечения диагоналей четырехугольника *ABCD*.

№	$f(x, y)$	A	B	C	D	u_A	u_B	u_C	u_D
1	4	(6, 6)	(4, 13)	(10, 8)	(10, 4)	1	2	3	4
2	2	(1, 1)	(0, 9)	(5, 5)	(4, 1)	4	3	2	1
3	3	(1, 1)	(1, 4)	(7, 4)	(5, 0)	−1	−2	4	5
4	1	(3, −1)	(1, 4)	(6, 8)	(7, 0)	4	5	−2	−1
5	7	(3, −1)	(1, 2)	(6, 8)	(7, 2)	7	5	7	5
6	−1	(0, 0)	(6, 2)	(10, 2)	(3, −1)	5	−7	−4	−3
7	10	(0, −1)	(1, 5)	(4, 5)	(4, −4)	5	7	5	7
8	−2	(−2, 2)	(1, 4)	(4, 0)	(1, −4)	8	6	4	2

Задача 14 (6 баллов). Функция удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в треугольнике *OAB* ($O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$) и следующим граничным условиям

$$u = f(x, y) \text{ на } AB$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g_1(x) \text{ на } OA$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(y)u = g_2(y) \text{ на } OB$$

Треугольник *OAB* разбить на 9 малых треугольников, подобных данному (конечные элементы). Определить неизвестные значения функции в узлах сетки, применяя проекционно-сеточный Метод Галеркина (вариант МКЭ).

№	$f(x, y)$	$g_1(x)$	$\alpha(y)$	$g_2(y)$
1	$\sin(x+y)$	x	2	y^2
2	$\cos(x+y)$	x^2	1	y
3	$(x+y)^2$	-1	y	$\sin y$
4	7	$\sin x$	$-y$	$1-y$
5	$-x-y$	$\cos x$	3	y^3
6	$\sin^2(x+y)$	3	y	1
7	$\cos^2(x+y)$	$-x$	1	$-y$
8	−5	$\cos^2 x$	y	y^2

Задача 15 (6 баллов). Функция удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

в треугольнике AOB ($A(-1,0)$, $O(0,0)$, $B(0,1)$) и следующим граничным условиям

$$u = f_1(x) \text{ на } AO$$

$$u = f_2(y) \text{ на } BO$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha(x,y)u = g(x,y) \text{ на } AB$$

Треугольник AOB разбит на 9 малых треугольников, подобных данному. Определить неизвестные значения функции в узлах сетки, применяя вариационно-сеточный метод Ритца (вариант МКЭ).

№	$f_1(x)$	$f_2(y)$	$\alpha(x,y)$	$g(x,y)$
1	$\cos x$	y^3	1	$x-y$
2	3	1	3	$\sin^2(x-y)$
3	$-x$	$-y$	5	$\cos^2(x-y)$
4	$\cos^2 x$	y^2	7	5
5	x	y^2	-7	$\sin(x-y)$
6	x^2	y	-5	$\cos(x-y)$
7	-1	$\sin y$	-3	-7
8	$\sin x$	$1-y$	-1	$(x-y)^2$