**Практическое занятие №3.4. Решение задачи о распределении ресурсов.**

**Пример6:** Планируется деятельность 4 предприятий на очередной год. Начальные средства – 5 ед. Средства x, выделенные k-му предприятию (k=1, 2, 3, 4) приносят в конце года прибыль . Функции заданы таблично. Принято считать, что

А) прибыль не зависит от вложения средств в другие предприятия;

Б) прибыль от каждого предприятия выражается в одинаковых условных единицах;

В) суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Таблица №1.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  |  |
| 1 | 8 | 6 | 3 | 4 |
| 2 | 10 | 9 | 4 | 6 |
| 3 | 11 | 11 | 7 | 8 |
| 4 | 12 | 13 | 11 | 13 |
| 5 | 18 | 15 | 18 | 16 |

Решение. Обозначим через количество средств, выделенных k-му предприятию.

Суммарная прибыль равна

(1)

Переменные удовлетворяют ограничениям:

(2)

Требуется найти переменные удовлетворяющие системе ограничений (2) и обращающие в максимум функцию (1).

Схема решения задачи ДП имеет вид: процесс решения распределения средств можно рассматривать как 4-шаговый, номер шага совпадает с номером предприятия; выбор переменных - управление соответственно на I, II, III, IV шагах. – конечное состояние процесса – равно нулю, так как все средства должны быть распределены.

Уравнения состояний в данной задаче имеют вид:

Где – параметр состояния – количество средств, оставшихся после k-го шага, то есть средства, которые останется распределить между оставшимися 4-k предприятиями.

Ведем в рассмотрение функцию – условную оптимальную прибыль, полученную от k-го, (k+1)-го, …, 4-го предприятия, если между ними распределялись оптимальным образом средства Допустимые управления на k-м шаге удовлетворяют условию: (либо k-му предприятию ничего не выделяем, либо не больше того, что имеем к k-му шагу,

Уравнения Беллмана имеют вид:

(а)

, (б)

, (в)

, (г)

Последовательно решаем записанные уравнения, проводя условную оптимизацию каждого шага.

4-й шаг. В таблице №1 прибыли монотонно возрастают, поэтому все средства, оставшиеся к 4-му шагу, следует вложить в 4-е предприятие. При этом для возможных значений получим:

и

3-й шаг. Делаем все предположения относительно остатка средств к 3-му шагу (то есть после выбора и ). может принимать значения 0, 1,2, 3, 4, 5.

В зависимости от этого выбираем , находим и сравниваем для разных при фиксированном значения суммы . Для каждого наибольшее из этих есть – условная оптимальная прибыль, полученная при оптимальном распределении средств между 3-м и 4-м предприятиями. Оптимизация дана в таблице №2 при k=3. Для каждого значения функции и помещены в графах 5 и 6 соответственно.

Таблица №2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | k=3 | | | k=2 | | | k=1 | | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0  1 | 1  0 | 0+1=1  3+0=3 | 4 | 0 | 0+4=4  6+0=6 | 6 | 1 | 0+6=6  8+0=8 | 8 | 1 |
| 2 | 0  1  2 | 2  1  0 | 0+6=6  3+4=7  4+0=4 | 7 | 1 | 0+7=7  6+4=10  9+0=9 | 10 | 1 | 0+10=10  8+6=14  10+0=10 | 14 | 1 |
| 3 | 0  1  2 | 3  2  1 | 0+8=8  3+6=9  4+4=8 | 9 | 1 | 0+9=9  6+7=13  9+4=13 | 13 | 1  2 | 0+13=13  8+10=18  10+6=16 | 18 | 1 |

2-й шаг. Условная оптимизация, согласно уравнению (в) проведена в таблице №2 при k=2. Для всех возможных значений значения и находятся в столбцах 8 и 9 соответственно, первые слагаемые в столбце 7 – значения взяты из таблицы №1, а вторые слагаемые взяты из столбца 5 таблицы №2 при

1-й шаг. Условная оптимизация (уравнение (г)) проведена в таблице №2 при k=1 для . Поясним решения подробно: если то прибыль, полученная от четырех предприятий при условии, ед. средств между оставшимися тремя предприятиями будут распределены оптимально, равна ( взято из столбца 9 таблицы №2 при ). Если то . Суммарная прибыль при условии, что ед. средств между оставшимися тремя предприятиями будут распределены оптимально, равна ( взято из таблицы №1, а - из столбца 9 таблицы №2). Аналогично при , и

при и

при и

при и

Сравнивая подчеркнутые числа, получим ед. при

Используя уравнения получим а по таблице №2 в столбце 9 находим Далее находим , а по таблице №2 в столбце 6 находим Наконец, и то есть .

Максимум суммарной прибыли равен 24 ед. средств при условии, что 1-му предприятию выделено 1 ед. 2-му предприятию выделено 2 ед., 3-му – 1 ед., и 4-му – 1 ед.

**Задание**.Решить задачу распределения ресурсов. Имеется запас средств *K,* который должен быть распределен между *m = 5* предприятиями *П1, П2, …, П5.* Каждое из предприятий *Пi* при вложении в него каких-то средств *x* приносит доход, зависящий от *x*, т.е. представляющий собой какую-то функцию *φi*(*x*). Все функции *φi*(*x*) (*i = 1, 2, …, m*) заданы (разумеется, эти функции – неубывающие).

Необходимо: а) сделать вербальную и математическую постановку задачи; б) решить задачу в соответствии с вариантом – распределить средства *K* между предприятиями, чтобы в сумме они дали максимальный доход.

Номер варианта ***N*** задания соответствует порядковому номеру в журнале учета успеваемости.

Если ***N*** > 26, то номер варианта равен ***N*** – 26.

Варианты заданий

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№**  **варианта** | ***K*** | ***x*** | ***φ1(x)*** | ***φ2(x)*** | ***φ3(x)*** | ***φ4(x)*** | ***φ5(x)*** | **№**  **варианта** | ***K*** | ***x*** | ***φ1(x)*** | ***φ2(x)*** | ***φ3(x)*** | ***φ4(x)*** | ***φ5(x)*** |
| **1** | 110 | 10 | 6,65 | 5,26 | 1,74 | 1,27 | 1,93 | **14** | 90 | 10 | 6,43 | 5,31 | 2,4 | 1,51 | 4,64 |
| 20 | 6,98 | 5,4 | 2,71 | 6,76 | 2,44 | 20 | 7,25 | 7,58 | 3,32 | 1,91 | 5,29 |
| 30 | 10,32 | 12,12 | 4,78 | 9,49 | 5,3 | 30 | 10,99 | 10,92 | 9,72 | 3,81 | 5,94 |
| 40 | 12,42 | 13,17 | 7,09 | 10,19 | 9,01 | 40 | 11,02 | 14,63 | 14,38 | 7,4 | 7,22 |
| 50 | 13,82 | 19,48 | 8,72 | 13,16 | 12,87 | 50 | 11,24 | 15,66 | 14,71 | 10,75 | 8,86 |
| 60 | 15,64 | 21,02 | 10,58 | 13,37 | 12,98 | 60 | 13,35 | 19,17 | 17,83 | 13,92 | 10,73 |
| 70 | 16,71 | 21,33 | 14,65 | 15,45 | 16,8 | 70 | 14,63 | 19,54 | 19,01 | 15,34 | 12,42 |
| 80 | 18,2 | 22,36 | 16,1 | 17,07 | 18,24 | 80 | 19,19 | 22,41 | 19,39 | 16,28 | 12,95 |
| 90 | 18,43 | 22,97 | 19,11 | 22,57 | 21,59 | 90 | 21,53 | 22,89 | 20,87 | 16,65 | 14,66 |
| 100 | 20,5 | 24,61 | 20,62 | 23,91 | 22,39 | 100 | 21,8 | 23,84 | 22,33 | 17,93 | 24,55 |
| **2** | 60 | 5 | 1,74 | 4,37 | 2,14 | 2,8 | 2,36 | **15** | 45 | 5 | 4,84 | 2,79 | 1,26 | 3,31 | 5,47 |
| 10 | 9,02 | 6,42 | 4,76 | 3,15 | 2,49 | 10 | 5,92 | 3,57 | 3,14 | 3,54 | 7,43 |
| 15 | 9,03 | 6,57 | 6,3 | 5,67 | 3,5 | 15 | 8,97 | 3,73 | 4,85 | 7,67 | 13,23 |
| 20 | 9,45 | 9,06 | 8,65 | 12,73 | 4,19 | 20 | 9,89 | 5,68 | 5,12 | 12,47 | 13,87 |
| 25 | 10,84 | 9,42 | 9,97 | 13,32 | 6,25 | 25 | 14,82 | 6,83 | 9,16 | 13,6 | 16,06 |
| 30 | 12,82 | 10,93 | 11,67 | 14,38 | 8,13 | 30 | 15,64 | 10,08 | 17,93 | 16,4 | 19,49 |
| 35 | 19 | 15,45 | 12,23 | 15,46 | 12,01 | 35 | 19,2 | 10,55 | 19,34 | 17,35 | 19,52 |
| 40 | 19,96 | 17,1 | 16,81 | 18,8 | 13,02 | 40 | 19,32 | 21,93 | 19,82 | 18,57 | 20,65 |
| 45 | 22,89 | 21,12 | 18,77 | 20,15 | 18,55 | 45 | 19,75 | 23,52 | 21,89 | 20,54 | 23,28 |
| 50 | 24,12 | 23,72 | 23,19 | 21,47 | 18,8 | 50 | 21,68 | 24,46 | 24,63 | 22,76 | 23,89 |
| **3** | 22 | 2 | 7,08 | 3,42 | 1,33 | 3,26 | 5,56 | **16** | 18 | 2 | 1,4 | 9,42 | 1,43 | 1,73 | 4,68 |
| 4 | 9,54 | 3,8 | 1,97 | 3,91 | 9,69 | 4 | 3,63 | 11,93 | 4,66 | 3,46 | 7,99 |
| 6 | 14,25 | 6,26 | 6,1 | 4,33 | 12,02 | 6 | 5,98 | 15,11 | 6,56 | 5,07 | 9,13 |
| 8 | 16,67 | 6,64 | 6,15 | 7,21 | 15,93 | 8 | 7,09 | 15,88 | 8,22 | 6,43 | 9,19 |
| 10 | 17,24 | 9,43 | 7,33 | 8,31 | 16,44 | 10 | 8,89 | 16,33 | 10,78 | 14,42 | 11,77 |
| 12 | 18,48 | 11,24 | 8,13 | 10,73 | 20,09 | 12 | 12,04 | 17,25 | 11,29 | 16,93 | 12,86 |
| 14 | 18,87 | 16,03 | 14,58 | 13,17 | 21,67 | 14 | 17,91 | 18,76 | 14,8 | 17,84 | 15,41 |
| 16 | 19,17 | 17,01 | 14,63 | 14,06 | 22,8 | 16 | 21,12 | 18,99 | 17,06 | 20,35 | 17,19 |
| 18 | 20,35 | 17,56 | 18,02 | 15,78 | 23,74 | 18 | 21,36 | 19,74 | 20,63 | 22,57 | 18,16 |
| 20 | 23,89 | 20,83 | 24,16 | 22,03 | 23,76 | 20 | 21,76 | 22,67 | 23,28 | 23,25 | 20,44 |
| **4** | 11 | 1 | 1,75 | 1,9 | 2,24 | 3,03 | 1,28 | **17** | 9 | 1 | 1,25 | 1,19 | 1,16 | 2,66 | 3,4 |
| 2 | 2,89 | 3 | 3,57 | 6,58 | 9,73 | 2 | 2,86 | 3,27 | 2,09 | 2,79 | 6,62 |
| 3 | 3,89 | 3,06 | 4,62 | 9,81 | 10,58 | 3 | 8,92 | 4,75 | 10,31 | 3,72 | 10,5 |
| 4 | 8,19 | 6,42 | 6,97 | 11,71 | 16,51 | 4 | 15,71 | 6,96 | 14,17 | 4,33 | 14,7 |
| 5 | 12,6 | 7,1 | 8,06 | 16,39 | 19,8 | 5 | 16,22 | 7,74 | 17,03 | 5,63 | 16,82 |
| 6 | 13,01 | 9,5 | 14,5 | 16,63 | 22,03 | 6 | 20,14 | 15,68 | 17,13 | 13,58 | 16,91 |
| 7 | 17,73 | 10,2 | 16,29 | 17,66 | 22,64 | 7 | 23,61 | 17,72 | 18,79 | 18,02 | 18,2 |
| 8 | 23,31 | 14,88 | 17,68 | 18,36 | 23 | 8 | 23,74 | 17,74 | 19,38 | 20,73 | 19,78 |
| 9 | 24,34 | 20,39 | 21,03 | 23,91 | 23,95 | 9 | 24,17 | 22,83 | 22,61 | 20,81 | 20,89 |
| 10 | 24,72 | 21,65 | 24,05 | 24,4 | 24,33 | 10 | 24,98 | 24,72 | 23,17 | 21,87 | 24,86 |
| **5** | 165 | 15 | 6,78 | 2,64 | 5,21 | 3,08 | 3,59 | **18** | 135 | 15 | 4,08 | 1,96 | 3,92 | 1,11 | 1,07 |
| 30 | 9,94 | 3,99 | 9,32 | 7,47 | 3,88 | 30 | 4,73 | 2,24 | 8,27 | 5,69 | 5,56 |
| 45 | 10,05 | 4,35 | 9,73 | 8,31 | 4,36 | 45 | 5,25 | 7,53 | 9,46 | 8,84 | 6,38 |
| 60 | 11,27 | 6,41 | 10,83 | 10,57 | 4,56 | 60 | 8,6 | 9,95 | 12,96 | 9,03 | 9,06 |
| 75 | 12,56 | 8,43 | 13,85 | 11,2 | 4,91 | 75 | 12,87 | 10,87 | 14,02 | 9,09 | 9,92 |
| 90 | 12,78 | 12,11 | 14,25 | 12,31 | 6,15 | 90 | 13,01 | 12,32 | 15,39 | 9,83 | 11,12 |
| 105 | 14,6 | 15,88 | 14,96 | 13,9 | 7,93 | 105 | 14,34 | 17,23 | 19,15 | 11,57 | 16,64 |
| 120 | 17,51 | 21,65 | 19,82 | 18,39 | 9,91 | 120 | 17,4 | 17,25 | 21 | 17,12 | 19,67 |
| 135 | 20,73 | 21,91 | 23,68 | 22,85 | 13,47 | 135 | 21,57 | 18,99 | 22,82 | 21,27 | 21,99 |
| 150 | 21,77 | 23,42 | 23,87 | 23,33 | 20 | 150 | 21,64 | 24,25 | 23,65 | 22,68 | 22,83 |
| **6** | 44 | 4 | 2,11 | 2,05 | 3,45 | 2,69 | 5,2 | **19** | 36 | 4 | 9,86 | 1,02 | 2,83 | 3,3 | 5,28 |
| 8 | 4,71 | 3,6 | 3,57 | 10,93 | 6,86 | 8 | 14,14 | 1,6 | 4,64 | 5,38 | 5,65 |
| 12 | 6,03 | 6,67 | 3,61 | 12,12 | 7,55 | 12 | 16,1 | 6,88 | 9,8 | 6,04 | 5,86 |
| 16 | 6,52 | 9,79 | 7,74 | 12,31 | 8,01 | 16 | 17,16 | 6,94 | 10,08 | 7,05 | 6,22 |
| 20 | 8,11 | 11,13 | 10,16 | 16,07 | 8,99 | 20 | 17,61 | 12,06 | 10,31 | 10,2 | 8,99 |
| 24 | 8,33 | 16,32 | 10,18 | 18,34 | 10,16 | 24 | 17,61 | 17,77 | 12,38 | 18,22 | 9,15 |
| 28 | 9,93 | 20,15 | 13,06 | 20,38 | 13,51 | 28 | 17,98 | 20,58 | 18,91 | 19,85 | 9,5 |
| 32 | 12,81 | 21,17 | 18,84 | 21,24 | 14,26 | 32 | 19,09 | 21,04 | 19,51 | 21,14 | 17,3 |
| 36 | 14,72 | 21,8 | 24,31 | 22,07 | 16,89 | 36 | 19,89 | 24,29 | 20,38 | 23,53 | 18,88 |
| 40 | 24,85 | 23,58 | 24,67 | 23,09 | 19,52 | 40 | 23,42 | 24,85 | 21,12 | 24,88 | 20,41 |
| **7** | 33 | 3 | 9,47 | 2,61 | 3,08 | 6,48 | 1,69 | **20** | 27 | 3 | 5,73 | 3,16 | 2,06 | 5,54 | 6,09 |
| 6 | 10,23 | 3,06 | 3,6 | 7,41 | 2,15 | 6 | 10,26 | 3,89 | 3,68 | 12,5 | 8,31 |
| 9 | 10,71 | 6,03 | 9,39 | 8,4 | 2,65 | 9 | 10,41 | 3,91 | 6,33 | 13,94 | 10,75 |
| 12 | 10,72 | 10,21 | 9,54 | 15,91 | 3,85 | 12 | 10,54 | 7,45 | 8,49 | 14,83 | 10,95 |
| 15 | 14,13 | 11,31 | 10,19 | 17,24 | 4,89 | 15 | 12,19 | 8,57 | 9,64 | 14,86 | 14,85 |
| 18 | 14,84 | 12,18 | 11,84 | 17,84 | 6,62 | 18 | 19,93 | 11,17 | 10,57 | 15,03 | 17,13 |
| 21 | 17,29 | 13,52 | 11,97 | 20,44 | 13,36 | 21 | 21,33 | 12,66 | 10,72 | 15,79 | 20,51 |
| 24 | 18,58 | 17,85 | 12,27 | 20,6 | 15,73 | 24 | 21,44 | 15,41 | 16,68 | 16,91 | 20,72 |
| 27 | 21,83 | 20,25 | 16,14 | 21,82 | 24,82 | 27 | 22,59 | 15,63 | 16,97 | 21,66 | 21,84 |
| 30 | 23,64 | 23,59 | 22,58 | 23,55 | 24,99 | 30 | 24,97 | 21,71 | 18,81 | 21,8 | 22,04 |
| **8** | 88 | 8 | 5,77 | 2,98 | 2,68 | 2,75 | 4,85 | **21** | 72 | 8 | 3,95 | 1,9 | 5,2 | 2,29 | 1,88 |
| 16 | 6,59 | 3 | 3,04 | 4,87 | 5,9 | 16 | 5,34 | 4,36 | 7,76 | 8,37 | 2,68 |
| 24 | 9,67 | 5,89 | 5,47 | 8,11 | 5,95 | 24 | 8,13 | 6,2 | 8,26 | 10,14 | 6,58 |
| 32 | 13,34 | 6,92 | 5,78 | 12,1 | 6,62 | 32 | 9,54 | 6,4 | 10,62 | 14,53 | 11,51 |
| 40 | 15,14 | 8,58 | 6,07 | 13,83 | 9,02 | 40 | 11 | 8,67 | 13,84 | 14,53 | 14,35 |
| 48 | 15,44 | 12,21 | 12,79 | 15,86 | 11,41 | 48 | 12,66 | 12,69 | 15,86 | 15,8 | 17,47 |
| 56 | 15,99 | 20,28 | 13,05 | 16,87 | 14,13 | 56 | 20,97 | 17,04 | 19,29 | 19,41 | 18,16 |
| 64 | 16,39 | 20,56 | 18,77 | 19,45 | 18,99 | 64 | 21,79 | 20,48 | 23,07 | 20,81 | 18,3 |
| 72 | 20,06 | 22,08 | 20,32 | 21,12 | 21,38 | 72 | 22,01 | 23,6 | 23,52 | 24,07 | 21,32 |
| 80 | 24,85 | 23,8 | 24,67 | 21,73 | 24,2 | 80 | 22,97 | 24,36 | 23,69 | 24,98 | 23,3 |
| **9** | 11 | 1 | 4,6 | 8,96 | 7,32 | 2,58 | 5,42 | **22** | 9 | 1 | 4,33 | 2,16 | 1,22 | 4,62 | 1,64 |
| 2 | 5,11 | 9,21 | 8,01 | 4,11 | 6,23 | 2 | 7,39 | 4,62 | 3,61 | 5,25 | 6,46 |
| 3 | 5,51 | 9,95 | 12,39 | 7,58 | 6,29 | 3 | 7,91 | 7,43 | 4,04 | 7,82 | 7,75 |
| 4 | 7,7 | 14,61 | 15,29 | 10,83 | 8,45 | 4 | 12,75 | 8,23 | 9,88 | 8,46 | 10,01 |
| 5 | 16,92 | 15,15 | 18,56 | 12,09 | 8,92 | 5 | 14,12 | 11,54 | 17,17 | 14,9 | 10,26 |
| 6 | 17,55 | 16,13 | 19,61 | 13,23 | 16,04 | 6 | 15,54 | 13,78 | 17,83 | 15,74 | 13,85 |
| 7 | 17,68 | 17,57 | 21,75 | 18,25 | 17,15 | 7 | 15,69 | 14,35 | 17,87 | 17,9 | 20,84 |
| 8 | 18,26 | 22,02 | 23,01 | 20,47 | 19,31 | 8 | 16,03 | 17,07 | 19,35 | 18,4 | 20,92 |
| 9 | 22,69 | 22,08 | 23,52 | 23,32 | 19,87 | 9 | 16,05 | 17,27 | 21,13 | 22,38 | 21,32 |
| 10 | 24,83 | 24,22 | 24,17 | 24,75 | 24,39 | 10 | 22,4 | 23,42 | 23,15 | 24,58 | 22,43 |
| **10** | 110 | 10 | 2,54 | 4,25 | 5,06 | 5,66 | 1,95 | **23** | 90 | 10 | 2,41 | 6,04 | 2,38 | 1,25 | 1,85 |
| 20 | 3,26 | 5,45 | 7,61 | 5,93 | 3,48 | 20 | 3,82 | 7,4 | 5,9 | 5,49 | 6,9 |
| 30 | 3,83 | 6,83 | 8,51 | 7,7 | 3,81 | 30 | 5,11 | 9,84 | 8,17 | 5,68 | 7,97 |
| 40 | 6,48 | 7,02 | 9,17 | 7,91 | 4,02 | 40 | 13,27 | 9,86 | 8,75 | 12,23 | 9,06 |
| 50 | 8,48 | 10,11 | 12,57 | 9,15 | 7,7 | 50 | 19,12 | 10,53 | 10,53 | 12,37 | 9,54 |
| 60 | 11,35 | 13,5 | 14,73 | 9,28 | 15,44 | 60 | 19,52 | 13,94 | 14,87 | 15,09 | 13,08 |
| 70 | 11,46 | 17,14 | 19,55 | 22,56 | 19,04 | 70 | 19,65 | 17,27 | 15,62 | 18,12 | 14,7 |
| 80 | 13,44 | 20,81 | 21,94 | 23,4 | 21,07 | 80 | 21,88 | 21,34 | 18,39 | 19,47 | 14,81 |
| 90 | 16,49 | 22,26 | 22,86 | 23,72 | 21,75 | 90 | 22,28 | 21,7 | 20,99 | 20,86 | 17,47 |
| 100 | 23,15 | 23,79 | 24,06 | 23,88 | 24,48 | 100 | 22,97 | 22,19 | 22,94 | 23,06 | 20,61 |
| **11** | 55 | 5 | 3,12 | 1,29 | 1,06 | 3,97 | 1,12 | **24** | 45 | 5 | 7,51 | 3,9 | 5,48 | 1,08 | 2,86 |
| 10 | 5,97 | 3,51 | 9,51 | 4,69 | 1,58 | 10 | 7,7 | 5,97 | 6,82 | 2,53 | 2,96 |
| 15 | 7,97 | 4,24 | 10,42 | 8,29 | 4,14 | 15 | 7,86 | 6,39 | 12,2 | 3,05 | 3,64 |
| 20 | 10,03 | 7,62 | 13,71 | 11,71 | 4,8 | 20 | 8,26 | 6,65 | 12,4 | 7,18 | 6,98 |
| 25 | 14,38 | 10,12 | 13,85 | 15,08 | 9,13 | 25 | 9,97 | 10,6 | 13,23 | 7,55 | 9,08 |
| 30 | 16 | 11,62 | 18,97 | 16,91 | 9,19 | 30 | 12,63 | 10,68 | 13,73 | 12,48 | 10,85 |
| 35 | 16,65 | 12,45 | 19,55 | 18,55 | 11,5 | 35 | 13,93 | 13,7 | 15,88 | 14,56 | 11,37 |
| 40 | 18,95 | 15,71 | 20,53 | 19,25 | 17,87 | 40 | 15,04 | 14,65 | 16,03 | 23,62 | 17,11 |
| 45 | 19,15 | 16,67 | 22,57 | 22,32 | 20,08 | 45 | 23,63 | 19,12 | 17,24 | 23,69 | 18,51 |
| 50 | 20,3 | 22,26 | 23 | 22,87 | 24,51 | 50 | 24 | 20,89 | 24,9 | 24,47 | 20,7 |
| **12** | 11 | 1 | 2,4 | 3,87 | 2,52 | 1,54 | 2,93 | **25** | 9 | 1 | 4,05 | 2,79 | 5,45 | 2,22 | 3,35 |
| 2 | 4,65 | 4,57 | 3,2 | 1,73 | 9,89 | 2 | 5,62 | 3,59 | 9,95 | 2,78 | 4,02 |
| 3 | 5,16 | 6,48 | 6,8 | 6,25 | 11,79 | 3 | 6,88 | 6,11 | 12,91 | 12,98 | 4,51 |
| 4 | 9,11 | 8,11 | 6,81 | 7,39 | 12,26 | 4 | 14,37 | 6,63 | 13,96 | 13,95 | 5,75 |
| 5 | 9,78 | 9,71 | 8,79 | 7,67 | 12,38 | 5 | 14,92 | 7,41 | 14,18 | 14 | 12,18 |
| 6 | 10,02 | 11,06 | 8,83 | 7,77 | 12,73 | 6 | 19,96 | 8,54 | 15,9 | 16,2 | 13,29 |
| 7 | 14,07 | 13,11 | 12,78 | 12,65 | 14,48 | 7 | 21,7 | 13,9 | 17,24 | 17,71 | 17,02 |
| 8 | 16,51 | 15,83 | 17,73 | 16,17 | 15,06 | 8 | 22,06 | 15,77 | 19,25 | 18,91 | 20,08 |
| 9 | 18,92 | 18,93 | 17,96 | 21,16 | 17,04 | 9 | 24,04 | 19,6 | 24,04 | 20,89 | 21,21 |
| 10 | 22,99 | 22,72 | 19,34 | 22,48 | 18,5 | 10 | 24,94 | 22,1 | 24,61 | 24,7 | 21,29 |
| **13** | 44 | 4 | 2,57 | 1,56 | 6,12 | 4,15 | 4,26 | **26** | 36 | 4 | 1,41 | 2,33 | 7,71 | 5,07 | 4,22 |
| 8 | 3,24 | 4,59 | 7,93 | 5,61 | 5,13 | 8 | 4,46 | 3,06 | 8,61 | 5,98 | 11,21 |
| 12 | 8,95 | 9,19 | 8,58 | 9,5 | 6,96 | 12 | 14,23 | 3,95 | 10,37 | 7,47 | 2,58 |
| 16 | 9,84 | 12,23 | 9,42 | 14,24 | 9,88 | 16 | 18,2 | 9,75 | 10,83 | 9,34 | 10,52 |
| 20 | 10,46 | 12,69 | 9,77 | 14,35 | 10,65 | 20 | 18,96 | 16,3 | 14,16 | 11,46 | 12,93 |
| 24 | 11,3 | 12,84 | 14,68 | 15,37 | 11,47 | 24 | 20,76 | 16,34 | 14,5 | 12,57 | 10,54 |
| 28 | 20,76 | 14,77 | 15,95 | 16 | 11,54 | 28 | 22,15 | 20,53 | 18,3 | 14,98 | 4,79 |
| 32 | 22,16 | 15,86 | 18,38 | 16,98 | 13,03 | 32 | 22,65 | 22,12 | 21,46 | 16,57 | 24,94 |
| 36 | 22,61 | 21,46 | 21,44 | 17,83 | 18,18 | 36 | 22,89 | 23,68 | 21,56 | 24,2 | 7,11 |
| 40 | 24,47 | 22,73 | 24,22 | 21,95 | 21,59 | 40 | 24,78 | 24,92 | 21,76 | 24,89 | 23,12 |