Задача № 3

По граням элементарного параллелепипеда, выделенного из тела, действуют нормальные σ_z и σ_y и касательные τ напряжения. На чертеже показаны направления напряжений, принятые положительными.

Требуется аналитически и графически с помощью круга Мора:

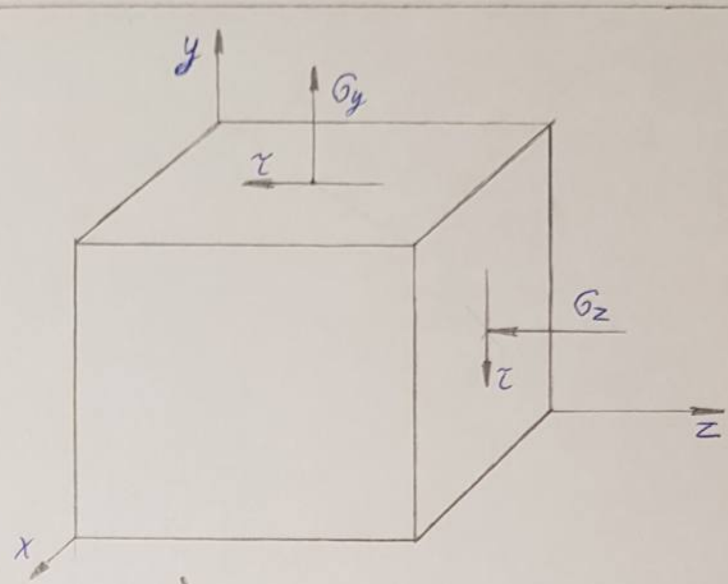
1) Определить значения главных напряжений и положение главных площадок;

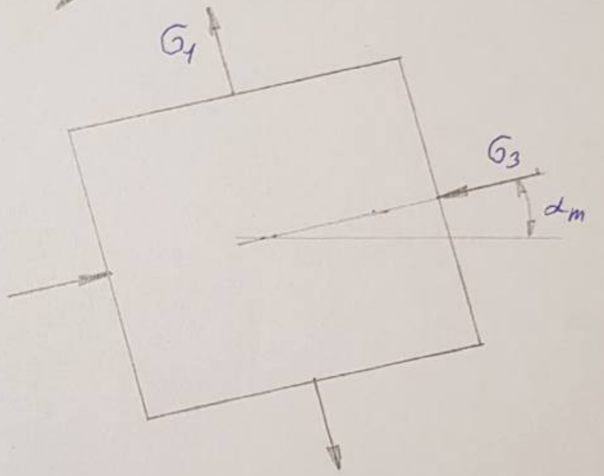
2) Проверить свойство инвариантности суммы нормальных напряжений для двух произвольных взаимноперпендикулярных площадок;

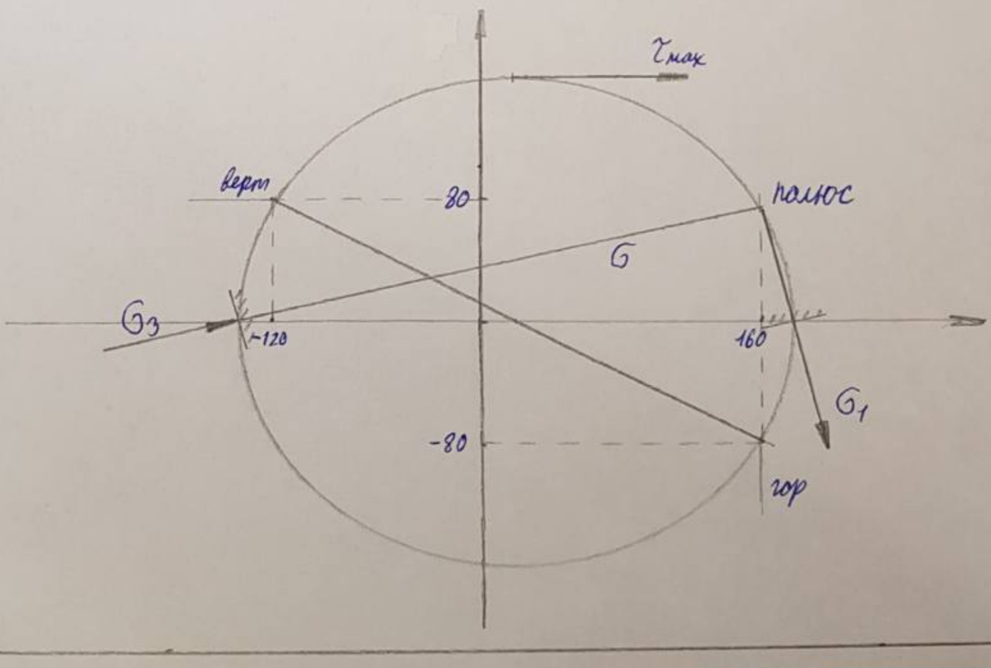
3) Определить величину τ_{max} и положение площадок, по которым они действуют.

Исходные данные:

$\sigma_z = 120$ МПа, $\sigma_y = 160$ МПа, $\tau = 80$ МПа


y
σy
τ
σz
τ
z
x


σ1
σ3
αm


τmax
верт
80
полюс
σ
σ3
-120
160
σ1
-80
гор

Решение:

1) $\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{-120+160}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-120-160}{2}\right)^2 + 80^2}$

$\sigma_{max} \approx 181{,}2$ МПа, $\sigma_{min} \approx -141{,}2$ МПа

$\sigma_1 = 181{,}2$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -141{,}2$ МПа

2) $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0 + 160 - 120 = 40$ МПа

$J_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 181{,}2 + 0 - 141{,}2 = 40$ МПа

$tg\, 2\alpha_m = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_z - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 80}{-120-160} = \frac{4}{7}$

$2\alpha_m = arctg\, \frac{4}{7} = 30 \Rightarrow \alpha_m = 15°$

3) $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{181{,}2 + 141{,}2}{2} = 161{,}2$ МПа

Задача №4.

Пространственный с ломаным очертанием осевой линии и со взаимноперпендикулярными участками, нагружен силами и моментами.

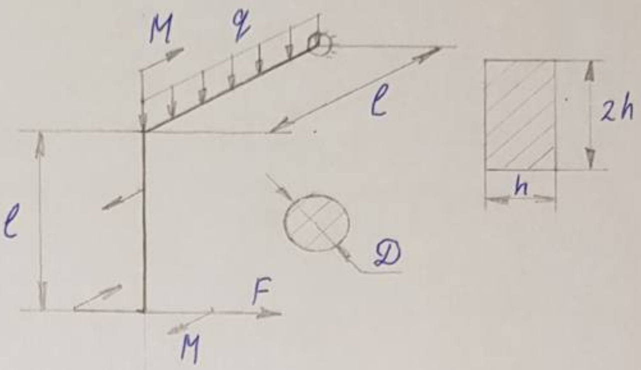
Вертикально расположенный участок бруса имеет круглое поперечное сечение диаметром D, горизонтальный – прямоугольное сечение с размерами сторон h × 2b.

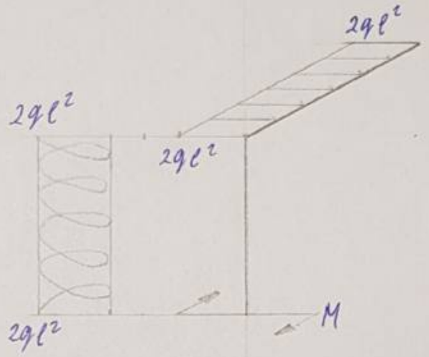
Требуется:

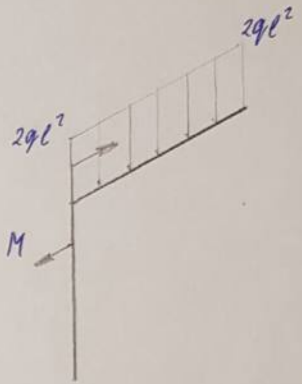
1) Построить в аксонометрии эпюры внутренних силовых факторов;
2) В опасных сечениях бруса указать наиболее напряженные точки и выявить напряженное состояние в них;
3) Используя гипотезу максимальных касательных напряжений, подобрать размеры поперечных сечений каждого участка бруса.

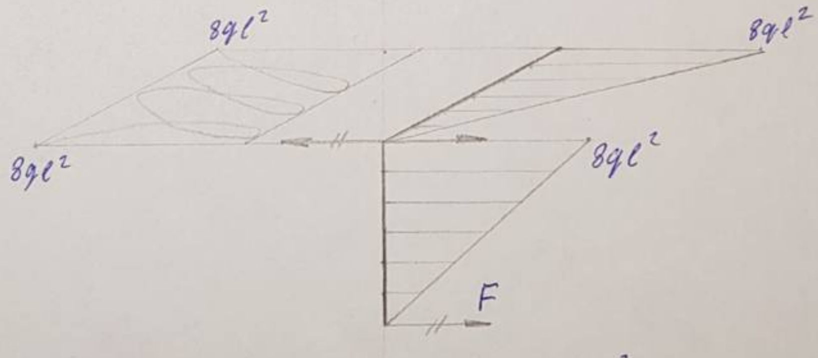
Исходные данные:

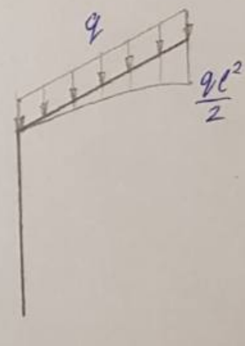
$F = 8ql$, $M = 2ql^2$, $l = 1\text{ м}$, $q = 1\,\frac{\text{кН}}{\text{м}}$, $[\sigma] = 160\text{ МПа}$

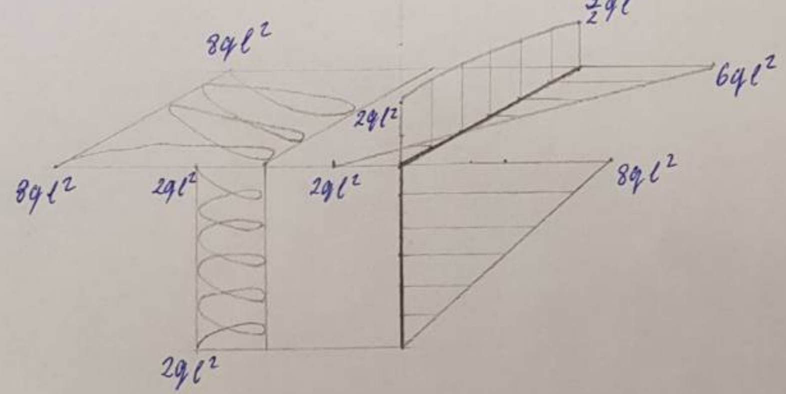

M
q
l
2h
h
l
D
F
M

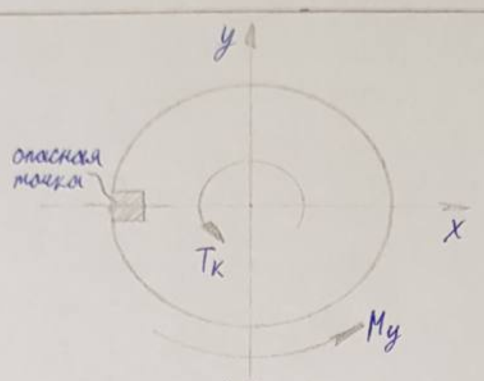

2ql²
2ql²
2ql²
2ql²
M

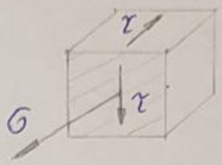

2ql²
2ql²
M

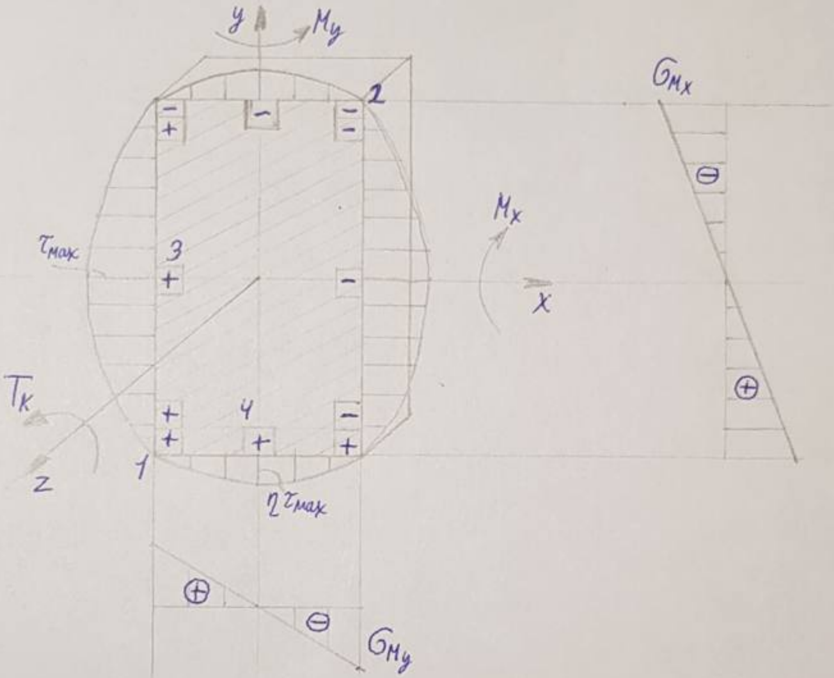

8ql²
8ql²
8ql²
8ql²
F

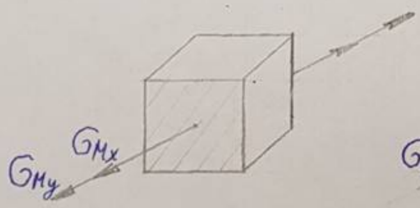

q
ql²/2


3/2 ql²
8ql²
6ql²
2ql²
8ql²
2ql²
2ql²
8ql²
2ql²

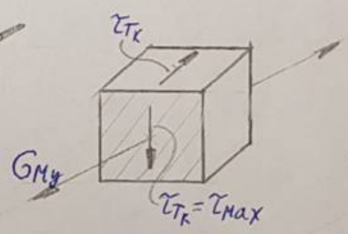




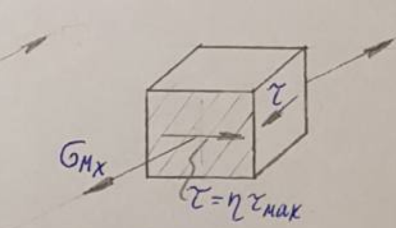




Точка 1



Точка 3



Точка 4

Решение:

3) Для вертикального участка:

$$\sigma_{экв} = \frac{M_{экв}}{W_u} \le [\sigma]$$

$$M_{экв} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T_K^2} = \sqrt{(8ql^2)^2 + (2ql^2)^2} \simeq 8,25\,ql^2$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{экв}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{8,25\cdot 1\cdot 10^3\cdot 1^2}{0,1\cdot 160\cdot 10^6}} \simeq 8,02\cdot 10^{-2}\,м = 80,2\,мм$$

Принимаем $D = 80$ мм

Для горизонтального участка:

Точка 1: Напряженное состояние - одноосное, условие прочности:

$$\sigma_{T.1} = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{9}{4}\frac{ql^2}{b^2} + 18\frac{ql^2}{b^3} = 20,25\frac{ql^2}{b^3}$$

где $\sigma_{Mx} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{\frac{3}{2}ql^2}{\frac{2}{3}b^3} = \frac{9}{4}\frac{ql^2}{b^3}$, $\sigma_{M_y} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{6ql^2}{\frac{1}{3}b^3} = 18\frac{ql^2}{b^3}$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3, \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{2b\cdot b^2}{6} = \frac{1}{3}b^3$$

Точка 3: Напряженное состояние - двухосное, условие прочности:

$$\tau_{max} = \frac{T_K}{W_K} = \frac{8ql^2}{0,492\,b^3} \simeq 16,26\frac{ql^2}{b^3}$$

где $W_K = \alpha h b^2 = 0,246\cdot 2b\cdot b^2 = 0,492\,b^2$, $\alpha = 0,246$ для $\frac{h}{b} = 2$

$$\sigma_{экв_{T.3}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\sigma_{M_y}^2 + 4\tau_{T_K}^2} = \sqrt{\left(18\frac{ql^2}{b^3}\right)^2 + 4\cdot\left(16,26\frac{ql^2}{b^3}\right)^2} \simeq 37,17\frac{ql^2}{b^3}$$

Точка 4: Напряженное состояние - двухосное, условие прочности:

$$\tau = \eta\,\tau_{max} = 0,795\cdot 16,26\frac{ql^2}{b^3} \simeq 12,93\frac{ql^2}{b^3}$$, где $\eta = 0,795$ для $\frac{h}{b} = 2$

$$\sigma_{экв_{T_4}} = \sqrt{\sigma_{M_x}^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\frac{ql^2}{b^3}\right)^2 + 4\left(12,93\frac{ql^2}{b^3}\right)^2} \simeq 25,96\frac{ql^2}{b^3}$$

Сравнивая значения $\sigma_{T.1}$, $\sigma_{экв T.3}$, $\sigma_{экв T.4}$ видим, что наиболее опасной является точка 3. Из условия прочности этой точки находим размер b

$$b \ge \sqrt[3]{\frac{37,17\,ql^2}{[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{37,17\cdot 1\cdot 10^3\cdot 1^2}{160\cdot 10^6}} \simeq 61,5\cdot 10^{-3}\,м$$

Принимаем $b = 62$ мм, тогда $h = 2b = 124$ мм

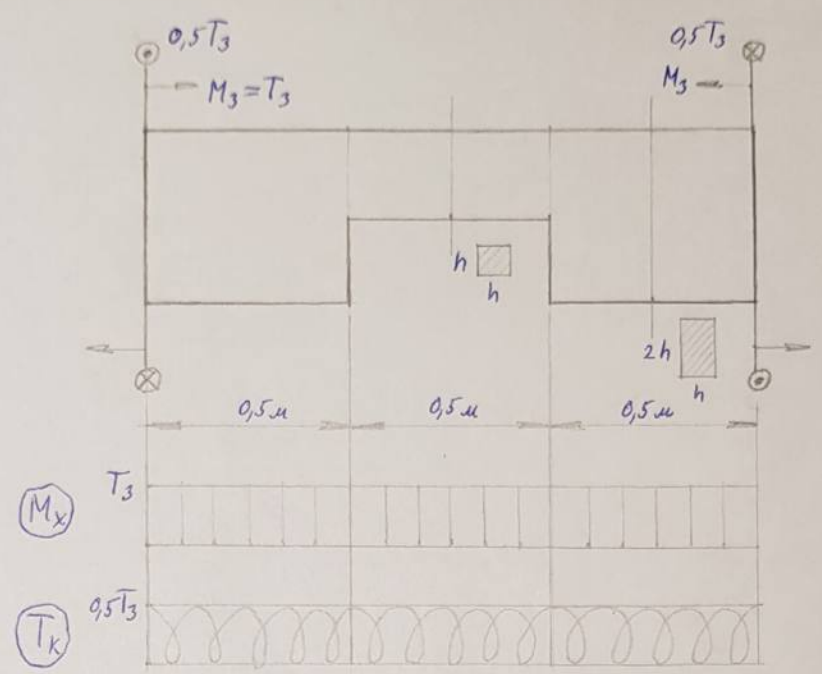
Задача №5.

Для нагруженного бруса определить запас прочности.

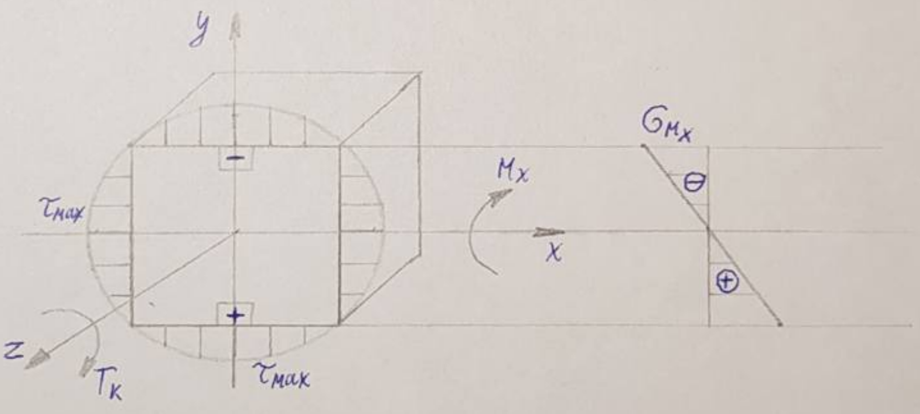
Исходные данные:

Материал сталь У8 незакаленная, $\sigma_{Тр} = 250$ МПа, $\sigma_{Тс} = 430$ МПа

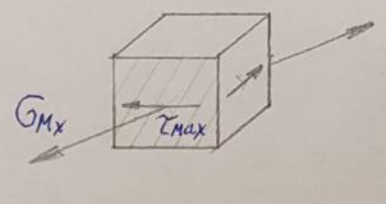
$T_3 = 6$ кН·м, $h = 5$ см



0,5T3
M3=T3
0,5T3
M3
h
h
2h
h
0,5м
0,5м
0,5м
Mx
T3
Tk
0,5T3



y
τmax
z
Tk
τmax
Mx
x
σMx



σMx
τmax

Решение:

Наиболее опасными являются поперечные сечения A и B, но по нагрузкам и геометрии они одинаковы, поэтому в рассмотрение берем только сечение A.

В сечении видим, что наиболее опасными будут точки 1 и равноопасная ей точка 2.

Рассмотрим точку 1: напряженное состояние двухосное

$$\sigma_{M_x} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6\cdot10^3\cdot6}{0{,}05^3} \approx 288\ \text{МПа}, \text{ где } W_x = \frac{hb^2}{6} = \frac{hh^2}{6} = \frac{h^3}{6} = \frac{0{,}05^3}{6}$$

$$\tau_{max} = \frac{T_x}{W_k} = \frac{3\cdot10^3}{0{,}208\cdot0{,}05^3} \approx 115{,}4\ \text{МПа}, \text{ где } W_k = \alpha hb^2 = \alpha h^3 = 0{,}208\cdot0{,}05^3$$

для $\frac{h}{b} = 1$ $\alpha = 0{,}208$

Используем теорию прочности Мора, т.к. материал не одинаково работает на растяжение и сжатие.

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\sigma_3 \le [\sigma], \text{ где } \sigma_1 \text{ и } \sigma_3 \text{ - главные напряжения}$$

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{288+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{288-0}{2}\right)^2 + 115{,}4^2} \approx 144 \pm 184{,}5\ \text{МПа}$$

$$\sigma_1 = 328{,}5\ \text{МПа},\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = -40{,}5\ \text{МПа}$$

$$k = \frac{\sigma_{Tp}}{\sigma_{Tc}} = \frac{250}{430}$$

$$\sigma_{экв} = 328{,}5 + \frac{250}{430}\cdot40{,}5 \approx 352$$

Запас прочности $n_T = \frac{\sigma_{Tp}}{\sigma_{экв}} = \frac{250}{352} \approx 0{,}71$

Видим, что запаса прочности нет, прочность стержня при заданных нагрузках не обеспечена.