

**Пример выполнения расчетно-графической работы № 3: Построение эпюр внутренних усилий и расчет прочности при изгибе статически-определимых балок**

**1) (шарнирно-опертая балка)**

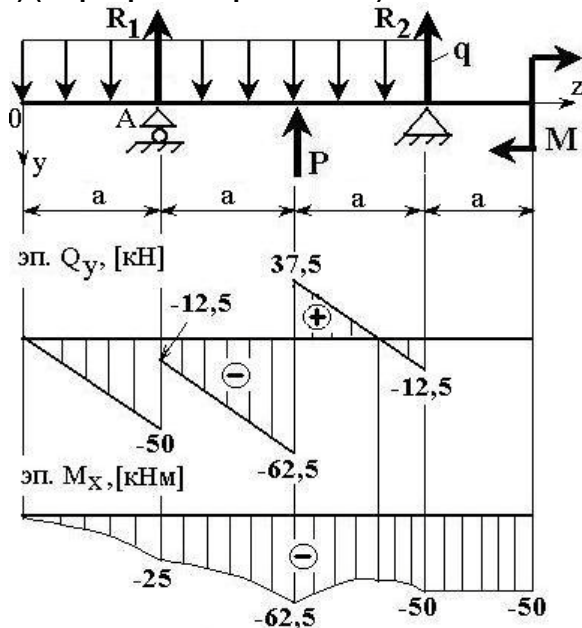


Рис. 5.7а Шарнирно-опертая балка

Для шарнирно-опертой балки (рис.5.7а) при  $P = 100 \text{ кН}$ ,  $M = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $q = 50 \text{ кН/м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ,

$[\sigma] = 240 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$

- 1) найти реактивные усилия
- 2) записать выражения и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов
- 3) выбрать поперечное сечение в форме двух швеллеров из условия прочности по нормальным напряжениям с проверкой выполнения условия прочности по касательным напряжениям
- 4) построить распределения нормальных и касательных напряжений для выбранного профиля

Решение:

Совмещаем начало координат с левым концом балки

1. Определение реакций опор:

Сумма всех сил на вертикальную ось:

$$-R_1 - R_2 + q \cdot 3a - P = 0,$$

Сумма моментов относительно точки А:

$$R_2 \cdot 2a - q \cdot 3a \cdot 0,5a + P \cdot a - M = 0 \Rightarrow R_2 = 12,5 \text{ кН}; R_1 = 37,5 \text{ кН}.$$

**2. Выражения для поперечной силы и изгибающего момента**

а) по участкам

$$0 \leq z_1 < a: Q_y(z_1) = -q \cdot z_1, M_x(z_1) = -q \cdot z_1^2 / 2;$$

$$a \leq z_2 < 2a: Q_y(z_2) = -q \cdot z_2 + R_1, M_x(z_2) = -q \cdot z_2^2 / 2 + R_1 \cdot (z_2 - a);$$

$$2a \leq z_3 < 3a: Q_y(z_3) = -q \cdot z_3 + R_1 + P, M_x(z_3) = -q \cdot z_3^2 / 2 + R_1 \cdot (z_3 - a) + P \cdot (z_3 - 2a);$$

$$3a \leq z_4 < 4a: Q_y(z_4) = -3qa + R_1 + P + R_2, M_x(z_4) = -3qa \cdot (z_4 - 1,5a) + R_1 \cdot (z_4 - a) + P \cdot (z_4 - 2a) + R_2 \cdot (z_4 - 3a);$$

б) Выражения для поперечной силы и изгибающего момента в одну строку:

$$Q_y(z) = -q \cdot z + \parallel_{z>a} R_1 + \parallel_{z>2a} P + \parallel_{z>3a} [R_2 + q \cdot (z - 3a)] = -50 \cdot z + \parallel_{z>1} 37,5 + \parallel_{z>2} 100 + \parallel_{z>3} [12,5 + 50 \cdot (z - 3)];$$

$$M_x(z) = -q \cdot z \cdot \frac{z}{2} + \parallel_{z>a} R_1 \cdot (z - a) + \parallel_{z>2a} P \cdot (z - 2a) + \parallel_{z>3a} \left[ R_2 \cdot (z - 3a) + q \cdot (z - 3a) \cdot \frac{z - 3a}{2} \right] =$$

$$= -25 \cdot z^2 + \parallel_{z>1} 37,5 \cdot (z - 1) + \parallel_{z>2} 100 \cdot (z - 2) + \parallel_{z>3} [12,5 \cdot (z - 3) + 25 \cdot (z - 3)^2];$$

Заносим значения внутренних усилий в характерных точках в таблицу и строим эпюры

Координата	$z, [\text{м}]$	0	1-0	1+0	2-0	2+0	3-0	3+0	4
Сила	$Q_y, [\text{кН}]$	0	-50	-12,5	-62,5	37,5	-12,5	0	0
Момент	$M_x, [\text{кН} \cdot \text{м}]$	0	-25	-25	-62,5	-62,5	-50	-50	-50

Определяем координату на третьем участке  $2 \leq z < 3$ , где поперечная сила равна нулю:  $-50 \cdot z^* + 137,5 = 0 \Rightarrow z^* = 2,75 \text{ м}$ , при этом  $M_x(z^* = 2,75 \text{ м}) = -48,44 \text{ кН} \cdot \text{м}$  имеет максимум.

**3. Выбор поперечного сечения**

Опасное сечение по нормальным напряжениям  $z = 2 \text{ м}$ :  $M_x = -62,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,

опасное сечение по касательным напряжениям  $z = 2 \text{ м}$ :  $Q_y = -62,5 \text{ кН}$ .

Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем минимально необходимый момент сопротивления поперечного сечения:

$$|\sigma_z^{\max}| = \left| \frac{M_x^{\max}}{W_x} \right| \leq [\sigma] \Rightarrow W_x^{\min} = \frac{M_x^{\max}}{[\sigma]} = \frac{62,5 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^6} = 260,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 260,4 \text{ см}^3 \text{ для одного швеллера}$$

$W_{x1}^{\min} = 130,2 \text{ см}^3$ . По сортаменту находим швеллер № 18а, у которого момент сопротивления

$$W_x = 132 \text{ см}^3, I_x = 1190 \text{ см}^4, S_x = 76,1 \text{ см}^3, s = 5,1 \text{ мм}.$$

Проверяем выполнение условия прочности по касательным напряжениям

$$|\tau^{\max}| = \frac{|Q_y^{\max}| \cdot 2S_x}{2I_x \cdot 2s} = \frac{62,5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 76,1 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1190 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = 39,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 39,2 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа} \Rightarrow$$

условие прочности по касательным напряжениям выполнено.

Определяем значения касательных напряжений для точек 2, 3:

Точка 1:

$$S_{x1} = b \cdot t \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 7,4 \cdot 0,93 \cdot \left( \frac{18}{2} - \frac{0,93}{2} \right) = 58,7 \text{ см}^3$$

$$|\tau_1| = \frac{|Q_y^{\max}| \cdot 2S_{x1}}{2I_x \cdot 2s} = \frac{62,5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 58,7 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1190 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = 30,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 30,2 \text{ МПа}$$

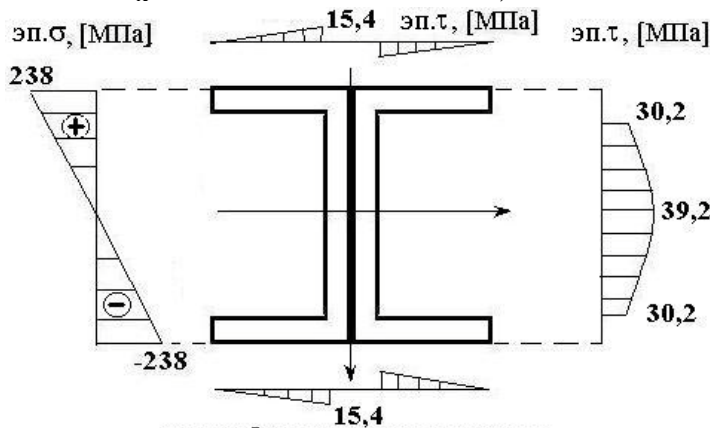


Рис. 5.76 Распределение напряжений

Точка 2:

$$S_{x2} = (b - s) \cdot t \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = (7,4 - 0,51) \cdot 0,93 \cdot \left( \frac{18}{2} - \frac{0,93}{2} \right) = 54,7 \text{ см}^3$$

$$|\tau_2| = \frac{|Q_y^{\max}| \cdot S_{x1}}{2I_x \cdot t} = \frac{62,5 \cdot 10^3 \cdot 54,7 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1190 \cdot 10^{-8} \cdot 9,3 \cdot 10^{-3}} = 5,4 \text{ МПа}$$

По полученным точкам строим распределения

напряжений (рис. 5.76)

## II) консольная балка

Для консольной балки (см. рис.5.8) для  $P = 20 \text{ кН}$ ,  $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $q = 25 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 240 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$

1) записать выражения и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

2) проверить выполнение условий прочности по нормальным и касательным напряжениям для сечения в виде двух швеллеров № 10

Решение:

Совмещаем начало координат с правым свободным концом балки (в этом случае не нужно определять реакции, возникающие в заделке)

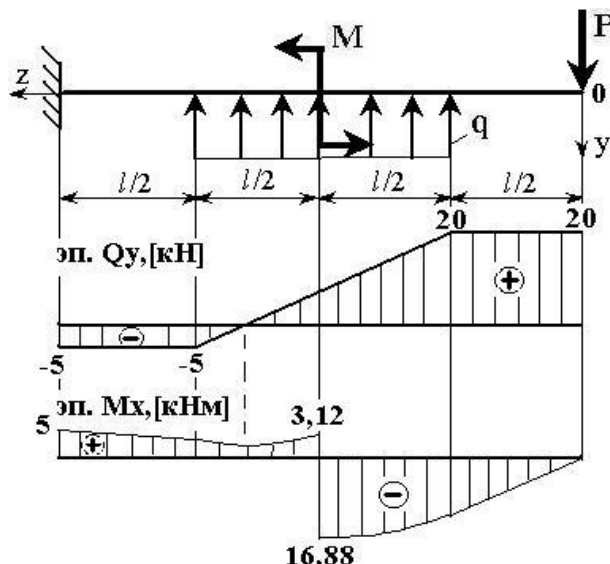


Рис. 5.8 Консольная балка

1. Выражения для поперечной силы и изгибающего момента

а) по участкам

$$0 \leq z_1 < 1/2: Q_y(z_1) = P, M_x(z_1) = -P \cdot z_1;$$

$$1/2 \leq z_2 < 1: Q_y(z_2) = P - q \cdot (z_2 - 1/2),$$

$$M_x(z_2) = -P \cdot z_2 + q \cdot (z_2 - 1/2)^2 / 2;$$

$$1 \leq z_3 < 3l/2: Q_y(z_3) = P - q \cdot (z_3 - l/2),$$

$$M_x(z_3) = -P \cdot z_3 + q \cdot (z_3 - l/2)^2 / 2 + M;$$

$$3l/2 \leq z_4 < 2l: Q_y(z_4) = P - q \cdot l,$$

$$M_x(z_4) = -P \cdot z_4 + q \cdot l \cdot (z_4 - l/2) + M;$$

б) в одну строку

$$Q_y(z) = P - \parallel_{z>l/2} q \cdot (z - l/2) + \parallel_{z>3l/2} q \cdot (z - 3l/2) =$$

$$= 20 - \parallel_{z>0,5} 25 \cdot (z - 0,5) + \parallel_{z>1,5} 25 \cdot (z - 0,5);$$

$$M_x(z) = -P \cdot z + \parallel_{z>l/2} \frac{q \cdot (z - l/2)^2}{2} + \parallel_{z>1} M - \parallel_{z>3l/2} \frac{q \cdot (z - 3l/2)^2}{2} =$$

$$= -20 \cdot z + \parallel_{z>0,5} 12,5 \cdot (z - 0,5)^2 + \parallel_{z>1} 20 - \parallel_{z>1,5} 12,5 \cdot (z - 1,5)^2.$$

Заносим значения внутренних усилий в характерных точках и строим эпюры

Координата	$z, [м]$	0	0,5	1-0	1+0	1,5	2
Сила	$Q_y, [кН]$	20	20	7,5	7,5	-5	-5
Момент	$M_x, [кН \cdot м]$	0	-10	-16,88	3,12	2,5	5

Определяем координату на третьем участке  $1 \leq z_3 < 1,5$ , где поперечная сила равна нулю:

$$Q_y(z^*) = 20 - 25 \cdot (z^* - 0,5) = 0 \Rightarrow z^* = 1,3 \text{ м, при этом } M_x(z^* = 1,3 \text{ м}) = 2 \text{ кН} \cdot \text{м имеет минимум.}$$

2) Проверка выполнения условий прочности

Максимальное значение изгибающего момента:  $M_x = -16,88 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , а максимальное значение поперечной силы:  $Q_y = 20 \text{ кН}$ .

Для одного швеллера № 10:  $I_x = 174 \text{ см}^4$ ,  $S_x = 20,4 \text{ см}^3$ ,  $d = 4,5 \text{ мм}$ .

$$|\sigma_z^{\max}| = \left| \frac{M_x^{\max}}{W_x} \right| = \frac{16,88 \cdot 10^3}{2 \cdot (174/5) \cdot 10^{-6}} = 243 \text{ МПа} \leq [\sigma] \Rightarrow \text{условие прочности по нормальным напряжениям выполнено.}$$

$$|\tau^{\max}| = \frac{|Q_y^{\max}| \cdot 2S_x}{2I_x \cdot 2s} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 20,4 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 174 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-3}} = 26 \cdot 10^6 \text{ Па} = 26 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа}$$

условие прочности по касательным напряжениям выполнено.