Обработка результатов равноточных многократных измерений с получением среднего арифметического $\overline{X}$, среднеквадратичного отклонения S_x, и определением суммарной погрешности измерения в виде доверительного интервала – $\pm\sum\Delta_{P_Д}$.

Исходные данные

Цена деления прибора С, мм			0,010		
Результаты измерений, мм					
1: 27,190	10: 27,110	19: 27,090	28: 27,070	37: 27,070	46: 27,050
2: 27,130	11: 27,010	20: 27,030	29: 27,130	38: 27,110	47: 27,110
3: 27,090	12: 27,070	21: 27,070	30: 27,190	39: 27,150	48: 27,090
4: 27,070	13: 27,130	22: 27,150	31: 27,050	40: 27,090	49: 27,170
5: 27,110	14: 27,210	23: 27,090	32: 27,110	41: 26,990	50: 27,010
6: 26,970	15: 27,090	24: 27,170	33: 27,130	42: 27,110	51: 27,070
7: 27,170	16: 27,150	25: 27,030	34: 27,110	43: 27,130	52: 27,110
8: 27,130	17: 27,110	26: 27,110	35: 27,090	44: 27,090	53: 27,230
9: 27,050	18: 27,050	27: 27,150	36: 27,130	45: 27,130	

Доверительная вероятность $P_д$ = 0,68 – показывает вероятность нахождения истинного значения в рассчитанном интервале.

Уровень значимости q = 0,02 – показывающий, что принятый закон рассеивания размеров не будет соответствовать реальному закону.

1. Построение гистограммы

Определяем величину размаха R (поле рассеяния):

$R = X_{max} - X_{min}$

X_{max} = 27,230 – наибольшее из измеренных значений

X_{min} = 26,970 – наименьшее из измеренных значений

$R = X_{max} - X_{min}$ = 0,260 (мм).

Определяем число интервалов разбиения n, в соответствии с рекомендациями:

$n = \sqrt{N} =$ 7,280.

(количество интервалов принимается ближайшим большим нечетным).

Принимаем n = 7.

Определяем ширину интервала h:

$h = \dfrac{R}{n} =$ 0,037 мм.

Определяем границы интервалов $X_{min_i} – X_{max_i}$

1 интервал: $X_{min1} – X_{max1}$

$X_{min1} = X_{min} = 26{,}970$ мм

$X_{max1} = X_{min1} + h = 27{,}007$ мм

2 интервал: $X_{min2} – X_{max2}$

$X_{min2} = X_{max1} = 27{,}007$ (мм)

$X_{max2} = X_{min2} + h = 27{,}044$ (мм)

3 интервал: $X_{min3} – X_{max3}$

$X_{min3} = X_{max2} = 27{,}044$ (мм)

$X_{max3} = X_{min3} + h = 27{,}081$ (мм)

4 интервал: $X_{min4} – X_{max4}$

$X_{min4} = X_{max3} = 27{,}081$ (мм)

$X_{max4} = X_{min4} + h = 27{,}119$ (мм)

5 интервал: $X_{min5} – X_{max5}$

$X_{min5} = X_{max4} = 27{,}119$ (мм)

$X_{max5} = X_{min5} + h = 27{,}156$ (мм)

6 интервал: $X_{min6} – X_{max6}$

$X_{min6} = X_{max5} = 27{,}156$ (мм)

$X_{max6} = X_{min6} + h = 27{,}193$ (мм)

7 интервал: $X_{min7} – X_{max7}$

$X_{min7} = X_{max6} = 27{,}193$ (мм)

$X_{max7} = X_{min7} + h = 27{,}230$ (мм)

Определяем середины интервалов Xo_i

1 интервал:

$$Xo_1 = X_{min_1} + \frac{h}{2} = 26{,}989 \text{ (мм)}$$

2 интервал:

$$Xo_2 = X_{min_2} + \frac{h}{2} = 27{,}026 \text{ (мм)}$$

3 интервал:

$$Xo_3 = X_{min_3} + \frac{h}{2} = 27{,}063 \text{ (мм)}$$

4 интервал:

$$Xo_4 = X_{min_4} + \frac{h}{2} = 27{,}100 \text{ (мм)}$$

5 интервал:

$$Xo_5 = Xmin_5 + \frac{h}{2} = 27{,}137 \text{ (мм)}$$

6 интервал:

$$Xo_6 = Xmin_6 + \frac{h}{2} = 27{,}174 \text{ (мм)}$$

7 интервал:

$$Xo_7 = Xmin_7 + \frac{h}{2} = 27{,}211 \text{ (мм)}$$

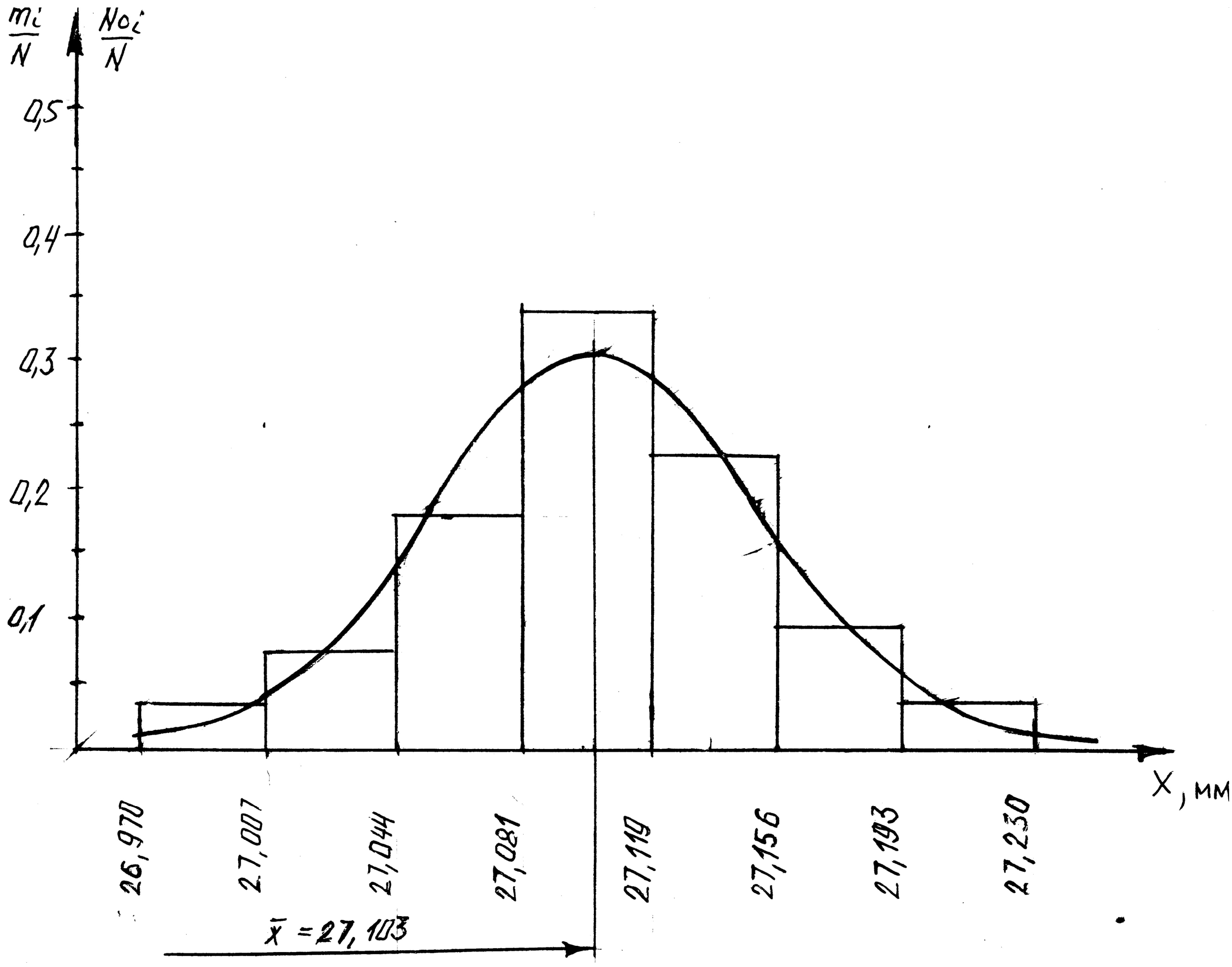
Определение количества размеров попадающих в каждый интервал m_i

Используя заданную выборку подсчитываем количество размеров попадающих в каждый интервал (если размер совпадает с границей интервала то его относят в интервал, находящийся слева по числовой оси)

Результаты выполненных выше расчетов занесем в таблицу:

Номер интервала	Границы интервала		Середина интервала, Xo_i (мм)	Число размеров в интервале, m_i
	$Xmin_i$ (мм)	$Xmax_i$ (мм)		
1	26,970	27,007	26,989	2
2	27,007	27,044	27,026	4
3	27,044	27,081	27,063	10
4	27,081	27,119	27,100	18
5	27,119	27,156	27,137	12
6	27,156	27,193	27,174	5
7	27,193	27,230	27,211	2

Используя табличные данные строим гистограмму рассеивания единичных замеров и теоретическую кривую нормального распределения:



2. Проверка выборки на соответствие нормальному закону распределения

При числе измерений свыше 50 проверка распределения на соответствие нормальному закону может выполняться по критерию Пирсона. При использовании этого критерия определяется параметр хи-квадрат по следующей формуле:

$$\chi^2 = \sum \frac{(m_i - No_i)^2}{No_i},$$ где No_i – теоретическая частота попадания в интервал.

Теоретическая частота попадания в интервал определяется по формуле:

$$No_i = \frac{N * h}{\sigma_x} * \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ – плотность вероятности появления размеров в каждом интервале;

σ_x – среднеквадратичное отклонение размеров (СКО) выборки.

Считая, что СКО практически совпадает с его оценкой ($\sigma_x \approx S_x$) приведем формулу, по которой определяется оценка СКО:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum m_i * (Xo_i - \overline{X})^2}{N}}$$

В данную формулу входит величина $\overline{X}$, которая представляет среднеарифметическое значение измеряемой величины и определяется по формуле:

$$\overline{X} = \frac{1}{N} * \left(\sum Xo_i * m_i\right)$$

После подстановки получим численные значения среднеарифметического и оценки СКО:

$\overline{X} =$ 27,103 мм

$S_x =$ 0,049 мм

Кроме полученных величин, для определения теоретической частоты попадания в интервал No_i необходимо знать плотность вероятности попадания размеров в каждом интервале. Эту величину можно определить по формуле:

$$\varphi(z) = \frac{e^{(-z^2/2)}}{\sqrt{2\pi}}$$

Так как расчеты по данной формуле достаточно сложны, значения плотности вероятности выбирают из таблицы в зависимости от безразмерного параметра Z, который для каждого интервала определяется по формуле:

$$Zo_i = \frac{Xo_i - \overline{X}}{S_x}$$

Для 1 интервала:

Zo_1 = 2,313,

что соответствует величине φ(z) = 0,028

Для 2 интервала:

Zo_2 = 1,561,

что соответствует величине φ(z) = 0,118

Для 3 интервала:

Zo_3 = 0,809,

что соответствует величине φ(z) = 0,287

Для 4 интервала:

Zo_4 = 0,057,

что соответствует величине φ(z) = 0,398

Для 5 интервала:

$Zo_5 = 0{,}695$,

что соответствует величине $\varphi(z) = 0{,}312$

Для 6 интервала:

$Zo_6 = 1{,}447$,

что соответствует величине $\varphi(z) = 0{,}139$

Для 7 интервала:

$Zo_7 = 2{,}200$,

что соответствует величине $\varphi(z) = 0{,}035$

Определяем теоретические значения количества деталей для каждого интервала No_i.

Для 1 интервала:

$$No_1 = \frac{N*h}{S_x} * \varphi(Zo_1) = 1{,}103$$

Для 2 интервала:

$$No_2 = \frac{N*h}{S_x} * \varphi(Zo_2) = 4{,}710$$

Для 3 интервала:

$$No_3 = \frac{N*h}{S_x} * \varphi(Zo_3) = 11{,}455$$

Для 4 интервала:

$$No_4 = \frac{N*h}{S_x} * \varphi(Zo_4) = 15{,}873$$

Для 5 интервала:

$$No_5 = \frac{N*h}{S_x} * \varphi(Zo_5) = 12{,}447$$

Для 6 интервала:

$$No_6 = \frac{N*h}{S_x} * \varphi(Zo_6) = 5{,}558$$

Для 7 интервала:

$$No_7 = \frac{N*h}{S_x} * \varphi(Zo_7) = 1{,}414$$

На основании результатов измерений и расчета теоретических данных определяем фактическую и теоретическую частоту попадания размеров в интервал:

№ инервала	Фактическая частота, $\frac{m_i}{N}$	Теоретическая частота, $\frac{No_i}{N}$
1	0,0377	0,0208
2	0,0755	0,0889
3	0,1887	0,2161
4	0,3396	0,2995
5	0,2264	0,2348
6	0,0943	0,1049
7	0,0377	0,0267

Полученные результаты позволяют получить расчетную величину параметра хи-квадрат:

$\chi^2 = 1{,}620$

Для совпадения фактического закона распределения с теоретическим законом нормального распределения необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$\chi^2 \le \chi^2_q$

где χ^2_q – теоретическое граничное значение параметра хи-квадрат, которое определяется по таблице (таблица 2 задания к контрольной работе).

Для получения табличного значения необходимо определиться с двумя параметрами:

- уровнем значимости q, который показывает вероятность того, что законы не совпадут. В нашем случае, в соответствии с заданием, q = 0,02;

- числом степеней свободы ν, которое определяется в зависимости от числа интервалов n и числа определяемых по статистике параметров, необходимых для совмещения модели и гистограммы r. Для нормального закона распределения r = 2, так как закон однозначно характеризуется двумя параметрами – СКО и МО (математическим ожиданием). Число степеней свободы определяется по формуле:

$\nu = n - 1 - r = 7 - 1 - 2 = 4$

Таким образом, табличное значение $\chi^2_q = 11{,}670$.

3. Определение доверительного интервала рассеивания случайных погрешностей вокруг среднего значения

В доверительном интервале, который предстоит найти с вероятностью Рд, должно находится истинное значение измеряемой величины.

Доверительные границы случайной погрешности находятся по формуле:

$\Delta = \pm Z_p * S_{\bar{x}}$,

где $S_{\bar{x}}$ − оценка СКО среднего арифметического значения, которая определяется по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

Таким образом:

$$\Delta = \pm Z_p * \frac{S_x}{\sqrt{N}},$$

Если условие выполняется, то гипотеза о совпадении экспериментального и выбранного теоретического (нормального) распределения принимается (она не противоречит данным).

Так как по условию Рд = 0,68, то значение функции Лапласа:

F(Zp) = Рд/2 = 0,34

Из таблицы определяем величину нормированного параметра Zp, которая соответствует данному значению функции Лапласа

Так как условие $\chi^2 \leq \chi^2_q$ выполняется, то

Zp = 1,000

Таким образом, доверительный интервал случайной ошибки:

$$\Delta = \pm Z_p * \frac{S_x}{\sqrt{N}} = \pm \ 0{,}007 \text{ мм.}$$

Перед определением суммарной погрешности определим ее постоянные неисключенные составляющие.

Постоянные неисключенные составляющие:

- погрешность снятия показаний со шкалы (принимается равной цене деления шкалы прибора):

θc = ±0,1*С = ± 0,001 мм,

где С = 0,010 мм - цена деления шкалы прибора;

- систематическая неисключенная погрешность округления результата:

$$\theta o = \pm \frac{C}{\sqrt{12}}$$

θо = ± 0,003 мм

- неисключенная погрешность прибора (условно принимается равной цене деления шкалы прибора):

θпр = ± 0,010 мм

Суммирование частных постоянных погрешностей измерения производится по двум формулам:

$\theta_{\Sigma}1 = \theta с + \theta о + \theta пр = 0{,}014$ мм

$$\theta_{\Sigma}2 = k\sqrt{\theta_{C}^{2} + \theta_{O}^{2} + \theta_{ПР}^{2}},$$

где k – поправочный коэффициент, зависящий от числа слагаемых погрешностей и доверительной вероятности. В нашем случае k = 0,960

Тогда

$\theta_{\Sigma}2 = 0{,}010$ мм

Для дальнейшего расчета принимаем $\theta_{\Sigma} = 0{,}014$ мм (выбирается наибольшее значение)

В качестве общей случайной погрешности принимаем величину доверительного интервала, полученную из экспериментов по замерам параметра:

$$\xi_{\Sigma}(P) = \pm Z_{p} * \frac{S_{x}}{\sqrt{N}} = \pm\ 0{,}007 \text{ мм}$$

Определение суммарной погрешности измерения $\pm \Delta\sum$

$\pm \Delta\sum = \theta_{\Sigma} + \xi_{\Sigma}(P) = 0{,}021$ мм

В качестве окончательного результата принимаем большее значение.

Результат в общем виде: 50,103 ± 0,021 мм.