

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева  
Кафедра «Электроэнергетика»

Горелов Ю.И.  
доцент кафедры «Электроэнергетики», доцент

*КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ*  
учебной дисциплины (модуля)  
**«Теоретические основы электротехники»**

Уровень профессионального образования:  
высшее образование – специалитет

Направление подготовки: 140200– «Электроэнергетика и электротехника»

Специальность: 140211 - Электроснабжение

Квалификация выпускника: инженер

Форма обучения: заочная

Тула 2013 г.

Рассмотрено на заседании кафедры «Электроэнергетики»  
протокол № 8 от "10" октября 2013 г.

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ В.М. Степанов

## Оглавление

### I семестр

1 Физические основы электротехники. Уравнения электромагнитного поля.....	9
1.1 Электромагнитное поле .....	9
1.2 Электрический ток. 1-й закон Кирхгофа.....	9
1.3 Электрическое напряжение. 2-ой закон Кирхгофа .....	11
1.4 Физические процессы в электрической цепи .....	14
2 Законы электрических цепей. Теоремы и методы расчета сложных резистивных цепей	17
2.1 Основные определения .....	17
2.2 Метод преобразования (свертки) схемы .....	18
2.3 Метод законов Кирхгофа.....	23
2.4 Метод контурных токов.....	24
2.5 Метод узловых потенциалов .....	26
2.6 Метод двух узлов.....	29
2.7 Принцип наложения. Метод наложения .....	30
2.8 Теорема о взаимности .....	31
2.9 Теорема о компенсации .....	32
2.10 Теорема о линейных отношениях.....	33
2.11 Теорема об эквивалентном генераторе.....	34
3 Цепи синусоидального тока .....	38
3.1 Переменный ток (напряжение) и характеризующие его величины .....	38
3.2 Среднее и действующее значения переменного тока и напряжения .....	39
3.3 Векторные диаграммы переменных токов и напряжений.....	41
3.4 Теоретические основы комплексного метода расчета цепей переменного тока .....	43
3.5 Мощность переменного тока.....	45
3.6 Переменный ток в однородных идеальных элементах .....	48
3.7 Электрическая цепь с последовательным соединением элементов $R$ , $L$ и $C$ .....	52
3.8 Электрическая цепь с параллельным соединением элементов $R$ , $L$ и $C$ .....	53
3.9 Активные и реактивные составляющие токов и напряжений.....	55
3.10 Передача энергии от активного двухполюсника (источника) к пассивному двухполюснику (приемнику).....	57
3.11 Компенсация реактивной мощности приемников энергии .....	59
4 Резонанс в электрических цепях .....	61
4.1 Определение резонанса.....	61
4.2 Резонанс напряжений.....	62
4.3 Резонанс токов .....	65
4.4 Резонанс в сложных схемах.....	67
5 Магнитносвязанные электрические цепи .....	69
5.1 Общие определения.....	69

5.2	Последовательное соединение магнитносвязанных катушек .....	71
5.3	Сложная цепь с магнитносвязанными катушками .....	73
5.4	Линейный (без сердечника) трансформатор .....	75
6	Исследование режимов электрических цепей методом векторных и круговых диаграмм .....	77
6.1	Уравнение дуги окружности в комплексной форме .....	77
6.2	Круговая диаграмма тока и напряжений для элементов последовательной цепи .....	78
6.3	Круговая диаграмма для произвольного тока и напряжения в сложной цепи .....	79
7	Топологические методы расчета электрических цепей .....	80
7.1	Топологические определения схемы .....	80
7.2	Уравнения Ома и Кирхгофа в матричной форме .....	83
7.3	Контурные уравнения в матричной форме .....	85
7.4	Узловые уравнения в матричной форме .....	85
<b>2 семестр</b>		
8	Электрические цепи трехфазного тока .....	86
8.1	Трехфазная система .....	86
8.2	Способы соединения обмоток трехфазных генераторов .....	89
8.3	Способы соединения фаз трехфазных приемников .....	92
8.4	Расчет сложных трехфазных цепей .....	96
8.5	Мощность трехфазной цепи и способы ее измерения .....	98
8.6	Вращающееся магнитное поле .....	101
8.7	Теоретические основы метода симметричных составляющих .....	104
8.8	Расчет режима симметричной трехфазной нагрузки при несимметричном напряжении .....	107
8.9	Расчет токов коротких замыканий в энергосистеме методом симметричных составляющих .....	109
8.10	Фильтры симметричных составляющих .....	111
9	Электрические цепи периодического несинусоидального тока .....	113
9.1	Общие определения .....	113
9.2	Разложение периодических несинусоидальных функций в гармонический ряд Фурье .....	114
9.3	Виды симметрии периодических функций .....	116
9.4	Действующие значения несинусоидальных токов и напряжений .....	119
9.5	Мощность в цепи несинусоидального тока .....	121
9.6	Коэффициенты, характеризующие несинусоидальные функции $u(t)$ , $i(t)$ .....	122
9.7	Расчет электрических цепей несинусоидального тока .....	123
9.8	Измерение действующих значений несинусоидальных токов и напряжений .....	126
9.9	Высшие гармоники в трехфазных цепях .....	128
10	Переходные процессы в электрических цепях .....	132
10.1	Определение переходных процессов .....	132

10.2 Законы (правила) коммутации .....	133
10.3 Начальные условия переходного процесса .....	134
10.4 Классический метод расчета переходных процессов .....	136
10.5 Определение установившейся составляющей $x_y(t)$ .....	138
10.6 Методы составления характеристического уравнения .....	138
10.7 Определение постоянных интегрирования .....	141
10.8. Алгоритм расчета переходных процессов классическим методом .....	142
10.9 Операторный метод расчета переходных процессов .....	144
10.10 Операторные изображения некоторых функций времени .....	145
10.11 Законы электротехники в операторной форме .....	146
10.12 Способы составления системы операторных уравнений .....	149
10.13 Переход от изображения функции $F(p)$ к ее оригиналу $f(t)$ .....	151
10.14 Формула разложения .....	151
10.15 Алгоритм расчета переходных процессов операторным методом .....	153
10.16 Анализ переходных процессов в цепи $R, L$ .....	155
10.17 Анализ переходных процессов в цепи $R, C$ .....	159
10.18 Анализ переходных процессов в цепи $R, L, C$ .....	161
10.19 Переходные функции по току и напряжению .....	165
10.20 Расчет переходных процессов методом интеграла Дюамеля .....	166
10.21 Расчет переходных процессов методом численного интегрирования дифференциальных уравнений на ЭВМ .....	169
10.22 Расчет переходных процессов методом переменных состояния .....	172
11 Четырехполюсники и фильтры .....	175
11.1 Уравнения четырехполюсника .....	175
11.2 Схемы замещения четырехполюсника .....	179
11.3 Определение коэффициентов четырехполюсника .....	180
11.4 Способы соединения четырехполюсников .....	183
11.5 Характеристические параметры симметричного четырехполюсника .....	186
11.6 Основные понятия и определения электрических фильтров .....	188
11.7 Симметричные реактивные фильтры .....	189
11.8 Фильтры нижних частот типа $\kappa$ .....	191
11.9 Фильтры верхних частот типа $\kappa$ .....	192
11.10 Полосовые фильтры .....	194
11.11. Заграждающие фильтры .....	195
12 Электрические цепи с распределенными параметрами .....	197
12.1 Общие определения .....	197
12.2 Дифференциальные уравнения цепи с распределенными параметрами .....	199
12. 3 Решение уравнений линии с распределенными параметрами в установившемся синусоидальном режиме .....	201

12.4 Волновые процессы в линии с распределенными параметрами.....	204
12.5 Линия с распределенными параметрами в различных режимах .....	207
12.6 Режим согласованной нагрузки ( $Z_2 = Z_c$ ) .....	208
12.7 Линия с распределенными параметрами без искажений.....	209
12.8 Линия с распределенными параметрами без потерь.....	210
12.9 Переходные процессы в линии с распределенными параметрами.....	214
12.10 Расчет падающих волн в линии с распределенными параметрами при подключении ее к источнику ЭДС .....	216
12.11 Расчет отраженных волн в линии с распределенными параметрами при подключении ее к источнику ЭДС .....	219
12.12 Расчет переходного процесса в линии с учетом многократных отражений волн.....	224
13 Синтез электрических цепей .....	226
13.1 Характеристика задач синтеза.....	226
13.2 Свойства входных операторных функций пассивных электрических цепей.....	228
13.3 Синтез двухполюсника лестничной (цепной) схемой .....	229
13.4 Синтез двухполюсника методом разложения входной функции на простейшие составляющие .....	231
14 Нелинейные цепи постоянного тока.....	233
14.1 Нелинейные элементы, их характеристики и параметры.....	233
14.2 Нелинейные цепи и их свойства .....	237
14.3 Графический метод расчета простых нелинейных цепей .....	238
14.4 Графический метод расчета нелинейной цепи с несколькими источниками ЭДС.....	240
14.5 Комбинированный графоаналитический метод расчета нелинейной цепи с одним или двумя нелинейными элементами.....	243
14.6 Аппроксимация ВАХ нелинейных элементов.....	245
14.7 Аналитические методы расчета нелинейных цепей .....	246
15 Нелинейные магнитные цепи постоянного тока.....	250
15.1 Основные понятия и законы магнитной цепи .....	250
15.2 Аппроксимация вебер-амперных характеристик $U_m=f(\Phi)$ нелинейных элементов магнитных цепей .....	254
15.3 Расчет неразветвленной магнитной цепи.....	256
15.4 Расчет разветвленной магнитной цепи.....	258
15.5 Расчет магнитной цепи с постоянным магнитом .....	260
16 Нелинейные цепи переменного тока .....	262
16.1 Общая характеристика нелинейных цепей переменного тока и методов их исследования.....	262
16.2 Замена несинусоидальных функций $u(t)$ и $i(t)$ эквивалентными синусоидальными .....	264
16.3 Методы расчета нелинейных цепей переменного тока на основе ВАХ для эквивалентных синусоид .....	265

16.4 Резонансные явления в нелинейных цепях .....	268
16. 5. Нелинейная катушка с сердечником на переменном токе .....	269
16.6 Трансформатор с сердечником и его схема замещения .....	271
16.7 Управляемая катушка индуктивности.....	274
16.8 Расчет мгновенных значений параметров режима графическим методом.....	276
16.9 Расчет мгновенных значений параметров режима гармоническими методами .....	278
17 Переходные процессы в нелинейных цепях .....	281
17.1 Общая характеристика переходных процессов в нелинейных цепях .....	281
17.2 Расчет переходного процесса методом интегрируемой аппроксимации.....	282
17.3 Расчет переходного процесса методом кусочно-линейной аппроксимации .....	283
17.4 Расчет переходного процесса методом линеаризации дифференциального уравнения .....	285
17.5 Расчет переходного процесса методом численного интегрирования дифференциального уравнения.....	287
18 Магнитные цепи переменного потока.....	289
18.1 Потери в сердечниках из ферромагнитного материала при периодическом перемагничивании. ....	289
18.2 Расчет магнитной цепи переменного потока комплексным методом.....	290
19 Теория электромагнитного поля. Электростатическое поле.....	293
19.1 Основные понятия и определения .....	293
19.2 Уравнения электростатического поля в интегральной и дифференциальной форме .....	296
19.3 Граничные условия в электростатическом поле .....	298
19.4 Уравнение Пуассона и Лапласа. Теорема единственности решения .....	299
19.5 Электростатическое поле осевых зарядов .....	301
19. 6 Электростатическое поле и емкость двухпроводной линии .....	305
19.7 Электростатическое поле и емкость цилиндрического провода,расположенного над проводящей плоскостью (землей).....	307
19. 8 Поле многопроводной линии. Метод зеркальных отображений.....	308
19.9 Электрическое поле трехфазной линии электропередачи.....	311
20 Электрическое поле постоянного тока.....	315
20.1 Законы электрического поля в интегральной и дифференциальной формах.....	315
20.2 Методы расчета электрических полей постоянного тока.....	318
21 Магнитное поле постоянных токов .....	322
21.1 Уравнения магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах .....	322
21.2 Векторный потенциал магнитного поля .....	324
21.3 Скалярный потенциал магнитного поля .....	326
21.4 Магнитное поле цилиндрического проводника с током .....	327
21.5 Магнитное поле двухпроводной линии .....	329
21.6 Взаимная индуктивность двух параллельных линий.....	330

21.7	Магнитное поле сложной системы проводов с током .....	331
21.8	Механические силы в магнитном поле .....	333
22	Переменное электромагнитное поле .....	334
22.1	Основные уравнения Максвелла и их физический смысл .....	334
22.2	Теорема Умова-Пойтинга для электромагнитного поля .....	338
22.3	Поток вектора Пойтинга в коаксиальном кабеле .....	340
22.4	Уравнения Максвелла в комплексной форме .....	341
22.5	Плоская гармоническая волна в диэлектрике .....	342
22.6	Плоская гармоническая волна в проводящей среде .....	345
22.7	Поверхностный эффект в плоском листе .....	347
22.8	Поверхностный эффект в круглом проводе .....	349
22.9	Электромагнитное экранирование .....	352
23	Аналитические и численные методы расчета электрических и магнитных полей .....	355
23.1	Расчёт поля с помощью интегральных соотношений .....	355
23.2	Расчёт поля интегрированием уравнения Лапласа .....	366
23.3	Расчёт поля методом зеркальных изображений .....	377
23.4	Численные методы расчета поля .....	381

**1 Физические основы электротехники. Уравнения электромагнитного поля.****1.1 Электромагнитное поле**

Электромагнитное поле представляет собой особый вид материи. Как вид материи оно обладает массой, энергией, количеством движения, может превращаться в вещество и наоборот.

Электромагнитное поле имеет две составляющие – электрическую и магнитную – и в каждой точке пространства определяется двумя векторными величинами:

- а) вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}$  [В/м],
- б) вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  [А/м].

Следует помнить, что в природе существует единое электромагнитное поле, а отдельные его стороны – электрическое поле или магнитное поле – могут проявляться независимо друг от друга только в частных случаях при определенных условиях.

Математические уравнения, описывающие физические процессы в переменном электромагнитном поле, называются уравнениями Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \end{cases}$$

где  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ .

Из приведенных уравнений следует, что каждая из сторон электромагнитного поля одновременно является и причиной и следствием другой стороны, что говорит о единстве этих сторон.

Электромагнитное поле, как носитель энергии, является той средой, посредством которой осуществляется передача энергии от источников энергии (электростанций) к приемникам энергии (промышленным предприятиям, жилым домам и т.д.), при этом в передаче энергии участвуют в равной мере обе его стороны.

**1.2 Электрический ток. 1-й закон Кирхгофа**

Из физики известно о существовании трех родов электрического тока: проводимости, переноса и смещения.

Электрическим током **проводимости** называется направленное движение свободных зарядов  $q_{св}$ , какими являются электроны в металлах, положительные и отрицательные ионы в электролитах:

$$i_{np} = - \frac{dq_{св}}{dt} \text{ – ток проводимости [A];}$$

$$\bar{\delta}_{np} = \frac{di_{np}}{ds_n} \text{ – плотность тока проводимости [A/м}^2\text{]} .$$

Ток проводимости связан с плотностью тока уравнением:

$$i_{np} = \int_s \bar{\delta}_{np} \bar{ds}$$

Ток проводимости возникает в проводящей среде под воздействием электрического поля:

$$\bar{\delta}_{np} = \gamma \bar{E},$$

где  $\gamma$  – удельная проводимость среды [См/м] .

Электрическим током **переноса** называется направленное движение заряженных частиц  $q_{зч}$ , движущихся в свободном пространстве. Математически ток переноса описывается аналогичными с током проводимости уравнениями:

$$i_{nep} = - \frac{dq_{зч}}{dt} ; \quad \bar{\delta}_{nep} = \frac{di_{nep}}{ds_n} ; \quad i_{nep} = \int_s \bar{\delta}_{nep} \bar{ds} .$$

Электрическим током **смещения** называется явление направленного движения связанных зарядов в результате поляризации диэлектрика и явление изменения во времени электрического поля:

$$\bar{\delta}_{см} = \frac{d\bar{D}}{dt} = \frac{d(\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P})}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{\delta}_{см0} + \bar{\delta}_{смн} ,$$

$$i_{см} = \int_s \bar{\delta}_{см} \cdot \bar{ds} .$$

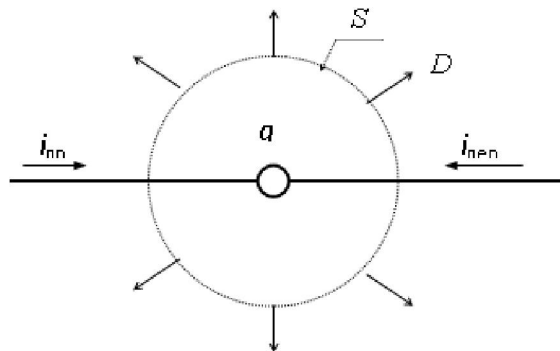


Рисунок 1

Ток смещения может существовать в пустоте ( $\bar{\delta}_{см0}$ ). Рассмотрим некоторую замкнутую поверхность  $S$  , внутрь которой втекают ток проводимости  $i_{np}$  и ток переноса  $i_{nep}$  (рисунок 1).

При увеличении заряда внутри объема  $q=q_{св}+q_{зч}$  будет усиливаться электрическое поле на поверхности  $S$ . По теореме Гаусса:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \sum q = q_{св} + q_{зч}$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по переменной  $t$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} \right) = \oint_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot \vec{ds} = \oint_S \vec{\delta}_{см} \cdot \vec{ds} = i_{см} ;$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq_{св}}{dt} + \frac{dq_{зч}}{dt} = -i_{пр} - i_{пер} ,$$

откуда следует вывод, что  $i_{см} = -i_{пр} - i_{пер}$  или  $i_{пр} + i_{пер} + i_{см} = 0$ .

Сумма токов всех родов, протекающих сквозь любую замкнутую поверхность, равна нулю. Если замкнутую поверхность  $S$  разбить на отдельные участки  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , то  $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$  и соответственно  $i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$ .

Рассмотрим узел электрической цепи, т. е. точку, в которой сходятся не менее трех проводов (ветвей) этой цепи (рисунок 2). Окружим узел замкнутой поверхностью  $S$ . Токи, протекающие по проводникам ( $i_1, i_2, i_3$ ), называются токами проводимости. Через свободную поверхность диэлектрика будет протекать ток смещения  $i_{см} = \int_S \vec{\delta}_{см} \cdot \vec{ds}$ . На промышленной

частоте 50 Гц ток смещения несоизмеримо меньше тока проводимости ( $i_{см} \ll i_{пр}$ ) и в инженерных расчетах им можно пренебречь. Таким образом, можно считать, что алгебраическая сумма токов проводимости в узле электрической цепи равна нулю:

$$\sum i = i_1 - i_2 - i_3 = 0 .$$

Указанное положение в электротехнике получило название 1-го закона Кирхгофа.

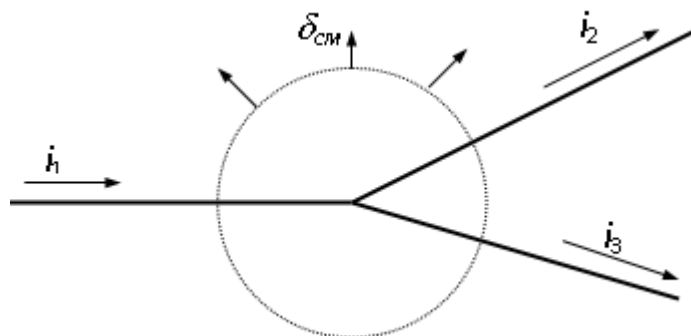


Рисунок 2

### 1.3 Электрическое напряжение. 2-ой закон Кирхгофа

Пусть в электрическом поле  $\vec{E}$  заряд  $q$  перемещается из точки “a” в точку “b” по некоторой произвольной траектории (рисунок 3). Работа сил по перемещению заряда  $q$  из точки “a” в точку “b”:

$$A = q \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl},$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля [ В/м].

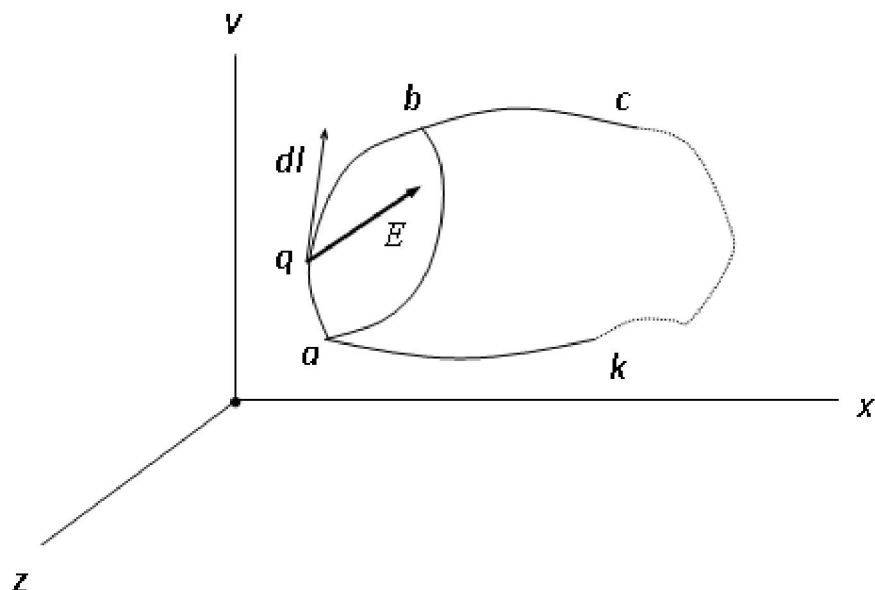


Рисунок 3

Электрическим напряжением называется физическая величина, равная отношению работы по перемещению заряда из одной точки (a) в другую (b) к величине этого заряда:

$$U_{ab} = \frac{A}{q} = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что при перемещении заряда по произвольному замкнутому контуру, произведенная работа будет равна нулю т.е.

$$A = q \oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0.$$

Из этого уравнения вытекают два важных следствия.

1-е следствие: сумма падений напряжений на отдельных участках замкнутого контура равна нулю:

$$\oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_b^c \vec{E} \cdot \vec{dl} + \dots + \int_k^a \vec{E} \cdot \vec{dl} = U_{ab} + U_{bc} + \dots + U_{ka} = 0$$

2-ое следствие: напряжение между двумя произвольными точками не зависит от пути интегрирования:

$$\oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_b^a \vec{E} \cdot \vec{dl} = U_{ab} + U_{ba} = 0,$$

откуда следует, что  $U_{ab} = -U_{ba}$ .

Независимость напряжения между двумя точками от выбора пути интегрирования позволяет характеризовать электрическое поле некоторой

математической функцией  $\varphi(x, y, z)$ , называемой потенциалом, разность значений которой в рассматриваемых точках численно равна напряжению между ними:

$$\varphi_a - \varphi_b = U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl}.$$

Если положение и потенциал точки "a" заданы, а точка "b" является токущей – "b"(x,y,z), то получим:

$$\varphi_b = \varphi(x, y, z) = - \int_a^{x,y,z} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \varphi_a = - \int_a^{x,y,z} \vec{E} \cdot \vec{dl} + C.$$

Таким образом, значение потенциала  $\varphi_b$  в произвольной точке "b"(x,y,z) зависит от выбора значения потенциала опорной точки  $\varphi_a$ . В электротехнике принято придавать нулевое значение потенциала точке, связанной с землей.

Рассмотрим замкнутый контур некоторой электрической цепи (рисунок 4), при этом путь интегрирования выберем вдоль ветвей контура.

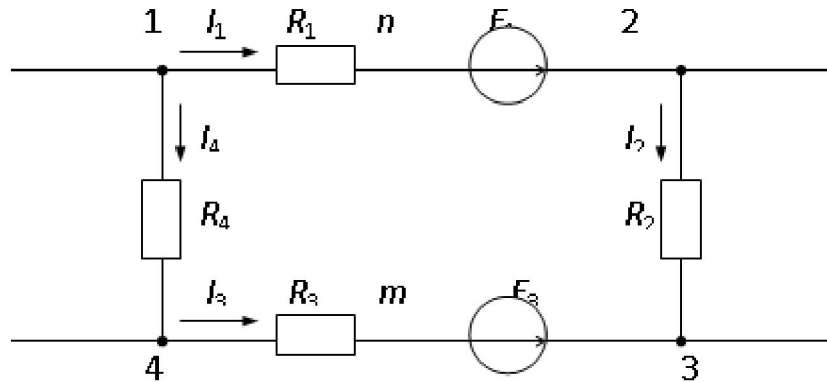


Рисунок 4

Для 1-й ветви:

$$U_{1n} = \varphi_1 - \varphi_n = I_1 R_1 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_n + I_1 R_1,$$

$$U_{2n} = \varphi_2 - \varphi_n = E_1 \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_n + E_1,$$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_n + I_1 R_1 - \varphi_n - E_1 = I_1 R_1 - E_1.$$

По аналогии для других ветвей:

$$U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3 = I_2 R_2,$$

$$U_{34} = \varphi_3 - \varphi_4 = -I_3 R_3 + E_3,$$

$$U_{41} = \varphi_4 - \varphi_1 = -I_4 R_4.$$

Сумма всех напряжений по замкнутому контуру:

$$\sum U = U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{41} = 0,$$

откуда следует, что

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = E_1 - E_3,$$

или

$$\sum IR = \sum E \quad \text{— 2-ой закон Кирхгофа.}$$

Формулировка 2-го закона Кирхгофа: в замкнутом контуре электрической цепи или схемы алгебраическая сумма падений напряжений на пассивных элементах контура ( $\sum IR$ ) равна алгебраической сумме ЭДС ( $\sum E$ ). Отдельные слагаемые в эти суммы входят со знаком "+", если их действие совпадает с направлением обхода контура, и со знаком "-", если не совпадает.

## 1.4 Физические процессы в электрической цепи

Электрической цепью называется совокупность технических устройств, образующих пути для замыкания электрических токов и предназначенных для производства, передачи, распределения и потребления электрической энергии. Любая электрическая цепь предполагает наличие в своей структуре как минимум трех элементов, а именно: источников энергии, приемников энергии и соединяющих их проводов или линий электропередачи. Как известно, носителем энергии является электромагнитное поле, которое сосредоточено как внутри так и вне проводов. Таким образом, для рассмотрения физических явлений в электрической цепи во всей полноте необходимо проводить расчет и исследование электромагнитного поля заданной цепи. При физическом решении этой задачи пользуются дифференциальными понятиями и параметрами, характеризующими электромагнитное поле в рассматриваемой точке, такими как  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{\delta}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ . Математическое описание электромагнитных полей на основе дифференциальных понятий оказывается сложной задачей.

Электрическая цепь состоит, как правило, из отдельных однородных участков. В этом случае предоставляется возможность с достаточной для инженерных расчетов точностью описывать процессы на отдельных участках с помощью интегральных понятий:

$$e_{ab} = \int_a^b \vec{E}_{\text{емп}} \cdot d\vec{l} - \text{электродвижущая сила (ЭДС) источника энергии;}$$

$$u_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} - \text{электрическое напряжение;}$$

$$i = \int_s \vec{\delta} \cdot d\vec{s} - \text{электрический ток;}$$

$$q = \int_s \vec{D} \cdot d\vec{s} - \text{электрический заряд;}$$

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} - \text{магнитный поток;}$$

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot s} - \text{электрическое сопротивление.}$$

Применение интегральных понятий к расчетам электрических цепей позволяет получать сравнительно простые решения задач с допустимой методической погрешностью.

В каждой реальной электрической цепи можно одновременно наблюдать следующие физические процессы:

1) процесс генерирования электрической энергии, который происходит в источниках (генераторах) в результате преобразования одного из видов энергии (механической, химической и др.) в электрическую;

2) процесс преобразования электрической энергии в другие виды, который протекает в приемниках энергии;

3) процесс накопления (или возврата) энергии в объеме магнитного поля:

$$W_M = \int_v \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2 \cdot dv;$$

4) процесс накопления (или возврата) энергии в объеме электрического поля:

$$W_E = \int_v \frac{1}{2} \mu \mu_0 E^2 \cdot dv.$$

Перечисленные физические процессы в том или другом сочетании при-  
сущи всем элементам электрической цепи, протекают одновременно и  
связаны между собой законом сохранения энергии.

При расчете режима электрической цепи она представляется некоторой  
условной схемой или схемой замещения, состоящей из комбинации  
идеальных схемных элементов. Каждый идеальный схемный элемент  
отображает на схеме один из физических процессов. Таких схемных  
элементов всего 5.

1) Идеальный источник напряжения (ЭДС)  $E$ —это схемный элемент,  
который генерирует на своих выводах постоянную по величине ЭДС  
( $E=const$ ), не зависящую от тока, имеет символьное обозначение, показанное  
на рисунке 5а, характеризуется напряжением [В].

2) Идеальный источник тока  $J$ —это схемный элемент,  
который генерирует в цепи постоянный по величине ток ( $J=const$ ), не  
зависящий от напряжения на его зажимах, имеет символьное обозначение,  
показанное на рисунке 5б, характеризуется током [А].

3) Идеальный резистор  $R$ — это схемный элемент, в котором происходит  
только процесс преобразования электрической энергии в другие виды, имеет  
символьное обозначение, показанное на рисунке 5в, характеризуется  
сопротивлением [Ом].

4) Идеальная катушка индуктивности  $L$ — это схемный элемент, в  
котором происходит только процесс накопления (или возврата) энергии в  
магнитном поле ( $W_M=Li^2/2$ ), имеет символьное обозначение, показанное на  
рисунке 5г, характеризуется индуктивностью [Гн].

5) Идеальный конденсатор  $C$  – это схемный элемент, в котором происходит только процесс накопления (или возврата) энергии в электрическом поле ( $W_э = Cu^2/2$ ), имеет символическое обозначение, показанное на рисунке 5д, характеризуется емкостью [Ф].

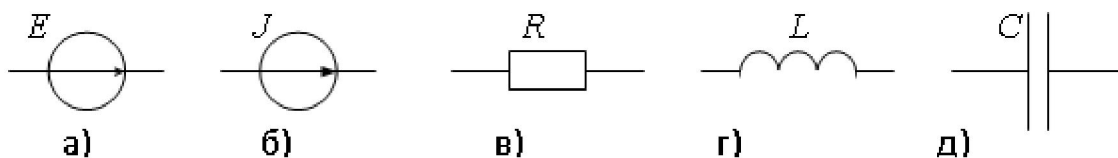


Рисунок 5

Каждый элемент электрической цепи на схеме замещения представляется одним или комбинацией из нескольких идеальных схемных элементов в зависимости от необходимости учета тех физических процессов, которые в нем протекают. Например, лампа накаливания представляется на схеме только одним схемным элементом резистором  $R$ , так как тепловая и световая энергия многократно больше энергии электромагнитного поля (рисунок 6а), обмотка электромагнитного реле представляется на схеме комбинацией из двух элементов –  $R$  и  $L$  (рисунок 6б), а протяженная двухпроводная линия – комбинацией из 6-и схемных элементов, которые комплексно учитывают физические процессы в ней (рисунок 6в).

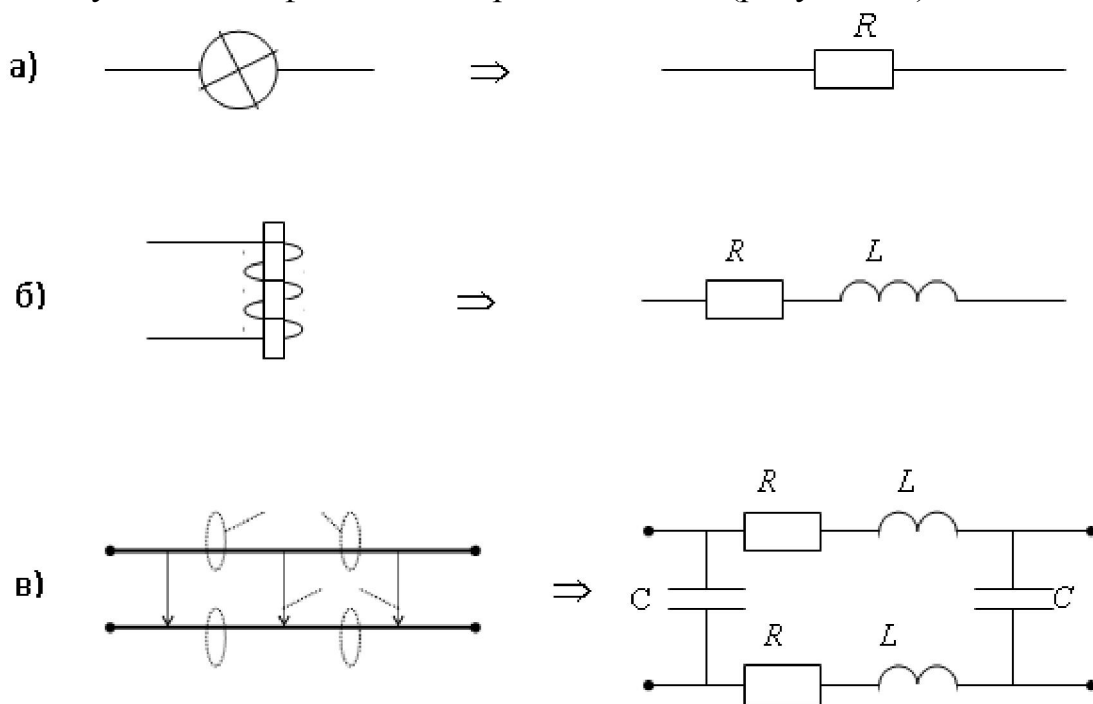


Рисунок 6

При составлении схемы замещения электрической цепи всегда пренебрегают второстепенными физическими процессами и явлениями, не оказывающими существенного влияния на точность технического расчета режима. Поэтому любая схема замещения реальной цепи отображает физические процессы в ней с некоторой степенью приближения.

Энергия от источника переносится приемнику электромагнитным полем со скоростью распространения волны. Для воздушных линий электропередачи эта скорость близка к скорости света  $c=300000$  км/с, для кабельных линий она чуть меньше  $\left(v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}\right)$ . Таким образом, электромагнитная волна за единицу времени (1 сек) многократно пробегает путь от источника энергии до приемника.

Согласно закону сохранения энергии в любой электрической цепи за любой промежуток времени  $T$  должен выполняться баланс между генерируемой и потребляемой энергией:  $\sum W_{\text{ист}} = \sum W_{\text{пр}}$ . Количество энергии, за единицу времени (1сек), называется мощностью, следовательно, в любой цепи существует баланс между мощностью источников и приемников:  $\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{пр}}$ .

В любой энергосистеме, состоящей из электростанций, линий электропередачи и потребителей электроэнергии в любой момент времени существует динамическое равновесие между суммарными мощностями источников и приемников электрической энергии, при этом источники энергии должны постоянно приспосабливаться к изменяющимся запросам потребителя. Электростанции в энергосистеме работают без промежуточного склада готовой продукции!

## **2 Законы электрических цепей. Теоремы и методы расчета сложных резистивных цепей**

### **2.1 Основные определения**

Узлом электрической цепи (схемы) называется точка, в которой сходятся не менее трех ветвей.

Ветвью электрической цепи (схемы) называется участок, состоящий из последовательно включенных элементов, расположенных между двумя смежными узлами.

Сложной называется электрическая цепь (схема), содержащая не менее двух узлов, не менее трех ветвей и не менее двух источников энергии в разных ветвях.

В сложной электрической цепи наблюдаются одновременно в той или иной мере разнородные физические процессы, а именно, процесс генерирования электрической энергии, процесс преобразования электрической энергии в другие виды и процесс обмена энергией между магнитным полем, электрическим полем и источниками энергии. В общем случае для отображения этих физических процессов схема замещения цепи должна содержать кроме источников энергии ( $E$ ,  $J$ ) все разнородные схемные элементы ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ). Математически физические процессы в такой схеме можно описать системой дифференциальных уравнений, составленных для схемы замещения по законам Кирхгофа.

В стационарном режиме (в режиме постоянного тока) напряжение на катушке равно нулю ( $u_L = L \frac{di}{dt} = 0$ ), что соответствует короткому замыканию этого элемента, а при постоянном напряжении ток в конденсаторе равен нулю ( $i_C = C \frac{du}{dt} = 0$ ), что соответствует разрыву ветви с этим элементом. Следовательно, на установившийся режим постоянного тока схемные элементы  $L$  и  $C$  не оказывают влияния и могут быть исключены из схемы замещения (участки с  $L$  закорочены, а ветви с  $C$  удалены). Цепи постоянного тока представляются эквивалентными схемами, содержащими только постоянные источники энергии  $E$ ,  $J$  и резистивные элементы  $R$ . Такие схемы получили название резистивных или постоянного тока. Установившийся режим постоянного или переменного тока в таких схемах описывается системой линейных алгебраических уравнений, составленных по законам Кирхгофа.

В настоящей главе будут рассматриваться только резистивные цепи в режиме постоянного тока. В последующем рассмотренные в данной главе теоремы и методы расчета будут распространены на цепи переменного тока в установившемся синусоидальном режиме.

## 2.2 Метод преобразования (свертки) схемы

Если схема электрической цепи содержит только один источник энергии ( $E$  или  $J$ ), то пассивная часть схемы может быть преобразована (свернута) к одному эквивалентному элементу  $R_3$  (рисунок 7).

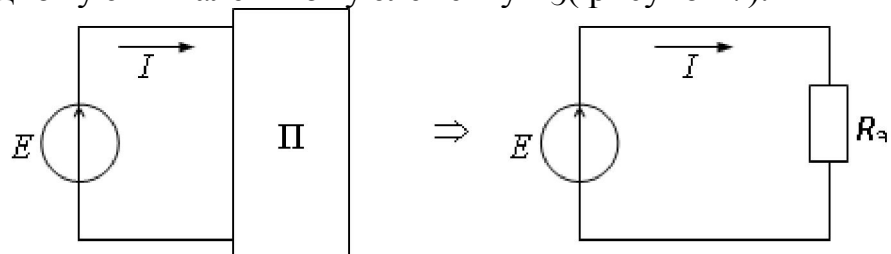


Рисунок 7

Свертка схемы начинается с самых удаленных от источника ветвей, проводится в несколько этапов до достижения полной свертки. После полной свертки схемы определяется ток источника по закону Ома:  $I = \frac{E}{R_3}$ . Токи в остальных элементах исходной схемы находятся в процессе обратной развертки схемы. Такой метод расчета токов получил название метода последовательного преобразования (свертки) схемы.

При применении данного метода возможны следующие виды преобразований.

1) **Последовательное преобразование** заключается в замене нескольких элементов, включенных последовательно, одним эквивалентным (рисунок 8). Несложно доказать, что при этом справедливы следующие соотношения:

$$R_{\Sigma} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad \text{и} \quad U_1 : U_2 : \dots : U_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n$$

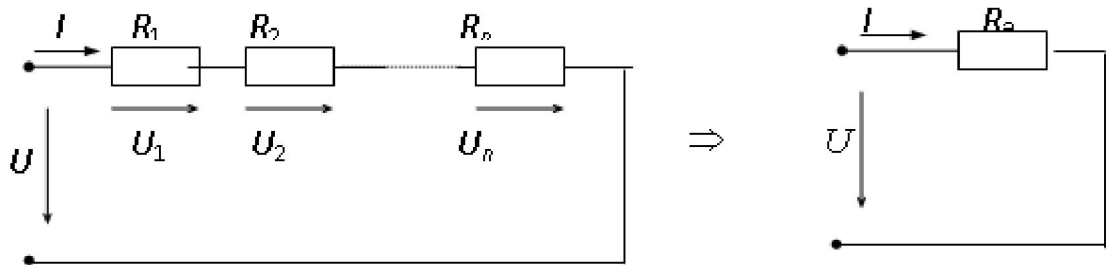


Рисунок 8

2) **Параллельное преобразование** состоит в замене нескольких элементов, включенных параллельно, одним эквивалентным (рисунок 9). Несложно доказать, что при этом справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{R_{\Sigma}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad \text{и} \quad I_1 : I_2 : \dots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \dots : \frac{1}{R_n}$$

Для двух элементов:  $R_{\Sigma} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  и  $I_1 : I_2 = R_2 : R_1$

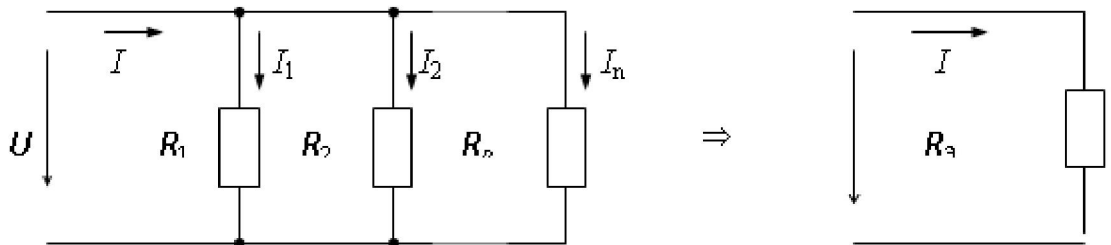


Рисунок 9

3) **Взаимное преобразование схем звезда–треугольник** (рисунок 10) возникает при свертке сложных схем.

Условием эквивалентности двух схем являются равенства для них токов ( $I_1, I_2, I_3$ ), напряжений ( $U_{12}, U_{23}, U_{31}$ ) и входных сопротивлений ( $R_{12}, R_{23}, R_{31}$ ) и соответственно входных проводимостей ( $G_{12}, G_{23}, G_{31}$ ).

Приравняем входные сопротивления для обеих схем со стороны двух произвольных ветвей при отключенной третьей (рисунок 10):

$$R_{\text{ex1-2}} = R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{31} + R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (2.2.1)$$

$$R_{\text{ex2-3}} = R_2 + R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31} + R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (2.2.2)$$

$$R_{\text{ex}3-1} = R_3 + R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12} + R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (2.2.3)$$

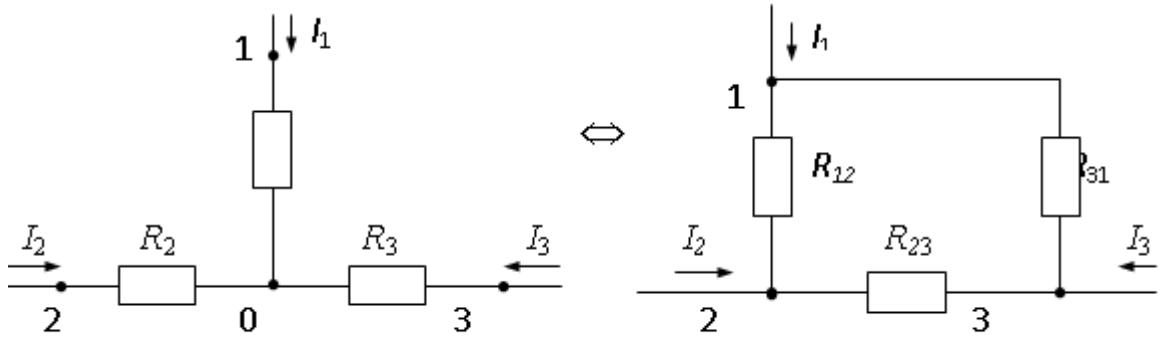


Рисунок 10

Сложим почленно уравнения (2.2.1) и (2.2.3) и вычтем из суммы уравнение (2.2.2), получим:

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \text{ по аналогии: } R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Приравняем входные проводимости для обеих схем со стороны произвольной вершины и двух других вершин, замкнутых накоротко (рисунок 11):

$$G_{\text{ex}1-23} = \frac{G_1 G_2 + G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} = G_{12} + G_{31} \quad (2.2.4)$$

$$G_{\text{ex}2-31} = \frac{G_1 G_2 + G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = G_{23} + G_{12} \quad (2.2.5)$$

$$G_{\text{ex}3-12} = \frac{G_3 G_1 + G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = G_{31} + G_{23} \quad (2.2.6)$$

Сложим почленно уравнения (2.2.4) и (2.2.5) и вычтем уравнение (2.2.6), получим:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, \text{ по аналогии: } G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

В последних уравнениях заменим проводимости на соответствующие им сопротивления  $R = \frac{1}{G}$ , получим:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}.$$

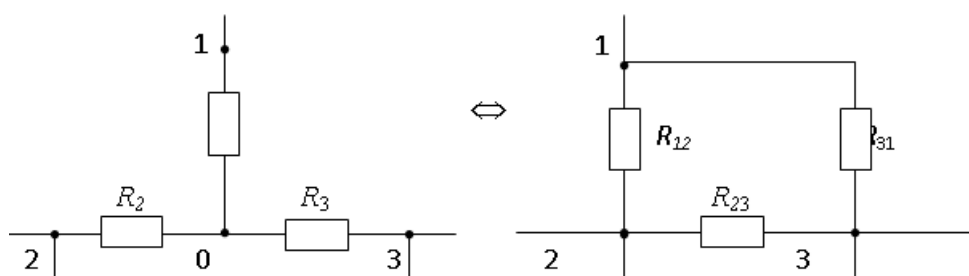


Рисунок 11

При наличии полной симметрии соотношение между параметрами эквивалентных схем составляет:  $R_{\Delta} = 3R_{\perp}$ .

4) **Замена параллельных ветвей эквивалентной ветвью** (рисунок 12) осуществляется согласно теореме об эквивалентном генераторе.

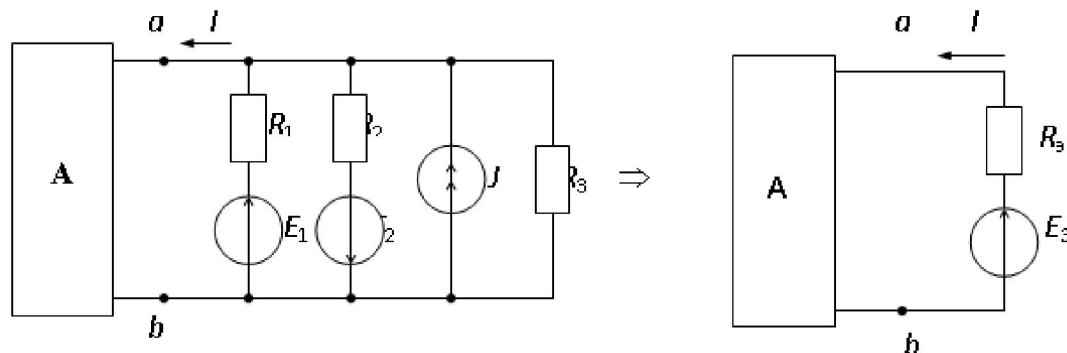


Рисунок 12

Напряжение холостого хода  $U_{xxab} = E_{\mathcal{O}}$  определяется по методу двух узлов:

$$U_{xxab} = E_{\mathcal{O}} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}.$$

Эквивалентное входное сопротивление находится методом свертки схемы:

$$R_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}.$$

5) **Перенос источника ЭДС через узел схемы:** источник ЭДС  $E$  можно перенести через узел во все ветви, отходящие от узла (рисунок 13а, б.):

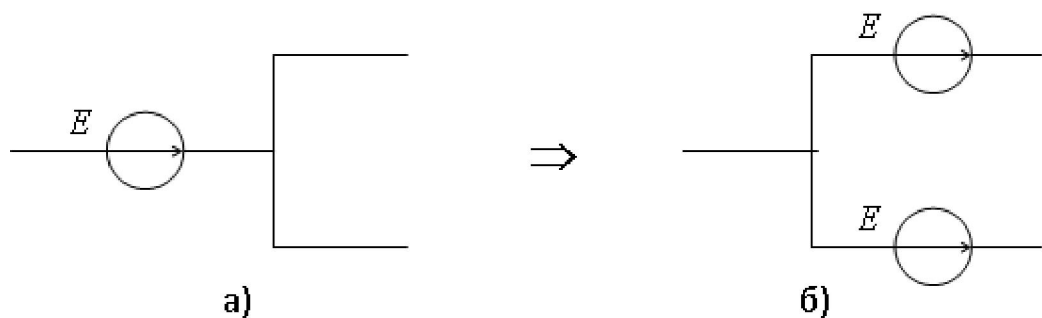


Рисунок 13

6) **Привязка источника тока** к произвольному узлу согласно схеме(рисунок14а, б):

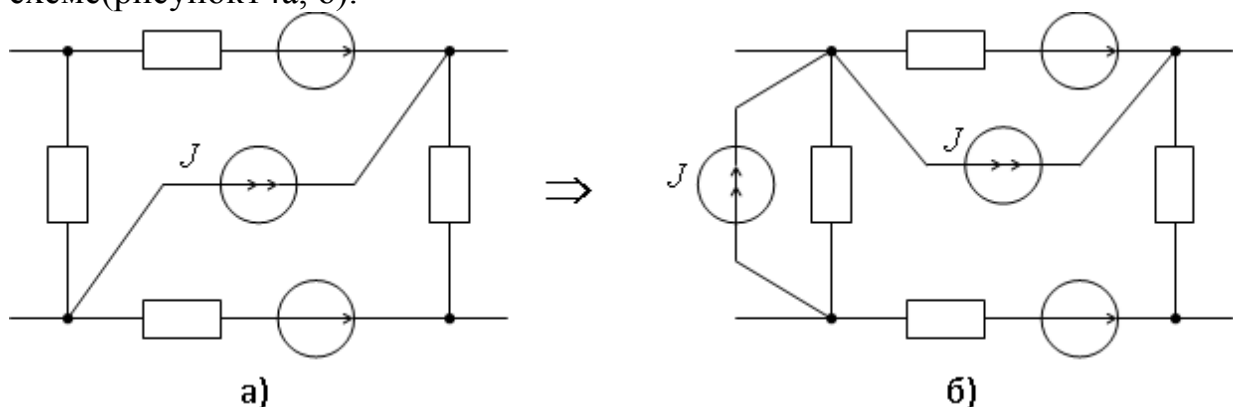


Рисунок 14

7) **Взаимное преобразование схем** с источником напряжения и источником тока согласно схеме(рисунок15а, б). Схемы эквивалентны при равенстве для обеих напряжений  $U$  и токов  $I$  на нагрузке:

$$U = E - IR_0 = I_0 R_0 = (J - I) \cdot \frac{1}{G_0} = \frac{J}{G_0} - \frac{I}{G_0}.$$

Сравнивая левые и правые части равенства, получим соотношения между параметрами эквивалентных схем:

$$R_0 = \frac{1}{G_0}; \quad E = \frac{J}{G_0}; \quad G_0 = \frac{1}{R_0}; \quad J = \frac{E}{R_0}.$$

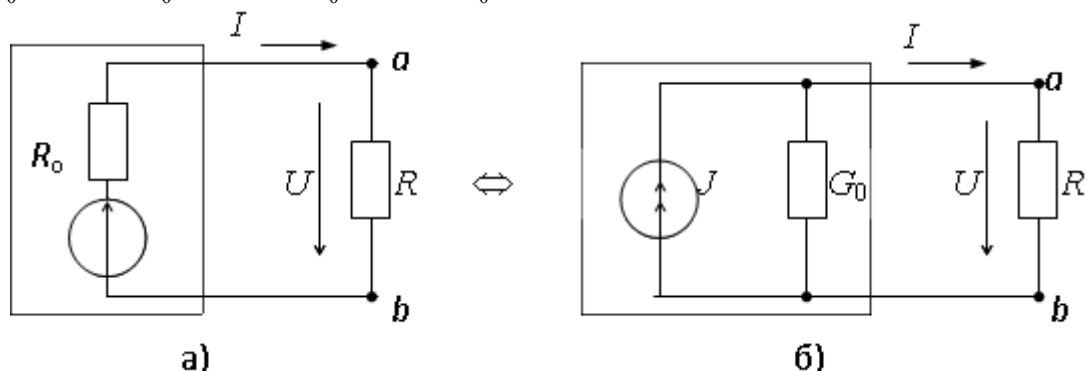


Рисунок 15

## 2.3 Метод законов Кирхгофа

Теоретическая база метода: 1-й и 2-й законы Кирхгофа.

1-й закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов ветвей в узле схемы равна нулю ( $\sum I = 0$ ).

2-й закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений в произвольном контуре схемы равна алгебраической сумме ЭДС ( $\sum IR = \sum E$ ).

Пусть требуется выполнить расчет режима в заданной сложной схеме (рисунок 16) и определить токи в ветвях, напряжения на отдельных элементах, мощности источников и приемников энергии. Задана схема цепи и параметры ее отдельных элементов ( $E_1, E_2, J_1, J_2, J_3, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ ).

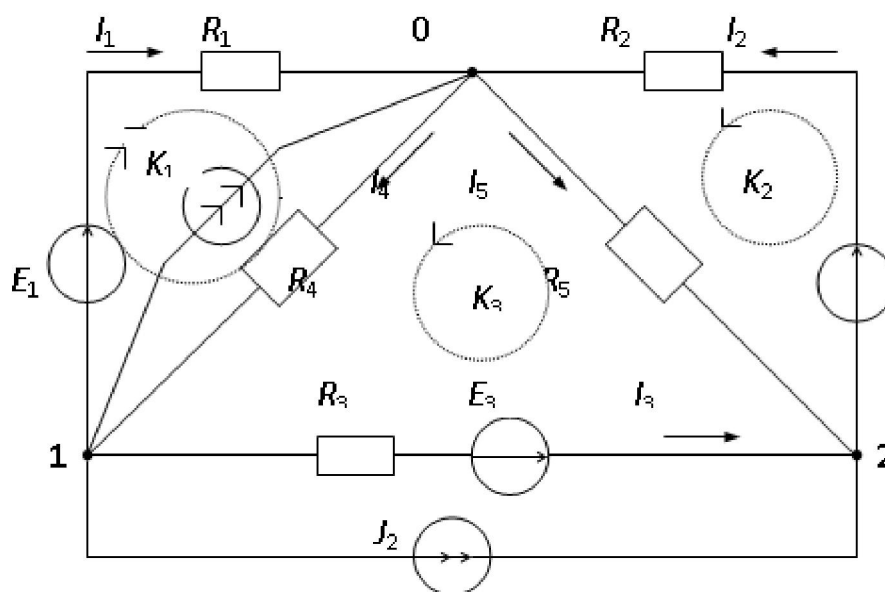


Рисунок 16

Анализируем структуру схемы: схема содержит  $n=3$  (0, 1, 2) узлов и  $m=5$  ветвей с неопределенными токами. В ветвях с источниками тока  $J$  токи определены источниками. Общее число уравнений должно быть равно числу определяемых токов “ $m$ ”.

Последовательность (алгоритм) расчета.

1) Задаются (произвольно) положительными направлениями токов в ветвях схемы ( $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ ).

2) Составляется  $(n-1)$  уравнений для узлов по первому закону Кирхгофа. Уравнение для последнего  $n$ -го узла является зависимым (оно может быть получено путем сложения первых  $(n-1)$  уравнений).

3) Недостающие  $m-(n-1)$  уравнений составляются по 2-му закону Кирхгофа. Правило выбора контуров для составления уравнений: каждый последующий контур должен включать в себя хотя бы одну новую ветвь, не охваченную предыдущими уравнениями. Число независимых контуров для схемы любой сложности не может быть больше числа  $m-(n-1)$ .

Ниже приведена система уравнений Кирхгофа для схемы рисунок 16, состоящая из  $m=5$  уравнений, из которых  $n-1=2$  составлены для узлов 1 и 2 по 1-му закону Кирхгофа и  $m-(n-1)=3$  составлены для контуров  $K_1, K_2, K_3$  по 2-му закону Кирхгофа:

$$\left\{ \begin{array}{l} -I_1 - I_3 + I_4 - J_1 - J_2 = 0 - \text{узел } 1, \\ -I_2 + I_3 + I_5 + J_2 = 0 - \text{узел } 2, \\ I_1 R_1 + I_4 R_4 = E_1 - \text{контур } K_1, \\ I_2 R_2 + I_5 R_5 = E_2 - \text{контур } K_2, \\ I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_5 R_5 = E_3 - \text{контур } K_3. \end{array} \right.$$

4) Система уравнений приводится к матричной форме, составляются матрицы коэффициентов:

$$[R] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & R_5 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & -R_5 \end{bmatrix}; \quad [E, J] = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 \\ -J_2 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

5) Система уравнений решается на ЭВМ по стандартной программе для решения линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, в результате чего определяются неизвестные токи  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ . Отрицательные результаты, получаемые для некоторых токов, означают, что их действительные (физические) направления не соответствуют направлениям, принятым в начале расчета.

6) Определяются напряжения на отдельных элементах схемы ( $U_k = I_k R_k$ ), мощности источников ЭДС ( $P_{Ek} = E_k I_k$ ), источников тока ( $P_{Jk} = U_k I_k$ ) и приемников ( $P_k = I_k^2 R_k$ ). При этом мощности приемников энергии всегда положительны, а мощности источников энергии могут быть отрицательными, если сомножители в произведениях  $E_k I_k$  и  $U_k J_k$  не совпадают по направлению.

## 2.4 Метод контурных токов

Теоретическая база метода контурных токов – 2-ой закон Кирхгофа в сочетании с принципом наложения. Предполагают, что в каждом элементарном контуре-ячейке схемы протекает «свой» контурный ток  $I_k$ , а действительные токи ветвей получаются по принципу наложения контурных токов как их алгебраические суммы. В качестве неизвестных величин, подлежащих определению, в данном методе выступают контурные токи. Общее число неизвестных составляет  $m-(n-1)$ .

Последовательность (алгоритм) расчета.

2) Составляются  $m-(n-1)$  уравнений по 2-му закону Кирхгофа для выбранных контуров-ячеек с контурными токами  $I_{k1}$ ,  $I_{k2}$ ,  $I_{k3}$ . В уравнениях учитываются падения напряжений как от собственного контурного тока, так и от смежных контурных токов.

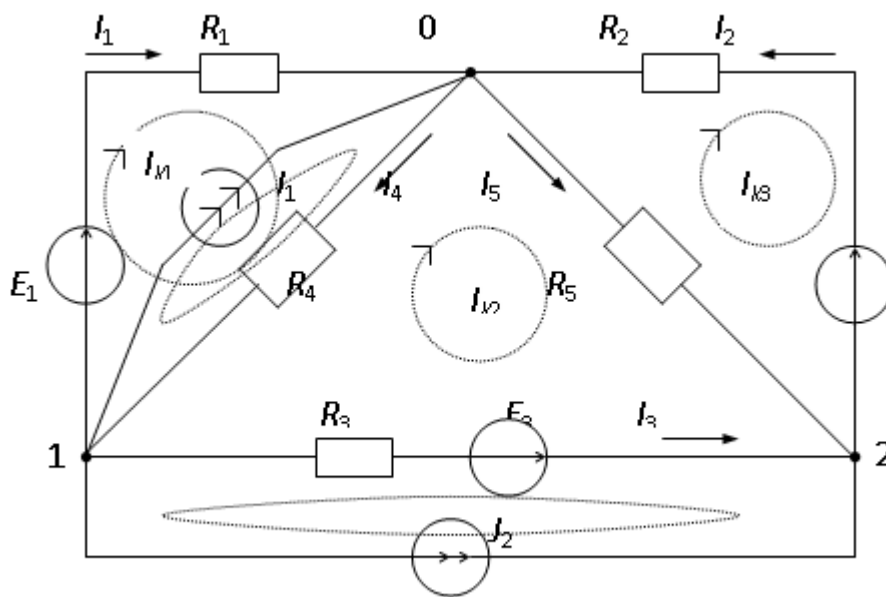


Рисунок 17

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{k1}(R_1 + R_4) - I_{k3}R_4 - J_1R_4 = E_1 \\ I_{k2}(R_3 + R_4 + R_5) - I_{k1}R_4 - I_{k3}R_5 = -E_3 \\ I_{k3}(R_2 + R_5) - I_{k2}R_5 = -E_2 \end{array} \right.$$
$$\begin{cases} I_{k_1}R_{11} + I_{k_2}R_{12} + I_{k_3}R_{13} + \dots + I_{kn}R_{1n} = E_{11} \\ I_{k_1}R_{21} + I_{k_2}R_{22} + I_{k_3}R_{23} + \dots + I_{kn}R_{2n} = E_{22} \\ I_{k_1}R_{31} + I_{k_2}R_{32} + I_{k_3}R_{33} + \dots + I_{kn}R_{3n} = E_{33} \\ \dots\dots\dots \\ I_{k_1}R_{n1} + I_{k_2}R_{n2} + I_{k_3}R_{n3} + \dots + I_{kn}R_{nn} = E_{nn} \end{cases}$$

$R_{11} = R_1 + R_4$ ;  $R_{22} = R_3 + R_4 + R_5$  и т. д. – собственные сопротивления контуров, равные сумме сопротивлений всех элементов контура;

$R_{12} = R_{21} = -R_4$ ;  $R_{23} = R_{32} = -R_5$  и т. д. – взаимные сопротивления между двумя смежными контурами, они положительны – если контурные токи в ветви совпадают, и отрицательны – если контурные токи в ветви направлены встречно, и всегда отрицательны – если все контурные токи ориентированы одинаково (например, по часовой стрелке), равны нулю – если контуры не имеют общей ветви, например,  $R_{13} = R_{31} = 0$ ;

$E_{11} = E_1 + J_1 R_4$ ,  $E_{22} = -E_2$ ,  $E_{33} = -E_3 + J_2 R_3$  и т. д. – контурные ЭДС, равные алгебраической сумме слагаемых  $E_{nn} = \sum E + \sum J R$  от всех источников контура.

Система контурных уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \\ I_{k3} \\ \dots \\ I_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \dots \\ E_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{или в сокращенно } [R_k] \times [I_k] = [E_k],$$

где  $[R_k]$  – матрица контурных сопротивлений,  $[I_k]$  – матрица контурных токов,  $[E_k]$  – матрица контурных ЭДС.

3) Система контурных уравнений решается на ЭВМ по стандартной программе для решения систем линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами (SU1), в результате чего определяются неизвестные контурные токи  $I_{k1}$ ,  $I_{k2}$ ,  $I_{k3}$ .

4) Выбираются положительные направления токов в ветвях исходной схемы (рис. 1) ( $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ ). Токи ветвей определяются по принципу наложения как алгебраические суммы контурных токов, протекающих в данной ветви.

$$I_1 = I_{k1}; \quad I_2 = -I_{k3}; \quad I_3 = -I_{k2} - J_2; \quad I_4 = I_{k1} - I_{k2} + J_1; \quad I_5 = I_{k2} - I_{k3}.$$

5) При необходимости определяются напряжения на отдельных элементах ( $U_k = I_k R_k$ ), мощности источников энергии ( $P_{Ek} = E_k I_k$ ,  $P_{Jk} = U_k J_k$ ) и мощности приемников энергии ( $P_k = I_k^2 \cdot R_k$ ).

## 2.5 Метод узловых потенциалов

Теоретическая база метода узловых потенциалов – 1-ый закон Кирхгофа в сочетании с потенциальными уравнениями ветвей. В этом методе потенциал одного из узлов схемы принимают равным нулю, а потенциалы остальных  $(n-1)$  узлов считают неизвестными, подлежащими определению. Общее число неизвестных составляет  $(n-1)$ .

Рассмотрим обобщенную ветвь некоторой сложной схемы (рисунок 18).

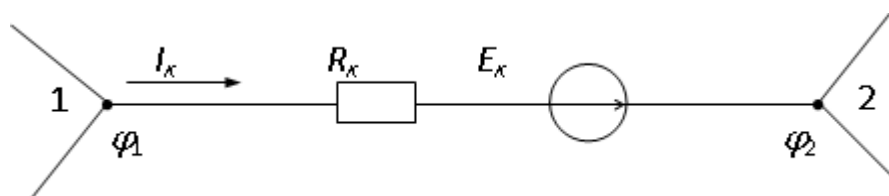


Рисунок 18

Свяжем потенциалы концов ветви (узлов) между собой через падения напряжений на отдельных участках:

$$\varphi_1 - I_k R_k + E_k = \varphi_2 \quad \text{или} \quad \varphi_2 - E_k + I_k R_k = \varphi_1$$

Уравнение, связывающее потенциалы конечных точек ветви через падения напряжений на ее отдельных участках, называется потенциальным уравнением ветви. Из потенциального уравнения ветви могут быть определены ток ветви и напряжение на резисторе:

$$I_k = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_k}{R_k}, \quad U_k = I_k R_k = \varphi_1 - \varphi_2 + E_k.$$

Пусть требуется выполнить расчет режима в заданной сложной схеме рисунок 19. Параметры отдельных элементов схемы заданы.

Принимаем потенциал узла 0 равным нулю ( $\varphi_0 = 0$ ), а потенциалы узлов 1 и 2 ( $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ) будем считать неизвестными, подлежащими определению.

Зададимся положительными направлениями токов в ветвях схемы  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ . Составим потенциальные уравнения ветвей и выразим из них токи ветвей:

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_0 + E_1) / R_1$$

$$I_2 = (\varphi_2 - \varphi_0 + E_2) / R_2$$

$$I_3 = (\varphi_1 - \varphi_0 + E_3) / R_3$$

$$I_4 = (\varphi_0 - \varphi_1) / R_4$$

$$I_5 = (\varphi_0 - \varphi_2) / R_5$$

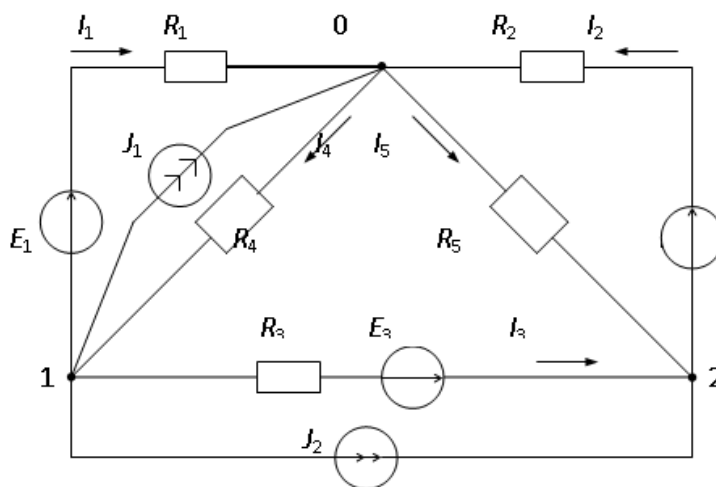


Рисунок 19

Составим  $(n-1)$  уравнение по 1-му закону Кирхгофа для узлов 1 и 2:

$$-I_1 - I_3 + I_4 - J_1 - J_2 = 0$$

$$-I_2 + I_3 + I_5 + J_2 = 0$$

Подставим в уравнения 1-го закона Кирхгофа значения токов, выраженные ранее из потенциальных уравнений. После приведения коэффициентов получим систему узловых уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_3} &= -\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_3}{R_3} - J_1 - J_2 \\ -\varphi_1 \frac{1}{R_3} + \varphi_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) &= -\frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} + J_2 \end{aligned} \right.$$

В обобщенной форме система узловых уравнений имеет вид:

$$-\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 G_{11}-\varphi_2 G_{12}-\varphi_3 G_{13}-...-\varphi_n G_{1n}=J_{11}\\ -\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22}-\varphi_2 G_{23}-...-\varphi_n G_{2n}=J_{22}\\ -\varphi_1 G_{31}-\varphi_2 G_{32} +\varphi_3 G_{33}-...-\varphi_n G_{3n}=J_{33}\\ .....\\ -\varphi_1 G_{n1}-\varphi_2 G_{n2}-\varphi_3 G_{n3}-...+ \varphi_n G_{nn}=J_{nn} \end{array} \right.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$G_{11}=1/R_1 +1/R_3+1/R_4$ ;  $G_{22}=1/R_2 +1/R_3+1/R_5$  и т.д. – собственные проводимости узлов, равные суммам проводимостей всех ветвей, сходящихся в данном узле, всегда положительны;

$G_{12} = G_{21} = 1/R_3$ ;  $G_{nm} = G_{mn}$  – взаимные проводимости между смежными узлами (1 и 2,  $m$  и  $n$ ), равные сумме проводимостей ветвей, соединяющих эти узлы, всегда отрицательны;

$J_{11} = -E_1/R_3 - E_3/R_3 - J_1$ ;  $J_{11} = -E_2/R_2 - E_3/R_3 + J_1$  и т. д. – узловые токи узлов, равные алгебраической сумме слагаемых  $E/R$  и  $J$  от всех ветвей, сходящихся в узле (знак “+”, если источник действует к узлу, и знак “–”, если источник действует от узла).

Система узловых уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \dots G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \dots G_{2n} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \dots G_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & G_{n3} \dots G_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \dots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ J_{33} \\ \dots \\ J_{nn} \end{bmatrix}$$

или сокращенно

$$[G_y] \times [\varphi_y] = [J_y],$$

где  $[G_y]$  – матрица узловых проводимостей,  $[\varphi_y]$  – матрица узловых потенциалов,  $[J_y]$  – матрица узловых токов.

Последовательность (алгоритм) расчета.

1) Принимают потенциал одного из узлов схемы равным нулю, а потенциалы остальных  $(n-1)$  узла считают неизвестными, подлежащими определению.

2) Руководствуясь обобщенной формой, составляют  $(n-1)$  уравнение для узлов с неизвестными потенциалами.

3) Определяются коэффициенты узловых уравнений и составляются их матрицы.

4) Система узловых уравнений решается на ЭВМ по стандартной программе для решения систем линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, в результате чего определяются неизвестные потенциалы узлов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

5) Выбираются положительные направления токов в ветвях исходной схемы  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ . Токи ветвей определяются из потенциальных уравнений ветвей через потенциалы узлов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

6) При необходимости определяются напряжения на отдельных элементах ( $U_k = I_k R_k$ ), мощности источников энергии ( $P_{Ek} = E_k I_k, P_{Jk} = U_k J_k$ ) и приемников энергии ( $P_k = I_k^2 \cdot R_k$ ).

## 2.6 Метод двух узлов

Метод двух узлов является частным случаем метода узловых потенциалов при числе узлов в схеме  $n = 2$ . Пусть требуется выполнить расчет режима в заданной схеме (рисунок 20).

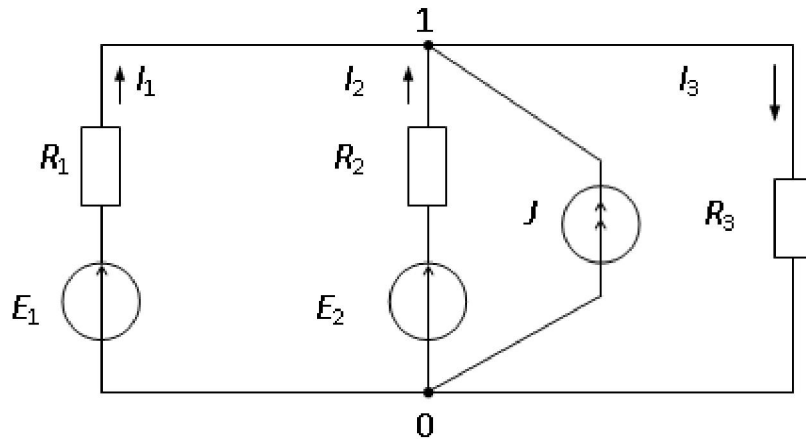


Рисунок 20

Принимаем  $\varphi_0 = 0$ , тогда уравнение для узла 1 по методу узловых потенциалов будет иметь вид:  $\varphi_1 G_{11} = J_{11}$ , откуда следует непосредственное определение напряжения между узлами схемы:

$$U_{10} = \varphi_1 = \frac{J_{11}}{G_{11}} = \frac{\sum J + \sum E/R}{\sum 1/R} - \text{уравнение метода двух узлов.}$$

Применительно к схеме рисунку 20 данное уравнение примет конкретную форму:

$$U_{10} = \varphi_1 = \frac{J_{11}}{G_{11}} = \frac{J + E_1 / R_1 + E_2 / R_2}{1 / R_1 + 1 / R_2 + 1 / R_3}.$$

Токи в ветвях схемы определяются из потенциальных уравнений:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{10}}{R_1}; \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{10}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{10}}{R_3}.$$

## 2.7 Принцип наложения. Метод наложения

Принцип (теорема) наложения гласит, что ток в любой ветви (напряжение на любом элементе) сложной схемы, содержащей несколько источников, равен алгебраической сумме частичных токов (напряжений), возникающих в этой ветви (на этом элементе) от независимого действия каждого источника в отдельности. Для упрощения доказательства теоремы выберем одну из наружных ветвей сложной схемы за номером 1, в которой действительный ток равен контурному:  $I_1 = I_{k1}$ . Составим для сложной схемы систему контурных уравнений  $[R_k] \times [I_k] = [E_k]$  и решим ее относительно тока  $I_1 = I_{k1}$  методом определителей (Крамера):

$$I_1 = I_{k1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = E_{11} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} = E_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + \dots \right) + E_2 \left( \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \dots \right) + \dots + E_n \left( \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} + \dots \right) =$$

$$= E_1 G_{11} + E_2 G_{12} + \dots + E_n G_{1n} = I_{11} + I_{12} + \dots + I_{1n}.$$

Здесь  $G_{11}$  – входная проводимость ветви 1,  $G_{12}, G_{13}, \dots, G_{1n}$  – взаимные проводимости между 1-й и остальными ветвями,  $I_{11} = E_1 G_{11}$  – частичный ток в ветви 1 от источника ЭДС  $E_1$ ,  $I_{12} = E_2 G_{12}$ , ...,  $I_{1n} = E_n G_{1n}$  – частичные токи в ветви 1 от источников ЭДС  $E_2, \dots, E_n$ .

Принцип наложения выполняется только для тех физических величин, которые описываются линейными алгебраическими уравнениями, например, для токов и напряжений в линейных цепях. Принцип наложения не выполняется для мощности, которая с током связана нелинейным уравнением  $P = I^2 \cdot R$ .

Принцип наложения лежит в основе метода расчета сложных цепей, получившего название метода наложения. Сущность этого метода состоит в том, что в сложной схеме с несколькими источниками последовательно рассчитываются частичные токи от каждого источника в отдельности. Расчет частичных токов выполняют, как правило, методом преобразования схемы. Действительные токи определяются путем алгебраического сложения частичных токов с учетом их направлений.

**Пример.** Задана схема цепи (рисунок 21) и параметры ее элементов:  $E_1 = 12$  В;  $E_2 = 9$  В;  $R_1 = R_2 = R_3 = 2$  Ом. Требуется определить токи в ветвях схемы методом наложения.

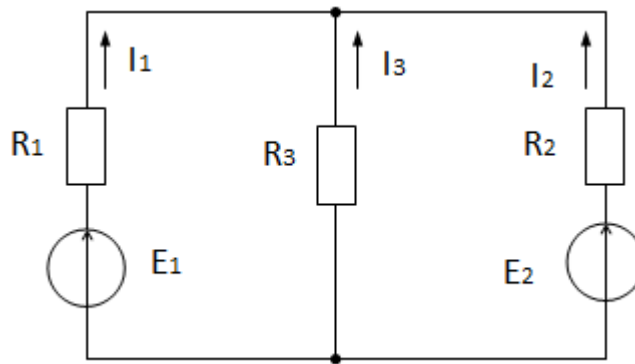


Рисунок 21

На рисунке 22а представлена схема цепи для определения частичных токов от источника ЭДС  $E_1$ , а на рисунке 22б – от источника ЭДС  $E_2$ .

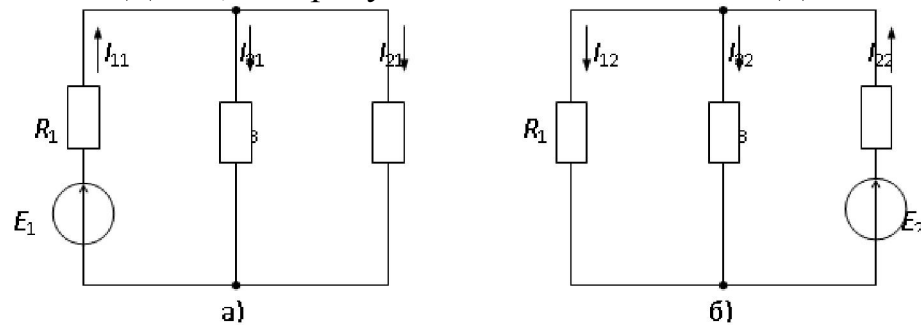


Рисунок 22

Частичные токи в схеме рисунка 22а от  $E_1$ :

$$R_{11} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 2 + \frac{2+2}{2} = 3 \text{ Ом}; \quad I_{11} = E_1/R_{11} = 12/3 = 4 \text{ А}; \quad I_{21} = I_{31} = 2 \text{ А}.$$

Частичные токи в схеме рисунка 22б от  $E_2$ :

$$R_{22} = R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 2 + \frac{2+2}{2} = 3 \text{ Ом}; \quad I_{22} = E_2/R_{22} = 9/3 = 3 \text{ А}; \quad I_{12} = I_{32} = 1,5 \text{ А}.$$

Действительные токи как алгебраические суммы частичных токов:

$$I_1 = I_{11} - I_{12} = 4 - 1,5 = 2,5 \text{ А}$$

$$I_2 = -I_{21} + I_{22} = -2 + 3 = 1 \text{ А}$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = 2 + 1,5 = 3,5 \text{ А}$$

## 2.8 Теорема о взаимности

Выделим из сложной схемы две произвольные ветви “ $m$ ” и “ $n$ ”, в одной из которых включен источник ЭДС  $E$  (в ветви “ $m$ ”). Теорема о взаимности гласит, что если источник ЭДС  $E$ , включенный в ветви “ $m$ ”, вызывает в ветви “ $n$ ” частичный ток  $I$ , то такой же источник ЭДС  $E$ , включенный в ветвь “ $n$ ”, вызовет в ветви “ $m$ ” такой же частичный ток  $I$  (рисунок 23).

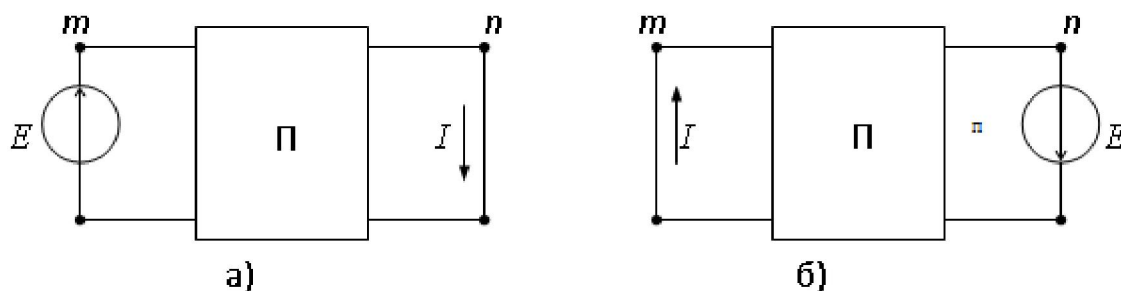


Рисунок 23

Доказательство теоремы о взаимности вытекает из принципа наложения. Частичные токи равны:

$$I = E \cdot G_{mn} - \text{для схемы рисунок23а, } I = E \cdot G_{nm} - \text{для схемы рисунок23б.}$$

Так как взаимные проводимости в линейной цепи равны ( $G_{mn} = G_{nm}$ ), то соответственно равны токи в обеих схемах.

## 2.9 Теорема о компенсации

**Формулировка теоремы:** любой пассивный элемент электрической схемы можно заменить а) идеальным источником напряжения с ЭДС, равной напряжению на этом элементе ( $E=U$ ) и направленной навстречу току, б) идеальным источником тока  $J$ , равным току в этом элементе ( $J=I$ ) и направленным согласно току  $I$ .

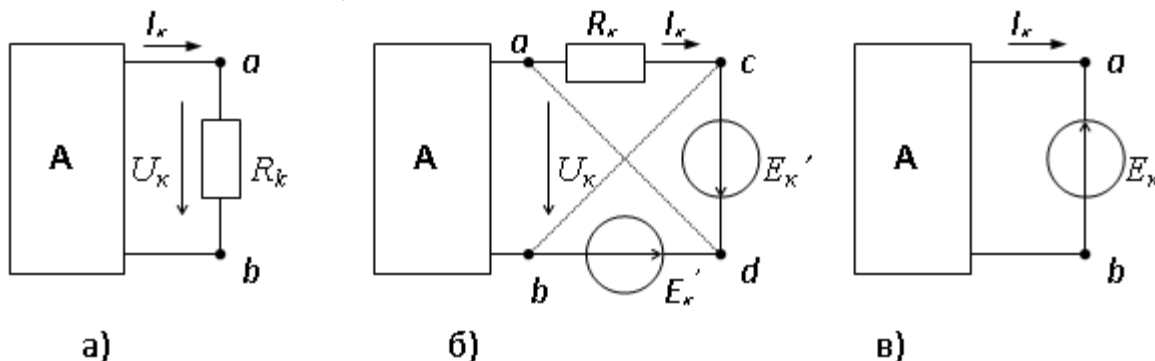


Рисунок 24

Выделим пассивный элемент  $R_k$  с током  $I_k$  и напряжением  $U_k$  из схемы цепи (рисунок24а). Для доказательства п. а) теоремы включим последовательно с элементом  $R_k$  навстречу друг другу два идеальных источника ЭДС  $E_k = E'_k = U_k$  (рисунок24б). Такое включение источников ЭДС не вызовет изменения режима сложной схемы, так как их действие взаимно компенсируются. Составим потенциальное уравнение между точками “а” и “d” :

$$\varphi_a - I_k R_k + E'_k = \varphi_d, \text{ откуда следует } \varphi_a - \varphi_d = U_{ad} = 0, \text{ или } \varphi_a = \varphi_d \text{ } \varphi_a = \varphi_d .$$

Точки “а” и “d”, как точки равного потенциала, можно закоротить и закороченный участок “а– d” из схемы удалить без нарушения ее режима. В

результате удаления закороченного участка схема получает вид рисунок 24в, в которой пассивный элемент  $R_k$  заменен идеальным источником ЭДС  $E_k = U_k$ .

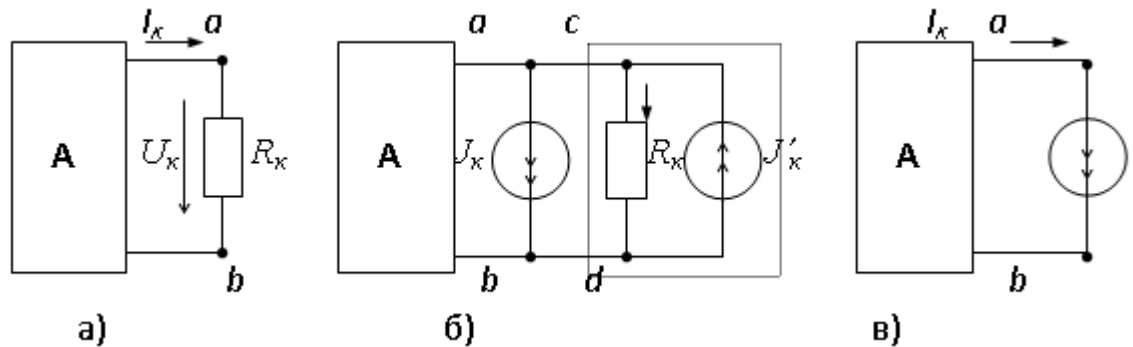


Рисунок 25

Для доказательства п. б) теоремы включим параллельно с элементом  $R_k$  два идеальных источника тока  $J_k = J'_k = I_k$ , направленные навстречу друг другу (рисунок 25б).

Такое включение источников тока  $J_k, J'_k$  не вызовет изменения режима сложной схемы, так как их действия взаимно компенсируются. С другой стороны, ток в ветви “a–c” равен нулю ( $I = I_k - J'_k = 0$ ) и эту ветвь можно отключить без нарушения режима остальной части схемы. В результате отключения схема получает вид рисунок 25в, в которой пассивный элемент  $R_k$  заменен идеальным источником тока  $J_k = I_k$ .

## 2.10 Теорема о линейных отношениях

**Формулировка теоремы:** если в произвольной  $k$ -ой ветви сложной схемы изменяется ЭДС источника  $E_k$  или сопротивление резистора  $R_k$ , то параметры режима в двух других ветвях (например, 1 и 2,  $I_1$  и  $I_2$ ,  $U_1$  и  $U_2$ ,  $U_1$  и  $I_2$ ,  $I_1$  и  $U_2$ ) изменяются так, что между ними сохраняется линейная зависимость ( $I_1 = a + bI_2$  и т.д.).

Пусть изменяется ЭДС  $E_k$ . В соответствии с принципом наложения ток каждой ветви равен сумме частичных токов от каждого источника в отдельности:

$$I_1 = E_1 G_{11} + E_2 G_{12} + \dots + E_k G_{1k} = A_1 + E_k G_{1k}$$

$$I_2 = E_1 G_{21} + E_2 G_{22} + \dots + E_k G_{2k} = A_2 + E_k G_{2k}$$

Исключим из уравнений переменную величину  $E_k$  путем подстановки:

$$I_1 = A_1 + \frac{I_2 - A_2}{G_{2k}} G_{1k} = (A_1 - A_2 \frac{G_{1k}}{G_{2k}}) + \frac{G_{1k}}{G_{2k}} I_2 = a + bI_2, \text{ что } \quad \text{требовалось}$$

доказать.

Если в схеме изменяется сопротивление резистора  $R_k = \text{var}$ , то для доказательства теоремы о линейных отношениях переменный резистор

$R_k = \text{var}$  следует заменить в соответствии с теоремой о компенсации переменной ЭДС  $E_k = I_k R_k = \text{var}$  и повторить доказательство.

## 2.11 Теорема об эквивалентном генераторе

**Формулировка теоремы:** по отношению к выводам выделенной ветви или отдельного элемента остальную часть сложной схемы можно заменить а) эквивалентным генератором напряжения с ЭДС  $E_э$ , равной напряжению холостого хода на выводах выделенной ветви или элемента ( $E_э = U_{xx}$ ) и с внутренним сопротивлением  $R_0$ , равным входному сопротивлению схемы со стороны выделенной ветви или элемента ( $R_0 = R_{вх}$ ); б) эквивалентным генератором тока с  $J_э$ , равным току короткого замыкания на выводах выделенной ветви или элемента ( $J_э = I_{кз}$ ), и с внутренней проводимостью  $G_0$ , равной входной проводимости схемы со стороны выделенной ветви или элемента ( $G_0 = G_{вх}$ ).

Для доказательства п. а) теоремы удалим из схемы рисунка 26а выделенную ветвь и между точками ее подключения измерим (рассчитаем) напряжение холостого хода  $U_{xxab} = \varphi_a - \varphi_b$  (рисунок 26б).

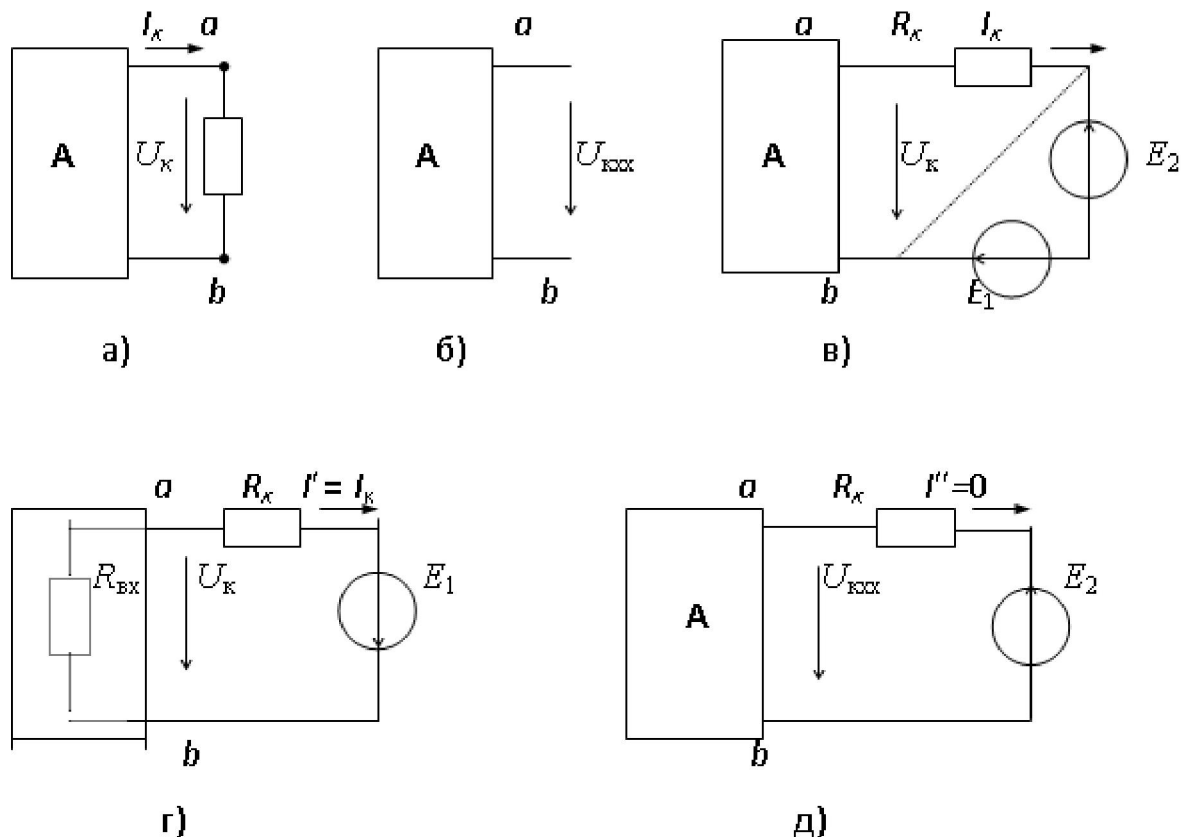


Рисунок 26

Включим последовательно с выделенной ветвью два направленные встречно источника ЭДС, равные напряжению холостого хода ( $E_1 = E_2 = U_{xx}$ ) (рисунок 26в). Такое включение дополнительных источников ЭДС не

изменит режим сложной схемы, так как их действие взаимно компенсируется.

Определим ток в выделенной ветви по принципу наложения, как алгебраическую сумму из двух частичных токов: а) тока  $I'$ , возникающего от независимого действия ЭДС  $E_1$  (рисунок 26г); б) тока  $I''$ , возникающего от совместного действия ЭДС  $E_2$  и всех источников сложной схемы (рисунок 26д).

Частичный ток в схеме рисунка 26г по закону Ома равен:

$$I' = \frac{E_1}{R + R_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{хх}}}{R + R_{\text{вх}}},$$

где  $R_{\text{вх}}$  – входное сопротивление схемы со стороны выделенной ветви.

Частичный ток в схеме рисунка 26д равен нулю  $I''=0$ , так как  $E_2=U_{\text{хх}}$  обеспечивает условия режима холостого хода ветви.

Результирующий ток в выделенной ветви равен:

$$I_k = I' + I'' = I' = \frac{E_1}{R_k + R_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{хх}}}{R_k + R_{\text{вх}}}.$$

Полученному уравнению соответствует эквивалентная схемы замещения рисунка 27а, где остальная часть схемы заменена эквивалентным генератором напряжения с параметрами  $E_{\text{э}}=U_{\text{хх}ab}$ ,  $R_0 = R_{\text{вх}ab}$ , что и требовалось доказать.

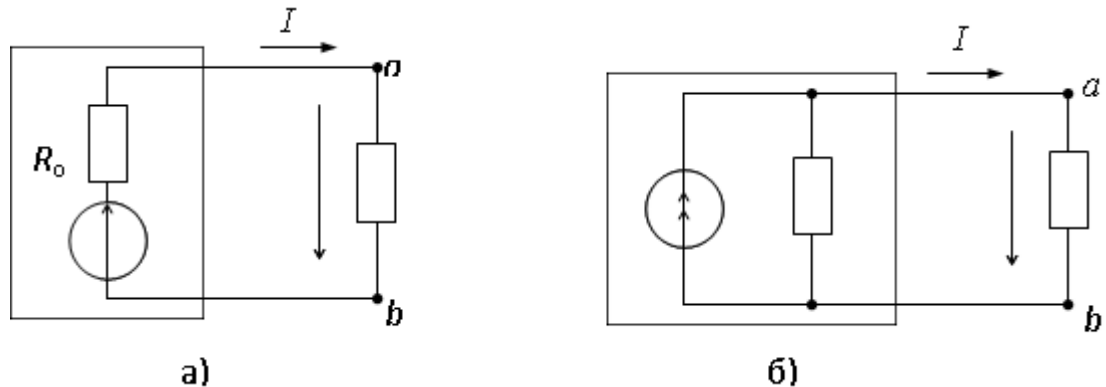


Рисунок 27

Генератор напряжения ( $E_{\text{э}}, R_0$ ) может быть заменен эквивалентным генератором тока ( $J_{\text{э}}, G_0$ ) (рис. 27б) исходя из условия эквивалентности:

$$J_{\text{э}} = \frac{E_{\text{э}}}{R_0}; \quad G_0 = \frac{1}{R_0}.$$

Параметры эквивалентного генератора тока могут быть определены (рассчитаны или измерены) независимым путем, как  $J_{\text{э}}=I_{\text{кз}ab}$ ,  $G_0=G_{\text{вх}ab}$ , где  $I_{\text{кз}ab}$  – ток короткого замыкания в выделенной ветви.

Метод расчета тока в выделенной ветви сложной схемы, основанный на применении теоремы об эквивалентном генераторе, получил название метода эквивалентного генератора напряжения (тока) или метода холостого

хода и короткого замыкания (х.х. и к.з.). Последовательность (алгоритм) расчета выглядит так.

1) Удаляют из сложной схемы выделенную ветвь, выполняют расчет оставшейся части сложной схемы любым методом и определяют напряжение холостого хода  $U_{xxab} = \varphi_a - \varphi_b$  между точками подключения выделенной ветви.

2) Удаляют из сложной схемы выделенную ветвь, закорачивают в схеме точки подключения выделенной ветви, выполняют расчет оставшейся части сложной схемы любым методом и определяют ток короткого замыкания  $I_{кзab}$  в закороченном участке между точками подключения выделенной ветви.

3) Удаляют из схемы выделенную ветвь, в оставшейся части схемы удаляют все источники (источники ЭДС  $E$  закорачивают, а ветви с источниками тока  $J$  удаляют из схемы), методом преобразования выполняют свертку пассивной схемы относительно точек подключения выделенной ветви и таким образом определяют  $R_{вхab}$ .

4) Составляют одну из эквивалентных схем замещения с генератором напряжения (рисунок 27а) или с генератором тока (рисунок 27б).

5) Выполняют расчет эквивалентной схемы (рисунок 27а или рисунок 27б) и находят искомый ток, например:

$$I = \frac{E_{\mathcal{E}}}{R_0 + R_k} - \text{по закону Ома для схемы рисунок 27а;}$$

$$I = \frac{U_{ab}}{R_k} = \frac{1}{R_k} \cdot \frac{J_{\mathcal{E}}}{1/R_0 + 1/R_k} - \text{по методу двух узлов для схемы рисунок 27б.}$$

Так как между тремя параметрами эквивалентного генератора справедливо соотношение  $E_{\mathcal{E}} = J_{\mathcal{E}} \cdot R_0$ , то для их определения достаточно рассчитать любые два из трех параметров согласно п.п. 1), 2), 3), а третий параметр определить из приведенного соотношения.

**Пример.** В схеме (рисунок 28) с заданными параметрами элементов ( $E_1=100$  В;  $E_2=20$  В;  $E_3=30$  В,  $E_4=10$  В;  $R_1=R_2=40$  Ом;  $R_3=R_4=20$  Ом;  $R_5=R_6=10$  Ом) определить ток в выделенной ветви  $I_6$  методом эквивалентного генератора.

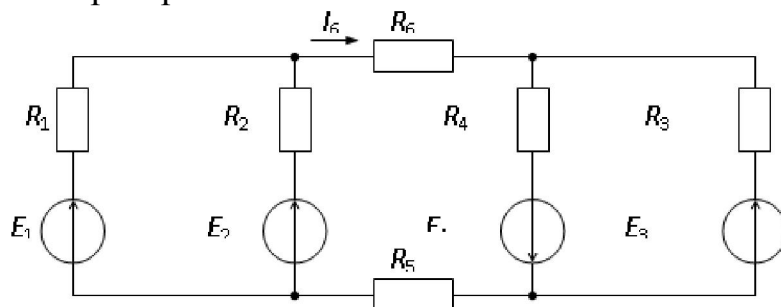


Рисунок 28

Решение задачи выполняется поэтапно.

1) Определение  $U_{xx}=E_9$  в схеме рисунок 29.

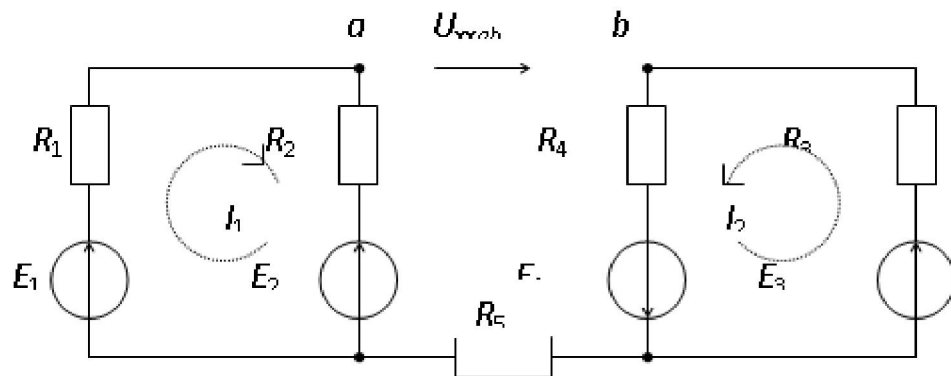


Рисунок 29

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 - 20}{40 + 40} = 1 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{E_3 + E_4}{R_3 + R_4} = \frac{30 + 10}{20 + 20} = 1 \text{ A};$$

$$\varphi_a - I_1 R_2 - E_2 + 0 \cdot R_5 - E_4 + I_2 R_4 = \varphi_b; \Rightarrow$$

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = I_1 R_2 + E_2 + E_4 - I_2 R_4 = 40 + 20 + 10 - 20 = 50 \text{ В}$$

2) Определение  $R_{вх}=R_0$  в схеме рисунка 30.

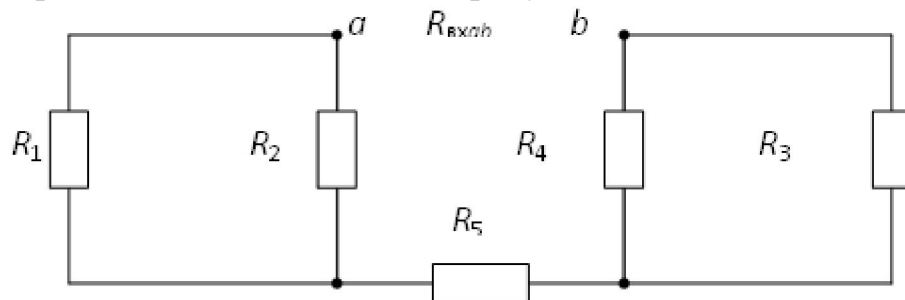


Рисунок 30

$$R_{вх} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_5 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{40 \cdot 40}{40 + 40} + 10 + \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 40 \text{ Ом}$$

3) Расчет эквивалентной схемы рисунок 31 и определение искомого тока  $I_6$ .

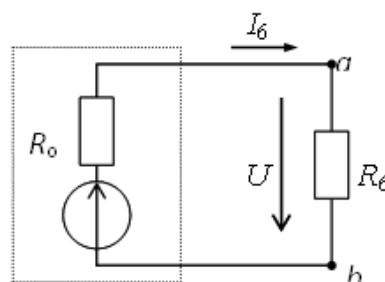


Рисунок 31

$$I = \frac{E_{\mathcal{E}}}{R_6 + R_0} = \frac{50}{10 + 40} = 1 \text{ A}$$

### 3 Цепи синусоидального тока

#### 3.1 Переменный ток (напряжение) и характеризующие его величины

Переменным называется ток  $i(t)$  [напряжение  $u(t)$ ], периодически изменяющийся во времени по произвольному закону. В электроэнергетике понятие "переменный" употребляют в более узком смысле, а именно: под переменным понимают ток (напряжение), изменяющийся во времени по синусоидальному закону:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

Графические диаграммы этих функций имеют вид (рисунок 32):

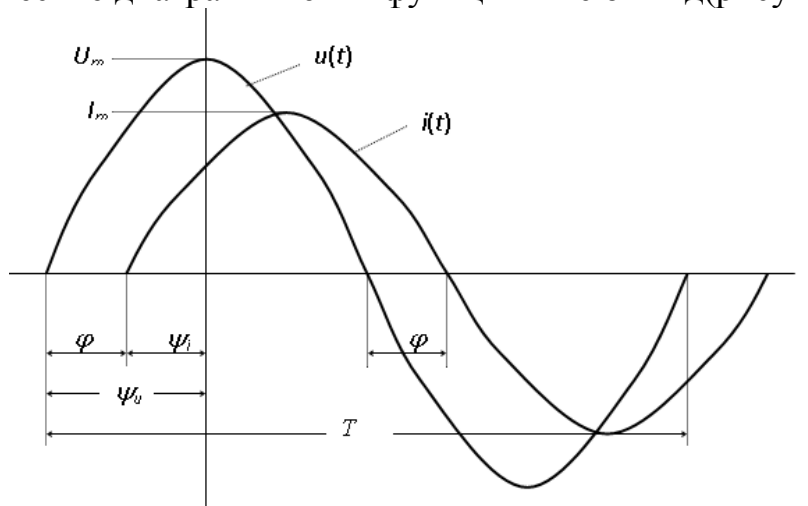


Рисунок 32

Время, за которое происходит одно полное колебание, называется периодом и обозначается буквой  $T$ . Число полных колебаний (периодов) в единицу времени называется частотой  $f$ :

$$f = \frac{1}{T} [\text{Гц}]$$

Из математики известно, что синусоидальная функция времени может быть описана вращающимся вектором со скоростью вращения  $\omega$ . В технике эта величина получила название угловой частоты:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} [\text{с}^{-1}] \text{ или } [\text{рад/с}]$$

В выражениях функций  $i(t)$  и  $u(t)$  приняты обозначения:

$u(t)$ ,  $i(t)$  или  $u$ ,  $i$  – мгновенные значения функций, т.е. их значения в произвольно выбранный момент времени;

$U_m$ ,  $I_m$  – амплитудные (максимальные) значения функций;

$(\omega t + \psi)$  – фаза, определяющая момент времени;

$\psi_u$ ,  $\psi_i$  – начальные фазы функций, определяющие их значения в момент  $t=0$ , зависят от выбора начала отсчета времени;

$\varphi = \psi_u - \psi_i$  – угол сдвига фаз (разность начальных фаз) между напряжением и током, не зависит от выбора начала отсчета времени.

Синусоидальная форма для функций токов и напряжений в электроэнергетике утверждена в качестве стандарта и является одним из показателей качества электроэнергии как товара.

Из физических законов следует, что при протекании синусоидального тока  $i = I_m \sin \omega t$  через любой линейный элемент электрической цепи напряжение на его зажимах также будет синусоидальным, и наоборот, при синусоидальном напряжении ток также будет иметь синусоидальную форму.

Из закона Ома для резистора  $R$  следует:

$$u_R = Ri = RI_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t.$$

Из закона электромагнитной индукции для катушки  $L$  следует:

$$u_L = -e = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = U_m \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Из закона сохранения заряда для конденсатора  $C$  следует:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = U_m \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Таким образом, в цепи переменного тока любой сложности напряжения и токи на всех участках будут изменяться по синусоидальному закону при условии, что источники энергии обеспечивают синусоидальную форму напряжений на их выводах.

Диапазон частот токов и напряжений, применяемых в различных отраслях современной техники, очень велик: от  $10^{-1}$  Гц до  $10^9$  Гц. В электроэнергетике в качестве стандарта частоты в Европе принята частота  $f=50$  Гц ( $\omega=2\pi f=314$  с<sup>-1</sup>), а в США и Канаде  $f=60$  Гц ( $\omega=377$  с<sup>-1</sup>), в других странах возможны оба варианта или один из них.

Частота  $f=50$  Гц принята в качестве стандарта исторически на заре развития электроэнергетики и уже не соответствует сегодняшнему уровню развития техники. Оптимальной на сегодня была бы частота в диапазоне 150 – 200 Гц. Однако переход на оптимальную частоту связан с большими техническими сложностями и в ближайшее время не может быть осуществлен.

### 3.2 Среднее и действующее значения переменного тока и напряжения

Среднее значение  $F_{cp}$  произвольной функции времени  $f(t)$  за интервал времени  $T$  определяется по формуле :

$$F_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt$$

Численно среднее значение  $F_{cp}$  равно высоте прямоугольника, равновеликого по площади фигуре, ограниченной кривой  $f(t)$ , осью  $t$  и пределами интегрирования  $0 - T$  (рисунок 33).

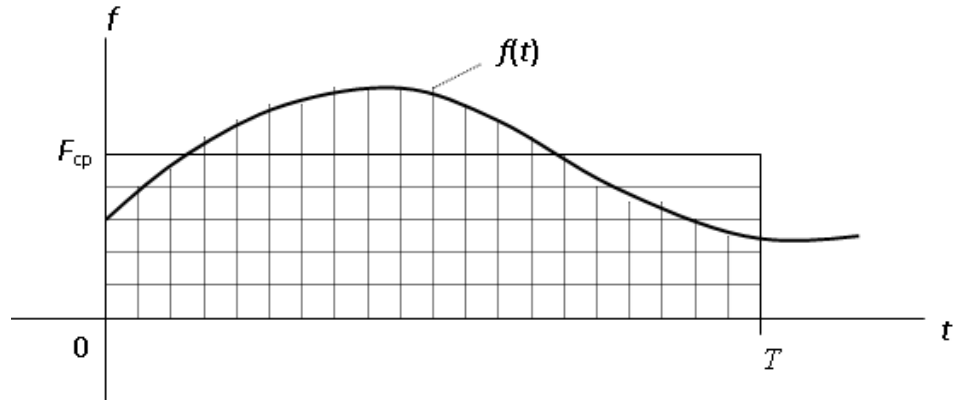


Рисунок 33

Для синусоидальной функции среднее значение за полный период  $T$  (или за целое число полных периодов) равно нулю, так как площади положительной и отрицательной полувольт этой функции равны. Для переменного синусоидального тока (напряжения) среднее значение определяют за половину периода ( $T/2$ ) между двумя нулевыми значениями (рисунок 34) :

$$I_{cp} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \, dt = \frac{2I_m}{\omega T} \int_0^{\pi} \sin \omega t \cdot d(\omega t) = \frac{2I_m}{\frac{2\pi}{T} T} \left| -\cos \omega t \right|_0^{\pi} = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0,637 I_m$$

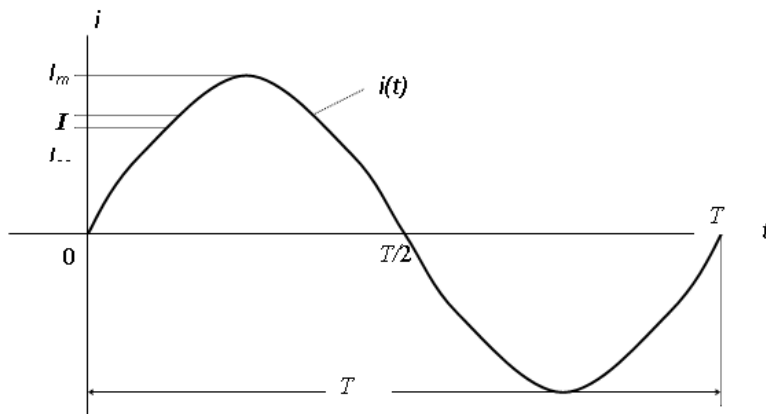


Рисунок 34

Аналогично получим для напряжения:  $U_{cp} = \frac{2U_m}{\pi} \approx 0,637 U_m$

Действующее значение переменного тока (напряжения) определяется как среднеквадратичное значение функции за период :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \alpha t \cdot dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha t \right) dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \cdot \frac{1}{2} T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m$$

Аналогично получим для напряжения:  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m$

Количество энергии, выделяемое переменным током в резисторе  $R$  за время  $T$ , по закону Джоуля будет равно  $W = \int_0^T i^2 R dt = I^2 R T$ , а активная

мощность соответственно  $P = \frac{W}{T} = I^2 R$ .

Таким образом, параметры электрической энергии на переменном токе (количество энергии, мощность) характеризуются действующими значениями напряжения  $U$  и тока  $I$ . По этой причине в электроэнергетике принято все теоретические расчеты и экспериментальные измерения выполнять для действующих значений токов и напряжений. В радиотехнике и в технике связи, наоборот, оперируют максимальными значениями этих функций.

Приведенные выше формулы для энергии и мощности переменного тока полностью совпадают с аналогичными формулами для постоянного тока. На этом основании можно утверждать, что энергетически постоянному току эквивалентно действующее значение переменного тока.

Синусоидальная функция времени, как периодическая функция, характеризуется следующими коэффициентами :

$$\kappa_a = \frac{I_m}{I} = \frac{U_m}{U} = \sqrt{2} \approx 1,41 - \text{коэффициент амплитуды,}$$

$$\kappa_f = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{U}{U_{cp}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11 - \text{коэффициент формы.}$$

### 3.3 Векторные диаграммы переменных токов и напряжений

Из курса математики известно, что любую синусоидальную функцию времени, например  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha)$ , можно изобразить вращающимся вектором (рисунок 35) при соблюдении следующих условий :

- а) длина вектора в масштабе равна амплитуде функции  $I_m$ ;
- б) начальное положение вектора при  $t = 0$  определяется начальной фазой  $\alpha$ ;
- в) вектор равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$ , равной угловой частоте функции.

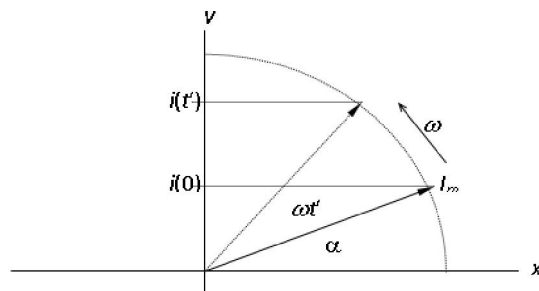
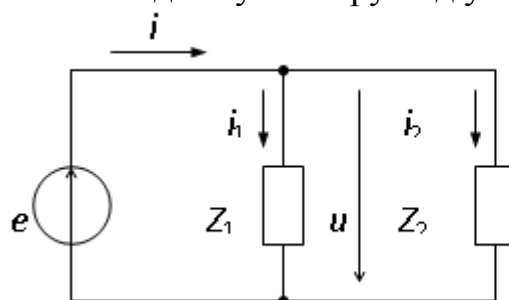


Рисунок 35

При соблюдении названных условий проекция вращающегося вектора на вертикальную ось  $y$  в системе координат  $x-y$  в любой момент времени  $t'$  равна мгновенному значению функции  $i(t')$ , следовательно  $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$

Рассмотрим процессы в схеме электрической цепи рисунка 36. Изобразим синусоидальные функции токов и напряжений вращающимися векторами для произвольного момента времени, например  $t = 0$  (рисунок 37а). При рассмотрении установившегося режима в схеме мгновенные значения функций не представляют интереса, поэтому момент времени, для которого строится векторная диаграмма, может быть выбран произвольно. Целесообразно один из векторов принять начальным или исходным и совместить его на диаграмме с одной из осей координат (вектор  $E$  на рисунке 37б совмещен с осью  $y$ ), при этом остальные векторы располагают по отношению к исходному вектору под углами, равными их сдвигам фаз.



$$u = e = E_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$$

Рисунок 36

Так как на практике интерес представляют действующие значения токов и напряжений, то на векторных диаграммах длины векторов принимают равными в выбранных масштабах их действующим значениям (рисунок 37б).

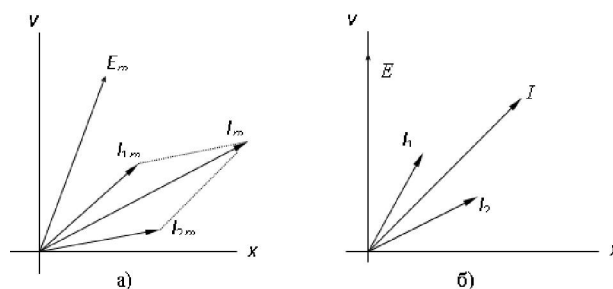


Рисунок 37

Совокупность векторов токов и напряжений, характеризующих процессы в цепи переменного тока, построенных в выбранных масштабах и с соблюдением правильной их ориентации друг относительно друга, называется векторной диаграммой.

### 3.4 Теоретические основы комплексного метода расчета цепей переменного тока

Из курса математики известно, что комплексное число  $\underline{Z}$  может быть представлено в следующих трех формах: показательной, тригонометрической и алгебраической:

$$\underline{Z} = \underset{\text{показательная}}{Z} e^{j\alpha} = \underset{\text{тригонометрическая}}{Z} (\cos \alpha + j \sin \alpha) = \underset{\text{алгебраическая}}{a + jb}.$$

В основе перехода от одной формы комплексного числа к другой лежит известная из математики формула Эйлера :

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

Здесь обозначены:

$j = \sqrt{-1}$  – мнимое единичное число,

$Z$  – модуль комплексного числа,

$\alpha$  – аргумент комплексного числа,

$a$  – вещественная часть комплексного числа,

$jb$  – мнимая часть комплексного числа.

Соотношения между коэффициентами различных форм комплексного числа вытекают из формулы Эйлера :

$$a = Z \cos \alpha; b = Z \sin \alpha; Z = \sqrt{a^2 + b^2}; \alpha = \arctg \frac{b}{a}.$$

Приведем наиболее часто встречающиеся численные соотношения  $e^{j0} = 1; e^{\pm j180^\circ} = -1; e^{j90^\circ} = +j; e^{-j90^\circ} = -j; 1/j = -j; j^2 = -1; j^3 = -j$ ; ит. д.

Комплексное число  $\underline{Z} = Ze^{j\alpha} = a + jb$  может быть изображено вектором на комплексной плоскости (рисунок 38), при этом алгебраической форме числа  $\underline{Z} = a + jb$  соответствует декартова система координат ( $a \rightarrow x; b \rightarrow y$ ), а показательной форме числа  $\underline{Z} = Ze^{j\alpha}$  – полярная система координат ( $Z \rightarrow \rho; \alpha \rightarrow \theta$ ).

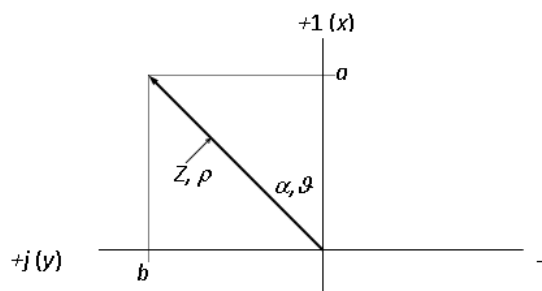


Рисунок 38

Можно утверждать, что каждой точке (вектору) на комплексной плоскости соответствует определенное комплексное число, и наоборот, каждому комплексному числу соответствует определенная точка (вектор) на комплексной плоскости.

Известно, что синусоидальную функцию можно изобразить вектором, а вектор в свою очередь можно представить комплексным числом. Таким образом, синусоидальные токи и напряжения, характеризующие установившийся режим цепи переменного тока, могут быть представлены комплексными числами :

$$\Leftrightarrow \underline{I} = I_m e^{j\psi_i} \quad \text{комплексная амплитуда,}$$

$$e = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$\Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j\psi_i}$  – комплексное действующее значение. Здесь  $\Leftrightarrow$  – знак соответствия.

При расчете цепей переменного тока возникает необходимость выполнения различного рода математических операций с синусоидальными функциями. При замене синусоидальных функций (оригиналов) комплексными числами (изображениями) соответствующие математические операции выполняются с комплексными числами.

Сложение (вычитание) комплексных чисел производится в алгебраической форме

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) = a + jb = Z e^{j\alpha}$$

Умножение комплексных чисел может выполняться, как в алгебраической, так и в показательной формах:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) = a + jb = Z e^{j\alpha}$$

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 = Z_1 e^{j\alpha_1} \cdot Z_2 e^{j\alpha_2} = Z_1 Z_2 \cdot e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} = Z e^{j\alpha} = a + jb$$

Деление комплексных чисел может выполняться как в алгебраической, так и в показательной формах:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = a + jb = Z e^{j\alpha} \\ \underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1 e^{j\alpha_1}}{Z_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} = Z e^{j\alpha} = a + jb \end{aligned}$$

Возведение в степень (извлечение корня) комплексного числа выполняется только в показательной форме:

$$\underline{Z} = (M \cdot e^{j\psi})^n = M^n \cdot e^{jn\psi} = Z e^{j\alpha}$$

$$\underline{Z} = \sqrt{M \cdot e^{j\psi}} = \sqrt{M} \cdot e^{j\frac{\psi}{2}} = Z e^{j\alpha}$$

Установим порядок дифференцирования и интегрирования синусоидальных функций в комплексной форме. Пусть задана некоторая функция тока и ее комплексное изображение:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j\psi}$$

Производная и интеграл от этой функции их комплексные изображения будут равны:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= I_m \omega \cdot \cos(\omega t + \psi) = I_m \omega \cdot \sin(\omega t + \psi + 90^\circ) \Leftrightarrow I \omega e^{j(\psi+90^\circ)} = I \omega e^{j\psi} e^{j90^\circ} = j\omega \cdot \underline{I}; \\ \int i \cdot dt &= -\frac{I_m}{\omega} \cdot \cos(\omega t + \psi) = \frac{I_m}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \psi - 90^\circ) \Leftrightarrow \frac{I}{\omega} e^{j(\psi-90^\circ)} = \frac{I}{\omega} e^{j\psi} e^{-j90^\circ} = \frac{\underline{I}}{j\omega}. \end{aligned}$$

Таким образом, дифференцированию синусоидальной функции времени соответствует в комплексной форме умножение ее комплексного изображения на множитель  $j\omega$ , а интегрированию – соответственно деление на тот же коэффициент:

$$\frac{di}{dt} \Leftrightarrow j\omega \underline{I}; \quad \int i dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \underline{I}.$$

Замена математических операций 2-го рода (дифференцирование, интегрирование) операциями 1-го рода (умножение, деление) существенно упрощает расчет цепей переменного тока в комплексной форме.

Современные инженерные калькуляторы в режиме «complx» позволяют выполнять все действия с комплексными числами непосредственно так же, как с обычными числами. При этом следует принять во внимание, что калькулятор выполняет действия над комплексными числами только в алгебраической форме ( $\underline{Z} = a + jb$ ) и результаты расчета выдает также в алгебраической форме. Если исходные комплексные числа заданы в показательной форме ( $\underline{Z} = Z e^{j\alpha}$ ), то после их ввода необходимо выполнить операцию преобразования их в алгебраическую форму.

Комплексный метод расчета цепей переменного тока был разработан в 1910-1912гг. американским инженером Штейнметцом и сыграл большую роль в развитии теории электрических цепей переменного тока.

### 3.5 Мощность переменного тока

В сложной электрической цепи, состоящей из разнородных элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , одновременно происходят следующие физические процессы:

а) необратимый процесс преобразования электрической энергии в другие виды (тепловую, механическую и др.), который называется активным;

б) обратимый процесс колебания энергии между переменным электрическим полем конденсаторов ( $W_C = \frac{C u^2}{2}$ ), магнитным полем кату-

шек ( $W_M = \frac{L i^2}{2}$ ) и источником энергии, который называется реактивным.

Процесс преобразования и процесс колебания энергии взаимно накладываются друг на друга, создавая в цепи единый сложный энергетический процесс.

Пусть электрическая цепь носит активно-индуктивный характер и может быть представлена простой схемой, состоящей из источника ЭДС  $e$  и пассивных элементов  $R$  и  $L$ , включенных последовательно (рисунок 39):

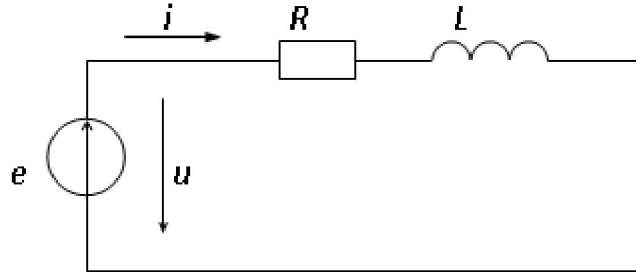


Рисунок 39

Напряжение и ток на входе схемы как функции времени и их комплексные изображения будут равны:

$$u = U_m \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j0};$$

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{-j\varphi}.$$

Мгновенная мощность, как функция времени, состоит из двух слагаемых:

$$p(t) = u \cdot i = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi + \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi) = p_1(t) + p_2(t).$$

Первое слагаемое  $\left[ p_1(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi > 0 \right]$  характеризует процесс преобразования электрической энергии в другие виды (активный процесс).

Второе слагаемое  $\left[ p_2(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi) \right]$  изменяется по периодическому закону с частотой  $2\omega$  характеризует процесс обмена энергией между магнитным полем приемника и источником энергии (реактивный процесс).

Количество энергии, которое преобразуется в приемнике в другие виды в единицу времени, называется активной мощностью  $P$ . Математически активная мощность может быть получена как среднее значение мгновенной мощности за период:

$$\begin{aligned} P = P_{cp} &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi \cdot dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t - \varphi) \cdot dt = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi. \end{aligned}$$

Реактивная мощность  $Q$  характеризует интенсивность обмена энергией между магнитным полем приемника и источником и определяется по формуле:

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 \omega L = \omega \cdot \frac{LI_m^2}{2} = W_{\max} \cdot \omega.$$

Реактивная мощность индуктивного характера ( $\varphi > 0$ ) положительна, а емкостного характера ( $\varphi < 0$ ) отрицательна. Противоположность знаков указывает на тот факт, что колебания энергии в разнородных элементах совершаются в противофазе.

В технике используется понятие полной мощности  $S$ , которая не имеет физического смысла и определяется по формуле:

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Мощности  $S$ ,  $P$ ,  $Q$  образуют прямоугольный треугольник, который называется треугольником мощностей (рисунок 40).

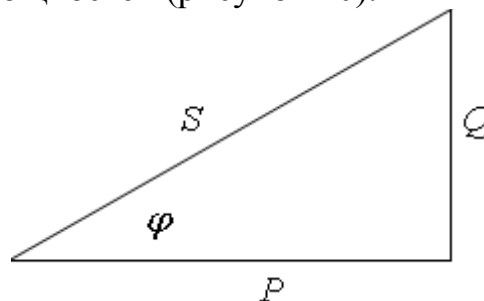


Рисунок 40

Хотя физическая размерность мощностей  $S$ ,  $P$ ,  $Q$  одинакова, а именно  $[ВА]$ , для каждой из них на практике применяется своя единица измерения: для активной мощности  $P$  – ватт  $[Вт]$ , для реактивной мощности  $Q$  – вольтампер реактивный  $[вар]$ , для полной мощности  $S$  – вольтампер  $[ВА]$ .

В соответствии с законом сохранения энергии в цепи переменного тока должны балансироваться независимо друг от друга активные и реактивные мощности приемников и источников энергии:  $\sum P_{ист} = \sum P_{пр}$  и  $\sum Q_{ист} = \sum Q_{пр}$ . Баланс для полных мощностей не соблюдается.

При расчете цепей переменного тока комплексным методом мощности  $S$ ,  $P$ ,  $Q$  представляют в комплексной форме:

$$\underline{S} = P + jQ = I^2 R + jI^2 X = I^2 (R + jX) = \underline{I}^* \underline{I} \cdot Z = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

где  $\underline{I}^*$  – сопряженный комплекс тока  $\underline{I}$ .

Таким образом

$S = \text{Mod}[\underline{S}] = \text{Mod}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*]$  – модуль комплексной мощности;

$P = \text{Re}[\underline{S}] = \text{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*]$  – вещественная часть;

$Q = \text{Im}[\underline{S}] = \text{Im}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*]$  – мнимая часть.

### 3.6 Переменные ток в однородных идеальных элементах

Существует три типа идеальных схемных элементов: резистор  $R$ , катушка  $L$  и конденсатор  $C$ . Рассмотрим процессы в цепи с каждым из названных элементов в отдельности.

а) Цепь с идеальным резистором  $R$ .

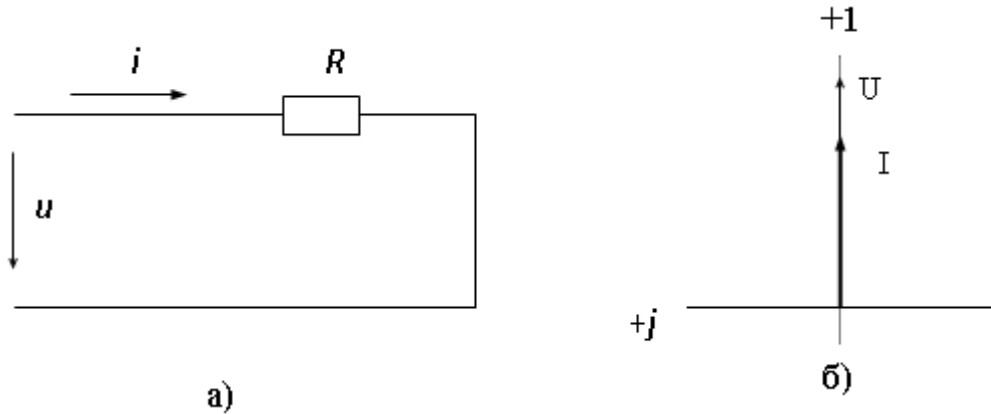


Рисунок 41

Пусть к цепи с резистором  $R$  (рисунок 41а) приложено переменное напряжение:

$$u = U_m \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j0}.$$

Ток и напряжение на зажимах резистора связаны между собой физическим законом Ома, т. е.

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j0},$$

где  $I_m = \frac{U_m}{R}$ ,  $I = \frac{U}{R}$  – уравнения закона Ома для амплитудных и действующих значений функций.

Угол сдвига фаз между напряжением и током  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 0 = 0$ , следовательно, в цепи с резистором  $R$  ток и напряжение совпадают по фазе.

Комплексное сопротивление резистора является чисто вещественным:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j0}}{I e^{j0}} = \text{Re}^{j0} = R + j0.$$

Мгновенная мощность в цепи с резистором  $R$  всегда положительна:

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t \geq 0$$

Это означает, что в цепи с резистором  $R$  протекает только процесс преобразования электрической энергии в другие виды (активный процесс). По этой причине сопротивление резистора  $R$  на переменном токе называется активным.

Графические диаграммы функций времени  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$  представлены на рисунке 42, а векторная диаграмма напряжения и тока – на рисунке 41б.

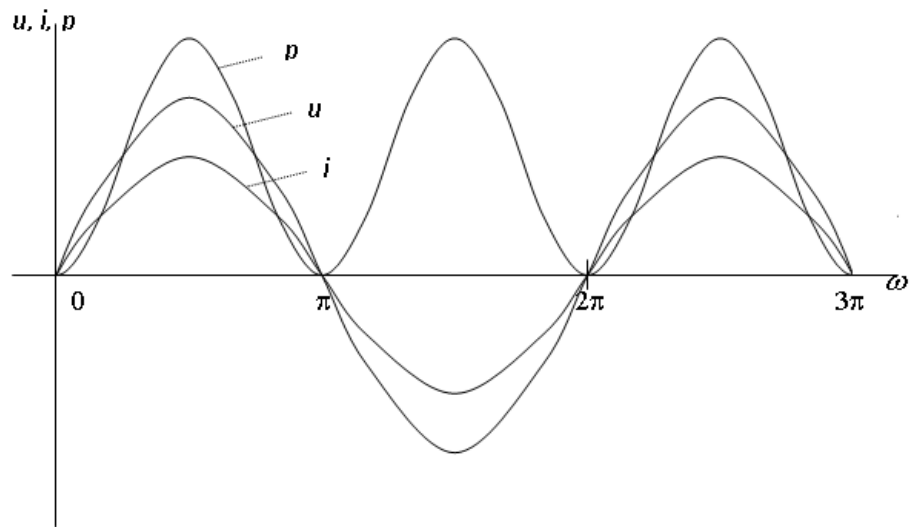


Рисунок 42

**б) Цепь с идеальной катушкой  $L$**

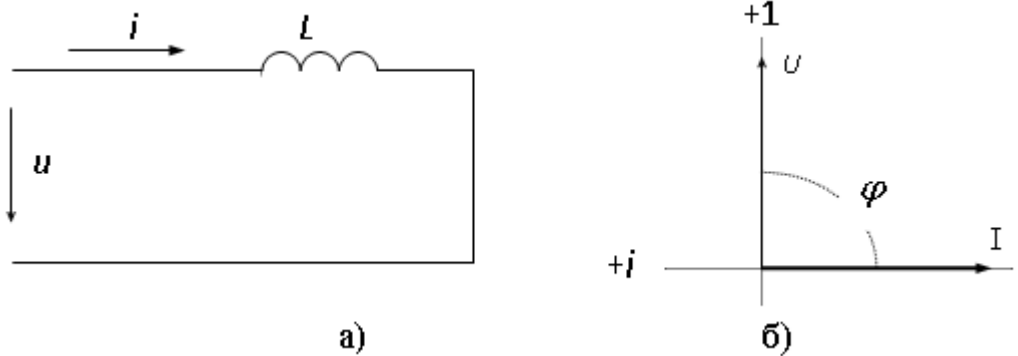


Рисунок 43

Пусть к цепи с идеальной катушкой  $L$  (рисунок 43а) приложено переменное напряжение:

$$u = U_m \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j0}$$

Ток и напряжение на зажимах катушки связаны между собой физическим законом электромагнитной индукции  $u = -e = L \frac{di}{dt}$ , откуда следует:

$$i = \frac{1}{L} \int u \cdot dt = \frac{U_m}{L} \int \sin \omega t \cdot dt = \frac{U_m}{\omega L} (-\cos \omega t) = I_m \sin(\omega t - 90^\circ) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{-j90^\circ},$$

где  $\omega L = X_L$  – индуктивное реактивное сопротивление катушки,

Уравнения закона Ома для амплитудных и действующих значений функций:  $I_m = \frac{U_m}{X_L}, I = \frac{U}{X_L}$

Угол сдвига фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - (-90^\circ) = 90^\circ$ , т.е. в цепи с катушкой  $L$  ток отстает от напряжения (напряжение опережает ток) на угол  $90^\circ$ .

Комплексное сопротивление катушки является чисто мнимым и положительным:

$$\underline{Z}_L = \frac{U}{I} = \frac{Ue^{j0}}{Ie^{-j90}} = X_L e^{j90} = 0 + jX_L.$$

Мгновенная мощность цепи изменяется по синусоидальному закону с частотой  $2\omega$ :

$$p = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - 90^\circ) = \frac{U_m I_m}{2} \cos 90^\circ - \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t - 90^\circ) = -\frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t$$

.Это означает, что в цепи с катушкой  $L$  происходит только периодический

процесс обмена энергией между магнитным полем катушки ( $W_m = \frac{Li^2}{2}$ ) и

источником (реактивный процесс). По этой причине сопротивление катушки переменному току  $X_L = \omega L$  называется реактивным.

Графические диаграммы функций времени  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$  представлены на рисунке 44, а векторная диаграмма напряжения и тока – на рисунке 43б.

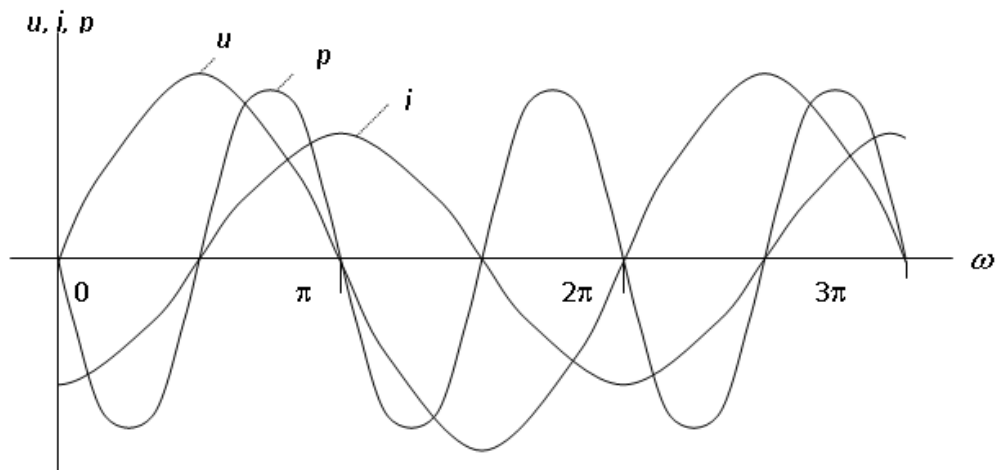


Рисунок 44

в). Цепь с идеальным конденсатором  $C$ .

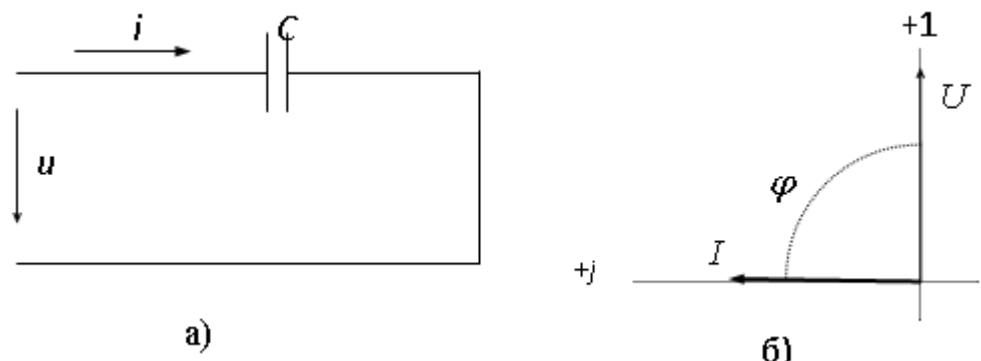


Рисунок 45

Пусть к цепи с идеальным конденсатором  $C$  (рисунок 45а) приложено переменное напряжение

$$u = U_m \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j0}$$

Ток и напряжение на зажимах конденсатора связаны между собой физическим законом сохранения заряда:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = U_m C \frac{d(\sin \omega t)}{dt} = \frac{U_m}{1/\omega C} \cos \omega t = I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j90^\circ},$$

где  $\frac{1}{\omega C} = X_C$  – емкостное реактивное сопротивление [Ом].

Уравнения закона Ома для амплитудных и действующих значений функций:  $I_m = \frac{U_m}{X_C}$ ,  $I = \frac{U}{X_C}$ .

Угол сдвига фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 90^\circ = -90^\circ$ , т. е. в цепи с конденсатором  $C$  ток опережает напряжение (напряжение отстает от тока) на угол  $90^\circ$ .

Комплексное сопротивление конденсатора является чисто мнимым и отрицательным:

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j0}}{I e^{j90^\circ}} = X_C e^{-j90^\circ} = 0 - jX_C.$$

Мгновенная мощность цепи изменяется по синусоидальному закону с частотой  $2\omega$ .

$$p = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(-90^\circ) - \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + 90^\circ) = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t$$

Это означает, что в цепи с конденсатором  $C$  происходит только периодический процесс обмена энергией между электрическим полем конденсатора ( $W_\varepsilon = \frac{Cu^2}{2}$ ) и источником (реактивный процесс). По этой

причине сопротивление конденсатора переменному току  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  называется реактивным.

Графические диаграммы функций времени  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$  представлены на рисунке 46, а векторная диаграмма напряжения и тока – на рисунке 45б.

$u, i, p$

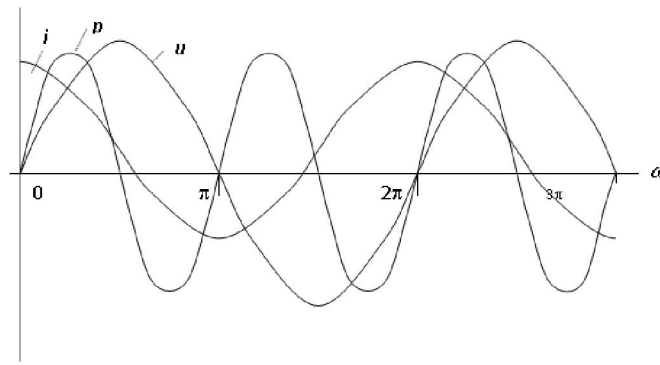


Рисунок 46

### 3.7 Электрическая цепь с последовательным соединением элементов $R$ , $L$ и $C$

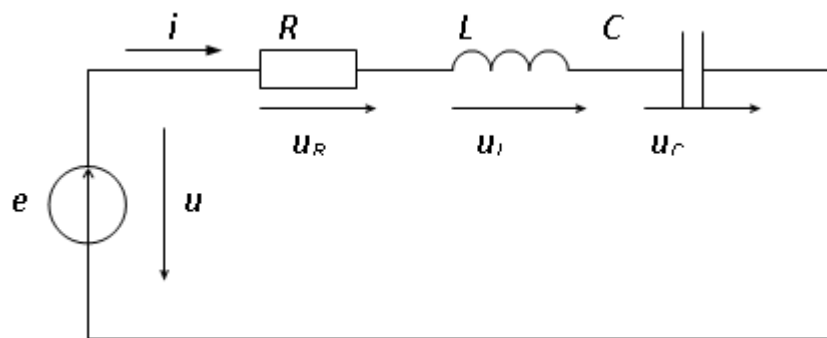


Рисунок 47

Пусть в заданной схеме с последовательным соединением элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  (рисунок 47) протекает переменный ток

$$i = I_m \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j0}.$$

По 2-му закону Кирхгофа для мгновенных значений функций получим уравнение в дифференциальной форме:

$$u = u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

То же уравнение в комплексной форме получит вид:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{I}R + \underline{I}jX_L + \underline{I}(-jX_C) = \underline{I}(R + jX_L - jX_C) = \underline{I}\underline{Z},$$

где  $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = Ze^{j\varphi}$  – комплексное сопротивление,  
 $X = X_L - X_C$  – реактивное (эквивалентное) сопротивление,

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  – модуль комплексного или полное сопротивление,

$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$  – аргумент комплексного сопротивления или угол сдвига

фаз между напряжением и током на входе схемы. При  $(X_L - X_C) > 0$  фазный угол  $\varphi > 0$ , при этом цепь в целом носит активно-индуктивный характер, а при  $(X_L - X_C) < 0$  и  $\varphi < 0$  – цепь в целом носит активно-емкостный характер.

Уравнение закона Ома для последовательной схемы будет иметь вид:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} - \text{в обычной форме для модулей.}$$

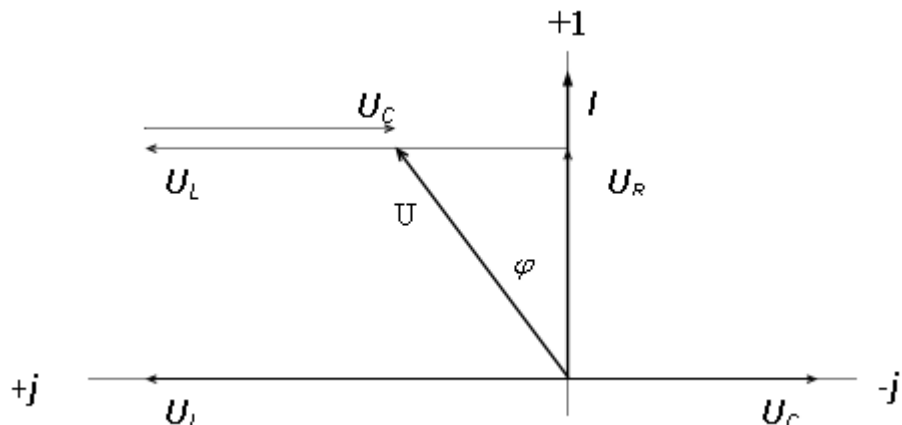


Рисунок 48

Векторная диаграмма тока и напряжений при  $\varphi > 0$  показана на рисунке 48. В рассматриваемой цепи на переменном токе будут происходить одновременно два физических процесса: преобразование энергии в другие виды в резисторе  $R$  (активный процесс) и взаимный обмен энергией между магнитным полем катушки, электрическим полем конденсатора и источником энергии (реактивный процесс).

### 3.8 Электрическая цепь с параллельным соединением элементов $R$ , $L$ и $C$

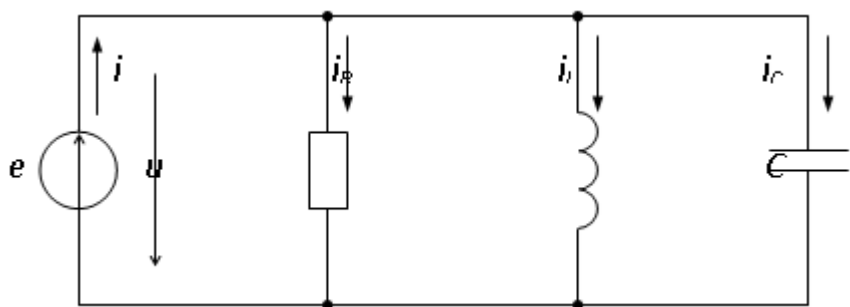


Рисунок 49

Пусть на входе схемы рисунок 49 действует переменное напряжение:

$$u = U_m \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j0}$$

По 1-му закону Кирхгофа для мгновенных значений функций получаем уравнение в дифференциальной форме:

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{U}{R} + \frac{1}{L} \int i dt + C \frac{du}{dt}$$

То же уравнение в комплексной форме получит вид:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{jX_L} + \frac{\underline{U}}{-jX_C} = \underline{U}(G - jB_L + jB_C) = \underline{U} \cdot \underline{Y},$$

где  $\underline{Y} = G - j(B_L - B_C) = G - jB = Ye^{-j\varphi}$  – комплексная проводимость,  $G = \frac{1}{R}$  – активная проводимость,  $B_L = \frac{1}{X_L}$  – реактивная индуктивная проводимость,  $B_C = \frac{1}{X_C}$  – реактивная емкостная проводимость,  $B = B_L - B_C$  – реактивная (эквивалентная) проводимость,  $Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$  – модуль комплексной проводимости или полная проводимость,  $\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}$  – аргумент комплексной проводимости или угол сдвига фаз между напряжением и током на входе схемы. При  $(B_L - B_C) > 0$  и  $\varphi > 0$  – цепь в целом носит активно-индуктивный характер, а при  $(B_L - B_C) < 0$  и  $\varphi < 0$  – цепь в целом носит активно-емкостный характер.

Уравнение закона Ома для параллельной схемы будет иметь вид:

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = \underline{U} \cdot [G - j(B_L - B_C)] \text{ – в комплексной форме;}$$

$$I = U \cdot Y = U \cdot \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} \text{ – в обычной форме для модулей.}$$

Векторная диаграмма токов и напряжения при  $\varphi > 0$  показана на рисунке 50.

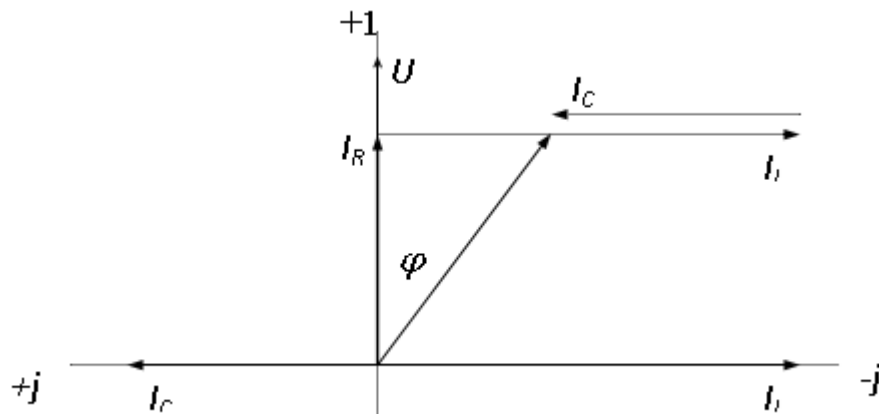


Рисунок 50

На переменном токе в рассматриваемой цепи будут происходить одновременно два физических процесса: преобразование электрической энергии в другие виды (активный процесс) и взаимный обмен энергией между магнитным полем катушки, электрическим полем конденсатора и источником энергии (реактивный процесс).

### 3.9 Активные и реактивные составляющие токов и напряжений

При расчете электрических цепей переменного тока реальные элементы цепи (приемники, источники) заменяются эквивалентными схемами замещения, состоящими из комбинации идеальных схемных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ .

Пусть некоторый приемник энергии носит в целом активно-индуктивный характер (например, электродвигатель). Такой приемник может быть представлен двумя простейшими схемами замещения, состоящими из 2-х схемных элементов  $R$  и  $L$ : а) последовательной (рисунок 51а) и б) параллельной (рисунок 51б):

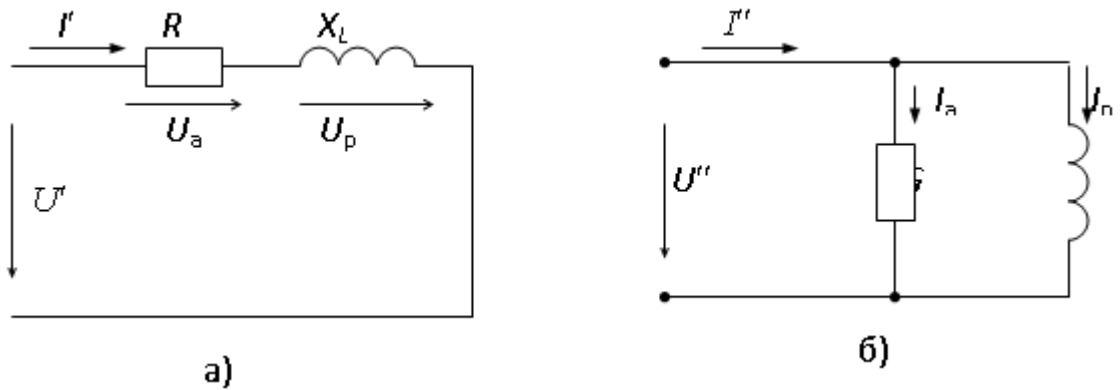


Рисунок 51

Обе схемы будут эквивалентны друг другу при условии равенства параметров режима на входе:  $\underline{U} = \underline{U}' = \underline{U}''$ ,  $\underline{I} = \underline{I}' = \underline{I}''$ .

Для последовательной схемы (рисунок 51а) справедливы соотношения:

$$\underline{I}' = \frac{\underline{U}'}{R + jX_L} = \frac{\underline{U}'(R - jX_L)}{R^2 + X_L^2} = \underline{U}' \cdot \left( \frac{R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} \right) = \underline{U}' \cdot \underline{Y},$$

$$\underline{U}' = \underline{I}' \cdot \underline{Z} = \underline{I}' \cdot (R + jX_L).$$

Для параллельной схемы (рисунок 51б) справедливы соотношения:

$$\underline{I}'' = \underline{U}'' \cdot \underline{Y} = \underline{U}'' \cdot (G - jB_L),$$

$$\underline{U}'' = \frac{\underline{I}''}{G - jB_L} = \frac{\underline{I}''(G + jB_L)}{G^2 + B_L^2} = \underline{I}'' \cdot \left( \frac{G}{G^2 + B_L^2} + j \frac{B_L}{G^2 + B_L^2} \right) = \underline{I}'' \cdot \underline{Z}.$$

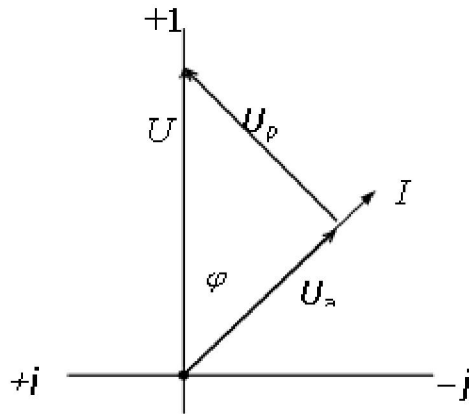
Сравнивая правые части уравнений для  $\underline{U}$  и  $\underline{I}$ , получим соотношения между параметрами эквивалентных схем:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}, \quad R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2}, \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2} = \frac{B}{Y^2}.$$

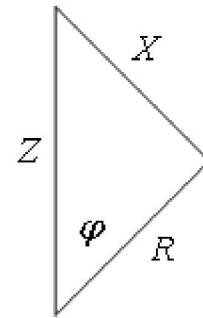
Из анализа полученных уравнений следует сделать вывод, что в общем случае  $R \neq \frac{1}{G}$  и  $B \neq \frac{1}{X}$  и соответственно  $R \neq \frac{1}{G}$  и  $X \neq \frac{1}{B}$ , как это имеет место для цепей постоянного тока.

Математически любой вектор можно представить состоящим из суммы нескольких векторов или составляющих.

Последовательной схеме замещения соответствует представление вектора напряжения в виде суммы двух составляющих: активной составляющей  $U_a$ , совпадающей с вектором тока  $I$ , и реактивной составляющей  $U_p$ , перпендикулярной к вектору тока (рисунок 52а):



а) треугольник



б) треугольник сопротивлений

Рисунок 52

Из геометрии (рисунок 52а) следуют соотношения:  $U_a = U \cos \varphi = IR$ ,  $U_p = U \sin \varphi = IX$ ,  $U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = I \cdot Z$ .

Треугольник, составленный из векторов  $\bar{U}$ ,  $\bar{U}_a$ ,  $\bar{U}_p$  получил название треугольника напряжений (рисунок 52а).

Если стороны треугольника напряжений разделить на ток  $I$ , то получится новый треугольник, подобный исходному, но сторонами которого являются полное сопротивление  $Z$ , активное сопротивление  $R$  и реактивное сопротивление  $X$ . Треугольник со сторонами  $Z$ ,  $R$ ,  $X$  называется треугольником сопротивлений (рисунок 52б). Из треугольника сопротивлений следуют соотношения:  $R = Z \cdot \cos \varphi$ ,  $X = Z \cdot \sin \varphi$ ,  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ .

Параллельной схеме замещения соответствует представление вектора тока в виде суммы двух составляющих: активной составляющей  $I_a$ , совпадающей с вектором напряжения  $U$ , и реактивной составляющей  $I_p$ , перпендикулярной к вектору  $U$  (рисунок 53а):

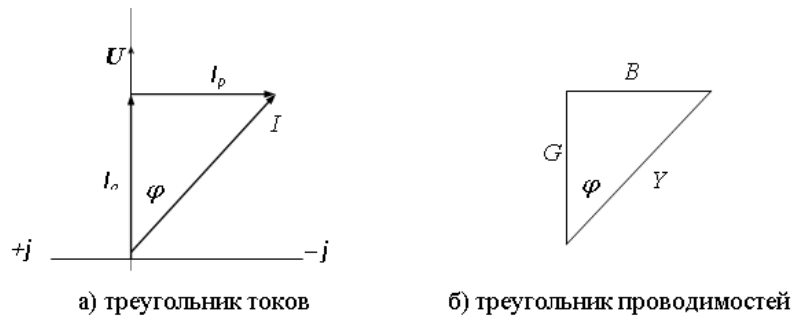


Рисунок 53

Из геометрии рисунка следуют соотношения:

$$I_a = I \cos \varphi = U \cdot G, \quad I_p = I \sin \varphi = U \cdot B, \quad I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = U \cdot Y.$$

Треугольник, составленный из векторов  $\bar{I}$ ,  $\bar{I}_a$ ,  $\bar{I}_p$ , получил название треугольника токов (рисунок 53а).

Если стороны треугольника токов разделить на напряжение  $U$ , то получится новый треугольник, подобный исходному, но сторонами которого являются проводимости: полная –  $Y$ , активная –  $G$ , реактивная –  $B$  (рисунок 53б). Треугольник со сторонами  $Y$ ,  $G$ ,  $B$  называется треугольником проводимостей. Из треугольника проводимостей следуют соотношения:

$$G = Y \cos \varphi, \quad B = Y \sin \varphi, \quad Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{B}{G}.$$

Разложение напряжений и токов на активные и реактивные составляющие является математическим приемом и применяется на практике для расчета сравнительно несложных цепей переменного тока.

### 3.10 Передача энергии от активного двухполюсника (источника) к пассивному двухполюснику (приемнику)

Двухполюсником называется устройство или часть схемы (цепи) с двумя выводами (полюсами). Если внутри двухполюсника содержатся источники энергии, то он называется активным (А), в противном случае – пассивным (П).

Энергетические характеристики передачи энергии от активного двухполюсника (источника) к пассивному двухполюснику (приемнику) на переменном токе зависят от соотношения параметров приемника и источника между собой (рисунок 54).

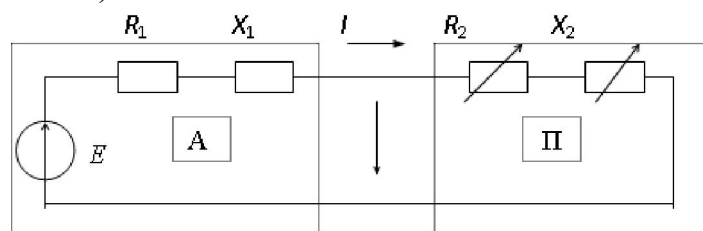


Рисунок 54

По закону Ома ток в схеме равен:

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}.$$

Активная мощность приемника:

$$P_2 = I^2 \cdot R_2 = \frac{E^2 \cdot R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}.$$

Активная мощность источника:  $P_E = E \cdot I$ .

При постоянных параметрах источника энергии активная мощность приемника зависит от его параметров:  $P_2 = f(R_2, X_2)$ . Исследуем эту функцию на максимум при изменении отдельных параметров.

Условие первое:  $X_2 = \text{var}, R_2 = \text{const}$ :

$$\frac{dP_2}{dX_2} = 0, \Rightarrow -E^2 R_2 (2X_1 + 2X_2) = 0 \text{ или } X_2 = -X_1.$$

Максимум мощности приемника  $P_{2\text{max}}$  имеет место при условии равенства реактивных сопротивлений приемника и источника по модулю и противоположности их по знаку, например, если реактивное сопротивление источника носит индуктивный характер, то реактивное сопротивление приемника должно быть емкостным, и наоборот.

Условие второе:  $R_2 = \text{var}, X_2 = \text{const}$ .

$$\frac{dP_2}{dR_2} = 0, \Rightarrow E^2 (R_1 + R_2)^2 - E^2 R_2 (2R_1 + 2R_2) = 0 \text{ или } R_2 = R_1.$$

Максимум мощности приемника имеет место при равенстве активных сопротивлений приемника и источника.

Абсолютный максимум мощности приемника наблюдается при выполнении обоих условий и равен:

$$P_{2\text{max}} = \frac{E^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{E^2}{4R_1}.$$

В режиме максимума потребляемой мощности работают приемники в линиях связи.

Коэффициент полезного действия передачи энергии от источника к приемнику равен отношению активных мощностей  $\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$  и не зависит от величины их реактивных сопротивлений.

В режиме абсолютного максимума мощности приемника КПД составляет только 0,5. Линии электропередачи (ЛЭП) работают с КПД  $\eta = 0,90 \div 0,95$ , что соответствует соотношению активных сопротивлений приемника и источника (генератора + ЛЭП)  $R_2/R_1 = 10 \div 20$ .

На графической диаграмме рисунка 55 показаны энергетические характеристики передачи энергии при  $R_2 = \text{var}, X_2 = \text{const}$ :  $P_2, \eta = f(R_2)$ .

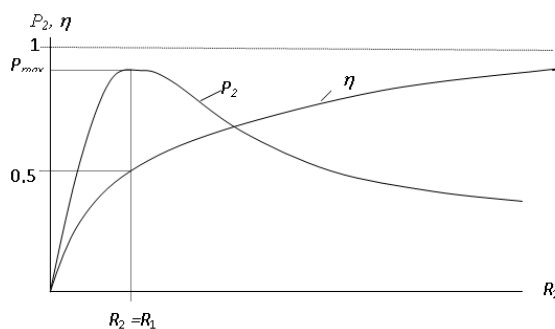


Рисунок 55

### 3.11 Компенсация реактивной мощности приемников энергии

Активная мощность приемника  $P = UI \cos \varphi$  характеризует интенсивность потребления им энергии и зависит от режима его работы.

Реактивная мощность приемника  $Q = UI \sin \varphi$  характеризует интенсивность обмена энергией между электромагнитным полем приемника и остальной цепью. Эта мощность положительна при индуктивном характере приемника ( $\varphi > 0$ ) и отрицательна при емкостном характере ( $\varphi < 0$ ). В промышленных условиях преобладающее большинство приемников имеют активно-индуктивный характер ( $\varphi > 0$ ) и потребляют положительную реактивную мощность  $Q_L > 0$ . Параллельное подключение к таким приемникам конденсаторов, потребляющих отрицательную реактивную мощность  $Q_C < 0$  и, таким образом, являющихся генераторами реактивной мощности для приемников, позволяет уменьшить (компенсировать) суммарную реактивную мощность:  $Q = Q_L - Q_C$ .

Компенсация реактивной мощности позволяет при неизменной активной мощности уменьшить потребляемый от сети ток:

$$I = \frac{\sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}}{U}.$$

Схема цепи в режиме компенсации реактивной мощности показана на рисунке 56.

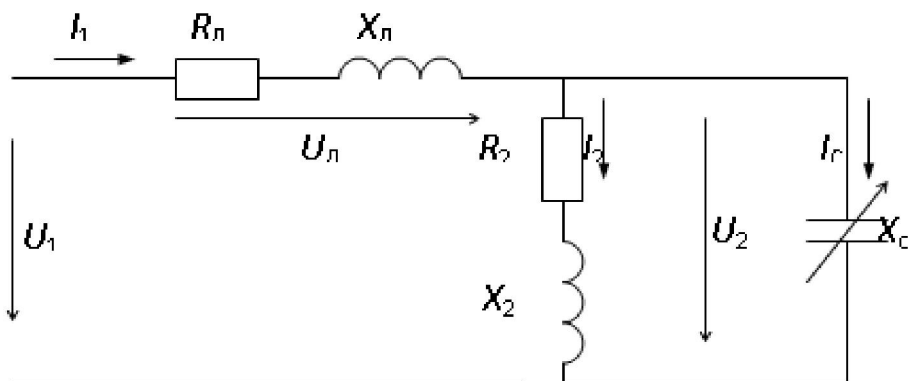


Рисунок 56

При увеличении емкости компенсирующего конденсатора  $C$  пропорционально будет увеличиваться потребляемый им ток  $I_C = U_2 \cdot \omega C$ . Ток линии, равный геометрической сумме токов нагрузки и конденсатора ( $I_1 = I_2 + I_C$ ), вначале будет уменьшаться (при  $Q_L > Q_C$ ), достигнет своего минимального значения при полной компенсации реактивной мощности  $I_{1\min} = I_a = I_2 \cos \varphi_2$ , а затем начнет возрастать при  $Q_C > Q_L$  (рисунок 57).

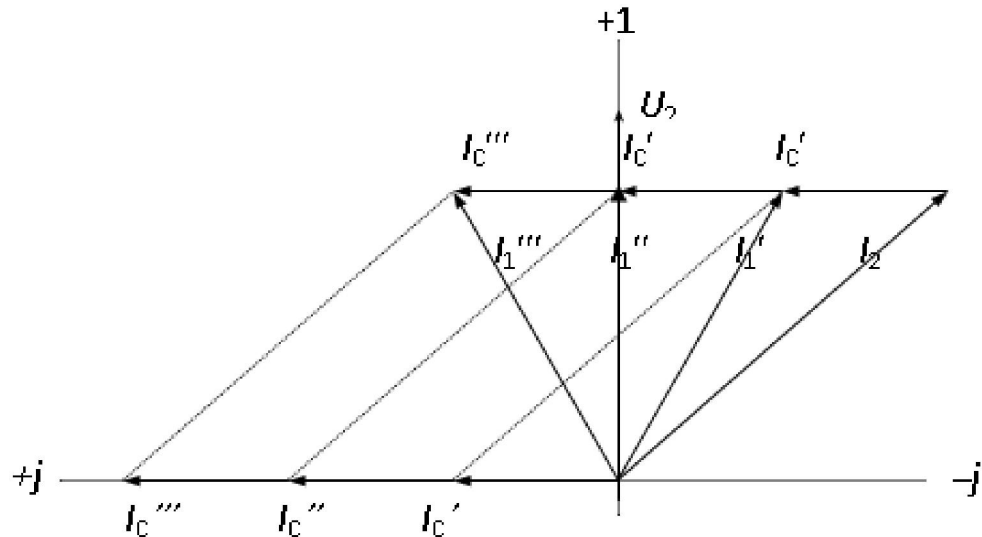


Рисунок 57

Из геометрии (рисунок 57) следует соотношение:

$$I'_C = I_a \operatorname{tg} \varphi_2 - I_a \operatorname{tg} \varphi'_2 = \frac{P}{U} (\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi'_2).$$

Тот же ток из закона Ома:

$$I'_C = \frac{U_2}{X_C} = U_2 \cdot \omega C'.$$

Из совместного решения этих двух уравнений вытекает формула для расчёта емкости компенсирующего устройства от первоначального значения  $\operatorname{tg} \varphi_2$  до заданного  $\operatorname{tg} \varphi'_2$ :

$$C' = \frac{P \cdot 10^6}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi'_2) \text{ [мкФ]}.$$

Сопrotивление воздушных ЛЭП носит активно-индуктивный характер с существенным преобладанием реактивного сопротивления ( $X_L \gg R_L$ ), поэтому падение напряжения в линии  $\underline{U}_L = \underline{I}(R_L + jX_L)$  почти на  $90^\circ$  опережает ток. На рисунке 58 показано семейство векторных диаграмм токов и напряжений для разных значений компенсирующей емкости  $C = \text{var}$  при постоянном значении напряжения в начале линии  $\underline{U}_1 = \text{const}$ .

Из анализа семейства векторных диаграмм рисунка 58 следует, что увеличение степени компенсации реактивной мощности повышает напряжение на выводах нагрузки ( $U_2''' > U_2'' > U_2'$ ), при этом потеря

напряжения в линии  $\Delta U = U_1 - U_2$  уменьшается. На практике указанная функциональная зависимость  $U_2 = f(C)$  используется для поддержания заданного уровня напряжения на выводах (шинах) нагрузки  $U_2 = \text{const}$  при изменении ее параметров.

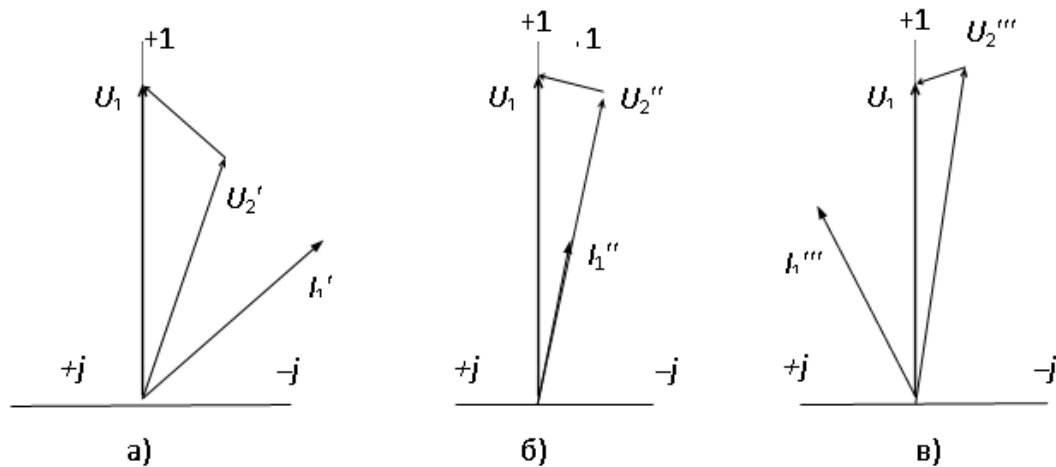


Рисунок 58

Таким образом, посредством компенсации реактивной мощности нагрузки в энергосистеме решаются две важные технико-экономические задачи. Во-первых, это уменьшение потерь мощности в линии электропередачи ( $P_{\text{л}} = I^2 R_{\text{л}}$ ) и повышение ее КПД вследствие уменьшения тока. Во-вторых, с помощью регулируемых компенсирующих устройств осуществляется управление напряжением в конце линии на выводах нагрузки, поддержание его на заданном номинальном уровне при изменении потребляемой мощности в широком диапазоне.

## 4 Резонанс в электрических цепях

### 4.1 Определение резонанса

В электрической цепи, содержащей катушки индуктивности  $L$  и конденсаторы  $C$ , возможны свободные гармонические колебания энергии между магнитным полем катушки  $W_M = \frac{Li^2}{2}$  и электрическим полем конденсатора  $W_C = \frac{Cu^2}{2}$ . Угловая частота этих колебаний  $\omega_0$ , называемых свободными или собственными, определяется структурой цепи и параметрами ее отдельных элементов  $R, L, C$ .

Резонансным режимом цепи или просто резонансом называется явление увеличения амплитуды гармонических колебаний энергии в цепи, наблюдаемое при совпадении частоты собственных колебаний  $\omega_0$  с частотой вынужденных колебаний  $\omega$ , сообщаемых цепи источником энергии ( $\omega_0 = \omega$ ).

В резонансном режиме колебания энергии между магнитным и электрическим полями замыкаются внутри цепи, обмен энергией между источником и цепью отсутствует, а вся поступающая от источника энергия преобразуется в другие виды, т.е. электрическая цепь по отношению к источнику энергии ведет себя как чисто активное сопротивление  $R$  (активная проводимость  $G$ ). На этом основании условие для резонансного режима можно сформулировать через параметры элементов схемы, а именно: входное сопротивление и, соответственно, входная проводимость схемы со стороны выводов источника энергии должна носить чисто активный характер:  $Z_{\text{вх}}=R_{\text{вх}}$ ;  $Y_{\text{вх}}=G_{\text{вх}}$ ;  $X_{\text{вх}}=0$ ;  $B_{\text{вх}}=0$ ; или в комплексной форме:  $\text{Im}[Z_{\text{вх}}]=0$ ,  $\text{Im}[Y_{\text{вх}}]=0$ .

## 4.2 Резонанс напряжений

Резонанс в цепи с последовательным соединением источника энергии и реактивных элементов  $L$  и  $C$  получил название резонанса напряжений. Простейшая схема такой цепи показана на рисунке 59.

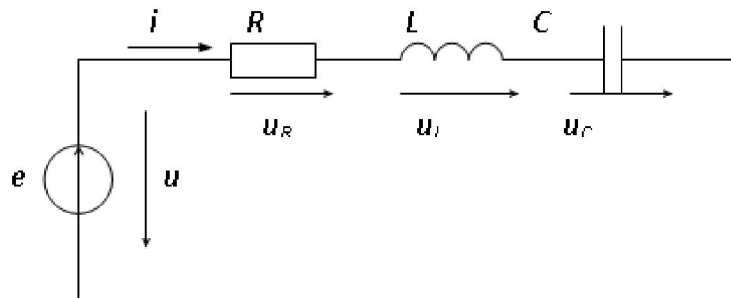


Рисунок 59

Комплексное входное сопротивление схемы:  $Z_{\text{вх}} = R + j(X_L - X_C) = R$ .

Условие резонанса напряжений:  $X_L - X_C = 0$  или  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ ,

откуда  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансная или собственная частота.

Из полученного равенства следует, что резонансного режима в цепи можно достичь изменением параметров элементов  $L$  и  $C$  или частоты источника  $\omega$ .

В резонансном режиме полное сопротивление схемы имеет минимальное значение и равно активному сопротивлению:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R,$$

а ток максимален и совпадает по фазе с напряжением источника:  $I = E/R$ ;  $\varphi = 0$ .

Векторная диаграмма напряжений и тока показана на рисунке 60.

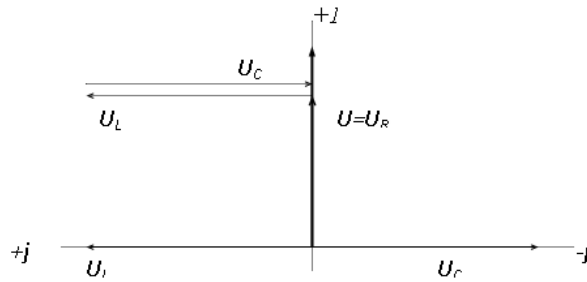


Рисунок 60

Напряжения на реактивных элементах равны по модулю, противоположны по фазе и взаимно компенсируют друг друга:

$$\underline{U}_L = IjX_L = j\underline{U} \frac{X_L}{R}; \quad \underline{U}_C = I(-jX_C) = -j\underline{U} \frac{X_C}{R},$$

а напряжение на резисторе равно напряжению источника:  $\underline{U}_R = IR = \underline{U} = \underline{E}$ .

Напряжения на реактивных элементах  $U_L = U_C = U \frac{X_L}{R} = U \frac{X_C}{R}$

могут значительно превосходить напряжение источника  $U = E$  при условии, что  $X_L = X_C \gg R$ .

Выясним энергетические процессы, протекающие в цепи в резонансном режиме. Пусть в цепи протекает ток  $i = I_m \sin \omega t$ , тогда напряжение на конденсаторе составит:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt = \frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_m}{\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot C} \cos \omega t = I_m \sqrt{\frac{L}{C}} \cos \omega t.$$

Сумма энергий магнитного и электрического полей равна:

$$W = W_m + W_e = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t + C \frac{L}{C} I_m^2 \cos^2 \omega t = \frac{LI_m^2}{2} = \text{const}$$

Таким образом, сумма энергий магнитного и электрического полей равна постоянному значению. Это значит, что между магнитным и электрическим полями происходит непрерывный обмен энергией, суммарное значение которой постоянно, а обмен энергией между источником и цепью отсутствует, при этом поступающая от источника энергия преобразуется в другие виды..

Электрическая цепь с последовательным соединением элементов  $R$ ,  $L$ ,  $C$  в технике получила название последовательного колебательного контура. Свойства такой цепи как колебательного контура характеризуют следующие

параметры:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансная частота,  $\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – волновое со-

противление,  $Q = \frac{\rho}{R}$  – добротность контура.

Чем больше добротность контура  $Q$ , тем выразительнее проявляются в нем резонансные явления, например, напряжения на реактивных элементах больше напряжения источника в  $Q$  раз:  $U_L = U_C = UQ$ .

При изменении частоты источника  $\omega = \text{var}$  будут изменяться сопротивления реактивных элементов и, как следствие, будут изменяться ток в цепи и напряжения на отдельных участках.

Частотными характеристиками контура называются зависимости сопротивлений отдельных элементов и участков от частоты  $X_L = \omega L$ ,  $X_C = \frac{1}{\omega C}$

$X = X_L - X_C$ ,  $Z = \sqrt{R + (X_L - X_C)^2}$  (рисунок 61).

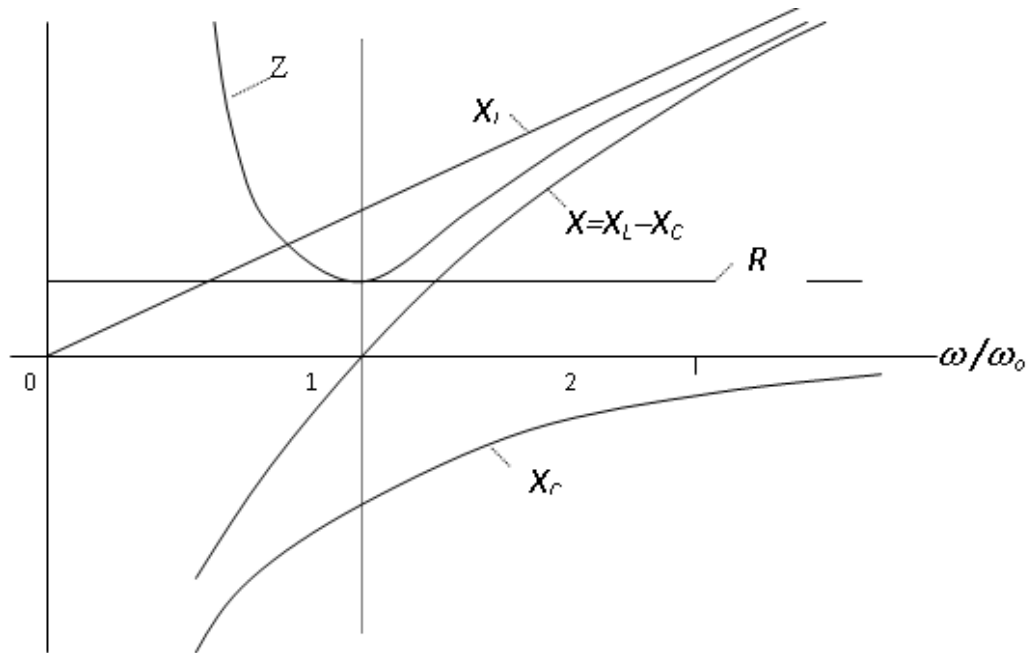


Рисунок 61

Резонансными характеристиками называются зависимости режимных параметров от частоты:  $U_L$ ,  $U_C$ ,  $I$ ,  $\varphi = f(\omega)$  (рисунок 62).

Полосой пропускания резонансного контура называют область частот  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , на границах которой ток  $I$  в  $\sqrt{2}$  раз меньше своего максимального значения, т.е.  $I = 0,707 I_{\text{max}}$ . Полоса пропускания контура обратно пропорциональна его добротности:  $\Delta\omega = \frac{1}{Q}$ . На рисунке 63 в относительных единицах представлено семейство резонансных характеристик с различными значениями добротности.

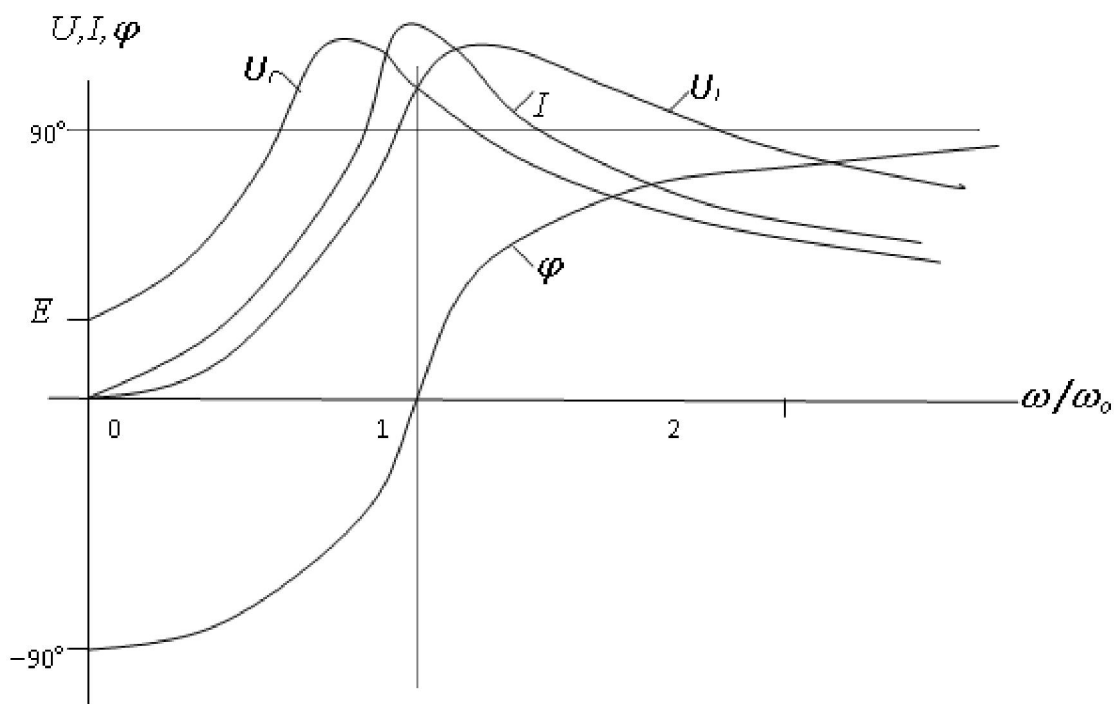


Рисунок 62

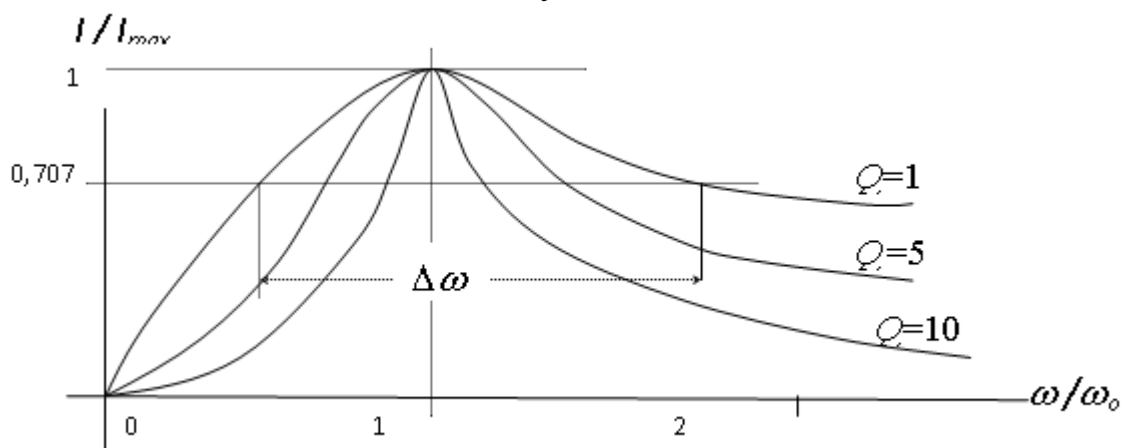


Рисунок 63

Практическое применение резонанс напряжений находит в области радиотехники и техники связи. В электроэнергетике явление резонанса напряжений из-за сопутствующих ему перенапряжений может привести к нежелательным последствиям. Например, при подключении к генератору или трансформатору кабельной линии, не замкнутой на приемном конце на нагрузку (в режиме холостого хода), вся цепь может оказаться в резонансом режиме, при этом напряжения на отдельных участках цепи могут появиться высокие напряжения.

### 4.3 Резонанс токов

Резонанс в цепи с параллельным соединением источника энергии и реактивных элементов  $L$  и  $C$  получил название резонанса токов. Простейшая схема такой цепи показана на рисунке 64.

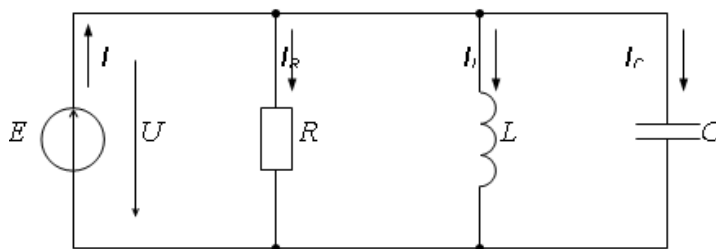


Рисунок 64

Комплексная входная проводимость схемы:

$$\underline{Y}_{BX} = G - j(B_L + B_C) = G$$

Условие резонанса токов:  $B_\Sigma = B_L - B_C = 0$  или  $\frac{1}{\omega L} - \omega C = 0$ , откуда

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансная (собственная) частота.

Из полученного равенства следует, что резонансного режима в цепи можно достичь изменением параметров элементов  $L$  и  $C$  или частоты источника  $\omega$ .

В резонансном режиме полная проводимость схемы равна активной проводимости и имеет минимальное значение:  $Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = G$ , а ток источника также минимален и совпадает по фазе с напряжением источника ( $\varphi = 0$ ):  $I = UY = UG$ .

Токи в ветвях с реактивными элементами  $\underline{I}_L = \underline{U}(-jB_L)$ ,  $\underline{I}_C = \underline{U}(jB_C)$  равны по модулю, противоположны по фазе и компенсируют друг друга, а ток в резисторе  $G$  равен току источника ( $I = I_G = UG$ ). Равные по модулю токи в реактивных элементах  $I_L = I_C$  могут значительно превосходить ток источника  $I$  при условии, что  $B_L = B_C \gg G$ .

Векторная диаграмма токов и напряжений показана на рисунке 65.

Электрическая цепь с параллельным соединением элементов  $G$ ,  $L$  и  $C$  в технике получила название параллельного колебательного контура. Свойства такой цепи как колебательного контура характеризуют следующие

параметры:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансная частота;  $\gamma = \frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C = \sqrt{\frac{C}{L}}$  –

волновая проводимость;  $Q = \frac{\gamma}{G}$  – добротность контура.

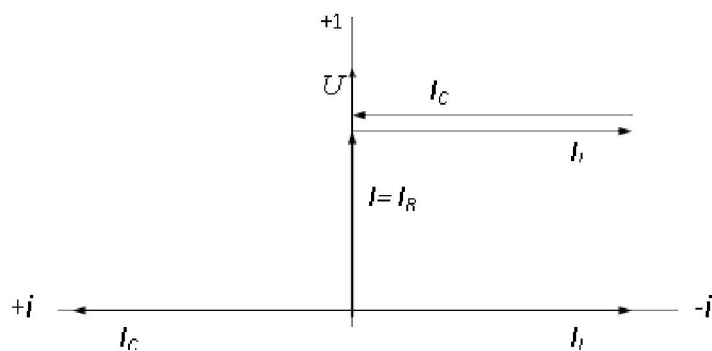


Рисунок 65

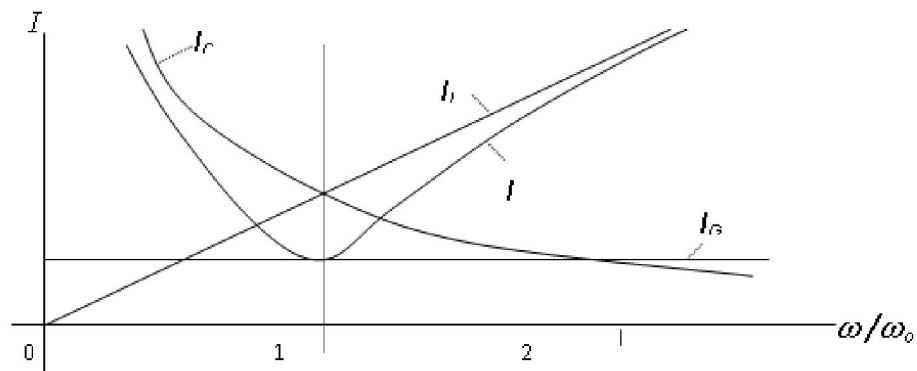


Рисунок 66

Резонансные характеристики параллельного контура представлены на рисунке 66.

Резонанс токов находит широкое применение в области радиотехники и техники связи. В электроэнергетике компенсация реактивной мощности на промышленных предприятиях с помощью параллельного подключения конденсаторных батарей, по сути дела, представляет собой мероприятие, при котором также достигается резонанс токов.

#### 4.4 Резонанс в сложных схемах

Схемы замещения реальных электрических цепей могут существенно отличаться от рассмотренных выше простейших последовательной или параллельной схем. Хотя условие резонансного режима в общем виде [  $\text{Im}(\underline{Z}_{\text{ex}})=0$  и  $\text{Im}(\underline{Y}_{\text{ex}})=0$  ] для любой схемы сохраняется, однако конкретное содержание этих уравнений будет определяться структурой схемы замещения.

На рисунке 67 приведена эквивалентная схема параллельного контура, в которой реальные элементы цепи (катушка и конденсатор) представлены последовательными схемами замещения.

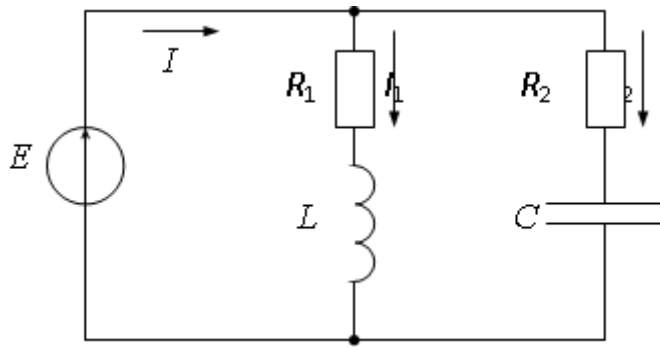


Рисунок 67

Входная комплексная проводимость схемы:

$$\underline{Y}_{BX} = \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C} = \left( \frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} \right) - j \left( \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} - \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} \right) = G_\Sigma - jB_\Sigma$$

Условие резонанса:

$$B_\Sigma = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} - \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{\left( \frac{1}{\omega C} \right)^2}{R_2^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2} = 0$$

Отличие данного условия резонанса от аналогичного условия для простейшей схемы рисунка 64 состоит в том, что в этом уравнении присутствуют параметры активных элементов  $R_1$  и  $R_2$ .

Анализ полученного уравнения показывает, что при изменении параметров одного из элементов схемы возможны различные варианты решения.

При изменении сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  возможны два варианта решения: 1) существует одна точка резонанса (корни уравнения вещественные; один положительный, а другой отрицательный); 2) резонанс в схеме невозможен (корни уравнения комплексные).

При изменении индуктивности  $L$  или емкости  $C$  возможны три варианта решения: 1) существует две точки резонанса (корни уравнения вещественные и оба положительные); 2) существует одна точка резонанса (корни уравнения равные и положительные); 3) резонанс в схеме невозможен (корни уравнения комплексные).

Решая уравнение резонанса относительно частоты, получим:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}$$

Анализ этого уравнения показывает, что при  $R_1 = R_2$  резонансная частота имеет выражение  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , а при  $\frac{L}{C} = R_1^2 = R_2^2$  для  $\omega_0$  получается неопределенное решение, что физически означает резонансный режим на любой частоте.

На рисунке 68 приведена схема последовательного контура, в которой реальные элементы (катушка и конденсатор) представлены различными схемами замещения.

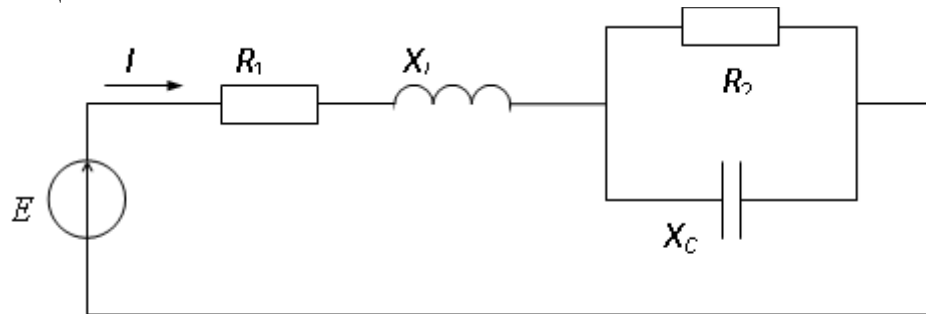


Рисунок 68

Входное комплексное сопротивление схемы:

$$\underline{Z}_{BX} = R_1 + jX_L + \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C} = \left( R_1 + \frac{R_2 X_C^2}{R_2^2 + X_C^2} \right) + j \left( X_L - \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2} \right) = R_{\Sigma} + jX_{\Sigma}$$

Условие резонанса:

$$X_{\Sigma} = X_L - \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2} = 0 \quad \text{или} \quad \omega L - \frac{R_2^2 \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2}{R_2^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2} = 0$$

Анализ этого уравнения показывает неоднозначную зависимость условия резонанса от значений параметров каждого элемента схемы.

Если сложная схема содержит в своей структуре несколько (более двух) разнородных реактивных элементов, то при изменении частоты в ней могут наблюдаться несколько резонансных режимов (как тока, так и напряжения) в зависимости от структуры схемы.

## 5 Магнитносвязанные электрические цепи

### 5.1 Общие определения

Если магнитное поле, создаваемое одной из катушек, пересекает плоскость витков (сцеплено с витками) второй катушки, то такие катушки принято называть магнитносвязанными (индуктивносвязанными) (рисунок 69а).

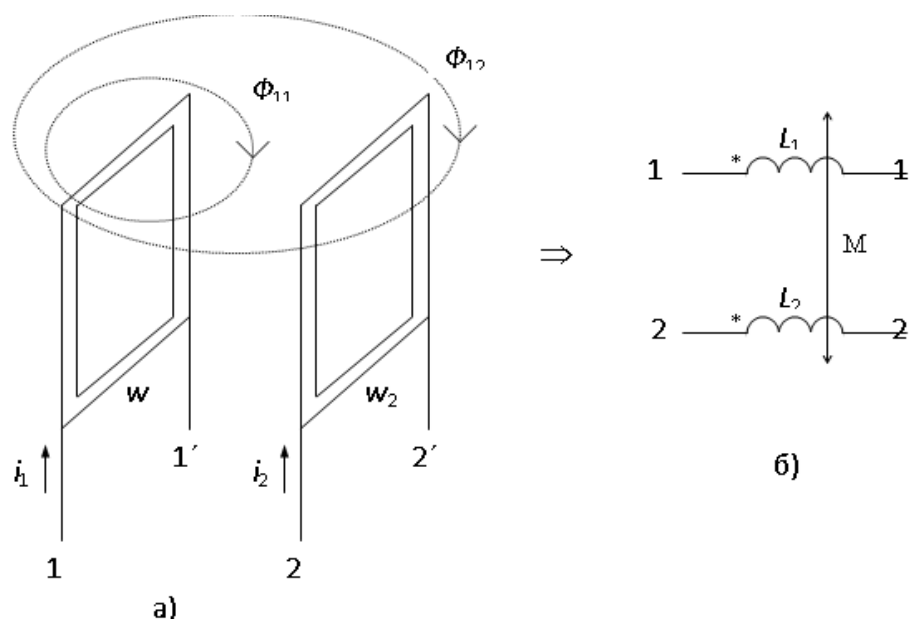


Рисунок 69

$\Phi_{11}$  — часть магнитного потока, создаваемого током  $i_1$ , который сцеплен только с витками катушки  $w_1$ .

$\Phi_{12}$  — часть магнитного потока, создаваемого током  $i_1$ , который сцеплен с витками обеих катушек (взаимный поток).

$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$  — суммарный магнитный поток, создаваемый током  $i_1$ .

Собственной индуктивностью катушки  $L$  называется отношение ее собственного потокосцепления к току в ней:

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{i_1} = \frac{\Phi_1 w_1}{i_1}.$$

Взаимной индуктивностью  $M$  называется отношение взаимного потокосцепления 2-й катушки к току в 1-й или наоборот:

$$M = \frac{\Phi_{12} w_2}{i_1} = \frac{\Phi_{21} w_1}{i_2}.$$

Степень магнитной связи между катушками характеризуется коэффициентом связи:  $k_{св} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ , значение которого изменяется в пределах от 0 до 1.

При протекании одновременно по обеим катушкам постоянных токов  $i_1$  и  $i_2$  их собственные и взаимные магнитные потоки могут совпадать по направлению (направлены согласно), и тогда происходит усиление магнитного поля, или могут не совпадать (направлены встречно), тогда происходит ослабление магнитного поля. Если при выбранных направлениях токов в катушках их собственные и взаимные потоки совпадают, то такие направления токов принято называть согласными (в противном случае — встречными). Выводы катушек, относительно которых согласно направленные токи ориентированы одинаково (например, от вывода в

катушку), называются одноименными или однополярными. На схемах электрических цепей одноименные выводы катушек обозначаются одинаковыми символьными знаками (звездочка, точка), а наличие взаимной магнитной связи – дугой со стрелками на концах (рис. 69б). Полярность выводов магнитносвязанных катушек может быть определена на основе правила правоходового винта, если известны их геометрия и направление намотки, или путем экспериментальных измерений.

При протекании по катушкам переменных синусоидальных токов  $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1)$  и  $i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \alpha_2)$  в них по закону электромагнитной индукции будут наводиться одновременно ЭДС самоиндукции и ЭДС взаимной индукции, которые в сумме уравновесят приложенные к катушкам напряжения:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -e_{1\text{соб}} - e_{1\text{вз}} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= -e_{2\text{соб}} - e_{2\text{вз}} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{– дифференциальная форма} \\ \text{уравнений 2-го закона Кирхгофа,} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{I}_2 jX_2 \pm \underline{I}_1 jX_m \\ \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 jX_1 \pm \underline{I}_2 jX_m \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{– комплексная форма уравнений} \\ \text{2-го закона Кирхгофа.} \end{array}$$

Здесь знак “+” употребляется при согласном направлении токов в катушках, а знак “–” – при встречном направлении.

## 5.2 Последовательное соединение магнитносвязанных катушек

Пусть две магнитносвязанные катушки ( $R_1, L_1, R_2, L_2, M$ ) соединены последовательно с источником ЭДС  $E$  (рисунок 70).

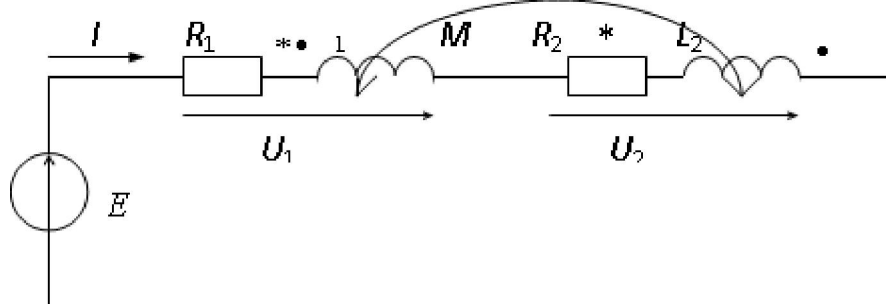


Рисунок 70

При последовательном соединении положительное направление тока выбирается одновременно для обеих катушек, поэтому его направление

относительно одноименных выводов зависит только от способа соединения катушек между собой: а) согласное (\*) и б) встречное (•).

При согласном включении собственные и взаимные магнитные потоки будут складываться, а при встречном — вычитаться. По второму закону Кирхгофа:

$$e = u_1 + u_2 = iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} + iR_2 + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} \quad \text{— дифференциальная форма,}$$

$$\underline{E} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{I}R_1 + \underline{I}jX_1 \pm \underline{I}jX_M + \underline{I}R_2 + \underline{I}jX_2 \pm \underline{I}jX_M \quad \text{— комплексная форма}$$

Здесь и далее знак “+” соответствует согласному включению, а знак “−” —встречному.

Комплексному уравнению соответствуют векторные диаграммы тока и напряжений (рисунок 71а — для согласного включения, рисунок 71б — для встречного включения).

Из комплексного уравнения следует:

$$\underline{Z}_\Sigma = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2 \pm 2X_M) = R_\Sigma + jX_\Sigma,$$

где

$$R_\Sigma = R_1 + R_2, \quad X_\Sigma = X_1 + X_2 \pm 2X_M,$$

откуда следует, что

$$X_{\Sigma \text{ сог}} = X_1 + X_2 + 2X_M, \quad X_{\Sigma \text{ встр}} = X_1 + X_2 - 2X_M$$

Решая совместно последние уравнения, получим:

$$X_M = \frac{X_{\Sigma \text{ сог}} - X_{\Sigma \text{ встр}}}{4}; \quad M = \frac{L_{\Sigma \text{ сог}} - L_{\Sigma \text{ встр}}}{4}$$

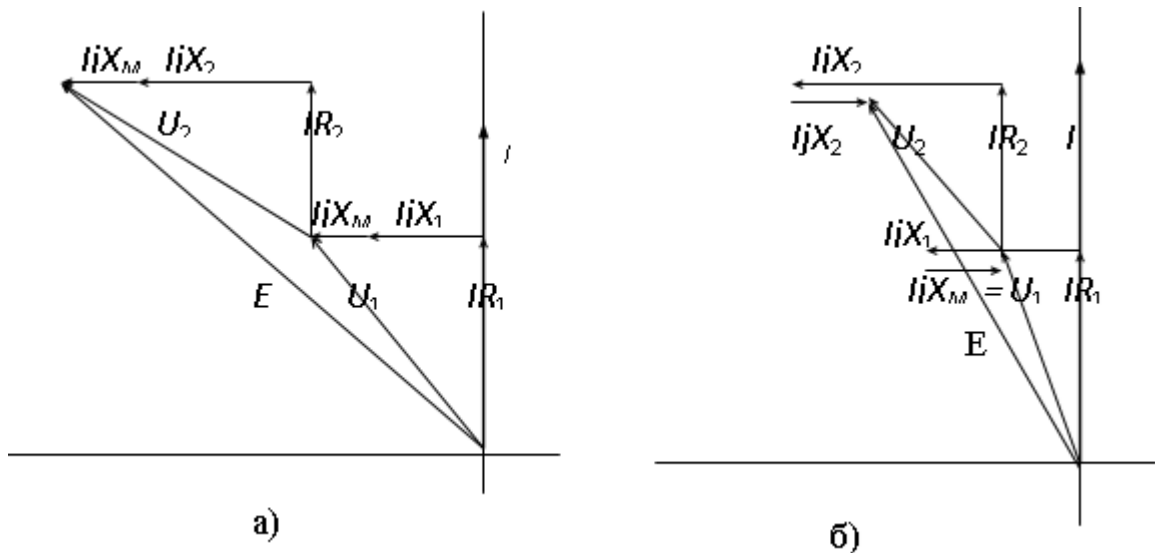


Рисунок 71

Полученное соотношение используется на практике для экспериментального определения взаимного реактивного сопротивления  $X_M$  и соответственно взаимной индуктивности  $M$ . Для этого в цепи согласно

схемы рисунка 72 фиксируют показания трех измерительных приборов ( $U$ ,  $I$ ,  $\varphi$ ) при согласном (1) и встречном (2) включении катушек и по показаниям приборов определяют эквивалентные параметры цепи:

$$\underline{Z}_1 = \frac{U_1}{I_1} e^{j\varphi_1} = R_{1\varphi} + jX_{\text{сог}} \quad , \quad \underline{Z}_2 = \frac{U_2}{I_2} e^{j\varphi_2} = R_{2\varphi} + jX_{\text{вст}}$$

Большему значению  $X_\varphi$  соответствует согласное включение, меньшему – встречное.

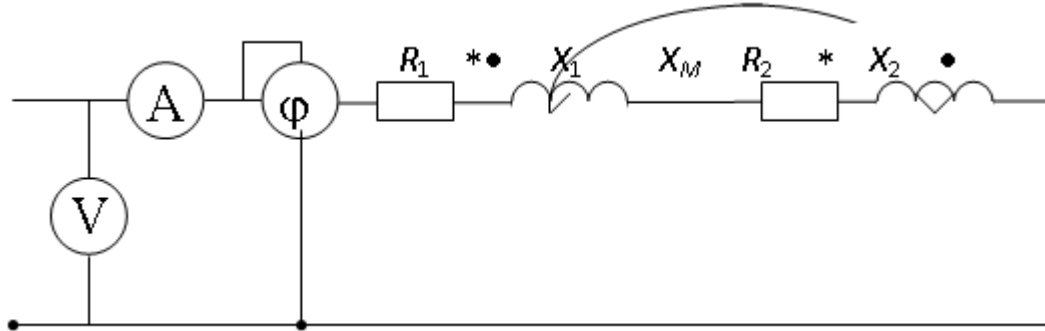


Рисунок 72

### 5.3 Сложная цепь с магнитосвязанными катушками

В сложной цепи магнитосвязанные катушки могут находиться в любых ветвях. Так как направления токов в ветвях схемы выбираются произвольно, то токи в ветвях, содержащих магнитосвязанные катушки, могут быть направлены как согласно, так и встречно.

Расчет токов в сложной схеме с магнитосвязанными катушками производится, как правило, методом законов Кирхгофа. К расчету таких цепей неприменим метод узловых потенциалов и метод эквивалентного генератора. Учет всех слагаемых в уравнениях метода контурных токов довольно сложен, по этой причине его также не применяют.

Рассмотрим расчет схемы на конкретном примере рисунок 73:

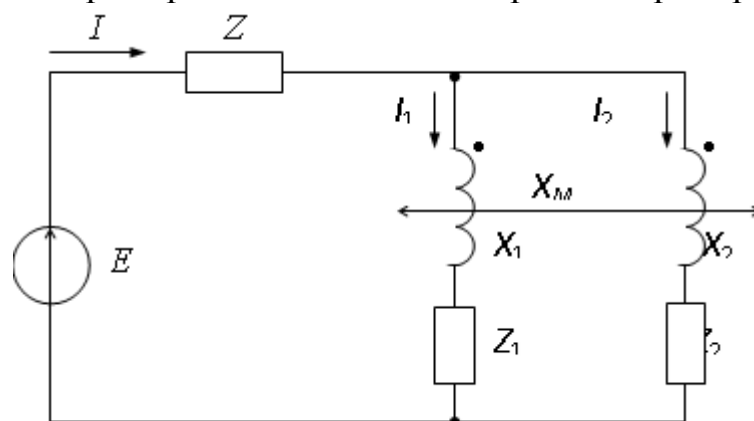


Рисунок 73

Система уравнений Кирхгофа:

$$\underline{I} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0 \quad (5.3.1)$$

$$\underline{I}\underline{Z} + \underline{I}_1 jX_1 + \underline{I}_2 jX_m + \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = \underline{E} \quad (5.3.2)$$

$$\underline{I}\underline{Z} + \underline{I}_2 jX_2 + \underline{I}_1 jX_m + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{E} \quad (5.3.3)$$

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует соблюдать правило полярности токов, а именно, падение напряжения от собственного тока ветви на собственном реактивном сопротивлении ( $\underline{I}jX_1$ ) и падение напряжения на взаимном реактивном сопротивлении от тока связанной ветви ( $\underline{I}_2jX_m$ ) принимаются одного знака при согласном направлении этих токов, и противоположного знака при встречном направлении (в рассматриваемом примере токи направлены согласно).

Сделаем подстановки  $\underline{I}_2 = \underline{I} - \underline{I}_1$  в уравнение (5.3.2) и  $\underline{I}_1 = \underline{I} - \underline{I}_2$  в уравнение (5.3.3), в результате получим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0 \\ \underline{I}(\underline{Z}_1 + \underline{I}jX_m) + \underline{I}_1(jX_1 - jX_m) + \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = \underline{E} \\ \underline{I}(\underline{Z}_1 + \underline{I}jX_m) + \underline{I}_2(jX_2 - jX_m) + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{E} \end{cases}$$

Новой системе уравнений соответствует некоторая новая эквивалентная схема без магнитных связей (рисунок 74):

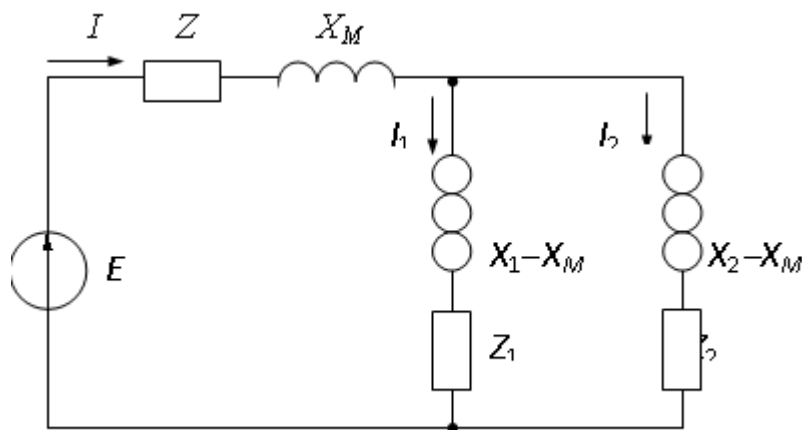


Рисунок 74

Если ветви с магнитносвязанными катушкам присоединены к общему узлу одноименными выводами, то магнитная развязка имеет вид (рисунок 75):

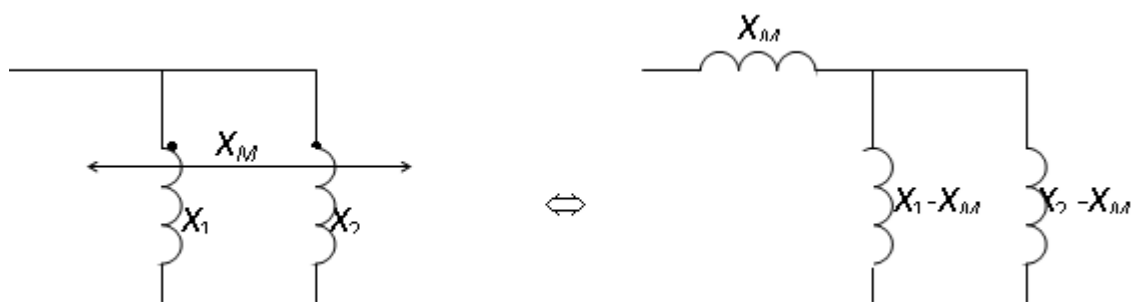


Рисунок 75

Если ветви с магнитносвязанными катушкам присоединены к общему узлу разноименными выводами, то магнитная развязка имеет вид (рисунок 76):

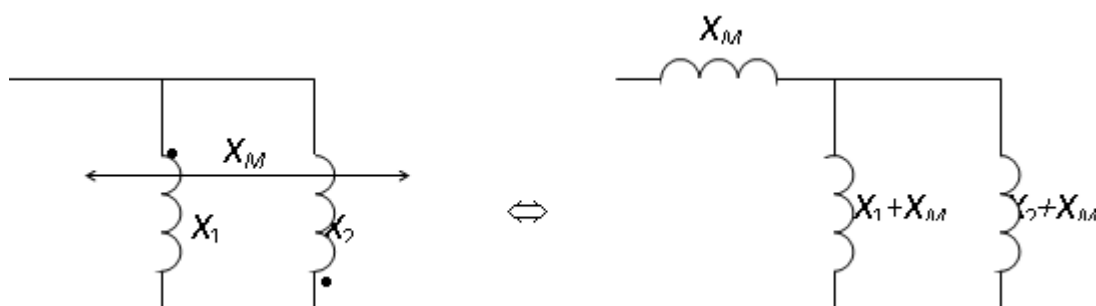


Рисунок 76

Замена исходной схемы с магнитносвязанными катушками эквивалентной схемой без магнитных связей называется развязкой магнитных связей или магнитной развязкой. Магнитная развязка электрических схем применяется для упрощения их расчета. После выполнения магнитной развязки к расчету схемы применим любой метод расчета сложных схем.

#### 5.4 Линейный (без сердечника) трансформатор

Схема линейного трансформатора состоит из двух магнитносвязанных катушек, к одной из которых (первичной) подключается источник ЭДС  $E$ , а ко второй (вторичной) – нагрузка  $Z_H$  (рисунок 77).

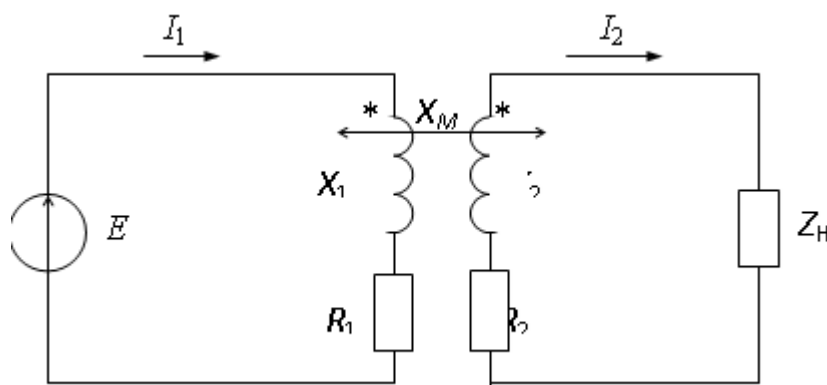


Рисунок 77

Уравнения Кирхгофа для схемы трансформатора в комплексной форме имеют вид:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 jX_1 - \underline{I}_2 jX_M + \underline{I}_1 R_1 = \underline{E} & (5.4.1) \\ \underline{I}_2 jX_2 - \underline{I}_1 jX_M + \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_H = 0 & (5.4.2) \end{cases}$$

С целью магнитной развязки схемы добавим в уравнение (5.4.1) слагаемые  $(\underline{I}_1 jX_M - \underline{I}_1 jX_M)$ , а в уравнении (5.4.2) – слагаемые  $(\underline{I}_2 jX_M - \underline{I}_2 jX_M)$ , в результате получим:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 [R_1 + j(X_1 - X_M) + jX_M] - \underline{I}_2 jX_M = \underline{E} \\ \underline{I}_2 [R_2 + j(X_2 - X_M) + \underline{Z}_2] - \underline{I}_1 jX_M = 0 \end{cases}$$

Новые уравнения являются контурными для некоторой новой эквивалентной схемы без магнитных связей (рисунок 78):

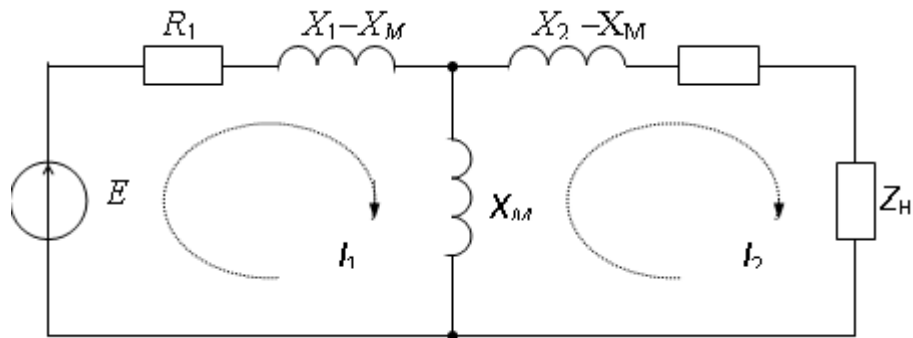


Рисунок 78

Таким образом, магнитная развязка трансформатора имеет вид (рисунок 79):

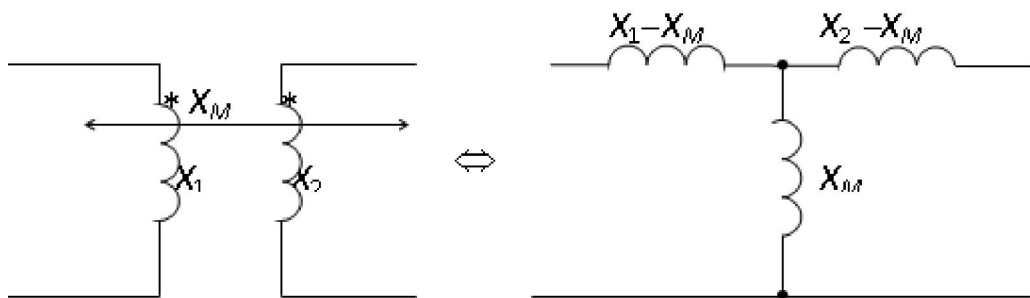


Рисунок 79

Следует иметь в виду, что магнитная развязка является математическим приемом, направленным на упрощение расчета схемы цепи, и физически не всегда может быть заменена электрической цепью. Например, схема рисунка 79 может быть реализована цепью только при условии  $X_1 - X_M > 0$  и  $X_2 - X_M > 0$ .

## 6 Исследование режимов электрических цепей методом векторных и круговых диаграмм

### 6.1 Уравнение дуги окружности в комплексной форме

При изменении параметров одного из элементов сложной цепи токи всех ветвей, напряжения на всех элементах изменяются так, что концы векторов этих величин описывают дуги некоторых окружностей. Для исследования зависимости любой векторной величины ( $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$ ) от переменного параметра достаточно определить дугу окружности, по которой перемещается конец этого вектора, другими словами, построить круговую диаграмму.

Уравнение дуги окружности в комплексной форме имеют вид:

$$\underline{M} = \frac{\underline{M}_0}{1 + \frac{n}{a} e^{j\psi}},$$

где  $\underline{M} = Me^{j\beta}$  – исследуемый вектор,  $\underline{M}_0$  – вектор-хорда дуги окружности,  $a = \text{const}$  – постоянный коэффициент,  $\psi = \text{const}$  – постоянный угол,  $n = \text{var} = (0 - \infty)$  – переменный параметр.

Порядок построения круговой диаграммы по заданному уравнению:

$$\underline{M} = \frac{\underline{M}_0}{1 + \frac{n}{a} e^{j\psi}} = \frac{5e^{j20}}{1 + \frac{n}{20} e^{j120}}$$

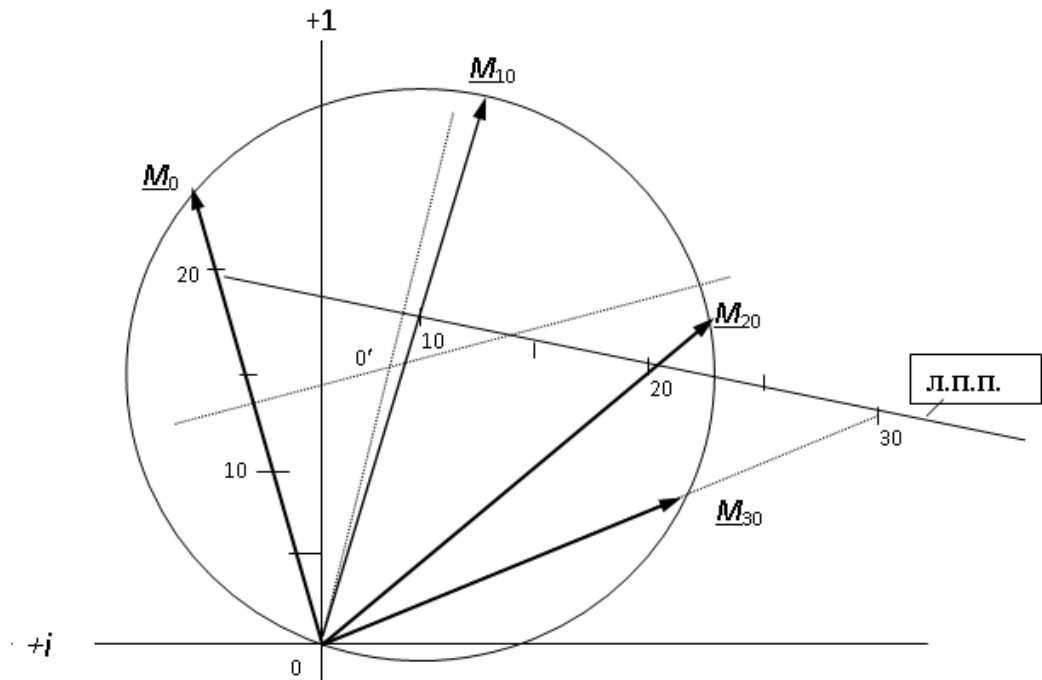


Рисунок 80

1) На комплексной плоскости в выбранном масштабе  $m_m$  откладывают вектор  $\underline{M}_0 = 5e^{j20}$  – хорду дуги окружности (рисунок 80).

2) Вдоль вектора-хорды  $\underline{M}_0$  от его начала в выбранном масштабе  $m_a$  откладывают отрезок, равный коэффициенту “ $a$ ”.

3) Из конца отрезка “ $a$ ” под углом  $-\psi$  к вектору  $\underline{M}_0$  проводят линию переменного параметра (л.п.п.), на которой наносят масштаб  $m_a$ , принятый ранее для отрезка “ $a$ ”.

4) Определяют положение центра дуги как точку пересечения двух перпендикуляров: первый проводят через середину вектора-хорды  $\underline{M}_0$ , а второй – из начала координат к линии переменного параметра.

5) Проводят рабочую дугу по ту сторону от вектора-хорды  $\underline{M}_0$ , где расположена линия переменного параметра.

6) Вдоль линии переменного параметра откладывают текущее значение параметра “ $n$ ” соединяют точку с началом вектора  $\underline{M}_0$  (началом координат) и продолжают прямую линию до пересечения с дугой окружности. Искомый вектор  $\underline{M}$  соответствует отрезку от начала координат до точки пересечения прямой линии с дугой окружности, при этом модуль вектора равен длине отрезка в масштабе  $m_m$ , а начальная фаза вектора – углу между вещественной осью  $+1$  и направлением вектора.

На рисунке 80 показано семейство векторов  $\underline{M}$ , построенных для различных значений переменного параметра “ $n$ ” ( $n = 0; 10; 20; 30$ ).

## 6.2 Круговая диаграмма тока и напряжений для элементов последовательной цепи

Рассмотрим схему цепи, состоящую из последовательно включенных источника ЭДС  $\underline{E}$  и пассивных элементов  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  (рисунок 81). Задано, что  $\underline{E} = Ee^{j\alpha} = \text{const}$ ,  $\underline{Z}_1 = Z_1e^{j\varphi_1} = \text{const}$ ,  $\underline{Z}_2 = Z_2e^{j\varphi_2}$ , где  $\varphi_2 = \text{const}$ , а  $Z_2 = \text{var} = 0 \div \infty$  – переменный параметр.

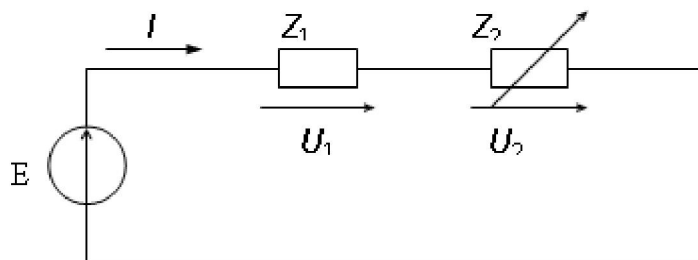


Рисунок 81

Преобразуем уравнение закона Ома для схемы к виду дуги окружности в комплексной форме:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1}}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}} = \frac{\underline{I}_k}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}} = \frac{\underline{M}_0}{1 + \frac{n}{a} e^{j\phi}},$$

где  $\underline{M}_0 = \underline{I}_k = \underline{E}/\underline{Z}_1$  – ток короткого замыкания, соответствует вектору-хорде дуги окружности,  $\underline{Z}_2 = n = \text{var}$  – переменный параметр,  $\underline{Z}_1 = a = \text{const}$  – постоянный коэффициент,  $\varphi_2 - \varphi_1 = \psi = \text{const}$  – постоянный угол.

Таким образом, уравнение для тока  $\underline{I}$  является уравнением дуги окружности.

Напряжение на первом элементе представляет собой уравнение дуги окружности:

$$\underline{U}_1 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_1 = \frac{\underline{E} \cdot \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{E}}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}} = \frac{\underline{E}}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)}}.$$

Напряжение на втором элементе представляет собой уравнение дуги окружности:

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot \underline{Z}_2 = \frac{\underline{E} \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{E}}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} = \frac{\underline{E}}{1 + \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1}} = \frac{\underline{E}}{1 + \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1} e^{-j(\varphi_2 - \varphi_1)}}.$$

Для каждого из векторов  $\underline{I}$ ,  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$  может быть построена круговая диаграмма согласно полученным уравнениям и по ним исследована их зависимость от переменного параметра  $n = \underline{Z}_2$ .

### 6.3 Круговая диаграмма для произвольного тока и напряжения в сложной цепи

Пусть в схеме сложной цепи изменяется параметр сопротивления в  $k$ -той ветви  $\underline{Z}_k = Z_k e^{j\varphi_k}$  так, что фазный угол  $\varphi_k = \text{const}$ , а модуль  $Z_k = 0 \div \infty = \text{var}$  – переменный параметр.

Выделим  $k$ -тую ветвь из сложной схемы, а остальную часть схемы по отношению к ветви заменим эквивалентным генератором напряжения с параметрами  $\underline{E}_\Sigma = \underline{U}_{\text{хх}}$ ,  $\underline{Z}_0 = Z_0 e^{j\varphi_0} = \underline{Z}_{\text{вх}}$  (рисунок 82):

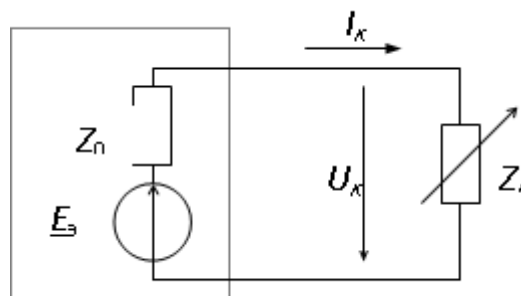


Рисунок 82

Таким образом, получившаяся эквивалентная схема (рисунок 82) ничем не отличается от рассмотренной ранее схемы (рисунок 81), и, следовательно, для переменных векторов  $\underline{I}_k$ ,  $\underline{U}_k$  по аналогии могут быть записанные уравнения дуги в комплексной форме, например:

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{E}_\varphi}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_k} = \frac{\underline{I}_k}{1 + \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_0} e^{j(\varphi_k - \varphi_0)}} = \frac{\underline{M}_0}{1 + \frac{n}{a} e^{j\phi}} - \text{есть уравнение дуги.}$$

Докажем, что для тока  $\underline{I}_n$  произвольной  $n$ -ой ветви сложной схемы также может быть получено уравнение дуги в комплексной форме.

В соответствии с теоремой о линейных отношениях исследуемый  $\underline{I}_n$  и ток  $\underline{I}_k$  связаны между собой линейной зависимостью:

$$\underline{I}_n = \underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{I}_k,$$

где  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  – комплексные коэффициенты, значения которых можно найти из крайних режимов схемы (холостого хода и короткого замыкания).

В режиме холостого хода  $\underline{Z}_k = \infty$ ,  $\underline{I}_{kxx} = 0$ , тогда  $\underline{I}_{nxx} = \underline{A}$ .

В режиме короткого замыкания  $\underline{Z}_k = 0$ , тогда  $\underline{I}_{nkз} = \underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{I}_{kkз} = \underline{I}_{nxx} + \underline{B} \cdot \underline{I}_{kkз}$ , откуда получаем:

$$\underline{B} = \frac{\underline{I}_{nkз} - \underline{I}_{nxx}}{\underline{I}_{kkз}}.$$

Подставим найденные значения коэффициентов  $\underline{A}$  и  $\underline{B}$  и уравнение дуги для тока  $\underline{I}_k$  в уравнение связи:

$$\underline{I}_n = \underline{A} + \underline{B} \cdot \underline{I}_k = \underline{I}_{nxx} + \frac{\underline{I}_{nkз} - \underline{I}_{nxx}}{\underline{I}_{kkз}} \underline{I}_k = \underline{I}_{nxx} + \frac{\underline{I}_{nkз} - \underline{I}_{nxx}}{1 + \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_0} e^{j(\varphi_k - \varphi_0)}}.$$

Уравнение для произвольного тока  $\underline{I}_n$  состоит из суммы двух векторов: а) постоянного вектора  $\underline{I}_{nxx}$ , равного его значению в режиме холостого хода при  $\underline{Z}_k = \infty$ , и б) переменного вектора, изменяющегося по дуге окружности с хордой  $\underline{I}_{nkз} - \underline{I}_{nxx}$ . При построении круговой диаграммы тока  $\underline{I}_n$  по этому уравнению вначале строится его постоянная составляющая  $\underline{I}_{nxx}$ , в конце которой строится круговая диаграмма для переменной составляющей, результирующий вектор получают как сумму двух составляющих.

Уравнение круговой диаграммы для произвольного напряжения может быть получено путем аналогичных логических выводов.

## 7 Топологические методы расчета электрических цепей

### 7.1 Топологические определения схемы

С появлением ЭВМ и их широким применением для решения сложных математических задач были разработаны специальные топологические расчёта сложных электрических цепей, графов и матриц.

Схема сложной электрической цепи (рисунок 83а) может быть заменена (представлена) направленным графом (рисунок 83б) с соблюдением следующих условий:

- 1) узлы графа соответствуют узлам схемы;
- 2) ветви графа соответствуют ветвям схемы;
- 3) направление ветвей соответствует направлению токов в ветвях схемы.

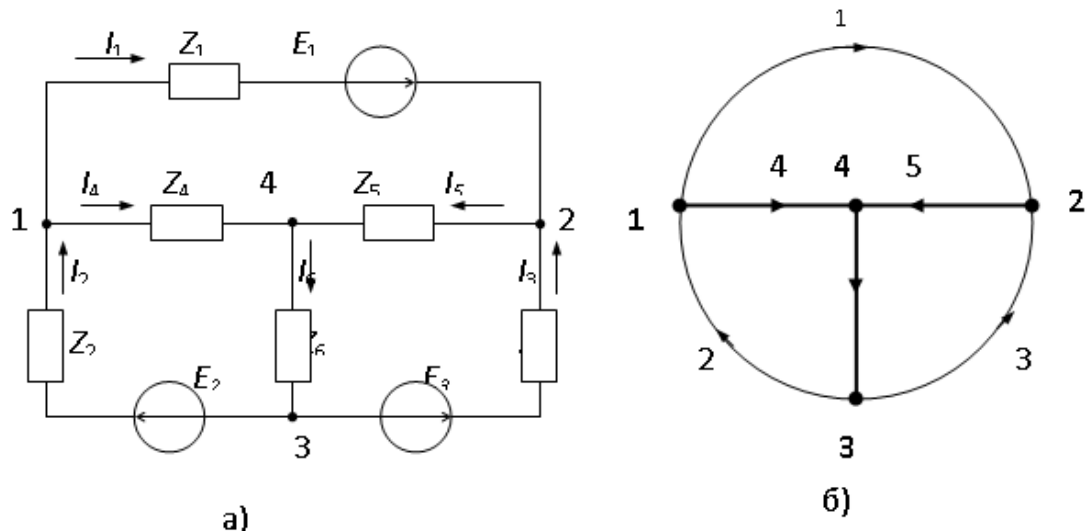


Рисунок 83

Любая часть графа называется **подграфом**. Минимальный связанный подграф, соединяющий все узлы графа и не образующий контуров, называется **деревом** графа (на схеме графа обозначается жирной линией). Для конкретного графа может быть составлено определенное множество вариантов деревьев, но в расчете схемы принимается любой из вариантов. Ветви графа, не входящие в его дерево, называются **связями** или **хордами**.

Структура графа и соответственно структура электрической схемы может быть описана с помощью топологических матриц или матриц соединения. Таких матриц несколько, для расчета электрических цепей используются две основные:  $[A]$  – матрица соединений «узлы-ветви» и  $[B]$  – матрица соединений «контуры-ветви».

В общем случае сложная схема содержит « $m$ » ветвей и « $n$ » узлов, при этом максимальное число ветвей зависит от числа узлов:  $m_{\max} = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$ .

Составим таблицу соединений «узлы-ветви» руководствуясь следующими правилами:

- 1 – ветвь выходит из узла,
- 1 – ветвь входит в узел,
- 0 – отсутствие связи с узлом.

Т а б л и ц а 1

№ узла \ № ветви	1	2	3	4	5	6
1	1	-1	0	1	0	0
2	-1	0	-1	0	1	0
3	0	1	1	0	0	-1
4	0	0	0	-1	-1	1

Так как каждая ветвь имеет только один вход (-1) и один выход (+1), то сумма чисел по вертикали для любого столбца равна нулю. Из этого следует, что независимыми являются только 3 из 4 строк таблицы. Матрица соединений  $[A]$  «узлы-ветви» (таблица 2) получается из приведенной выше таблицы путем вычеркивания любой строки (например, строки №4):

Т а б л и ц а 2

№ узла \ № ветви	1	2	3	4	5	6
1	1	-1		1		
2	-1		-1		1	
3		1	1			-1

Размерность матрицы соединений  $[A]$  «узлы-ветви» равна  $[(n-1) \times m]$ , где  $n-1$  – число независимых узлов,  $m$  – число ветвей.

Независимыми называются контуры графа, образованные одной из хорд и ветвями дерева. Число независимых контуров соответствующих числу хорд графа:  $k = m - (n-1) = 3$ , контуры нумеруются по номеру хорды (1, 2, 3). Направление обхода контура принимается по направлению хорды, которая входит в состав этого контура.

Составим таблицу соединений «контур-ветви», руководствуясь следующими правилами:

- 1 – направление ветви совпадает с направлением обхода контура,
- 1 – направление ветви не совпадает с направлением обхода контура,
- 0 – ветвь не входит в контур.

Т а б л и ц а 3

№ контура \ № ветви	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	-1	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	1	1

Данная таблица получила название матрицы соединений  $[B]$  – «контуры-ветви». Размерность матрицы соединений  $[B]$  равна  $[k \times m]$ , где  $k = m - (n - 1)$  – число независимых контуров,  $m$  – число ветвей.

Если матрицы соединений  $[A]$  и  $[B]$  составлены верно, то должно выполняться условие:  $[B] \cdot [A]^T = 0$ .

## 7.2 Уравнения Ома и Кирхгофа в матричной форме

Если в исследуемой сложной схеме содержатся параллельно включенные ветви, то для составления матриц соединений такие ветви необходимо заменить (объединить) одной эквивалентной ветвью.

В общем случае любая ветвь схемы кроме комплексного сопротивления (проводимости)  $\underline{Z}_k = \frac{1}{\underline{Y}_k}$  может содержать источник ЭДС  $\underline{E}_k$ , источник тока  $\underline{J}_k$ . Схема и граф обобщенной ветви показаны на рисунке 84а, б:

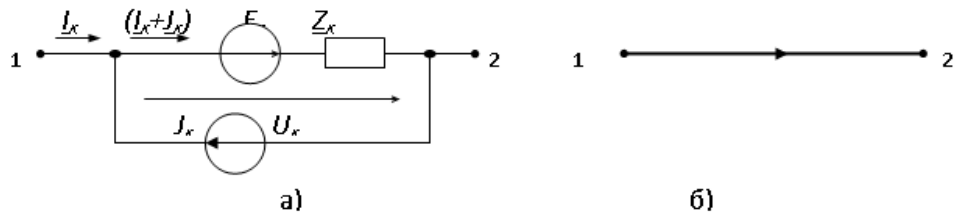


Рисунок 84

Ток ветви  $\underline{I}_k$ , напряжение ветви  $\underline{U}_k = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Из потенциального уравнения ветви  $\varphi_1 = \underline{E} - (\underline{I}_k = \underline{J}_k) \cdot \underline{Z}_k = \varphi_2$  следуют:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_k &= \underline{Z}_k \cdot \underline{I}_k + \underline{Z}_k \cdot \underline{J}_k - \underline{E}_k \\ \underline{I}_k &= \underline{Y}_k \cdot \underline{U}_k + \underline{Y}_k \cdot \underline{E}_k - \underline{J}_k \end{aligned} \right\} \text{ – уравнения Ома для } k\text{-ой ветви.}$$

Для всех « $m$ » ветвей составим систему уравнений по этой форме:

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{J}_1 - \underline{E}_1 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{J}_2 - \underline{E}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{U}_m &= \underline{Z}_m \cdot \underline{I}_m + \underline{Z}_m \cdot \underline{J}_m - \underline{E}_m \end{aligned} \right.$$

Заменим полученную систему из « $m$ » уравнений матричной формой. Для этой цели введем следующие обозначения матриц:

$$[\underline{U}] = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \dots \\ \underline{U}_m \end{bmatrix}; [\underline{I}] = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \dots \\ \underline{I}_m \end{bmatrix}; [\underline{J}] = \begin{bmatrix} \underline{J}_1 \\ \underline{J}_2 \\ \dots \\ \underline{J}_m \end{bmatrix}; [\underline{E}] = \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \dots \\ \underline{E}_m \end{bmatrix} - \text{столбцовые матрицы}$$

соответственно напряжений, токов, источников тока и источников ЭДС.

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{Z}_m \end{bmatrix}; [\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{Y}_m \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} - \text{диагональные} \\ \text{матрицы} \\ \text{соответственно} \\ \text{сопротивлений и} \\ \text{проводимостей.} \end{array}$$

Уравнения Ома в матричной форме получают вид:

$$\begin{cases} [\underline{U}] = [\underline{Z}] \cdot [\underline{I}] + [\underline{Z}] \cdot [\underline{J}] - [\underline{E}] \\ [\underline{I}] = [\underline{Y}] \cdot [\underline{U}] + [\underline{Y}] \cdot [\underline{E}] - [\underline{J}] \end{cases}$$

Уравнения Кирхгофа в обычной форме имеют вид:  $\sum \underline{I} = 0$  – первый закон Кирхгофа для узлов,  $\sum \underline{U} = 0$  – второй закон Кирхгофа для контуров.

Система уравнений Кирхгофа в матричной форме получается через матрицы соединений  $[\underline{A}]$  и  $[\underline{B}]$ :

$$\left. \begin{array}{l} [\underline{A}] \cdot [\underline{I}] = 0 - (n - 1) - \text{уравнений} \\ [\underline{B}] \cdot [\underline{U}] = 0 - m - (n - 1) - \text{уравнений} \end{array} \right\} - "m" \text{ уравнений}$$

Составленная система уравнений содержит “ $m$ ” неизвестных токов и “ $m$ ” неизвестных напряжений, всего  $2“m”$  неизвестных, и непосредственно не может быть решена.

Сделаем подстановку матрицы  $[\underline{U}]$  из матричных уравнений закона Ома, получим:

$$\begin{array}{l} [\underline{A}] \cdot [\underline{I}] = 0 \\ [\underline{B}] \cdot [\underline{Z}] \cdot [\underline{I}] = [\underline{B}] \cdot [\underline{E}] - [\underline{B}] \cdot [\underline{Z}] \cdot [\underline{J}] \end{array} \quad \begin{array}{l} - \text{“}m\text{”} \text{ уравнений} \\ \text{Кирхгофа для токов в} \\ \text{матричной форме.} \end{array}$$

Для сравнения приведем те же уравнения в обычной форме:

$$\begin{array}{l} \sum \underline{I} = 0 \\ \sum \underline{I} \cdot \underline{Z} = \sum \underline{E} - \sum \underline{J} \cdot \underline{Z} \end{array}$$

Сделаем подстановку матрицы  $[\underline{I}]$  из матричного уравнения закона Ома, получим:

$$\begin{array}{l} [\underline{A}] \cdot [\underline{Y}] \cdot [\underline{U}] = [\underline{A}] \cdot [\underline{J}] - [\underline{A}] \cdot [\underline{Y}] \cdot [\underline{E}] \\ [\underline{B}] \cdot [\underline{U}] = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} - \text{“}m\text{”} \text{ уравнений Кирхгофа} \\ \text{для напряжений в матричной} \\ \text{форме.} \end{array}$$

Для сравнения приведем те же уравнения в обычной форме:

$$\begin{cases} \sum \underline{U} \cdot \underline{Y} = \sum \underline{J} - \sum \underline{E} \cdot \underline{Y} \\ \sum \underline{U} = 0 \end{cases}$$

### 7.3 Контурные уравнения в матричной форме

Вводим понятия контурных токов  $I_{\kappa}$ . Контурные токи замыкаются по контурам-ячейкам графа, именуются по имени хорды, их направление совпадает с направлением хорды. Столбовая матрица контурных токов:

$$[\underline{I}_{\kappa}] = \begin{bmatrix} \underline{I}_{\kappa 1} \\ \underline{I}_{\kappa 2} \\ \dots \\ \underline{I}_{\kappa(m-n+1)} \end{bmatrix}$$

Действительные токи связаны с контурными через матрицу  $[B]$ :

$$[\underline{I}] = [B]^T \cdot [\underline{I}_{\kappa}]$$

Заменим в уравнениях 2-го закона Кирхгофа действительные токи  $[\underline{I}]$  на контурные  $[\underline{I}_{\kappa}]$  согласно формуле:

$$[B] \cdot [Z][B]^T \cdot [\underline{I}_{\kappa}] = [B] \cdot [\underline{E}] - [B] \cdot [Z] \cdot [J] \quad \text{— система контурных уравнений в матричной форме.}$$

Введем обозначения:

$$[\underline{Z}_{\kappa}] = [B] \cdot [Z][B]^T = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \dots \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \text{— матрица контурных сопротивлений}$$

$$[\underline{E}_{\kappa}] = [B] \cdot [\underline{E}] - [B] \cdot [Z] \cdot [J] = \begin{bmatrix} \underline{E}_{11} \\ \underline{E}_{22} \\ \dots \end{bmatrix} \quad \text{— матрица контурных ЭДС}$$

$[\underline{Z}_{\kappa}] \cdot [\underline{I}_{\kappa}] = [\underline{E}_{\kappa}]$  — система контурных уравнений в обобщенной матричной форме.

### 7.4 Узловые уравнения в матричной форме

Вводим понятие узловых потенциалов  $\varphi_y$ . Потенциал последнего  $n$ -го узла, для которого отсутствует строка в матрице  $[A]$  принимается равным 0. Столбовая матрица узловых потенциалов:

$$\begin{bmatrix} \underline{\varphi}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_{y1} \\ \underline{\varphi}_{y2} \\ \dots \\ \underline{\varphi}_{y(n-1)} \end{bmatrix}$$

Напряжения ветвей связаны с потенциалами узлов через матрицу  $[A]$ .

$$[\underline{U}] = [A]^T \cdot [\underline{\varphi}_y]$$

Подставим в уравнения 1-го закона Кирхгофа  $[\underline{U}] = [A]^T \cdot [\underline{\varphi}_y]$ , получим:

Введем обозначения:

$$[J_y] = [A] \cdot [J] - [A] \cdot [Y] \cdot [E] = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ \dots \end{bmatrix} - \text{матрица узловых проводимостей}$$

$$[J_y] = [A] \cdot [J] - [A] \cdot [Y] \cdot [E] = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ \dots \end{bmatrix} - \text{матрица узловых токов.}$$

$[\underline{Y}_y] \cdot [\underline{\varphi}_y] = [\underline{J}_y]$  – система узловых уравнений в обобщенной матричной форме.

## 2 семестр

### 8 Электрические цепи трехфазного тока

#### 8.1 Трехфазная система

Многофазной системой называется совокупность, состоящая из "n" отдельных одинаковых электрических цепей или электрических схем, режимные параметры в которых ( $e$ ,  $u$ ,  $i$ ) сдвинуты во времени на равные отрезки  $\Delta t = T/n$  или по фазе  $\Delta \omega t = 2\pi/n = 360^\circ/n$ .

Отдельные части системы называются фазами. Термин "фаза" в электротехнике имеет два смысловых значения: первое – как момент времени для синусоидальной функции тока или напряжения, второе – как часть многофазной системы. В технике нашли применение 2-х, 3-х, 6-и и более фазные системы. В электроэнергетике наибольшее распространение получила трехфазная система, обладающая рядом преимуществ перед системами с другим числом фаз.

Трехфазная система состоит из трех электрических цепей или электрических схем (фаз), параметры режима ( $u, i$ ) в которых сдвинуты во времени на  $\Delta \omega t = 2\pi/3 = 360^\circ/3 = 120^\circ$ . Отдельные фазы трехфазной системы согласно ГОСТ обозначаются (именуются) заглавными латинскими буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$

(основное обозначение), или цифрами 1, 2, 3 (допустимое обозначение), или заглавными латинскими буквами  $R, S, T$  (международное обозначение).

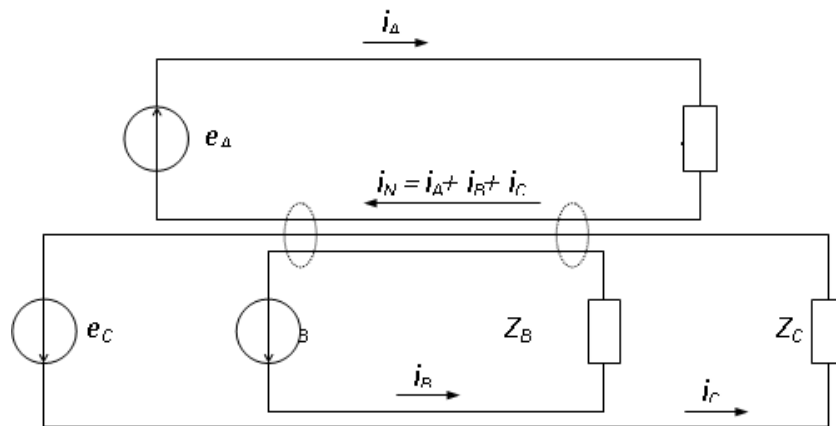


Рисунок 85

Не имеет значения, какую из трех фаз именовать какой буквой  $A, B$  или  $C$ , существенным является их порядок следования друг за другом во времени. Прямым порядком следования фаз называется  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ , при котором параметры режима ( $u, i$ ) в фазе  $B$  отстают от аналогичных параметров в фазе  $A$  на  $120^\circ$ , а в фазе  $C$  – опережают на  $120^\circ$ . При обратном порядке следования фаз  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  параметры режима в фазе  $C$  отстают от аналогичных параметров в фазе  $A$  на  $120^\circ$ , а в фазе  $B$  – опережают на  $120^\circ$ .

Если отдельные фазы системы работают изолированно и независимо друг от друга, то система называется несвязанной. Рассмотрим работу простейшей несвязанной трехфазной системы (рисунок 85). Мгновенные значения фазных ЭДС генератора сдвинуты во времени на  $120^\circ$  в порядке следования фаз  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ :

$$e_A = E_m \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{E}_A = E e^{j0};$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ) \Leftrightarrow \underline{E}_B = E e^{-j120^\circ}$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t - 240^\circ) = E_m \sin(\omega t + 120^\circ) \Leftrightarrow \underline{E}_C = E e^{j120^\circ}$$

Графические диаграммы этих функций показаны на рисунке 86, а векторные – на рисунке 87.

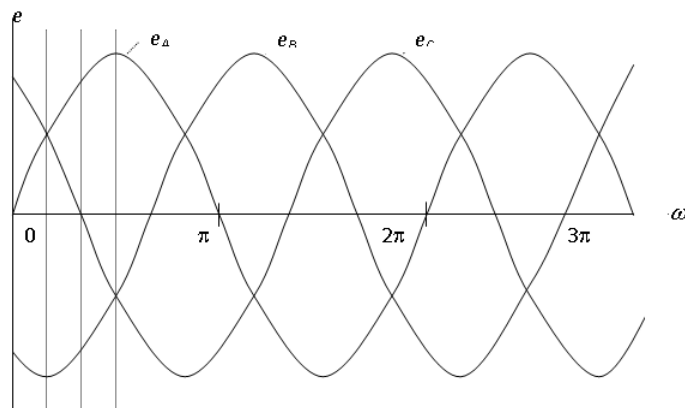


Рисунок 86

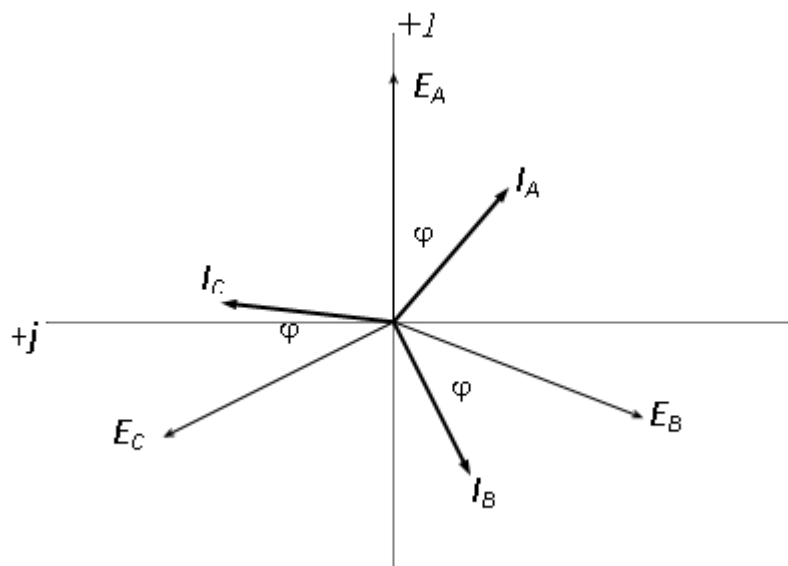


Рисунок 87

Основное свойство любых переменных функций ( $e$ ,  $u$ ,  $i$ ) в симметричной трехфазной системе состоит в том, что сумма их мгновенных значений в любой момент времени равна нулю, например,  $e_A + e_B + e_C = 0$ . Найдём эту сумму для разных моментов времени:

$$\omega t = 0, \quad e_A + e_B + e_C = E_m \sin(0) + E_m \sin(-120^\circ) + E_m \sin(120^\circ) = E_m \left( 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0;$$

$$\omega t = 30^\circ, \quad e_A + e_B + e_C = E_m \sin(30^\circ) + E_m \sin(-90^\circ) + E_m \sin(150^\circ) = E_m \left( \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right) = 0;$$

$$\omega t = 60^\circ, \quad e_A + e_B + e_C = E_m \sin(60^\circ) + E_m \sin(-60^\circ) + E_m \sin(180^\circ) = E_m \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \right) = 0.$$

Как следует из векторной диаграммы (рисунок 87), геометрическая сумма векторов фазных ЭДС также равна нулю:

$$E_A + E_B + E_C = Ee^{j^\circ} + Ee^{-j120^\circ} + Ee^{j120^\circ} = E(e^{j^\circ} + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ}) = E \cdot 0 = 0.$$

Если нагрузка отдельных фаз равна между собой, т.е.  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = Ze^{j\varphi}$ , то фазные токи будут равны по модулю и сдвинуты по фазе относительно своих ЭДС (напряжений) на один и тот же угол  $\varphi$ , а между собой, как и ЭДС, будут сдвинуты по фазе на  $120^\circ$ . Следовательно, фазные токи  $i_A$ ,  $i_B$ ,  $i_C$  образуют симметричную трехфазную систему и для них будут справедливы полученные ранее выводы:  $i_A + i_B + i_C = 0$ ;  $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$ .

Преобразуем несвязанную трехфазную систему (рисунок 81) в связанную путем объединения трех обратных приводов в один общий привод. Согласно 1-ому закону Кирхгофа в общем проводе должен протекать суммарный ток  $i_N = i_A + i_B + i_C = 0$ . Это означает, что потребность в обратном проводе вообще отпадает, благодаря чему достигается значительная экономия проводов при передаче энергии от трехфазного генератора к приемнику.

Достоинства трехфазной системы:

1) Передача энергии от генератора к потребителям трехфазным током наиболее выгодна экономически, чем при любом другом числе фаз. Например, по сравнению с двухпроводной системой достигается экономия проводов в два раза (3 провода вместо 6), соответственно уменьшаются потери энергии в проводах линии.

2) Трехфазная система позволяет технически просто получить круговое вращающееся поле, которое лежит в основе работы всех трехфазных машин (генераторов и двигателей).

3) Элементы трехфазной системы (генераторы, трансформаторы, двигатели) просты по конструкции, надежны в работе, имеют хорошие массогабаритные показатели, сравнительно дешевы, долговечны.

4) На выходе трехфазных генераторов имеется два уровня выходного напряжения – линейное и фазное, отличающиеся в  $\sqrt{3}$  раз ( $U_{\text{л}}/U_{\text{ф}} = \sqrt{3}$ ), что позволяет подключать к такому генератору приемники с различными номинальными напряжениями.

Благодаря своим достоинствам трехфазная система применяется в электроэнергетике для производства, передачи, распределения и потребления электрической энергии.

Трехфазная система и ее основные звенья – генератор, трансформатор, линия электропередачи, двигатель – были разработаны в 1889 году инженером Доливо-Добровольским (фирма Сименс и Шукерт). Создание этой системы явилось важным событием в истории развития теоретической и прикладной электротехники.

## 8.2 Способы соединения обмоток трехфазных генераторов

В обмотках трехфазного генератора индуктируются синусоидальные ЭДС, сдвинутые по фазе на  $120^\circ$ :

$$e_A = E_m \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{E}_A = E_\phi e^{j0},$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ) \Leftrightarrow \underline{E}_B = E_\phi e^{-j120},$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t + 120^\circ) \Leftrightarrow \underline{E}_C = E_\phi e^{j120},$$

Между собой фазные обмотки генератора могут соединяться по двум различным схемам: звездой ( $\star$ ) и треугольником ( $\Delta$ ).

При соединении в звезду концы фазных обмоток (фаз) генератора соединяются в общую точку  $N$ , которая называется нулевой или нейтральной, а начала обмоток служат линейными выводами генератора  $A, B, C$  (рисунок 88).

Векторная диаграмма напряжений трехфазного генератора при соединении его фазных обмоток в звезду показана на рисунке 89а, б.

В трехфазном генераторе различают фазные и линейные напряжения. Фазными называются напряжения между началами и концами фазных обмоток или между одним из линейных выводов  $A, B, C$  и нулевым выводом  $N$ . Фазные напряжения равны фазным ЭДС:  $\underline{U}_A = \underline{E}_A, \underline{U}_B = \underline{E}_B, \underline{U}_C = \underline{E}_C$  (индекс

При фазных напряжениях опускается, так как  $\varphi_N = 0$ ). Линейными называются напряжения между двумя линейными выводами  $A, B, C$ . Линейные напряжения равны векторной разности двух фазных напряжений:  $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B$ ;  $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C$ ;  $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A$ .

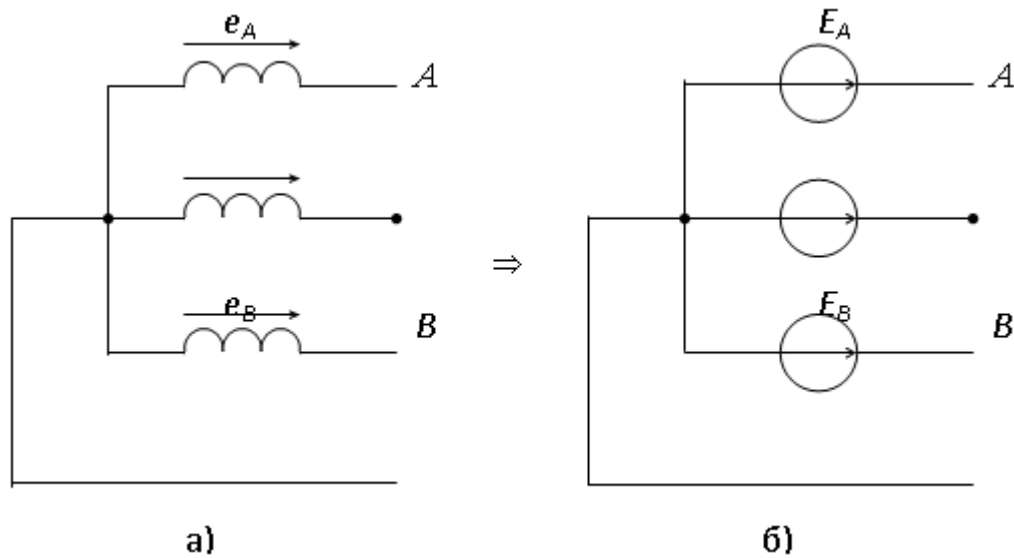


Рисунок 88

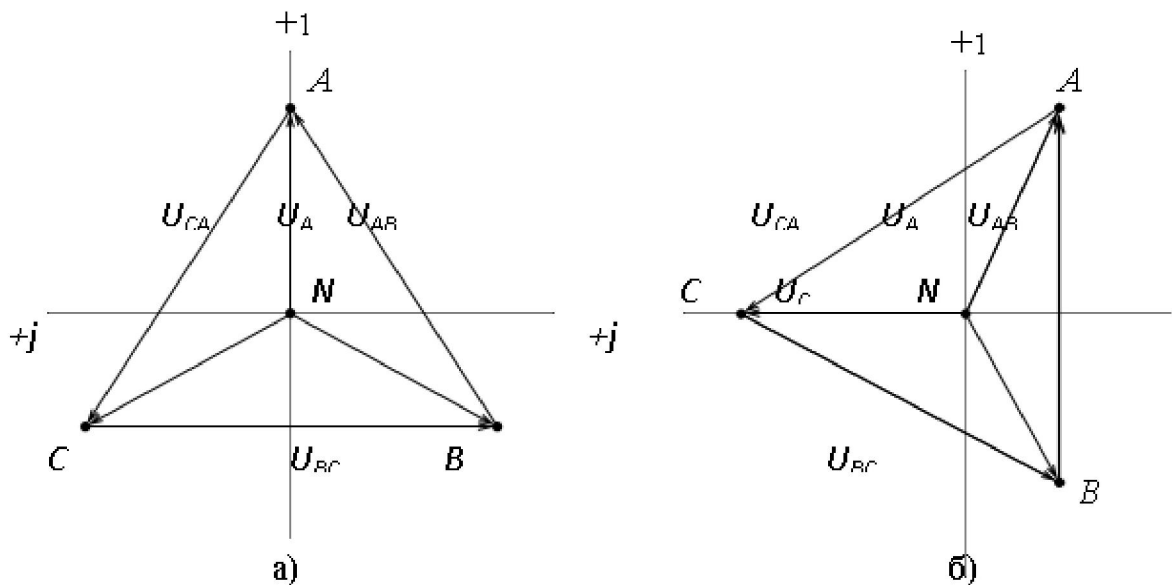


Рисунок 89

При расчете трехфазных цепей комплексным методом фазные и линейные напряжения генератора представляются в комплексной форме, при этом один из векторов системы принимают за начальный и совмещают его с вещественной осью, а остальные вектора получают начальные фазы согласно их углам сдвига по отношению к начальному вектору. На рисунке 89а показан вариант представления напряжений трехфазного генератора в комплексной форме, когда за начальный вектор принимается фазное напряжение фазы  $A$ . В этом случае фазные напряжения генератора в комплексной форме получают вид

:  $\underline{U}_A = \underline{U}_\phi e^{j^\circ}$ ,  $\underline{U}_B = \underline{U}_\phi e^{-j120^\circ}$ ,  $\underline{U}_C = \underline{U}_\phi e^{+j120^\circ}$ , линейные напряжения:  $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_L e^{j30^\circ}$ ,  $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_L e^{-j90^\circ}$ ,  $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_L e^{j150^\circ}$ .

На рисунке 89б показан другой вариант представления напряжений трехфазного генератора в комплексной форме, когда за начальный вектор принимается линейное напряжение  $\underline{U}_{AB}$ . В этом случае фазные напряжения генератора в комплексной форме получают вид:  $\underline{U}_A = \underline{U}_\phi e^{-j30^\circ}$ ,  $\underline{U}_B = \underline{U}_\phi e^{-j150^\circ}$ ,  $\underline{U}_C = \underline{U}_\phi e^{+j90^\circ}$ , линейные напряжения:  $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_L e^{j0^\circ}$ ,  $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_L e^{-j120^\circ}$ ,  $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_L e^{j120^\circ}$ .

Из геометрии (рисунок 89) получаем соотношение между модулями линейного и фазного напряжений:  $U_L = 2U_\phi \cos 30^\circ = 2U_\phi \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} U_\phi$ .

Обмотки трехфазного генератора теоретически можно включать по схеме треугольника. В такой схеме конец каждой предыдущей фазы соединяется с началом последующей, а точки соединения служат линейными выводами генератора (рисунок 90).

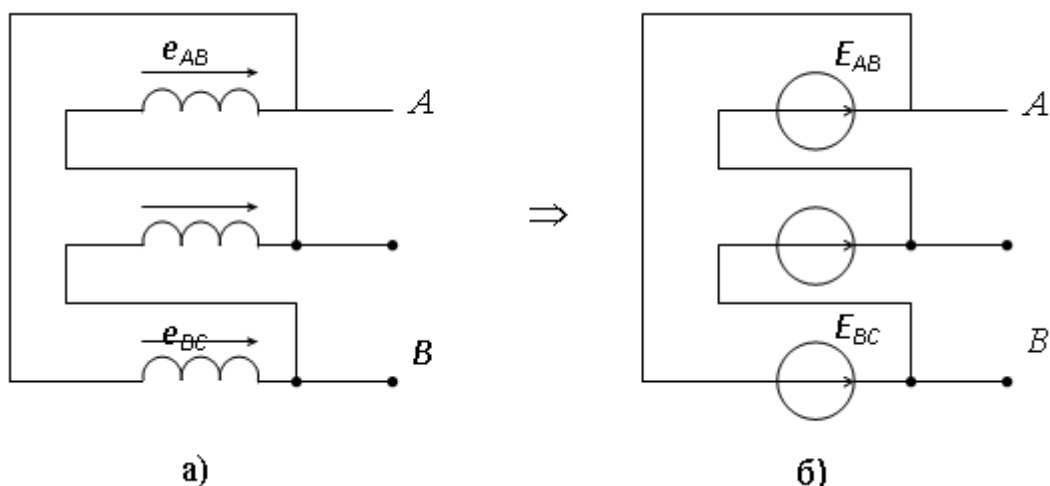


Рисунок 90

При соединении фаз в треугольник в его контуре действует сумма фазных ЭДС:  $\sum e = e_{AB} + e_{BC} + e_{CA}$ . В реальных трехфазных генераторах технически невозможно обеспечить равенство нулю для суммарной ЭДС. Так как собственные сопротивления обмоток генератора малы, то даже незначительная по величине суммарная ЭДС  $\sum e > 0$  может вызвать в контуре треугольника уравнивающий ток, соизмеримый с номинальным током генератора, что привело бы к дополнительным потерям энергии и снижению КПД генератора. По этой причине обмотки трехфазных генераторов запрещается соединять по схеме треугольника.

Номинальным напряжением в трехфазной системе называется линейное напряжение. Номинальное напряжение принято выражать в киловольтах (кВ). Шкала номинальных трехфазных напряжений, применяемых на практике, имеет вид: 0,4; 1,1; 3,5; 6,3; 10,5; 22; 35; 63; 110; 220; 330; 500; 750. На

потребительском уровне номинальное трехфазное напряжение может указываться в виде отношения  $U_L/U_\phi$ , например:  $U_L/U_\phi = 380/220$  В.

### 8.3 Способы соединения фаз трехфазных приемников

Приемники трехфазного тока могут подключаться к генератору по двум схемам – звезды ( $\perp$ ) и треугольника ( $\Delta$ ). Как известно, на выходе трехфазного генератора получаются два напряжения (линейное и фазное), отличающиеся в  $U_L/U_\phi = \sqrt{3}$  раз. С другой стороны каждый приёмник энергии рассчитан на работу при определенном напряжении, которое называется номинальным. Схема соединения фаз приемника должна обеспечить подключение его фаз номинальное фазное напряжение. Таким образом, выбор схемы соединения фаз трехфазного приемника зависит от соотношения номинальных напряжений приемника и генератора (сети). Схема звезды применяется в том случае, если номинальное напряжение приемника соответствует (равно) фазному напряжению генератора. При соединении в звезду концы фаз приемника объединяются в одну точку “ $n$ ”, называемую нулевой или нейтральной, а начала фаз подключаются к линейным выводам трехфазного генератора  $A, B, C$  линейными проводами. Если нулевая точка приемника “ $n$ ” соединена с нулевой точкой генератора “ $N$ ” нулевым проводом, то схема получила название звезды с нулевым проводом (рисунок 91а). При отсутствии нулевого провода схема носит название звезды без нулевого провода (рисунок 91б).

Токи, протекающие в линейных проводах по направлению от генератора к приемнику, называются линейными.

Токи, протекающие в фазах приемника по направлению от начал к концам, называются фазными. В схеме звезды фазы приемника включены последовательно с линейными проводами и по ним протекают одни и те же токи ( $I_A, I_B, I_C$ ). Поэтому для схемы звезды понятия линейные и фазные токи тождественны:  $I_L = I_\phi$ .

Ток, протекающий в нулевом проводе от приемника к генератору, называется нулевым или нейтральным ( $I_N$ ).

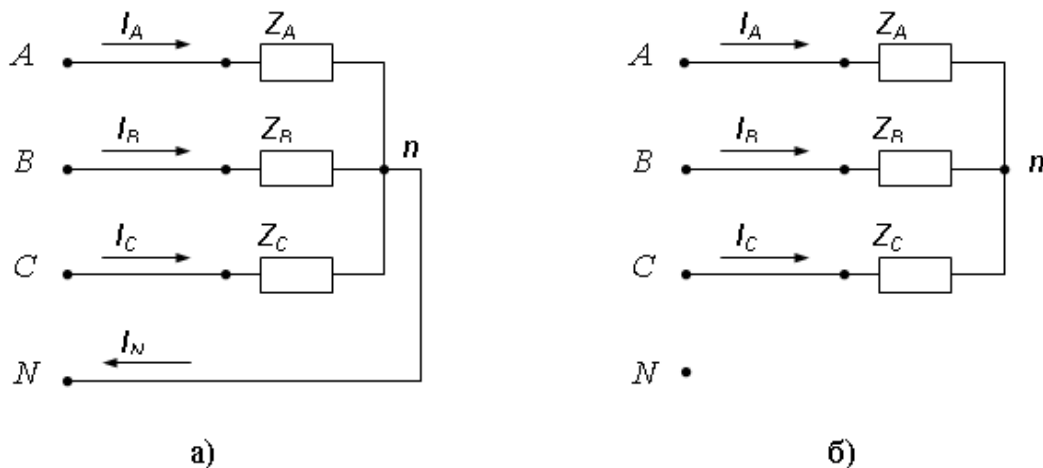


Рисунок 91

Напряжения между началами и концами фаз приемника называются фазными ( $\underline{U}_{An}, \underline{U}_{Bn}, \underline{U}_{Cn}$ ), а напряжения между началами фаз – линейными ( $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ ). Линейные напряжения приемника и генератора тождественно равны.

В схеме звезды с нулевым проводом (рисунок 91а) к каждой фазе приемника подводится непосредственно фазное напряжение генератора ( $\underline{U}_{AN} = \underline{U}_{An} = \underline{U}_A, \underline{U}_{BN} = \underline{U}_{Bn} = \underline{U}_B, \underline{U}_{CN} = \underline{U}_{Cn} = \underline{U}_C$ ), каждая из фаз при этом работает независимо друг от друга, а линейные (фазные) токи определяются по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C}.$$

Ток в нулевом проводе в соответствии с первым законом Кирхгофа равен геометрической сумме линейных (фазных) токов:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C.$$

**Пример.** Исходные данные:  $U_L / U_\Phi = 380 / 220$  В,  $\underline{Z}_A = 100e^{j35}$  Ом,  $\underline{Z}_B = 110e^{j20}$  Ом,  $\underline{Z}_C = 140e^{j35}$  Ом. Определить линейные (фазные) токи  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$  и ток в нулевом проводе  $\underline{I}_N$ .

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220e^{j0}}{100e^{j35}} = 2,20e^{-j35} \text{ А},$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{220e^{-j120}}{110e^{j20}} = 2,00e^{-j140} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{220e^{j120}}{140e^{j35}} = 1,57e^{j85} \text{ А},$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 2,20e^{-j35} + 2,00e^{-j140} + 1,57e^{j85} = 1,06e^{-j67,5} \text{ А}.$$

Векторная диаграмма токов и напряжений показана на рисунке 92.

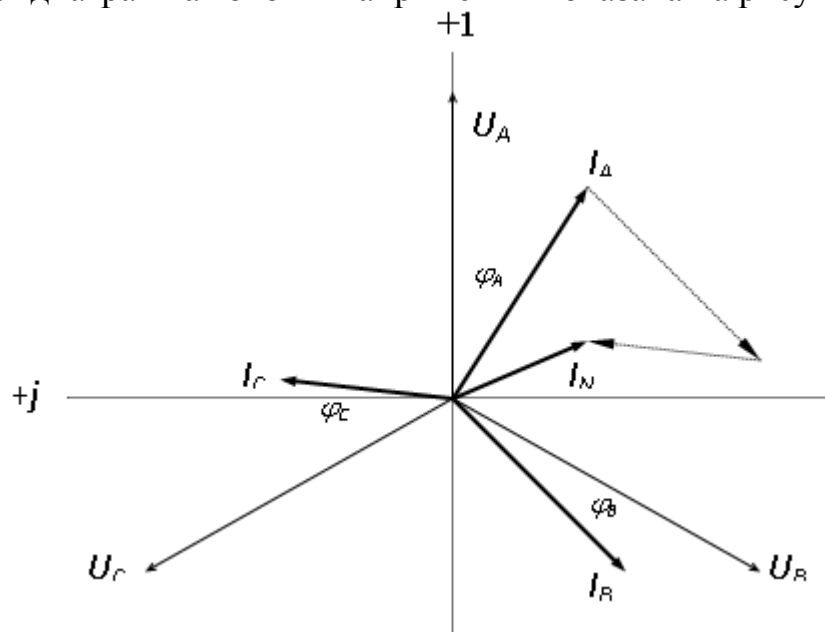


Рисунок 92

При симметричной нагрузке  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = Z_\phi e^{j\varphi}$  ток в нулевом проводе  $\underline{I}_N = 0$  и, следовательно, надобность в нем отпадает. Симметричные трехфазные приемники (например, трехфазные электродвигатели) включаются по схеме звезды без нулевого провода.

При несимметричной нагрузке относительная величина тока в нулевом проводе зависит от характера и степени не симметрии фазных токов. Как правило, трехфазные приёмники стремятся спроектировать по возможности близкими к симметричным, поэтому ток в нулевом проводе в реальных условиях значительно меньше линейных (фазных) токов.

В схеме звезды без нулевого провода (рисунок 91б) при любой нагрузке фаз должно выполняться условие первого закона Кирхгофа:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

Из уравнения следует вывод, что изменение одного из токов влечет изменение двух других токов, то есть отдельные фазы работают в зависимом друг от друга режиме. При несимметричной нагрузке потенциал нулевой точки приемника  $\underline{U}_n$  становится не равным нулю, он “смещается” на комплексной плоскости с нулевого положения, при этом фазные напряжения приемника ( $\underline{U}_{An}, \underline{U}_{Bn}, \underline{U}_{Cn}$ ) не равны соответствующим фазным напряжениям генератора ( $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ ), происходит так называемый перекося фазных напряжений приемника (рисунок 93).

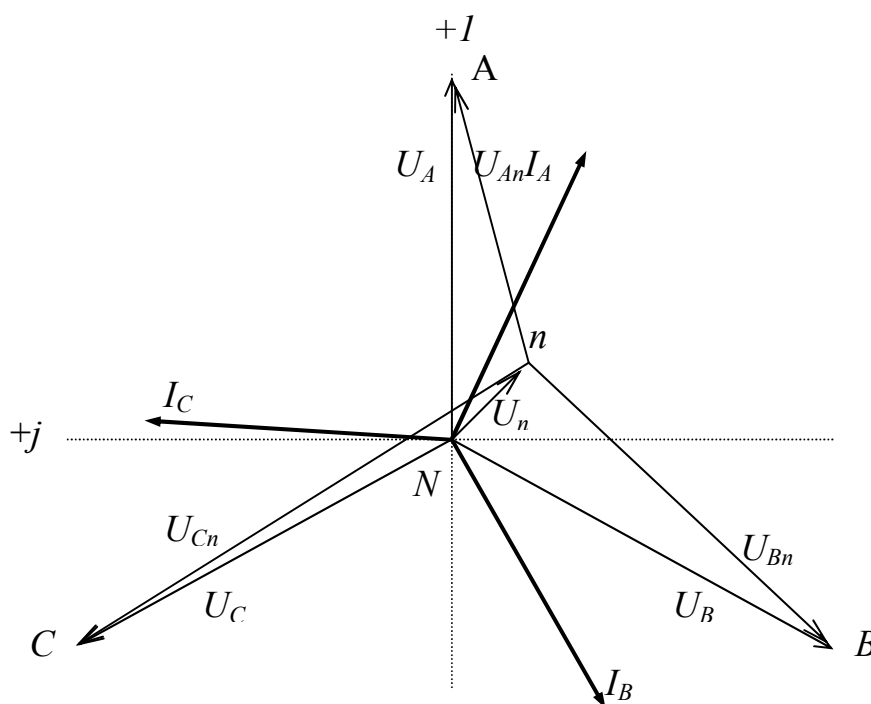


Рисунок 93

Расчет токов и напряжений в схеме звезды без нулевого провода выполняется в следующей последовательности.

Определяется напряжение (потенциал) нейтральной точки приемника по методу двух узлов:

$$\underline{U}_n = \frac{\underline{U}_A / \underline{Z}_A + \underline{U}_B / \underline{Z}_B + \underline{U}_C / \underline{Z}_C}{1 / \underline{Z}_A + 1 / \underline{Z}_B + 1 / \underline{Z}_C + 1 / \underline{Z}_N},$$

где  $\underline{Z}_N$  – комплексное сопротивление нулевого провода, при его отсутствии  $\underline{Z}_N = \infty$ .

Фазные напряжения приемника определяются как разности потенциалов соответствующих точек:

$$\underline{U}_{An} = \underline{U}_A - \underline{U}_n, \quad \underline{U}_{Bn} = \underline{U}_B - \underline{U}_n, \quad \underline{U}_{Cn} = \underline{U}_C - \underline{U}_n.$$

Фазные токи приемника определяются по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{An}}{\underline{Z}_A}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{Bn}}{\underline{Z}_B}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{Cn}}{\underline{Z}_C}$$

Комплексные мощности фаз приемника:

$$\underline{S}_A = P_A + jQ_A = \underline{U}_{An} \cdot \underline{I}_A^*, \quad \underline{S}_B = P_B + jQ_B = \underline{U}_{Bn} \cdot \underline{I}_B^*,$$

$$\underline{S}_C = P_C + jQ_C = \underline{U}_{Cn} \cdot \underline{I}_C^*.$$

Режим работы приемника с перекосом фазных напряжений является ненормальным и может привести его к выходу из строя. По этой причине несимметричную трехфазную нагрузку запрещается включать по схеме звезды без нулевого провода (например, осветительную нагрузку).

Схема треугольника применяется в том случае, если номинальное фазное напряжение приемника соответствует (равно) линейному напряжению генератора. При соединении в треугольник конец каждой фазы соединяется с началом последующей, а точки соединения (вершины треугольника) подключаются к линейным выводам трехфазного генератора  $A, B, C$  линейными проводами (рисунок 94).

Токи, протекающие в фазах приемника по направлению от их начал к концам, называются фазными ( $\underline{I}_{AB}, \underline{I}_{BC}, \underline{I}_{CA}$ ). Токи, протекающие в линейных проводах по направлению от генератора к приемнику, называются линейными ( $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ ).

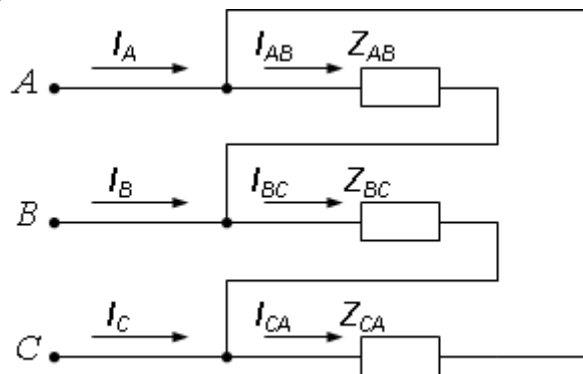


Рисунок 94

В схеме треугольника фазные и линейные напряжения приемника тождественно равны ( $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ ). В этой схеме к каждой фазе приемника

подводится непосредственно линейное напряжение генератора, при этом отдельные фазы работают независимо друг от друга. Фазные токи определяются по закону Ома:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \quad \underline{I}_{BC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; \quad \underline{I}_{CA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CB}}.$$

Линейные токи определяются из уравнений первого закона Кирхгофа для вершин треугольника, они равны геометрической разности фазных токов:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC}.$$

В симметричном режиме ( $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\phi e^{j\varphi}$ ) фазные и линейные токи симметричны, при этом отношение их модулей составляет  $I_L / I_\phi = \sqrt{3}$ .

При несимметричной нагрузке соотношение между линейными и фазными токами определяется уравнениями первого закона Кирхгофа. На рисунке 95 показана векторная диаграмма токов и напряжений для произвольной трехфазной цепи при соединении фаз в треугольник.

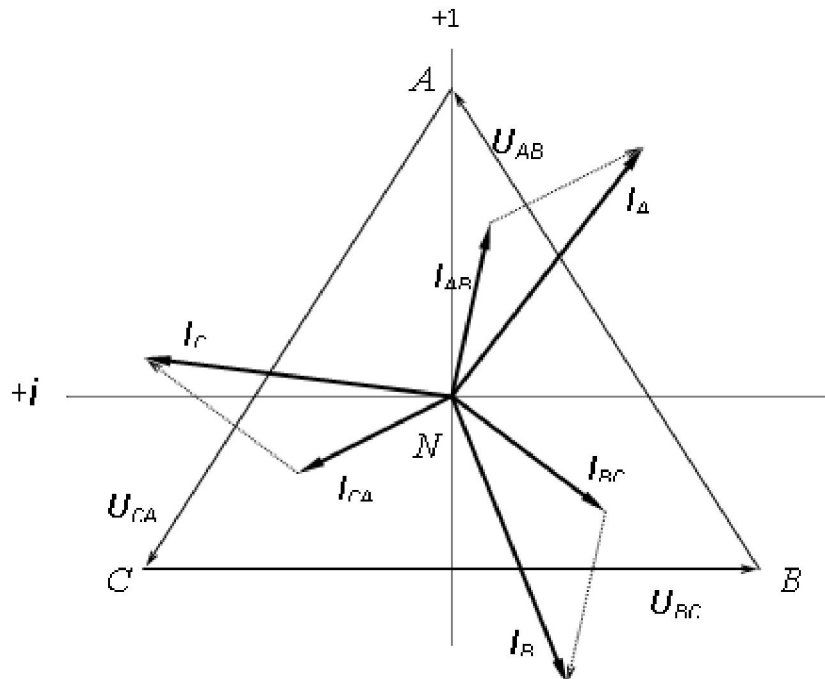


Рисунок 95

## 8.4 Расчет сложных трехфазных цепей

Сложная трехфазная цепь, например, объединенная энергосистема, может содержать большое число трехфазных генераторов, линий электропередачи, приемников трехфазной энергии. Схема такой цепи представляет собой типичный пример сложной цепи переменного тока. Установившейся режим в такой схеме может быть описан системой алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами, составленных по одному из методов расчета сложных цепей (метод законов Кирхгофа, метод контурных токов, метод

узловых потенциалов). Наиболее рациональным методом расчета таких трехфазных цепей является метод узловых потенциалов, при этом составление уравнений и их решение производится в матричной форме.

В более простых случаях возможно применение любых методов расчета, позволяющих получить экономичное решение задачи. На рисунке 96 представлена схема параллельного подключения нескольких трехфазных приемников с различными схемами соединения фаз к одному генератору. В представленной схеме расчет фазных и линейных токов каждого из приемников может выполняться индивидуально и независимо друг от друга, а линейные токи источника определяются как геометрические суммы токов всех приемников, например,  $\underline{I}_A = \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A3}$ .

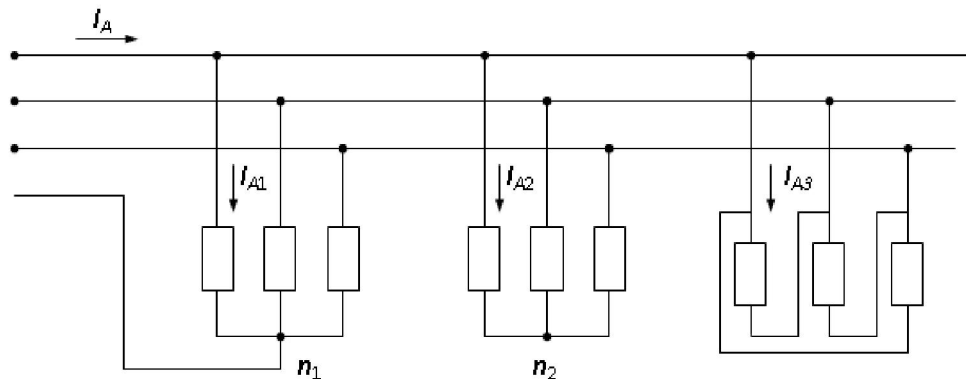


Рисунок 96

Как известно, объединенная трехфазная энергосистема работает в режиме, близком к симметричному. В симметричном режиме токи и напряжения смежных фаз отличаются только углом сдвига на  $\pm 120^\circ$ . Расчет токов и напряжений в установившемся симметричном режиме производится только для одной из фаз, например для фазы  $A$ , при этом трехфазные цепи представляются однофазными эквивалентными схемами. На рисунке 97 представлена символьная схема передачи энергии от трехфазного генератора к удаленным приемникам, а на рисунке 98 – расчетная однофазная схема для той же цепи. На расчетной схеме рисунка 98 каждому звену электропередачи соответствует его стандартная схема замещения.

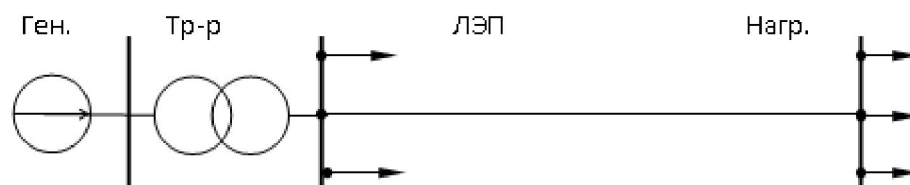


Рисунок 97

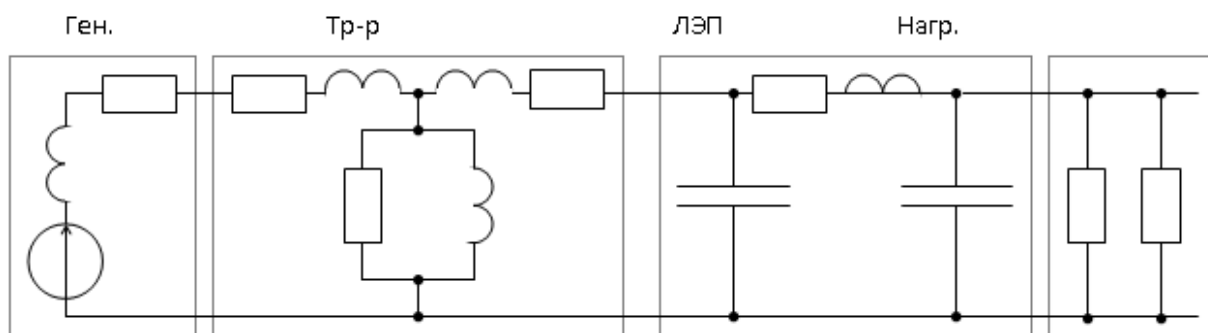


Рисунок 98

В результате расчетов определяются токи и напряжения во всех элементах схемы для фазы  $A$ , например  $\underline{I}_A = \underline{I}e^{j\alpha}$ . Аналогичные токи и напряжения в фазе  $B$  определяется умножением соответствующих величин фазы  $A$  на поворотный множитель  $e^{-j120^\circ}$ , а для фазы  $C$  – на множитель  $e^{j120^\circ}$ , например:

$$\begin{aligned}\underline{I}_B &= \underline{I}_A \cdot e^{-j120^\circ} = I \cdot e^{j(\alpha-120^\circ)}, \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_A \cdot e^{+j120^\circ} = I \cdot e^{j(\alpha+120^\circ)}.\end{aligned}$$

### 8.5 Мощность трехфазной цепи и способы ее измерения

Активная и реактивная мощности трехфазной цепи, как для любой сложной цепи, равны суммам соответствующих мощностей отдельных фаз:

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C,$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C,$$

где  $I_A, U_A, I_B, U_B, I_C, U_C$  – фазные значения токов и напряжений.

В симметричном режиме мощности отдельных фаз равны, а мощность всей цепи может быть получена путем умножения фазных мощностей на число фаз:

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi,$$

$$Q = 3Q_\phi = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi,$$

$$S = 3S_\phi = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3U_\phi I_\phi.$$

В полученных выражениях заменим фазные величины на линейные. Для схемы звезды верны соотношения  $U_\phi = U_\lambda / \sqrt{3}$ ;  $I_\phi = I_\lambda$ , тогда получим:

$$P = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \cos \varphi = \left(3 \cdot U_\lambda \cdot I_\lambda / \sqrt{3}\right) \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_\lambda \cdot I_\lambda \cdot \cos \varphi.$$

Для схемы треугольника верны соотношения:  $U_\phi = U_\lambda$ ;  $I_\phi = I_\lambda / \sqrt{3}$ , тогда получим:

$$P = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \cos \varphi = \left(3 \cdot U_\lambda \cdot I_\lambda / \sqrt{3}\right) \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_\lambda \cdot I_\lambda \cdot \cos \varphi$$

Следовательно, независимо от схемы соединения (звезда или треугольник) для симметричной трехфазной цепи формулы для мощностей имеют одинаковый вид:

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad [\text{Вт}],$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad [\text{вар}],$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [\text{ВА}].$$

В приведенных формулах для мощностей трехфазной цепи подразумеваются линейные значения величин  $U$  и  $I$ , но индексы при их обозначениях не ставятся.

Активная мощность в электрической цепи измеряется прибором, называемым ваттметром, показания которого определяется по формуле:

$W = U_W \cdot I_W \cdot \cos(\underline{U}_W \wedge \underline{I}_W) = \text{Re}[\underline{U}_W \cdot \underline{I}_W^*]$ , где  $\underline{U}_W$ ,  $\underline{I}_W$  – векторы напряжения и тока, подведенные к обмоткам прибора.

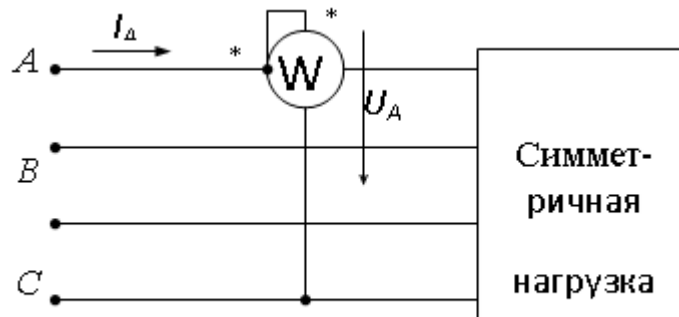


Рисунок 99

Для измерения активной мощности всей трехфазной цепи в зависимости от схемы соединения фаз нагрузки и ее характера применяются различные схемы включения измерительных приборов.

Для измерения активной мощности симметричной трехфазной цепи применяется схема с одним ваттметром, который включается в одну из фаз и измеряет активную мощность только этой фазы (рисунок 99). Активная мощность всей цепи получается путем умножения показания ваттметра на число фаз:  $P = 3 \cdot W = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \cos \varphi$ . Схема с одним ваттметром может быть использована только для ориентированной оценки мощности и неприменима для точных и коммерческих измерений.

Для измерения активной мощности в четырехпроводных трехфазных цепях (при наличии нулевого провода) применяется схема с тремя приборами (рисунок 100), в которой производится измерение активной мощности каждой фазы в отдельности, а мощность всей цепи определяется как сумма показаний трех ваттметров:

$$P = W_1 + W_2 + W_3 = U_A \cdot I_A \cdot \cos \varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \cos \varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \cos \varphi_C.$$

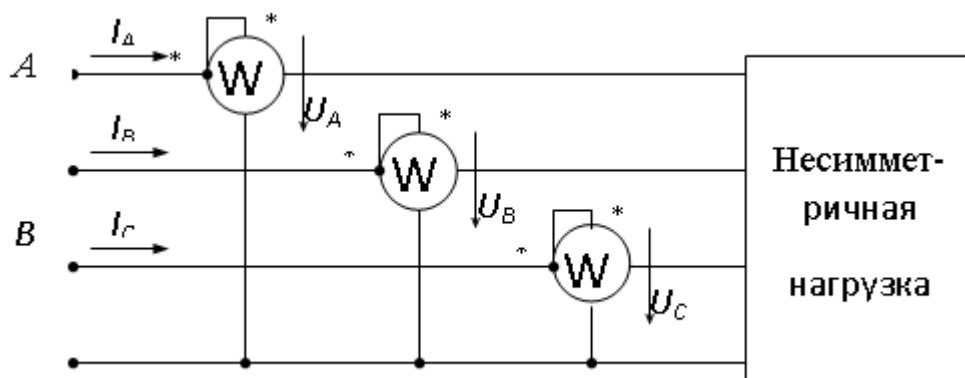


Рисунок 100

Для измерения активной мощности в трехпроводных трехфазных цепях (при отсутствии нулевого провода) применяется схема с двумя приборами (рисунок 101).

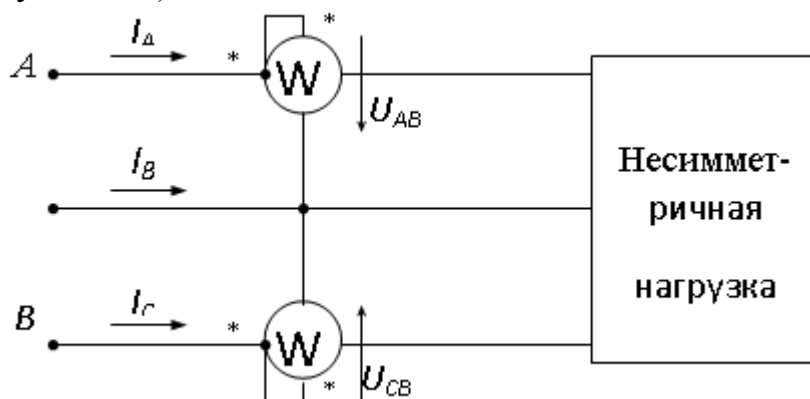


Рисунок 101

При отсутствии нулевого провода линейные (фазные) ток связаны между собой уравнением 1-го закона Кирхгофа:  $\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$ . Сумма показаний двух ваттметров равна:

$$\begin{aligned}
 W_1 + W_2 &= \operatorname{Re}[\underline{U}_{AB} \cdot \underline{I}_A^*] + \operatorname{Re}[\underline{U}_{CB} \cdot \underline{I}_C^*] = \operatorname{Re}[(\underline{U}_A - \underline{U}_B) \cdot \underline{I}_A^* + (\underline{U}_C - \underline{U}_B) \cdot \underline{I}_C^*] = \\
 &= \operatorname{Re}[\underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \cdot (-\underline{I}_A^* - \underline{I}_C^*) + \underline{U}_C \cdot \underline{I}_C^*] = \operatorname{Re}[\underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^*] + \operatorname{Re}[\underline{U}_B \cdot \underline{I}_B^*] + \operatorname{Re}[\underline{U}_C \cdot \underline{I}_C^*] = \\
 &= P_A + P_B + P_C = P
 \end{aligned}$$

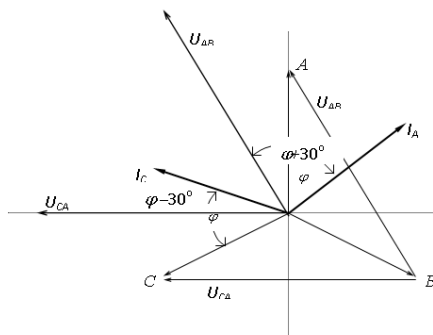


Рисунок 102

Таким образом, сумма показаний двух ваттметров равна активной трехфазной мощности, при этом показание каждого прибора в отдельности зависит не только величины нагрузки но и от ее характера.

На рисунке 102 показана векторная диаграмма токов и напряжений для симметричной нагрузки. Из диаграммы следует, что показания отдельных ваттметров могут быть определены по формулам:

$$W_1 = U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} \cdot \cos(\varphi + 30^\circ),$$

$$W_2 = U_{\text{л}} \cdot I_{\text{л}} \cdot \cos(\varphi - 30^\circ).$$

Анализ полученных выражений позволяет сделать следующие выводы. При активной нагрузке ( $\varphi = 0$ ), показания ваттметров равны ( $W_1 = W_2$ ).

При активно-индуктивной нагрузке ( $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ ) показание первого ваттметра меньше, чем второго ( $W_1 < W_2$ ), а при  $\varphi > 60^\circ$  показание первого ваттметра становится отрицательным ( $W_1 < 0$ ).

При активно-емкостной нагрузке ( $0 \geq \varphi \geq -90^\circ$ ) показание второго ваттметра меньше, чем первого ( $W_1 > W_2$ ), а при  $\varphi < -60^\circ$  показание второго ваттметра становится отрицательным.

## 8.6 Вращающееся магнитное поле

Одним из важнейших достоинств трехфазной системы является возможность получения с ее помощью кругового вращающегося магнитного поля, которое лежит в основе работы трехфазных машин (генераторов и двигателей).

Для получения кругового вращающегося магнитного поля необходимо и достаточно выполнить два условия. Условие первое: необходимо  $3p$  одинаковых катушки ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ) расположить в пространстве так, чтобы их оси были расположены в одной плоскости и сдвинуты взаимно на равные углы  $\Delta\alpha = 360^\circ/3p$ . Условие второе: необходимо пропустить по катушкам равные по амплитуде и сдвинутые во времени на  $\Delta t = T/3$  или  $\Delta\omega t = 360^\circ/3 = 120^\circ$  переменные токи (симметричный трехфазный ток). При соблюдении указанных условий в пространстве вокруг катушек будет создано круговое вращающееся магнитное поле с постоянной амплитудой индукции  $B_{\text{max}}$  вдоль его оси и с постоянной угловой скоростью вращения  $\omega_n$ .

На рисунке 103 показано пространственное расположение трех ( $p = 1$ ) одинаковых катушек под равными углами в  $120^\circ$  согласно первому условию.

По катушкам, по направлению от их начал ( $A, B, C$ ) к концам ( $X, Y, Z$ ) протекает симметричный трехфазный ток:

$$\begin{aligned} i_A &= I_m \sin(\omega t + 0), \\ i_B &= I_m \sin(\omega t - 120^\circ), \\ i_C &= I_m \sin(\omega t + 120^\circ). \end{aligned}$$

Магнитное поле, создаваемое каждой катушкой в отдельности, пропорционально току катушки ( $B = k \cdot i$ ), следовательно магнитные поля отдельных катушек в центре координат образуют симметричную трехфазную систему  $B_{(t)}$ :

$$\begin{aligned} B_A &= B_m \cdot \sin(\omega t + 0), \\ B_B &= B_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ), \\ B_C &= B_m \cdot \sin(\omega t + 120^\circ). \end{aligned}$$

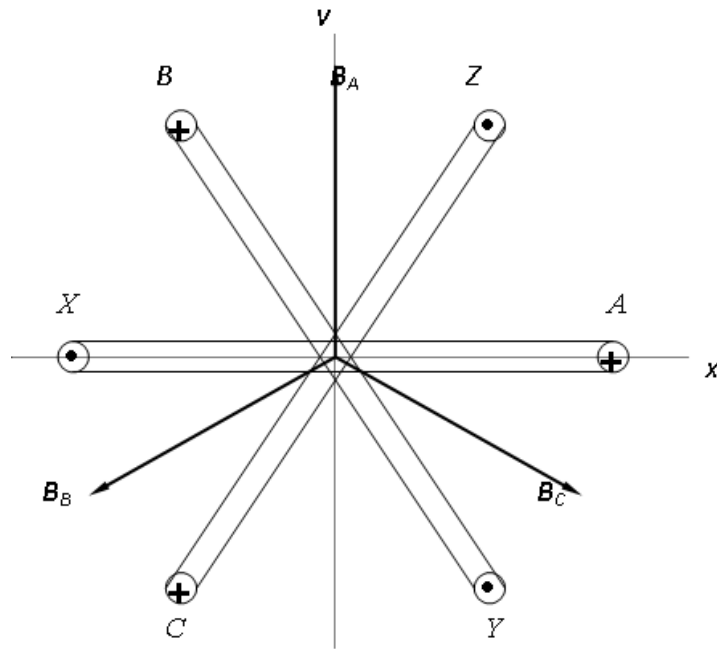


Рисунок 103

Положительные направления магнитных полей каждой катушки (векторов  $\underline{B}_A$ ,  $\underline{B}_B$ ,  $\underline{B}_C$ ) в пространстве определяются по правилу правоходового винта согласно принятым положительным направлениям токов катушек (рисунок 103).

Результирующий вектор индукции магнитного поля  $\underline{B}$  для любого момента времени может быть найден путем пространственного сложения векторов  $\underline{B}_A$ ,  $\underline{B}_B$ ,  $\underline{B}_C$  отдельных катушек. Определим значение результирующего вектора индукции магнитного поля  $B$  для нескольких моментов времени  $\omega t = 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ$ . Пространственное сложение векторов  $\underline{B}$  выполним графически (рисунок 104а, б, в). Результаты расчета сведены в отдельную таблицу:

$\omega t$	$B_A$	$B_B$	$B_C$	$B$	$\alpha$
0	0	$-\sqrt{3}/2 \cdot B_m$	$\sqrt{3}/2 \cdot B_m$	$3/2 \cdot B_m$	0
30	$1/2 \cdot B_m$	$-B_m$	$1/2 \cdot B_m$	$3/2 \cdot B_m$	$30^\circ$
60	$\sqrt{3}/2 \cdot B_m$	$-\sqrt{3}/2 \cdot B_m$	0	$3/2 \cdot B_m$	$60^\circ$

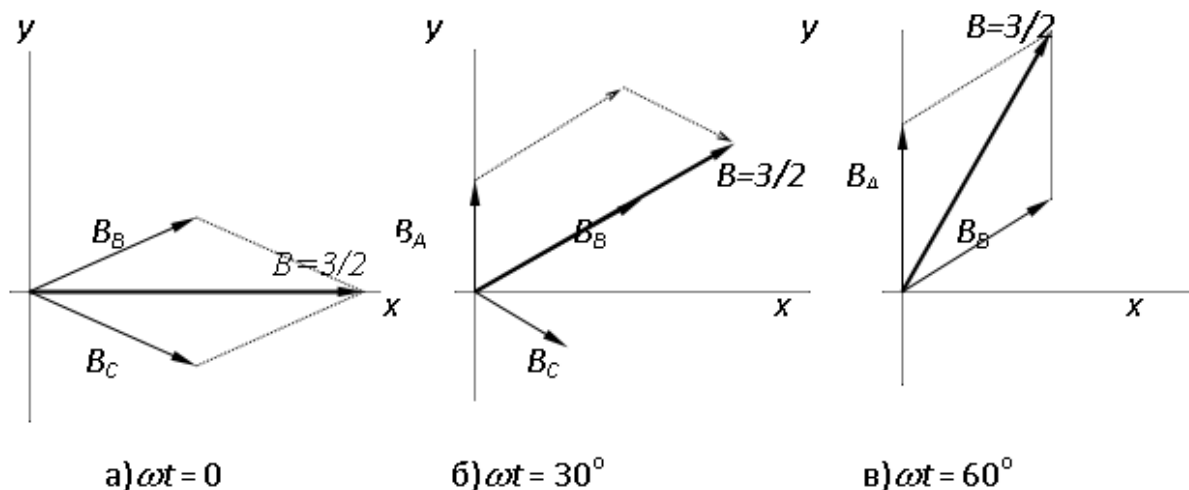


Рисунок 104

Анализ таблицы показывает, что результирующий вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}(t, x, y)$  имеет постоянную амплитуду ( $B_{max} = 3/2 \cdot B_m$ ) и равномерно вращается в пространстве в положительную сторону по направлению катушки  $A$  к катушке  $B$  с угловой скоростью  $\omega_n$ , равной угловой частоте тока  $\omega$ . В общем случае угловая скорость вращения магнитного поля зависит еще и от числа катушек:

$$\omega_n = \frac{\omega}{p} = \frac{2\pi f}{p} \quad [\text{рад/с}] \text{ или } [\text{с}^{-1}].$$

В технике для характеристики вращения магнитного поля пользуются понятием частоты вращения:

$$n = \frac{60 \cdot f}{p} \quad [\text{об/мин}].$$

С изменением числа  $p$  пространственная картина магнитного поля изменяется: при  $p=1$  магнитное поле имеет два полюса (или одну пару полюсов), при  $p=2$  – четыре полюса (или 2 пары полюсов) и т.д. (рисунок 105). По этой причине число  $p = 1, 2, 3, \dots$  называют числом пар полюсов магнитного поля.

Частоту вращения магнитного поля можно изменять плавно изменением частоты питающего тока  $f$ , и ступенчато - изменением числа пар полюсов  $p$ . В промышленных условиях оба способа регулирования частоты вращения поля являются технически и экономически малоэффективными. При постоянной частоте промышленного тока  $f=50$  Гц шкала синхронных частот вращения магнитного поля в функции числа пар полюсов выглядит следующим образом:

$p$ , пар пол.	1	2	3	4	5	6
$n$ , об/мин	3000	1500	1000	750	600	500

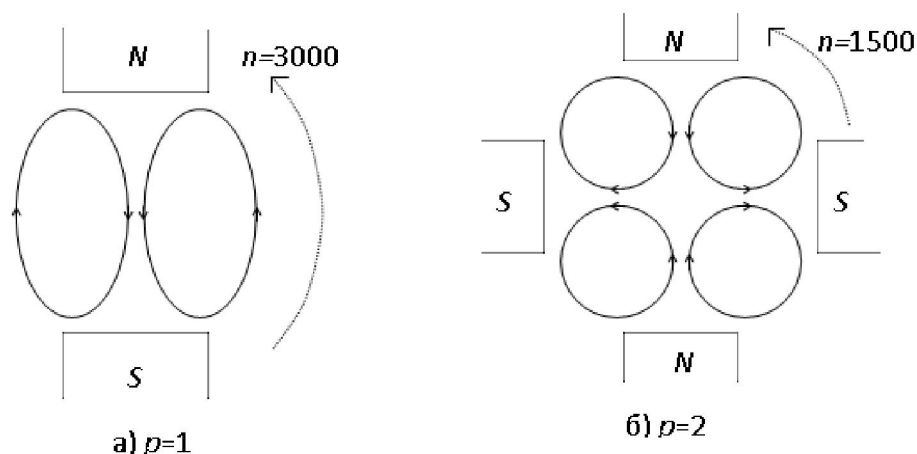


Рисунок 105

Для изменения направления вращения магнитного поля достаточно изменить порядок следования фаз питающего тока или, попросту, поменять местами две любые фазы источника между собой.

### 8.7 Теоретические основы метода симметричных составляющих

Метод симметричных составляющих применяется для расчета трехфазных цепей в несимметричных режимах. Несимметричные режимы в энергосистеме возникают при различных видах коротких замыканий. Расчет токов коротких замыканий – важная инженерная задача в электроэнергетике, которая решается методом симметричных составляющих.

Математически любая несимметричная трехфазная система векторных величин (напряжений, токов и др.) может быть представлена в виде суммы (заменена суммой) из трех симметричных трехфазных систем, а именно: а) системы прямой последовательности с прямым порядком следования фаз  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ; б) системы обратной последовательности с обратным порядком следования фаз  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ ; в) системы нулевой последовательности, которая состоит из трех равных векторов, совпадающих по фазе. Отдельные симметричные системы векторов, на которые раскладывается несимметричная система, называются симметричными составляющими. Вектора симметричных составляющих индексируются цифрами: 1 – для прямой последовательности, 2 – для обратной последовательности и 0 – для нулевой последовательности.

На рисунке 106 представлены симметричные составляющие некоторой несимметричной трехфазной системы напряжений  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ .

В методе симметричных составляющих для упрощения формы записи уравнений пользуются коэффициентом  $a = e^{j120^\circ}$  (поворотный множитель), умножением на который поворачивают вектор на угол в  $120^\circ$  без изменения его модуля. Свойства поворотного множителя:  $a^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ}$ ,  $a^3 = 1$ ,  $a^4 = a$ ,  $1 + a + a^2 = 0$ .

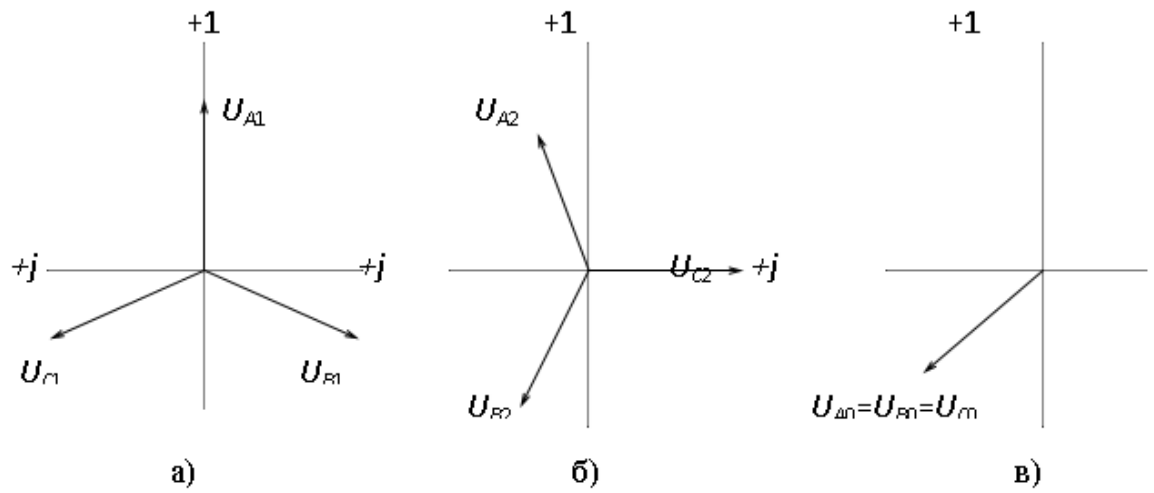


Рисунок 106

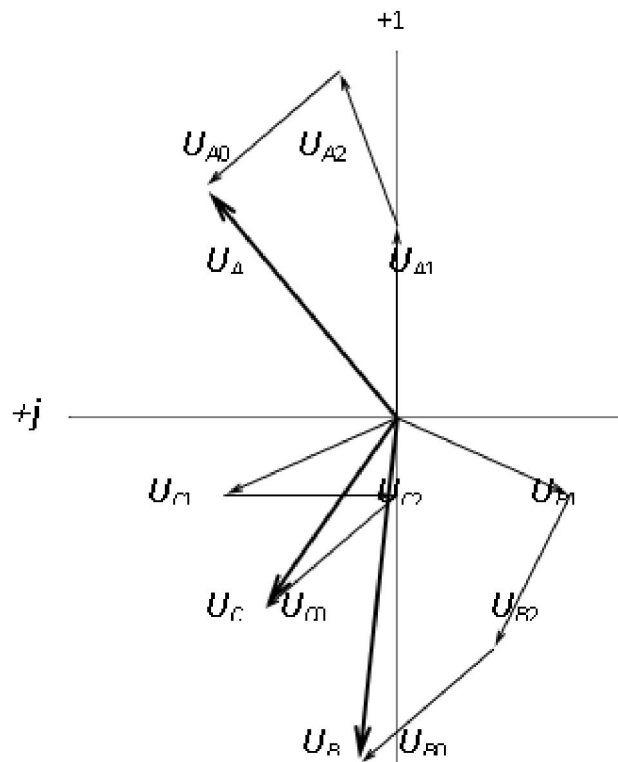


Рисунок 107

Вектора исходной несимметричной системы определяются по принципу наложения как геометрические суммы соответствующих векторов симметричных составляющих:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0}$$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_{B1} + \underline{U}_{B2} + \underline{U}_{B0}$$

$$\underline{U}_C = \underline{U}_{C1} + \underline{U}_{C2} + \underline{U}_{C0}$$

Геометрическое сложение векторов симметричных составляющих согласно этим уравнениям показано на рисунке 107.

Используя поворотный множитель “ $a$ ” и “ $a^2$ ”, выразим все слагаемые правой части уравнений через симметричные составляющие фазы  $A$ :

$$\begin{cases} \underline{U}_A = \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} \end{cases} \quad (8.7.1)$$

$$\begin{cases} \underline{U}_B = a^2 \cdot \underline{U}_{A1} + a \cdot \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} \end{cases} \quad (8.7.2)$$

$$\begin{cases} \underline{U}_C = a \cdot \underline{U}_{A1} + a^2 \cdot \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} \end{cases} \quad (8.7.3)$$

Умножим все члены уравнения (8.7.2) на “ $a$ ”, а все члены уравнения (8.7.3) на “ $a^2$ ”, сложим все три уравнения почленно и получим:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A + a \cdot \underline{U}_B + a^2 \cdot \underline{U}_C &= \underline{U}_{A1} \cdot (1 + a^3 + a^3) + \underline{U}_{A2} \cdot (1 + a^2 + a) + \underline{U}_{A0} \cdot (1 + a + a^2) = \\ &= 3 \cdot \underline{U}_{A1} + 0 \cdot \underline{U}_{A2} + 0 \cdot \underline{U}_{A0} = 3 \cdot \underline{U}_{A1} \end{aligned}$$

Из полученного уравнения следует формула для выделения симметричной составляющей прямой последовательности из несимметричной системы векторов:

$$\underline{U}_{A1} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_A + a \cdot \underline{U}_B + a^2 \cdot \underline{U}_C).$$

Умножим все члены уравнения (8.7.2) на “ $a^2$ ”, а все члены уравнения (8.7.3) на “ $a$ ”, сложим все три уравнения почленно и получим:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C &= \underline{U}_{A1} \cdot (1 + a + a^2) + \underline{U}_{A2} \cdot (1 + a^3 + a^3) + \underline{U}_{A0} \cdot (1 + a^2 + a) = \\ &= 0 \cdot \underline{U}_{A1} + 3 \cdot \underline{U}_{A2} + 0 \cdot \underline{U}_{A0} = 3 \cdot \underline{U}_{A2} \end{aligned}$$

Из полученного уравнения следует формула для выделения симметричной составляющей обратной последовательности из несимметричной системы векторов:

$$\underline{U}_{A2} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C).$$

Сложим все три уравнения (8.7.1), (8.7.2) и (8.7.3) почленно и получим:

$$\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C = \underline{U}_{A1}(1 + a^2 + a) + \underline{U}_{A2}(1 + a + a^2) + \underline{U}_{A0}(1 + 1 + 1) = 3\underline{U}_{A0}.$$

Из полученного уравнения следует формула для выделения симметричной составляющей нулевой последовательности из несимметричной системы вектор:

$$\underline{U}_{A0} = \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C).$$

Полученные формулы применяются на практике для разложения несимметричных трехфазных систем векторов на симметричные составляющие.

## 8.8 Расчет режима симметричной трехфазной нагрузки при несимметричном напряжении

Пусть к симметричному трехфазному приемнику, например электродвигателю, приложена несимметричная система напряжений  $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$ ,  $\underline{U}_C$ . Для получения общих закономерностей введем в схему нулевой провод с сопротивлением  $\underline{Z}_N$ . Схема цепи примет вид (рисунок 108):

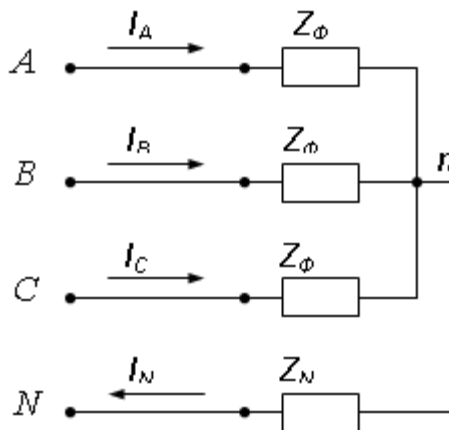


Рисунок 108

Разложим несимметричную систему напряжений  $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$ ,  $\underline{U}_C$  на симметричные составляющие прямой, обратной и нулевой последовательностей:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{A1} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_A + a \cdot \underline{U}_B + a^2 \cdot \underline{U}_C), \\ \underline{U}_{A2} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C), \\ \underline{U}_{A0} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C).\end{aligned}$$

Применим к расчету схемы метод наложения и выполним расчет токов отдельно для каждой симметричной составляющей напряжения. Так как для каждой из симметричных составляющих трехфазная схема генератор-приемник полностью симметрична, то расчет режима можно выполнять только для одной фазы  $A$ , соответственно трехфазную схему следует заменить тремя однофазными отдельно для каждой составляющей (рисунок 109а, б, в). В симметричном режиме для прямой и обратной последовательностей ток в нулевом проводе равен нулю и, следовательно, напряжение  $\underline{U}_{nN} = 0$ . Это означает, что сопротивление в нейтральном проводе  $\underline{Z}_N$  не оказывает влияния на фазные токи и не должно включаться в схемы для этих последовательностей (рисунок 109а, б). Токи нулевой последовательности во всех фазах совпадают и могут замкнуться только через нулевой провод:  $\underline{I}_N = \underline{I}_{A0} + \underline{I}_{B0} + \underline{I}_{C0} = 3\underline{I}_{A0}$ . По 2-му закону Кирхгофа для нулевой последовательности получим:

$$\underline{U}_{A0} = \underline{I}_{A0}\underline{Z}_0 + \underline{I}_N \cdot \underline{Z}_N = \underline{I}_{A0}(\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N)$$

Согласно полученному уравнению схема замещения для нулевой последовательности получит вид (рисунок 109в), в которой последовательно с сопротивлением фазы  $\underline{Z}_0$  включается утроенное сопротивление нейтрали  $3\underline{Z}_N$ .

В схемах для отдельных симметричных составляющих (рисунок 109а, б, в) обозначены  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_0$  - комплексные сопротивления фазы приемника для токов соответственно прямой, обратной и нулевой последовательностей. Для приемников с вращающимся магнитным полем эти сопротивления существенно отличаются.

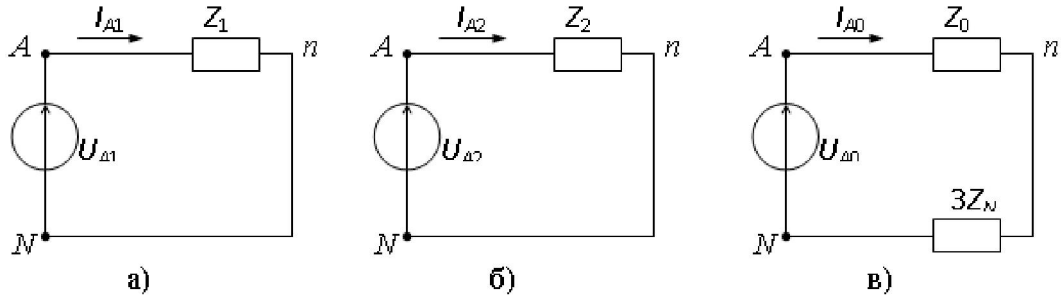


Рисунок 109

По закону Ома в каждой из схем рисунка 109а, б, в производится расчет токов прямой, обратной и нулевой последовательностей:

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{U}_{A1}}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{I}_{A2} = \frac{\underline{U}_{A2}}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_{A0} = \frac{\underline{U}_{A0}}{\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N}.$$

Действительные токи в исходной схеме (рисунок 108) определяются по методу наложения, как векторные суммы токов прямой, обратной и нулевой последовательностей:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0}, \\ \underline{I}_B &= \underline{I}_{B1} + \underline{I}_{B2} + \underline{I}_{B0} = a^2 \cdot \underline{I}_{A1} + a \cdot \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0}, \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_{C1} + \underline{I}_{C2} + \underline{I}_{C0} = a \cdot \underline{I}_{A1} + a^2 \cdot \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0}. \end{aligned}$$

Комплексные сопротивления фаз статичных трехфазных приемников (осветительная нагрузка, нагревательные приборы и др.) не зависят от вида последовательности, для таких приемников  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_0$ . Расчет токов таких приемников может выполняться обычными методами. Для трехфазных приемников, в которых существует вращающееся магнитное поле (электродвигатели, генераторы), сопротивления фаз для токов разных последовательностей существенно отличаются ( $\underline{Z}_1 > \underline{Z}_0 > \underline{Z}_2$ ). Расчет токов таких приемников при несимметричном напряжении должен производиться исключительно методом симметричных составляющих.

## 8.9 Расчет токов коротких замыканий в энергосистеме методом симметричных составляющих

В результате различного вида коротких замыканий в сложной энергосистеме возникает несимметричный режим. Расчет токов коротких замыканий в различных точках энергосистемы является важной инженерной задачей. Также расчеты выполняются методом симметричных составляющих.

В качестве примера рассмотрим определение тока однофазного короткого замыкания на землю в заданной точке простейшей энергосистемы. Символьная схема энергосистемы показана на рисунке 110. Короткое замыкание фазы  $A$  на землю происходит в конце линии электропередачи.

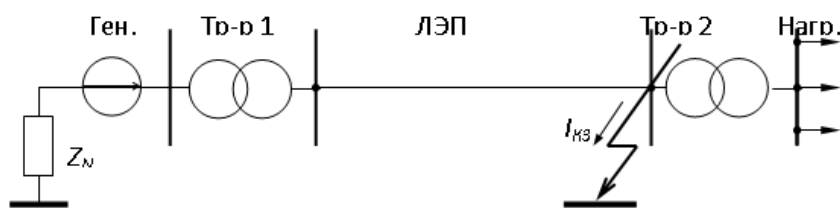


Рисунок 110

В соответствии с теоремой о компенсации заменим (мысленно) несимметричный участок в точке короткого замыкания несимметричным трехфазным генератором ( $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$ ,  $\underline{U}_C$ , причем  $\underline{U}_A = 0$ ). Несимметричную систему векторов напряжений разложим (мысленно) на симметричные составляющие  $\underline{U}_{A1}$ ,  $\underline{U}_{A2}$ ,  $\underline{U}_{A0}$ . Для каждой из симметричных составляющих схема цепи совершенно симметрична и может быть представлена в однофазном виде. Поэтому составляются однофазные схемы для прямой (рисунок 111), обратной (рисунок 112) и нулевой (рисунок 113) последовательностей.

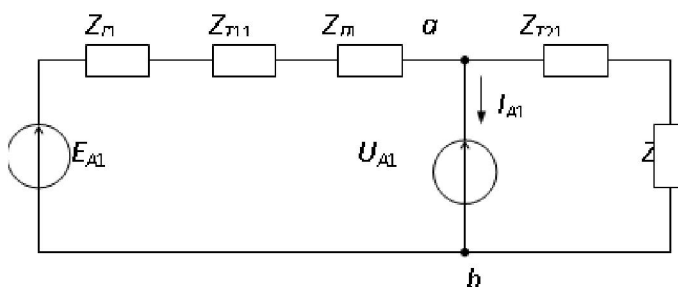


Рисунок 111

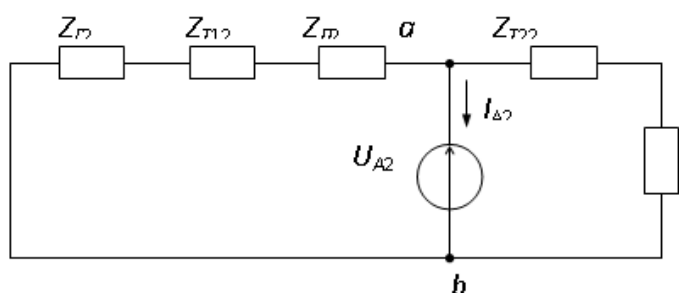


Рисунок 112

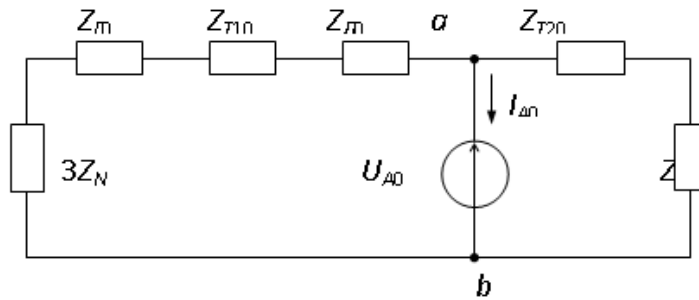


Рисунок 113

Далее в соответствии с теоремой об эквивалентном генераторе производится свертка расчетных схем для каждой из симметричных составляющих относительно выводов несимметричного участка  $ab$ . В результате свертки получаются простейшие одноконтурные схемы (рисунок 114а, б, в):

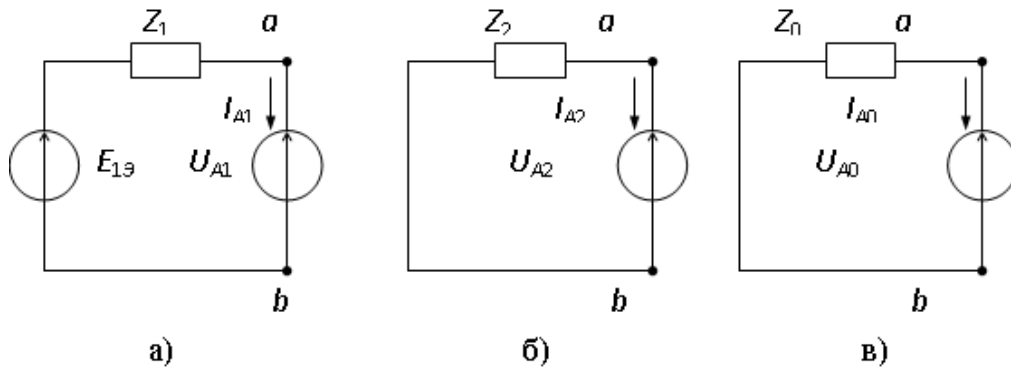


Рисунок 114

Для каждой из расчетных схем (рисунок 114а, б, в) составляются уравнения по 2-му закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} \underline{I}_{A1} \cdot \underline{Z}_1 + \underline{U}_{A1} = \underline{E}_{1\varphi} \\ \underline{I}_{A2} \cdot \underline{Z}_2 + \underline{U}_{A2} = 0 \\ \underline{I}_{A0} \cdot \underline{Z}_0 + \underline{U}_{A0} = 0 \end{cases}$$

В полученной системе уравнений Кирхгофа содержится 6 неизвестных величин ( $\underline{I}_{A1}, \underline{I}_{A2}, \underline{I}_{A0}, \underline{U}_{A1}, \underline{U}_{A2}, \underline{U}_{A0}$ ) и ее непосредственное решение невозможно. Поэтому система уравнений Кирхгофа дополняется тремя недостающими уравнениями, вытекающими из вида короткого замыкания. В рассматриваемом примере в точке короткого замыкания напряжение фазы  $A$  равно нулю ( $U_A = 0$ ), а также токи фаз  $B$  и  $C$  равны нулю ( $\underline{I}_B = \underline{I}_C = 0$ ). Дополнительные уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_A = \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} + \underline{U}_{A0} = 0 \\ \underline{I}_B = a^2 \cdot \underline{I}_{A1} + a \cdot \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = 0 \\ \underline{I}_C = a \cdot \underline{I}_{A1} + a^2 \cdot \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A0} = 0 \end{cases}$$

В результате совместного решения системы из 6-и уравнений определяются симметричные составляющие токов  $\underline{I}_{A1}, \underline{I}_{A2}, \underline{I}_{A0}$ .

## 8.10 Фильтры симметричных составляющих

Фильтрами симметричных составляющих называются технические устройства или схемы, служащие для выделения соответствующих составляющих токов или напряжений из несимметричной трёхфазной системы векторов.

Напряжения и токи, выделяемые фильтрами симметричных составляющих, используются на практике в качестве входных величин для релейной защиты энергетических установок (генераторов, трансформаторов, линий электропередачи) от несимметричных режимов, возникающих в результате коротких замыканий, или для соответствующей сигнализации о несимметричном режиме.

На рисунке 115 представлена схема фильтра напряжения нулевой последовательности. Схема фильтра состоит из 3-х одинаковых трансформаторов с коэффициентом трансформации  $k_T = \frac{w_1}{w_2}$ . Первичные обмотки трансформаторов включены на фазные напряжения  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  по схеме звезды с нулевой точкой, а вторичные – в открытый треугольник.

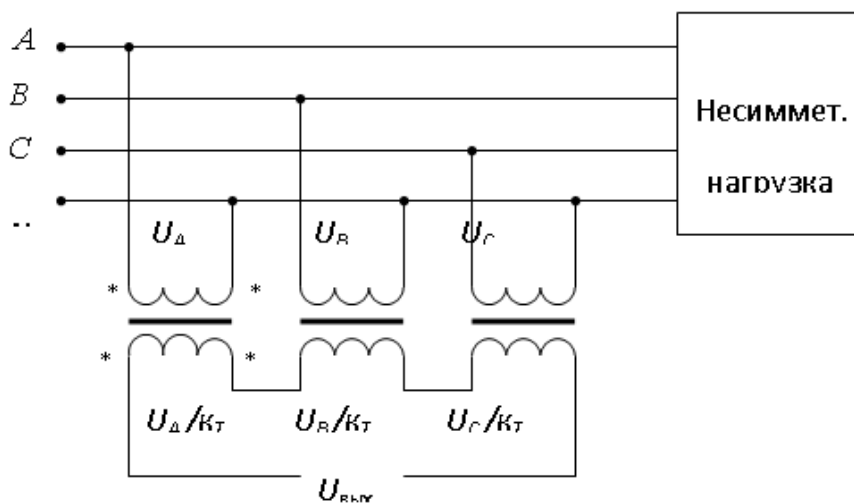


Рисунок 115

Напряжение на выходе фильтра равно векторной сумме вторичных напряжений трансформаторов:

$$\underline{U}_{вых} = \frac{1}{k_T} \underline{U}_A + \frac{1}{k_T} \underline{U}_B + \frac{1}{k_T} \underline{U}_C = \frac{1}{k_T} (\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C)$$

Учитывая, что  $\underline{U}_{A0} = \frac{1}{3} (\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C)$ , получим

$$\underline{U}_{вых} = \frac{3}{k_T} \underline{U}_{A0} = K_{\phi 0} \cdot \underline{U}_{A0}, \text{ где } K_{\phi 0} = \frac{3}{k_T} - \text{коэффициент фильтра.}$$

Фильтр напряжений обратной последовательности реализуется схемой на рисунке 116 при следующих соотношениях между параметрами

элементов:  $R_1 = R_2$ ,  $\frac{R_3}{X_C} = \sqrt{3}$ ,

$$\varphi_{BC} = \arctg \frac{-X_C}{R_3} = \arctg \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -30^\circ.$$

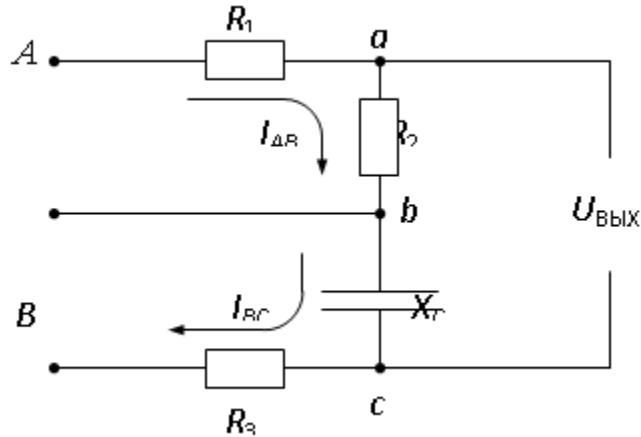


Рисунок 116

Напряжение на отдельных участках схемы с учетом заданных соотношений между параметрами элементов:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_{AB} \cdot R_2 = \frac{\underline{U}_{AB} \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2} \underline{U}_{AB}$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{I}_{BC} \cdot (-jX_C) = \frac{\underline{U}_{BC} (-jX_C)}{R_3 - jX_C} = \frac{\underline{U}_{BC}}{1 + j \frac{R_3}{X_C}} = \frac{\underline{U}_{BC}}{2e^{j60^\circ}} = \frac{1}{2} \underline{U}_{BC} \cdot e^{-j60^\circ}$$

Выходное напряжение фильтра:

$$\underline{U}_{\text{вых}} = \underline{U}_{ab} + \underline{U}_{bc} = \frac{1}{2} (\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} \cdot e^{-j60^\circ})$$

Преобразуем формулу для напряжения обратной последовательности путем добавления и вычитания члена  $aU_B$ :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{A2} &= \frac{1}{3} (\underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C) = \frac{1}{3} (\underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_B - a \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3} [\underline{U}_A + (a^2 + a) \cdot \underline{U}_B - a \cdot (\underline{U}_B - \underline{U}_C)] = \frac{1}{3} [(\underline{U}_A - \underline{U}_B) + e^{-j60^\circ} \cdot (\underline{U}_B - \underline{U}_C)] = \\ &= \frac{1}{3} (\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} \cdot e^{j60^\circ}) \end{aligned}$$

Сравнивая полученное уравнение с предыдущим, найдём:

$$\underline{U}_{\text{вых}} = \frac{3}{2} \underline{U}_{A2} = \kappa_{\phi 2} \cdot \underline{U}_{A2}, \text{ где } \kappa_{\phi 2} = \frac{3}{2} - \text{коэффициент фильтра.}$$

Векторная диаграмма напряжений фильтра показана на рисунке 117а – для симметричной системы напряжений обратной последовательности, и на рисунке 117б – для симметричной системы напряжений прямой последовательности.

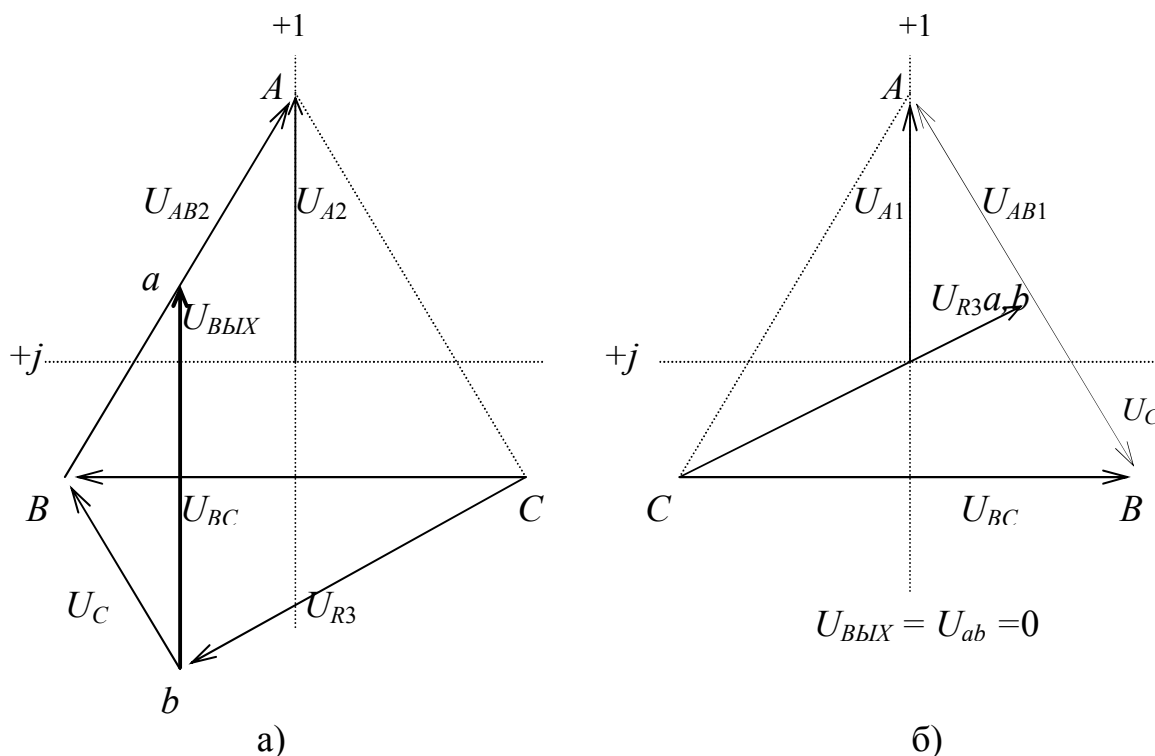


Рисунок 117

Так как системы прямой и обратной последовательностей отличаются только порядком следования фаз, то из этого следует, что фильтр, выделяющий напряжение одной из этих последовательностей превращается в аналогичный фильтр для выделения напряжений другой последовательности путем перестановки любых двух фаз местами.

## 9 Электрические цепи периодического несинусоидального тока

### 9.1 Общие определения

Как известно, в электроэнергетике в качестве стандартной формы для токов и напряжений принята синусоидальная форма. Однако в реальных условиях формы кривых токов и напряжений могут в той или иной мере отличаться от синусоидальных. Искажения форм кривых этих функций у приемников приводят к дополнительным потерям энергии и снижению их коэффициента полезного действия. Синусоидальность формы кривой

напряжения генератора является одним из показателей качества электрической энергии как товара.

Возможны следующие причины искажения формы кривых токов и напряжений в сложной цепи:

- 1) наличие в электрической цепи нелинейных элементов, параметры которых зависят от мгновенных значений тока и напряжения  $[R, L, C=f(u, i)]$ , (например, выпрямительные устройства, электросварочные агрегаты и т. д.);
- 2) наличие в электрической цепи параметрических элементов, параметры которых изменяются во времени  $[R, L, C=f(t)]$ ;
- 3) источник электрической энергии (трехфазный генератор) в силу конструктивных особенностей не может обеспечить идеальную синусоидальную форму выходного напряжения;
- 4) влияние в комплексе перечисленных выше факторов.

Нелинейные и параметрические цепи рассматриваются в отдельных главах курса ТОО. В настоящей главе исследуется поведение линейных электрических цепей при воздействии на них источников энергии с несинусоидальной формой кривой.

## 9.2 Разложение периодических несинусоидальных функций в гармонический ряд Фурье

Из курса математики известно, что любая периодическая функция времени  $f(t)$ , удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена гармоническим рядом Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k).$$

Здесь  $A_0$  – постоянная составляющая,  $A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$  –  $k$ -я гармоническая составляющая или сокращенно  $k$ -я гармоника. 1-я гармоника называется основной, а все последующие – высшими.

Амплитуды отдельных гармоник  $A_k$  не зависят от способа разложения функции  $f(t)$  в ряд Фурье, в то же время начальные фазы отдельных гармоник  $\alpha_k$  зависят от выбора начала отсчета времени (начала координат).

Отдельные гармоники ряда Фурье можно представить в виде суммы синусной и косинусной составляющих:

$$A_k \sin(k\omega t + \alpha_k) = A_k \cdot \cos \alpha_k \cdot \sin k\omega t + A_k \sin \alpha_k \cdot \cos k\omega t = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t.$$

Тогда весь ряд Фурье получит вид:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k \cos k\omega t.$$

Соотношения между коэффициентами двух форм ряда Фурье имеют вид:

$$B_k = A_k \cos \alpha_k; \quad C_k = A_k \sin \alpha_k; \quad A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}; \quad \alpha_k = \arctg \frac{C_k}{B_k}.$$

Если  $k$ -ю гармонику и ее синусную и косинусную составляющие заменить комплексными числами, то соотношение между коэффициентами ряда Фурье можно представить в комплексной форме:

$$A_k \sin(k\omega t + \alpha_k) = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t \Leftrightarrow A_k e^{j\alpha_k} = B_k + jC_k.$$

Если периодическая несинусоидальная функция времени задана (или может быть выражена) аналитически в виде математического уравнения, то коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам, известным из курса математики:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot d(\omega t),$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot d(\omega t),$$

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(k\omega t) \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \cos(k\omega t) \cdot d(\omega t),$$

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}; \quad \alpha_k = \arctg \frac{C_k}{B_k}.$$

На практике исследуемая несинусоидальная функция  $f(t)$  обычно задается в виде графической диаграммы (графически) (рисунок 118) или в виде таблицы координат точек (таблично) в интервале одного периода (таблица 1). Чтобы выполнить гармонический анализ такой функции по приведенным выше уравнениям, ее необходимо предварительно заменить математическим выражением. Замена функции, заданной графически или таблично математическим уравнением, получила название аппроксимации функции.

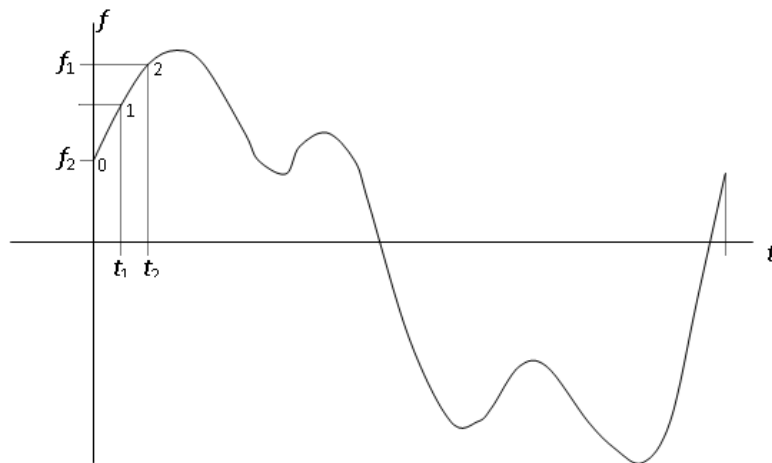


Рисунок 118

Таблица 1

$m$	0	1	2	3	...	...	...	...	$M$
$t_m$	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	...	...	...	...	$T$
$f_m$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	...	...	...	...	$f_0$

В настоящее время гармонический анализ несинусоидальных функций времени  $f(t)$  выполняется, как правило, на ЭВМ. В простейшем случае для математического представления функции применяется кусочно-линейная аппроксимация. Для этого вся функция в интервале одного полного периода разбивается на  $M=20-30$  участков так, чтобы отдельные участки были по возможности ближе к прямым линиям (рисунок 118). На отдельных участках функция аппроксимируется уравнением прямой  $f_m(t)=a_m+b_m \cdot t$ , где коэффициенты аппроксимации ( $a_m, b_m$ ) определяются для каждого участка через координаты его конечных точек, например, для 1-го участка получим:

$$a_1 = \frac{f_1 \cdot t_1 - f_2 \cdot t_2}{t_1 - t_2}; \quad b_1 = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1}.$$

Период функции  $T$  разбивается на большое число шагов интегрирования  $N$ , шаг интегрирования  $\Delta t = h = \frac{T}{N}$ , текущее время  $t_i = h \cdot i$ , где  $i$  – порядковый номер шага интегрирования. Определенные интегралы в формулах гармонического анализа заменяются соответствующими суммами, их подсчет выполняется на ЭВМ по методу трапеций или прямоугольников, например:

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot dt \approx \frac{2}{T} \sum_{m=1}^{m=M} (a_m + b_m \cdot t_i) \cdot \sin(k \frac{2\pi}{T} \cdot t_i) \cdot h.$$

Для определения амплитуд высших гармоник с достаточной точностью ( $\delta\% \leq 1\%$ ) число шагов интегрирования должно составлять не менее  $100k$ , где  $k$  – номер гармоники.

В технике для выделения отдельных гармоник из несинусоидальных напряжений и токов применяют специальные приборы, называемые гармоническими анализаторами.

### 9.3 Виды симметрии периодических функций

Различают следующие виды симметрии периодических несинусоидальных функций.

1) Нечетная симметрия: функция симметрична относительно начала координат и удовлетворяет условию  $f(t) = -f(-t)$  (рисунок 119).

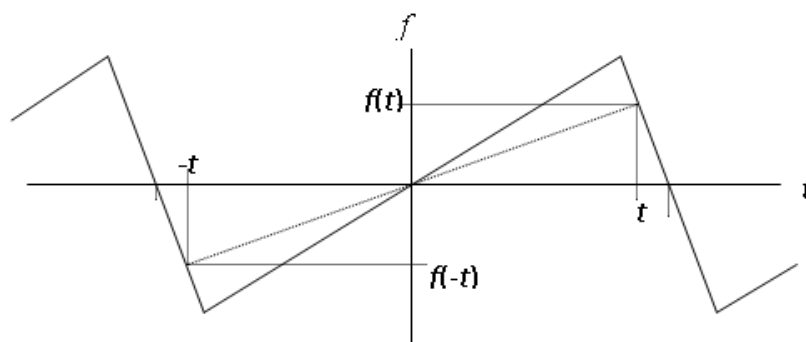


Рисунок 119

Функции, обладающие нечетной симметрией, получили название нечетных. В разложении таких функций содержатся только синусные составляющие отдельных гармоник  $B_k$  и отсутствуют постоянная составляющая  $A_0$  и косинусные составляющие отдельных гармоник  $C_k$ :

$$f(\omega t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin k\omega t.$$

При определении коэффициентов ряда Фурье нечетной функции интегрирование в формуле достаточно выполнить за половину периода  $T/2$ :

$$B_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot d(\omega t).$$

2) Четная симметрия: функция симметрична относительно оси ординат и удовлетворяет условию  $f(t) = f(-t)$  (рисунок 120).

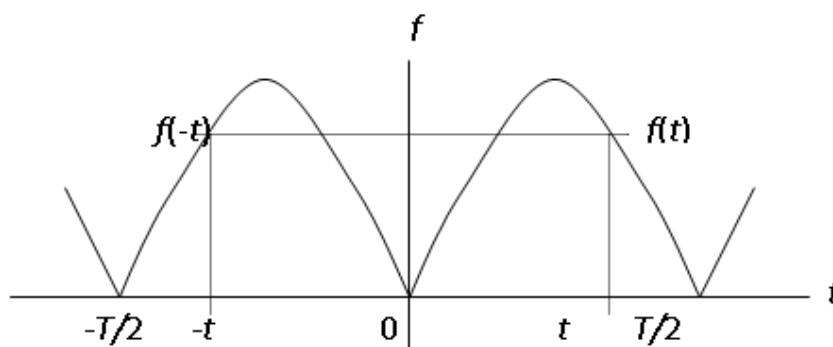


Рисунок 120

Функции, обладающие четной симметрией, получили название четных. В разложении таких функций содержатся только постоянная составляющая  $A_0$  и косинусные составляющие отдельных гармоник  $C_k$  и отсутствуют синусные составляющие отдельных гармоник  $B_k$ :

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k \cos k\omega t.$$

При определении коэффициентов ряда Фурье четной функции интегрирование в формулах достаточно выполнить за половину периода:

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \cdot d(\omega t),$$

$$C_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(k\omega t) \cdot dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \cdot \cos(k\omega t) \cdot d(\omega t).$$

3) Косая симметрия: функция симметрична относительно оси абсцисс при смещении ее положительной части  $[f(t)>0]$  или отрицательной части  $[f(t)<0]$  на отрезок времени  $\pm T/2$  и удовлетворяет условию  $f(t) = -f(t \pm T/2)$  (рисунок 121):

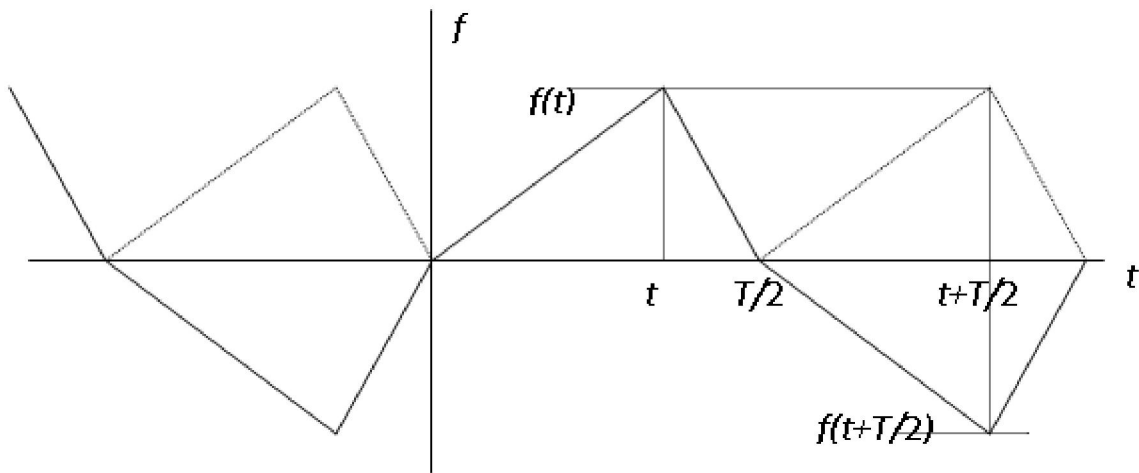


Рисунок 121

Функции, обладающие косой симметрией, получили название кососимметричных. В разложении таких функций содержатся только нечетные гармоники (синусные и косинусные составляющие):

$$f(\omega t) = \sum_{k=1,3,\dots}^{k=\infty} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k) = \sum_{k=1,3,\dots}^{k=\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1,3,\dots}^{k=\infty} C_k \cos k\omega t.$$

Докажем это утверждение методом от обратного. Предположим, что кососимметричная функция содержит в разложении все члены ряда Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots$$

Добавим к аргументу функции  $T/2$ :

$$\begin{aligned} f(t + T/2) &= -A_0 - A_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + 180^\circ) - A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2 + 360^\circ) + \dots = \\ &= -A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) - A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots \end{aligned}$$

Равенство  $f(t) = -f(t \pm T/2)$  выполняется при условии  $A_0=0$ ,  $A_2=0$ ,  $A_4=0, \dots$ , что требовалось доказать.

Коэффициенты ряда Фурье кососимметричной функции определяются по общим правилам.

Функция  $f(t)$  может обладать одновременно двумя видами симметрии, например, нечетной и косой или четной и косой, но не может быть одновременно нечетной и четной. При разложении конкретной функции в ряд Фурье начало отсчета следует выбрать так, чтобы получить желаемый вид симметрии функции.

**Пример.** Требуется разложить в ряд Фурье периодическую прямоугольную функцию  $f(t) = A_m (0 \leq t \leq T/2)$  и  $f(t) = -A_m (T/2 \leq t \leq T)$  (рисунок 122).

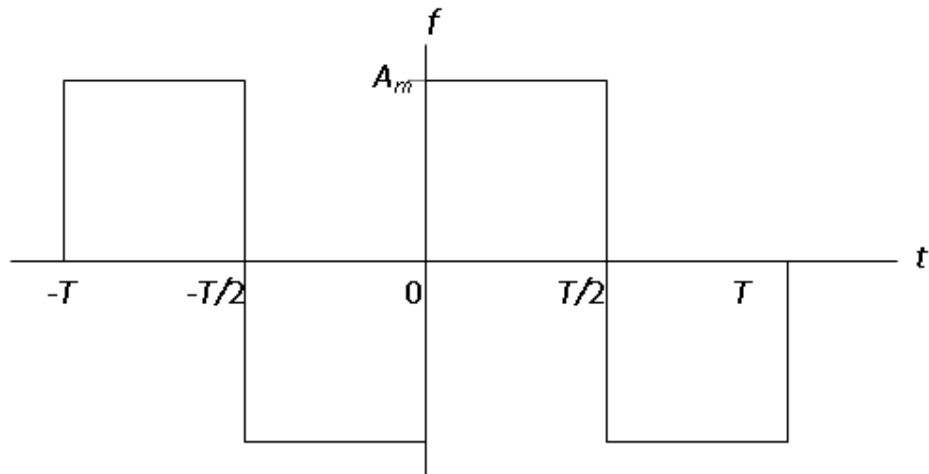


Рисунок 122

При выбранном начале отсчета (точка 0) функция будет обладать одновременно двумя видами симметрии (нечетной и косой) и ее гармонический состав будет иметь вид:

$$f(\omega t) = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t + A_5 \sin 5\omega t + \dots$$

Коэффициенты ряда Фурье определяются по формуле для нечетной функции:

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d\omega t = \frac{2A_m}{k\pi} \cos k\omega t_0^{\pi} = \frac{4A_m}{k\pi}$$

Тогда ряд Фурье исследуемой функции получит вид:

$$f(\omega t) = \frac{4A_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) = A_m (1,273 \sin \omega t + 0,424 \sin 3\omega t + 0,255 \sin 5\omega t + \dots)$$

#### 9.4 Действующие значения несинусоидальных токов и напряжений

Как известно, в электроэнергетике переменные токи и напряжения характеризуются их действующими значениями. Математически действующее значение любого периодически изменяющегося тока (напряжения) определяется как среднеквадратичное значение функции за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} ; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Пусть функция тока содержит в своем составе все компоненты ряда Фурье:

$$i(\omega t) = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots = I_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k)$$

Определим действующее значение этой функции:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt + \sum_1 \frac{1}{T} \int_0^T I_{km}^2 \sin^2(k\omega t - \alpha_k) dt + \sum_{p \neq q} \frac{1}{T} \int_0^T I_{pm}^2 \sin^2(p\omega t + \alpha_p) I_{qm}^2 \sin^2(q\omega t + \alpha_q) dt} \\ &= \\ &= \sqrt{I_0^2 + \sum_1 \frac{I_{km}^2}{2} + \sum 0} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}(I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + \dots)} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} \end{aligned}$$

При интегрировании учтено, что произведение двух синусоидальных функций времени с различными частотами  $\omega_1 = p\omega$  и  $\omega_2 = q\omega$  дает сумму двух новых синусоидальных функций с частотами  $(\omega_1 + \omega_2)$  и  $(\omega_1 - \omega_2)$ , определенный интеграл от которых в пределах целого числа периодов равен нулю.

Итак получено, что действующее значение несинусоидального тока (напряжения) равно квадратному корню из действующих значений отдельных гармоник:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}(I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + \dots)} , \\ U &= \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2}(U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + \dots)} . \end{aligned}$$

Примеры некоторых функций и их действующих значений приведены ниже:

$$1. \quad i_1 = 1 \sin \omega t ; \quad I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 A$$

$$2. \quad i_2 = 1 \sin \omega t + 0,5 \sin 2\omega t ; \quad I_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(1^2 + 0,5^2)} = 0,790 A$$

$$3. \quad i_3 = 1 \sin \omega t + 0,1 \sin 2\omega t ; \quad I_3 = \sqrt{\frac{1}{2}(1^2 + 0,1^2)} = 0,711 A$$

Вывод: при коэффициенте высшей гармоники менее 0,1 ( $k_{\varepsilon 2} = I_{2m} / I_{1m} \leq 0,1$ ) их доля в действующем значении функции составляет менее 1% ( $I_3 / I_1 = 1,006$ ), и, следовательно, при определении действующего значения функции с погрешностью  $\delta\% \leq 1$  эти гармоники могут не учитываться.

## 9.5 Мощность в цепи несинусоидального тока

Под активной мощностью  $P$  понимают количество энергии, потребляемое (генерируемое) объектом за единицу времени. Математически активную мощность определяют как среднее значение мгновенной мощности за полный период.

Пусть некоторый элемент цепи потребляет ток  $i(t)$  при несинусоидальном напряжении  $u(t)$ :

$$u(t) = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots$$

$$i(t) = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \alpha_2 - \varphi_2) + \dots$$

Мгновенная мощность  $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ , тогда активная мощность будет равна:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (U_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k) \cdot I_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k - \varphi_k)) dt + \\ &+ \sum_{p \neq q} \frac{1}{T} \int_0^T U_{pm} \sin(p\omega t + \alpha_p) \cdot I_{qm} \sin(q\omega t + \alpha_q - \varphi_q) dt = U_0 I_0 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{2} U_{km} I_{km} \cos(\varphi) + \sum 0 = \\ &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos(\varphi_1) + U_2 I_2 \cos(\varphi_2) + \dots = P_0 + P_1 + P_2 + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$$

Реактивная мощность  $Q$  несинусоидального тока определяется по аналогии с активной мощностью  $P$  как алгебраическая сумма реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots = U_1 I_1 \sin(\varphi_1) + U_2 I_2 \sin(\varphi_2) + \dots$$

Как известно, реактивная мощность  $Q$  синусоидального тока характеризует интенсивность колебаний энергии ( $Q = \omega \cdot W_{\max}$ ) с частотой  $\omega$  между электромагнитным полем элемента и остальной цепью. В цепи несинусоидального тока колебания энергии происходят на разных частотах. Сложение реактивных мощностей отдельных гармоник, характеризующих колебания энергии на разных частотах, лишено физического смысла. Математически может получиться, что реактивные мощности отдельных гармоник имеют разные знаки и в сумме дают нуль, хотя колебания энергии при этом имеют место. Таким образом, для цепи несинусоидального тока понятие реактивной мощности лишено физического смысла.

Для цепи несинусоидального тока применяется также и понятие полной мощности, которая определяется как произведение действующих значений напряжения и тока:

$$S = U \cdot I = \sqrt{(U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots)} \sqrt{(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots)}$$

Как известно, для цепи синусоидального тока мощности  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  образуют прямоугольный треугольник, из которого следует соотношение:  $S^2 = P^2 + Q^2$ . Для цепей несинусоидального тока это соотношение между

мощностями выполняется только для резистивных элементов, в которых в соответствии с законом Ома ( $u = i \cdot R$ ) формы кривых функций  $u(t)$  и  $i(t)$  идентичны. Если в цепи содержатся реактивные элементы  $L$  и  $C$ , то это соотношение не выполняется:  $S^2 \geq P^2 + Q^2$ . Для баланса этого уравнения в его правую часть вносят добавление:  $S^2 = P^2 + Q^2 + T^2$ , откуда

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$$

где  $T$  – мощность искажения – понятие математическое, характеризует степень различия в формах кривых напряжения  $u(t)$  и тока  $i(t)$ .

## 9. 6 Коэффициенты, характеризующие несинусоидальные функции $u(t)$ , $i(t)$

Пусть несинусоидальная функция  $u(t)$  содержит только гармонические составляющие:

$$u(t) = U_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \alpha_2) + U_{3m} \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots$$

Несинусоидальные функции токов и напряжений, не содержащие постоянных составляющих ( $I_0 = 0$ ,  $U_0 = 0$ ) характеризуются следующими параметрами и коэффициентами.

Действующее значение всей функции определяется по формуле:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} = \sqrt{\frac{1}{2}(U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + U_{3m}^2 + \dots)}.$$

Действующее значение высших гармоник:

$$U_{BG} = \sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots} = \sqrt{\frac{1}{2}(U_{2m}^2 + U_{3m}^2 + \dots)}.$$

Максимальные значения функции в положительной области ( $U_{\max+}$ ) и в отрицательной области ( $U_{\max-}$ ) не будут равны друг другу при наличии в гармоническом ряду функции четных гармоник и зависят как от амплитуд отдельных гармоник, так и от их фазовых сдвигов (начальных фаз).

Среднее по модулю значение функции определяется как среднеарифметическое значение модулей мгновенных значений функции за полный период:

$$U_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T ABS[u(t)] dt.$$

Среднее значение функции зависит как от амплитуд отдельных гармоник, так и от их начальных фаз.

Коэффициентом амплитуды функции называется величина, равная отношению ее максимального (по модулю) значения к действующему значению:

$$k_a = \frac{U_{\max}}{U}; \quad k_a = \sqrt{2} = 1,41 \text{ для синусоиды.}$$

Коэффициентом формы кривой функции называется величина, равная отношению действующего значения функции к ее среднему значению:

$$k_{\phi} = \frac{U}{U_{cp}}; k_{\phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11 \text{ для синусоиды.}$$

Коэффициентом  $k$ -ой гармоники называется величина, равная отношению действующего значения (амплитуды)  $k$ -ой гармоники к действующему значению (амплитуде) основной гармоники:

$$k_{ek} = \frac{U_k}{U_1} = \frac{U_{km}}{U_{1m}}.$$

Коэффициентом искажения синусоидальности формы кривой функции называется величина, равная отношению действующего значения всех высших гармоник к действующему значению основной гармоники:

$$k_u = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1} = \frac{\sqrt{U_{2m}^2 + U_{3m}^2 + \dots}}{U_{1m}}.$$

Для приемников, работающих в несинусоидальном режиме, применяется понятие коэффициента мощности, который определяется как отношение активной мощности  $P$  к полной мощности  $S$ :

$$k_p = \cos(\varphi_{\phi}) = \frac{P}{S} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}}.$$

## 9.7 Расчет электрических цепей несинусоидального тока

Расчет электрических цепей, содержащих источники энергии [источники ЭДС  $e(t)$  и источники тока  $j(t)$ ] с несинусоидальной формой кривой, выполняется по методу положения. Процедуру расчета можно условно разделить на три этапа.

### 1) Гармонический анализ.

На этом этапе выполняется разложение несинусоидальных функций источников ЭДС  $e(t)$  и источников тока  $j(t)$  в гармонический ряд Фурье:

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + E_{2m} \sin(2\omega t + \alpha_2) + E_{3m} \sin(3\omega t + \alpha_3) \dots$$

$$j(t) = J_0 + J_{1m} \sin(\omega t + \beta_1) + J_{2m} \sin(2\omega t + \beta_2) + J_{3m} \sin(3\omega t + \beta_3) \dots$$

Для проведения анализа структуры функций  $e(t)$  и  $j(t)$  количество гармоник в их разложении определяют значительно больше, чем необходимо для расчета схемы.

### 2) Аналитический расчет.

Производится аналитический расчет схемы последовательно для каждой гармоники в отдельности. Для постоянной составляющей расчет производится как для резистивной цепи постоянного тока, при этом участки с катушками  $L$  закорачиваются, а ветви с конденсаторами  $C$  размыкаются. Расчет схемы для отдельных гармоник производится как для

цепи синусоидального тока, т.е. в комплексной форме, при этом определяются не действующие значения, а комплексные амплитуды токов и напряжений ( $\underline{I}_m, \underline{U}_m$ ). Расчет для каждой гармоники выполняется по одному и тому же алгоритму, при этом учитывается зависимость реактивных сопротивлений элементов от частоты и, следовательно, от номера гармоники:  $X_{Lk} = k \cdot \omega L = k \cdot X_{L1}$ ;  $X_{Ck} = 1/k\omega C = X_{C1}/k$ . Выбор расчетного метода определяется структурой расчетной схемы.

Количество гармоник, для которых выполняется расчет схемы, устанавливается исходя из конкретных условий задачи. Например, если определяются только действующие значения токов и напряжений ( $I, U$ ), то достаточно учитывать только те гармоники, для которых коэффициент  $k_e > 0,1$ , при этом относительная погрешность расчета в итоге не превысит 1%. Однако в тех случаях, когда требуется проводить исследование форм кривых функций  $u(t)$  и  $i(t)$ , то необходимо учитывать также гармоники более высокого порядка с меньшим коэффициентом гармоник  $k_e$ .

### 3. Синтез решения.

На заключительной стадии расчета определяются искомые величины согласно условию задачи.

Мгновенные значения токов и напряжений  $i(t)$  и  $u(t)$  определяются в соответствии с принципом наложения как алгебраической суммы мгновенных значений отдельных составляющих, например:

$$i_k(t) = I_{k0} + I_{k1m} \sin(\omega t + \beta_1) + I_{k2m} \sin(2\omega t + \beta_2) + I_{k3m} \sin(3\omega t + \beta_3) \dots$$

При необходимости исследования формы кривых функций  $i(t)$  и  $u(t)$  по полученным уравнениям строятся их графические диаграммы.

Действующие значения токов и напряжений ( $I, U$ ) находятся как среднеквадратичные значения этих функций по полученным ранее формулам, например:

$$I_k = \sqrt{I_{k0}^2 + \frac{1}{2}(I_{k1m}^2 + I_{k2m}^2 + \dots)}$$

Активные мощности отдельных элементов определяется как суммы активных мощностей этих элементов для отдельных гармоник, например:

$$P_k = P_{k0} + P_{k1} + P_{k2} + \dots = U_{k0} \cdot I_{k0} + \operatorname{Re}[U_{k1m}^* \cdot I_{k1m}] + \operatorname{Re}[U_{k2m}^* \cdot I_{k2m}] + \dots$$

Активную мощность отдельных приемников можно определять также по формуле Джоуля:  $P_k = I_k^2 \cdot R_k$ , где  $I_k$  – действующее значение тока этого приемника.

Определяются коэффициенты исследуемых несинусоидальных функций:  $k_u$  – коэффициент искажения,  $k_\phi$  – коэффициент формы,  $k_e$  – коэффициенты отдельных гармоник и т. д.

**Пример.** На входе схемы (рисунок 123а) с заданными параметрами элементов ( $R_1=30$  Ом,  $R_2=20$  Ом,  $L=100$  мГн,  $C=22$  мкФ) действует источник

несинусоидальной ЭДС (рисунок 123б) с частотой  $f=50$  Гц. Требуется определить 1) действующие значения ЭДС  $E$  и токов  $I, I_1, I_2$ ; 2) коэффициенты искажения функций ЭДС  $e(t)$  и токов  $i(t), i_1(t), i_2(t)$ ; 3) баланс активных мощностей  $P_E = \sum P_n$ .

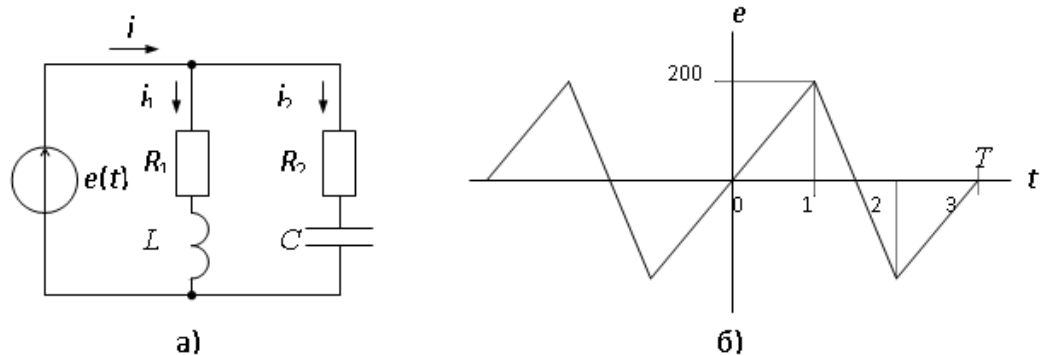


Рисунок 123

1-ый этап. Разложение заданной графически функции ЭДС  $e(t)$  (рисунок 123б) в гармонический ряд Фурье производится с помощью ЭВМ по программе GAR, в результате получим:

$$e(t) = 157,9 \sin(\omega t) + 39,5 \sin(2\omega t + 180^\circ) + 9,9 \sin(4\omega t) + \\ + 6,3 \sin(5\omega t + 180^\circ) + 3,2 \sin(7\omega t) + 2,5 \sin(8\omega t + 180^\circ) + \dots$$

Примечание: гармоники, кратные трем, в разложении данной функции отсутствуют.

2-ой этап. Производится расчет схемы для каждой гармоники в отдельности в комплексной форме по одному и тому же алгоритму:

$$X_{L1} = \omega L, \quad X_{C1} = \frac{1}{\omega C}; \quad X_{Lk} = k \cdot X_{L1}; \quad X_{Ck} = \frac{X_{C1}}{k}; \quad \underline{I}_{1km} = \frac{\underline{E}_{km}}{R_1 + jX_{Lk}};$$

$$\underline{I}_{2km} = \frac{\underline{E}_{km}}{R_2 - jX_{Ck}}; \quad \underline{I}_{km} = \underline{I}_{1km} + \underline{I}_{2km}, \text{ где } k - \text{ номер гармоники.}$$

Результаты расчета сведены в общую таблицу. Расчет останавливаем на 5-ой гармонике, так как амплитуды более высоких гармоник в функции  $e(t)$  незначительны и их учет уже не повлияет на конечные результаты расчета.

$k$	$\underline{E}_{km}$	$\underline{I}_{km}$	$\underline{I}_{1km}$	$\underline{I}_{2km}$
1	$157,9 e^{j0}$	$3,081 e^{-j30,4}$	$3,634 e^{-j46,3}$	$1,080 e^{j82,1}$
2	$39,5 e^{j180}$	$0,385 e^{j180}$	$0,576 e^{j115,5}$	$0,526 e^{-j105,4}$
4	$9,9 e^{j0}$	$0,190 e^{j45,2}$	$0,077 e^{-j76,54}$	$0,240 e^{j61,1}$
5	$6,3 e^{j180}$	$0,154 e^{-j135,1}$	$0,039 e^{j100,8}$	$0,179 e^{-j124,6}$

3-ый этап. Определяются интегральные параметры искомых функций. Действующие значения функций:

$$E = \sqrt{\frac{1}{2}(157,9^2 + 39,5^2 + 9,9^2 + 6,3^2)} = 115,4 \text{ В}; \quad I = 2,20 \text{ А}; \quad I_1 = 2,60 \text{ А}; \\ I_3 = 0,88 \text{ А}.$$

Коэффициенты искажения формы кривых для функций  $e(t)$ ,  $i(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ :

$$k_{u(e)} = \sqrt{\frac{39,5^2 + 9,9^2 + 6,3^2}{157,9^2}} = 0,26; \quad k_{u(i1)} = 0,16; \quad k_{u(i2)} = 0,56.$$

Активная мощность источника энергии:

$$P_E = P_{E1} + P_{E2} + P_{E4} + P_{E5} = \sum \operatorname{Re}[\frac{1}{2} E_{km} \cdot I_{km}^*] = 209,8 + 7,6 + 0,7 + 0,4 = 218,5$$

Вт.

Активная мощность приемников энергии :

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 2,60^2 \cdot 30 = 202,8 \text{ Вт}; \quad P_2 = I_2^2 R_2 = 0,88^2 \cdot 20 = 15,3 \text{ Вт}.$$

$$\text{Баланс мощностей:} \quad 218,5 \approx 202,8 + 15,3$$

Анализ результатов решения и выводы:

1. Для определения действующих значений величин и активных мощностей можно было бы пренебречь 4-ой и 5-ой гармониками, однако для определения коэффициентов искажения формы кривых учет названных гармоник необходим.

2. Величина и характер входного сопротивления схемы зависит от номера гармоники: для 1-ой гармоники ( $\varphi_1 = 30,4^\circ$ ) – входное сопротивление носит активно-индуктивный характер; для 2-ой гармоники ( $\varphi_2 = 0$ ) – входное сопротивление носит чисто активный характер, т.е. на частоте 2-ой гармоники имеет место резонанс токов; для 4-ой гармоники ( $\varphi_4 = -45,2^\circ$ ) – входное сопротивление носит активно-емкостный характер.

3. Форма кривой функции тока  $i_1(t)$  в ветви с катушкой искажена меньше, чем форма кривой источника ЭДС  $e(t)$  ( $k_{u(i1)} < k_{u(e)}$ ), а форма кривой тока  $i_2(t)$  в ветви с конденсатором, наоборот, искажена больше ( $k_{u(i2)} > k_{u(e)}$ ). Такие соотношения между коэффициентами искажения форм кривых объясняются зависимостью реактивных сопротивлений от частоты:  $X_{Lk} = k \cdot \omega L = k \cdot X_{L1}$ ;  $X_{Ck} = 1 / k \omega C = X_{C1} / k$ .

## 9.8 Измерение действующих значений несинусоидальных токов и напряжений

Для измерения действующих значений токов и напряжений в цепях переменного синусоидального тока применяются различные приборы, отличающиеся по принципу их действия или системой. Независимо от устройства шкалы всех приборов для измерения действующих значений токов и напряжений проградуированы в действующих значениях измеряемых величин.

Приборы непосредственного измерения (к таким относятся приборы электромагнитной и электродинамической систем) реагирует на действующее значение измеряемой величины ( $I$ ,  $U$ ) и, следовательно, для их шкал коэффициент пересчета равен единице ( $k_n=1$ ).

Приборы косвенного измерения могут реагировать на среднее ( $I_{cp}$ ,  $U_{cp}$ ) или на максимальное ( $I_{max}$ ,  $U_{max}$ ) значение измеряемой величины, но их показания пересчитываются к действующим значениям синусоидальных функций.

Для приборов, реагирующих на среднее значение, коэффициент пересчета равен:

$$k_n = \frac{U}{U_{cp}} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{U_m \cdot 2/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

Для приборов, реагирующих на максимальное значение, коэффициент пересчета равен:

$$k_n = \frac{U}{U_m} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{U_m} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

Действующее значение несинусоидальной функции зависит только от амплитуд отдельных гармоник, в то же время ее максимальное и среднее значения зависят как от амплитуд гармоник, так и от их фазовых сдвигов. Из этого следует вывод, что показания приборов косвенного измерения, реагирующих на максимальное или среднее значение, в цепях несинусоидального тока не будут соответствовать действующим значениям измеряемых величин.

Рассмотрим два примера. Пусть измеряемое напряжение содержит 1-ю и 3-ю гармоники, но с разными фазовыми сдвигами между ними:

а)  $u_1(t) = 100 \sin(\omega t) + 10 \sin(3\omega t)$ , (рисунок 124а),

б)  $u_2(t) = 100 \sin(\omega t) - 10 \sin(3\omega t)$ , (рисунок 124б).

Действующие ( $U$ ), максимальные ( $U_{max}$ ) и средние ( $U_{cp}$ ) значения этих напряжений, рассчитанные математически по соответствующим формулам, а также показания приборов различных систем ( $V_1$  – непосредственного измерения,  $V_2$  – косвенного измерения с реакцией на максимальное значение  $U_{max}$  и  $V_3$  – косвенного измерения с реакцией на среднее значение  $U_{cp}$ ) приведены ниже в таблице.

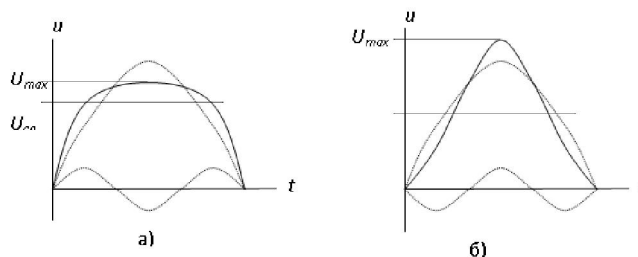


Рисунок 124

Схема	$U$ , В	$U_{max}$ , В	$U_{cp}$ , В	$V_1$	$V_2$	$V_3$
а)	71,1	90	65,8	71,1	63,6	73,0
б)	71,1	110	61,6	71,1	77,8	68,4

Как видно из приведенных в таблице цифр, показания приборов косвенного измерения существенно зависят от фазового сдвига между гармониками, при этом методическая погрешность измерения может составлять значительную величину (в рассматриваемом примере около 10 %).

## 9.9 Высшие гармоники в трехфазных цепях

В симметричном трехфазном режиме токи и напряжения в фазах сдвинуты взаимно во времени на  $\Delta t = T/3$  в порядке следования фаз  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ , что в градусной мере составляет : для 1 гармоники  $\Delta \omega t = \frac{360^\circ}{3} =$

$120^\circ$ , для 2 гармоники  $\Delta 2\omega t = 2 \cdot \frac{360^\circ}{3} = 240^\circ = -120^\circ$ , для 3 гармоники  $\Delta 3\omega t = 3 \cdot \frac{360^\circ}{3} = 360^\circ = 0$ , и т. д.

Из этого следует, что в симметричной трехфазной системе гармоники с порядковым номером  $k = 3n-2$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ), т.е. 1-я, 4-я, 7-я и т.д., имеют прямой порядок следования фаз  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  и, следовательно, образуют симметричные системы прямой последовательности. Гармоники с порядковым номером  $k = 3n+1$  (2-я, 5-я, 8-я и т.д.) имеют обратный порядок следования фаз  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  и, следовательно, образуют симметричные системы обратной последовательности. Гармоники с порядковым номером  $k=3n$  (3-я, 6-я, 9-я и т.д.) имеют нулевой порядок следования фаз, т.е. совпадают, и, следовательно, образуют симметричные системы нулевой последовательности.

Пусть обмотки трехфазного генератора соединены по схеме звезды с выводом нулевой точки, а его фазные напряжения (ЭДС) содержат все возможные гармоники (рисунок 125).

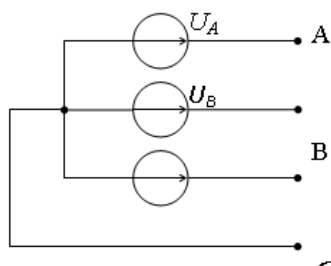


Рисунок 125

В функциях фазных напряжений будут содержаться все гармоники с соответствующими их номеру сдвигами фаз:

$$u_A(t) = U_{1m} \sin \omega t + U_{2m} \sin 2\omega t + U_{3m} \sin 3\omega t + \dots$$

$$u_B(t) = U_{1m} \sin(\omega t - 120^\circ) + U_{2m} \sin(2\omega t + 120^\circ) + U_{3m} \sin 3\omega t + \dots$$

$$u_C(t) = U_{1m} \sin(\omega t + 120^\circ) + U_{2m} \sin(2\omega t - 120^\circ) + U_{3m} \sin 3\omega t + \dots$$

Векторные диаграммы напряжений для 1-й, 2-й и 3-й гармоник показаны на рисунке 126а, б, в.

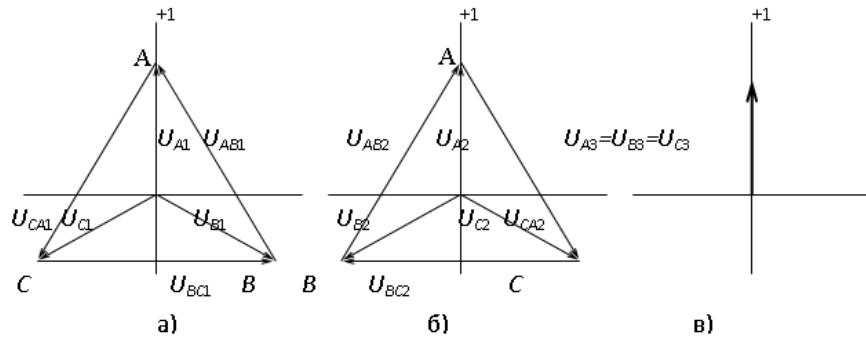


Рисунок 126

Линейные напряжения равны разности соответствующих двух фазных напряжений, например  $u_{AB} = u_A - u_B$ . Как следует из векторных диаграмм рисунка 126 амплитуды линейных напряжений для гармоник прямой и обратной последовательностей в  $\sqrt{3}$  раз больше их фазных значений, а гармоники нулевой последовательности (кратные трем) в линейных напряжениях вообще отсутствуют (равны нулю):

$$u_{AB}(t) = \sqrt{3}U_{1m} \sin(\omega t + 30^\circ) + \sqrt{3}U_{2m} \sin(\omega t - 30^\circ) + 0 + \dots$$

$$u_{BC}(t) = \sqrt{3}U_{1m} \sin(\omega t - 90^\circ) + \sqrt{3}U_{2m} \sin(\omega t + 90^\circ) + 0 + \dots$$

$$u_{CA}(t) = \sqrt{3}U_{1m} \sin(\omega t + 150^\circ) + \sqrt{3}U_{2m} \sin(\omega t - 150^\circ) + 0 + \dots$$

Действующие значения фазного и линейного напряжения :

$$U_\phi = \sqrt{\frac{1}{2}(U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + U_{3m}^2 + \dots)}; \quad U_\lambda = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2}(U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 0 + \dots)}$$

Сравнение полученных уравнений показывает, что при наличии в фазных напряжениях генератора гармоник нулевой последовательности (кратных трем) стандартное соотношение  $\frac{U_\lambda}{U_\phi} = \sqrt{3}$  не соблюдается, а

именно  $U_\lambda \leq \sqrt{3} \cdot U_\phi$ . Из совместного решения этих уравнений получим :

$U_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(U_{3m}^2 + U_{6m}^2 + U_{9m}^2 + \dots)} = \sqrt{U_\phi^2 - \frac{1}{3}U_\lambda^2}$  — действующее значение всех гармоник нулевой последовательности. В реальных трехфазных цепях четные гармоники, как правило, отсутствуют вообще, а амплитуда 9-й гармоники незначительна, поэтому можно приближенно считать, что  $U_0 \approx U_3$ , и  $U_{3m} \approx \sqrt{2} U_0$  — амплитуда 3-й гармоники.

Если обмотки трехфазного генератора соединить по схеме треугольника, то гармоники прямой и обратной последовательностей в контуре треугольника складываясь, в сумме дают нуль, а гармоники нулевой последовательности складываются арифметически, и в контуре треугольника будет действовать суммарная ЭДС, равная  $3U_0$ . Даже при незначительных амплитудах гармоник нулевой последовательности в фазных ЭДС, вызываемые ими в контуре треугольника токи могут оказаться значительными по величине, так как внутреннее сопротивление обмоток очень мало. Это привело бы к дополнительным потерям энергии в генераторе и снижению его КПД. По этой причине обмотки трехфазных генераторов запрещается соединять по схеме треугольника.

Расчет трехфазной цепи при несинусоидальном напряжении генератора производится так же, как и любой сложной цепи, а именно, по методу наложения в три этапа. На 1-ом этапе выполняется разложение несинусоидального фазного напряжения в гармонический ряд Фурье. На 2-ом этапе выполняется расчет схемы для каждой гармоники в отдельности, при этом учитывается зависимость порядка следования фаз от номера гармоники. Например, гармоники токов нулевой последовательности могут замкнуться только через нулевой провод, поэтому при отсутствии нулевого провода гармоники кратные трем в фазных и линейных токах равны нулю.

На заключительном этапе расчета определяются действующие значения токов, напряжений, активные мощности.

В случае симметричной трехфазной нагрузки расчет токов и напряжений для каждой гармоники можно выполнять только в одной фазе  $A$ , а соответствующие токи и напряжения в других фазах определять через поворотные множители “ $a$ ”, “ $a^2$ ” с учетом порядка следования фаз.

**Пример.** Задана схема цепи (рисунок 127) и комплексные сопротивления фаз на основной частоте ( $\underline{Z}_{A1} = (150 + j0)\text{Ом}$ ,  $\underline{Z}_{B1} = (120 + j50)\text{Ом}$ ,  $\underline{Z}_{C1} = (100 - j50)\text{Ом}$ . Фазные напряжения генератора несинусоидальны, гармонический состав задан :

$$u_A = 200\sin\omega t + 50\sin 3\omega t + 20\sin 5\omega t$$

Требуется определить : 1) действующие значения фазных и линейных напряжений генератора, 2) действующие значения линейных (фазных) токов приемника и тока в нулевом проводе, 3) активные мощности генератора и приемника.

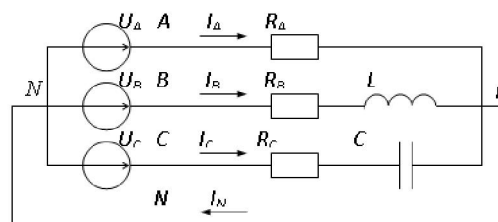


Рисунок 127

Расчет схемы для 1-й гармоники (прямая последовательность):

$$\underline{I}_{A1m} = \frac{\underline{U}_{A1m}}{\underline{Z}_{A1}} = \frac{200e^{j0^\circ}}{150 + j0} = 1,333e^{j0^\circ}$$

$$\underline{I}_{B1m} = \frac{\underline{U}_{B1m}}{\underline{Z}_{B1}} = \frac{200e^{-j120^\circ}}{120 + j50} = 1,538e^{-j142,6^\circ}$$

$$\underline{I}_{C1m} = \frac{\underline{U}_{C1m}}{\underline{Z}_{C1}} = \frac{200e^{j120^\circ}}{100 - j150} = 1,109e^{j176,3^\circ}$$

$$\underline{I}_{N1m} = \underline{I}_{A1m} + \underline{I}_{B1m} + \underline{I}_{C1m} = 1,318e^{-j139,1^\circ}$$

Расчет схемы для 3-й гармоники (нулевая последовательность) :

$$\underline{I}_{A3m} = \frac{\underline{U}_{A3m}}{\underline{Z}_{A3}} = \frac{50e^{j0^\circ}}{150 + j0} = 0,333e^{j0^\circ}$$

$$\underline{I}_{B3m} = \frac{\underline{U}_{B3m}}{\underline{Z}_{B3}} = \frac{50e^{j0^\circ}}{120 + j150} = 0,260e^{-j51,30^\circ}$$

$$\underline{I}_{C3m} = \frac{\underline{U}_{C3m}}{\underline{Z}_{C3}} = \frac{50e^{j0^\circ}}{100 - j30} = 0,479e^{j16,7^\circ}$$

$$\underline{I}_{N3m} = \underline{I}_{A3m} + \underline{I}_{B3m} + \underline{I}_{C3m} = 0,957e^{-j3,9^\circ}$$

Расчет схемы для 5-й гармоники (обратная последовательность) :

$$\underline{I}_{A5m} = \frac{\underline{U}_{A5m}}{\underline{Z}_{A5}} = \frac{20e^{j0^\circ}}{150 + j0} = 0,133e^{j0^\circ}$$

$$\underline{I}_{B5m} = \frac{\underline{U}_{B5m}}{\underline{Z}_{B5}} = \frac{20e^{j120^\circ}}{120 + j250} = 0,104e^{j68,7^\circ}$$

$$\underline{I}_{C5m} = \frac{\underline{U}_{C5m}}{\underline{Z}_{C5}} = \frac{20e^{-j120^\circ}}{100 - j30} = 0,192e^{-j103,3^\circ}$$

$$\underline{I}_{N5m} = \underline{I}_{A5m} + \underline{I}_{B5m} + \underline{I}_{C5m} = 0,155e^{-j35,1^\circ}$$

### Синтез решения.

Действующие значения фазного и линейного напряжений :

$$U_\phi = \sqrt{\frac{1}{2}(U_{1m}^2 + U_{3m}^2 + U_{5m}^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(200^2 + 50^2 + 20^2)} = 146,5 \text{ В}$$

$$U_L = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2}(U_{1m}^2 + U_{5m}^2)} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2}(200^2 + 20^2)} = 246,2 \text{ В}$$

$$\frac{U_L}{U_\phi} = \frac{246,2}{146,5} = 1,68 \text{ В, что меньше } \sqrt{3}.$$

Действующие значения токов :

$$\underline{I}_A = \sqrt{\frac{1}{2}(I_{A1m}^2 + I_{A3m}^2 + I_{A5m}^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1,333^2 + 0,333^2 + 0,133^2)} = 0,976 \text{ А}$$

$$\underline{I}_B = \sqrt{\frac{1}{2}(I_{B1m}^2 + I_{B3m}^2 + I_{B5m}^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1,538^2 + 0,260^2 + 0,104^2)} = 1,108 \text{ А}$$

$$\underline{I}_C = \sqrt{\frac{1}{2}(I_{C1m}^2 + I_{C3m}^2 + I_{C5m}^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1,109^2 + 0,476^2 + 0,192^2)} = 0,865 \text{ А}$$

$$\underline{I}_N = \sqrt{\frac{1}{2}(I_{N1m}^2 + I_{N3m}^2 + I_{N5m}^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1,318^2 + 0,957^2 + 0,155^2)} = 1,157 \text{ А}$$

Так как при наличии нулевого провода отдельные фазы приемника работают независимо друг от друга, то активные мощности отдельных фаз приемника равны активным мощностям одноименных фаз генератора.

$$P_A = I_A^2 \cdot R_A = 0,976^2 \cdot 150 = 142,9 \text{ Вт}$$

$$P_B = I_B^2 \cdot R_B = 1,108^2 \cdot 120 = 147,3 \text{ Вт}$$

$$P_C = I_C^2 \cdot R_C = 0,865^2 \cdot 100 = 74,8 \text{ Вт}$$

$$P = P_A + P_B + P_C = 365 \text{ Вт}$$

## 10 Переходные процессы в электрических цепях

### 10.1 Определение переходных процессов

Установившимся режимом называется такое состояние электрической цепи (схемы), при котором наблюдается равновесие между действием на цепь источников энергии и реакцией элементов цепи на это действие. Различают следующие 4 вида установившихся режимов в цепи:

- 1) режим отсутствия тока и напряжения;
- 2) режим постоянного тока;
- 3) режим переменного синусоидального тока;
- 4) режим периодического несинусоидального тока.

В установившемся режиме токи и напряжения в элементах цепи могут существовать неограниченно долго, не изменяя своих величин и характеристик. При этом энергетическое состояние каждого элемента цепи может быть однозначно определено для любого момента времени.

Переходным называется процесс, возникающий в электрической цепи при переходе ее от одного установившегося режима (старого) к другому установившемуся режиму (новому). Переходные процессы в цепи возникают в результате коммутаций. Под коммутацией понимают скачкообразные (мгновенные) изменения структуры (схемы) цепи или параметров ее отдельных элементов, вызванные включением, отключением или переключением отдельных ее участков. На электрических схемах коммутация обозначается в виде ключей в разомкнутом (рисунок 128а) или замкнутом (рисунок 128б) положении, при этом разомкнутый ключ в момент  $t = 0$  замыкается, а замкнутый в момент  $t = 0$  размыкается.



Рисунок 128

Запасы энергии в магнитном поле катушки  $W_M = \frac{L \cdot i^2}{2}$  и в электрическом поле конденсатора  $W_C = \frac{C \cdot u^2}{2}$  в момент коммутации соответствуют старому (докоммутационному) установившемуся режиму и не могут измениться скачкообразно. Требуется некоторое время, чтобы эти запасы энергии пришли в соответствие с новым (послекоммутационным) установившимся режимом цепи. Таким образом, физически переходный процесс есть переход цепи из одного энергетического состояния в другое.

По времени переходные процессы в электрических цепях являются быстропротекающими, их длительность составляет обычно доли секунды и в редких случаях несколько секунд.

В результате переходных процессов токи и напряжения на отдельных участках цепи могут значительно возрасти и превысить их значения в установившемся режиме. Расчет переходных процессов в электрических цепях является весьма важным мероприятием: результаты таких расчетов в инженерной практике используются для правильного выбора уровня изоляции токоведущих частей электроустановок и для проверки технических устройств на динамическую устойчивость.

## 10.2 Законы (правила) коммутации

Первый закон коммутации гласит, что ток  $i_L$  в цепи с катушкой индуктивности  $L$  в момент коммутации не может измениться скачкообразно, т.е.

$$i_L(-0) = i_L(+0) = i_L(0) = \text{const}$$

Предположим обратное, что ток  $i_L$  изменяется скачком, что означает  $\frac{di}{dt} = \infty$ . Из этого следует, что напряжение на катушке

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = \infty,$$

и мощность, потребляемая магнитным полем катушки

$$P = \frac{dW_M}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} Li_L^2\right)}{dt} = Li_L \frac{di_L}{dt} = \infty.$$

Полученные выводы противоречат физическим законам, так как нельзя получить напряжение  $u = \infty$  и в природе не существует источников энергии, способных развивать бесконечную мощность. Следовательно, наше

первоначальное предположение является некорректным, и мы вправе утверждать, что  $\frac{di_L}{dt} \neq 0$ , или ток  $i_L$  в цепи с катушкой  $L$  в момент коммутации не может измениться скачкообразно.

Второй закон коммутации гласит, что напряжение  $u_C$  на выводах конденсатора  $C$  в момент коммутации не может измениться скачкообразно, т.е.

$$u_C(-0) = u_C(+0) = u_C(0) = \text{const}.$$

Предположим обратное, что напряжение  $u_C$  изменяется скачком, что означает  $\frac{du_C}{dt} = \infty$ . Из этого следует, что ток в конденсаторе

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \infty,$$

и мощность, потребляемая электрическим полем конденсатора

$$P = \frac{dW_{\mathcal{E}}}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2} C u_C^2)}{dt} = C u_C \frac{du_C}{dt} = \infty.$$

Полученные выводы противоречат физическим законам, так как нельзя получить ток  $i = \infty$  и не существует источников энергии бесконечной мощности. Следовательно, наше первоначальное предположение является некорректным, и мы вправе утверждать, что  $\frac{du_C}{dt} \neq \infty$ , или напряжение  $u_C$  на выводах конденсатора  $C$  в момент коммутации не может измениться скачкообразно.

Законы коммутации используются на практике для определения начальных условий при расчете переходных процессов.

### 10.3 Начальные условия переходного процесса

Начальными условиями называются мгновенные значения отдельных токов и напряжений, а также их первых, вторых и т.д. производных в начале переходного процесса, т.е. в момент коммутации при  $t=0$ . Начальные условия делятся на 2 вида: независимые и зависимые.

К независимым начальным условиям относятся токи в катушках  $i_L(0)$  и напряжения на конденсаторах  $u_C(0)$ . Независимые начальные условия определяются законами коммутации, они не могут измениться скачкообразно и не зависят от вида коммутации. Их значения определяются из расчета схемы цепи в установившемся докоммутационном режиме на момент коммутации  $t=0$ .

**Пример.** Определить независимые начальные условия  $i_L(0)$ ,  $u_C(0)$  в схеме рисунка 129 при заданных значениях параметров элементов:  $R_1=50$  Ом,  $L=100$  мГн,  $R_2=100$  Ом,  $C=50$  мкФ, а) для постоянной ЭДС  $e(t)=E=150$  В = const; б) для синусоидальной ЭДС  $e(t)=150\sin\omega t$ ,  $f=50$  Гц.

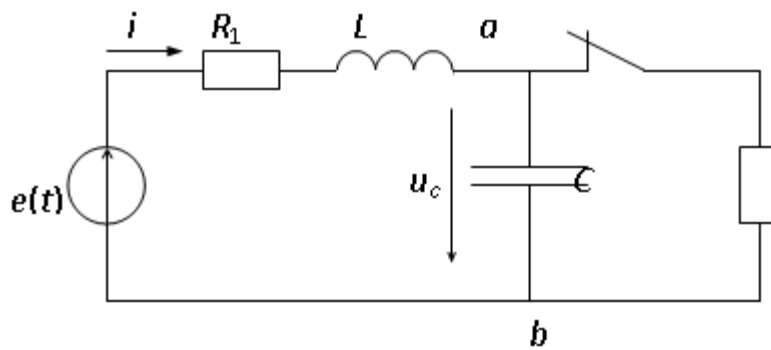


Рисунок 129

а) При постоянной ЭДС источника  $e(t)=E$  расчет схемы производится как для цепи постоянного тока: катушка  $L$  закорачивается, ветвь с конденсатором  $C$  размыкается, учитываются только резистивные элементы  $R$ .

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{150}{50 + 100} = 1 \text{ A};$$

$$U_C = U_{ab} = I \cdot R_2 = 1 \cdot 100 = 100 \text{ В}$$

Независимые начальные условия:  $i_L(0)=1 \text{ А}$ ,  $U_C(0)=100 \text{ В}$ .

б) При синусоидальной ЭДС источника  $e(t)=E_m \sin \omega t$  расчет схемы производится как для цепи переменного тока в комплексной форме для комплексных амплитуд функций.

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0,1 = 31,4 \text{ Ом}; \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 63,7 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C} = \frac{100(-j63,7)}{100 - j63,7} = 53,7e^{j57,5} \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{\Sigma} = R_1 + jX_L + \underline{Z}_{ab} = 50 + j31,4 + 53,7e^{j57,5} = 80,1e^{-j10,1} \text{ Ом}$$

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_{\Sigma}} = \frac{150e^{j0}}{80,1e^{-j10,1}} = 1,87e^{j10,1} \text{ А}$$

$$\underline{U}_{abm} = \underline{I}_m \cdot \underline{Z}_{ab} = 1,87e^{j10,1} \cdot 53,7e^{j57,5} = 100,4e^{j67,6} \text{ В}$$

$$i(t) = 1,87 \sin(\omega t + 10,1^\circ) \text{ А}$$

$$u_C(t) = 100,4 \sin(\omega t + 67,6^\circ) \text{ В}$$

Независимые начальные условия:

$$i(0) = 1,87 \sin(10,1^\circ) = 0,32 \text{ А}$$

$$u_C(0) = 100,4 \sin(67,6^\circ) = 92,8 \text{ В}$$

К зависимым начальным условиям относятся значения всех остальных токов и напряжений, а так же значения производных от всех переменных в момент коммутации при  $t=0$ . Зависимые начальные условия могут изменяться скачкообразно, их значения зависят от вида и места коммутации.

Зависимые начальные условия определяются на момент коммутации  $t=0$  из системы дифференциальных уравнений (уравнений Кирхгофа),

составленных для схемы в состоянии после коммутации, путем подстановки в них найденных ранее независимых начальных условий.

Для рассматриваемой схемы рисунка 129 система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$iR_1 + L \frac{di}{dt} + u_C = e(t) \quad (1)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad (2)$$

а) При постоянной ЭДС источника  $e(t) = E = \text{const}$  зависимые начальные условия будут равны:

$$u_{R1}(0) = i(0) \cdot R_1 = 1 \cdot 50 = 50 \text{ В}$$

$$u_L(0) = e(0) - u_{R1}(0) - u_C(0) = 150 - 50 - 100 = 0 \text{ В}$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{u_L(0)}{L} = \frac{0}{100 \cdot 10^{-3}} = 0 \text{ А/с}$$

$$\frac{du_C}{dt}(0) = \frac{i(0)}{C} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^4 \text{ В/с}$$

Для определения начальных условий для вторых производных исходные дифференциальные уравнения дифференцируют почленно по переменной  $t$  и подставляют в них найденные на предыдущем этапе значения зависимых начальных условий, и т.д.

б) При синусоидальной ЭДС источника  $e(t) = E_m \sin \omega t$  зависимые начальные условия определяются точно также, как и для цепи с источником постоянной ЭДС.

Начальные условия используются при расчете переходных процессов любым методом.

## 10.4 Классический метод расчета переходных процессов

Переходные процессы в любой электрической цепи можно описать системой дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по законам Кирхгофа. В математике известно несколько методов решения систем дифференциальных уравнений: классический, операционный, численный и др. Название метода расчета переходных процессов адекватно названию математического метода решения системы дифференциальных уравнений, которыми описываются переходные процессы.

Исключая из системы дифференциальных уравнений Кирхгофа лишние переменные, получим в результате для искомой функции  $x(t)$  неоднородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка:

$$a_n \cdot \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = F(t),$$

где  $x$  – искомая величина, например  $i$  или  $u$ ;  $a_k$  – постоянные коэффициенты;  $F(t)$  – некоторая функция времени, определяемая источником энергии.

Из курса математики известно, что решение (общий интеграл) линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы двух решений: а)  $x'(t)$  – полного решения однородного (без правой части) дифференциального уравнения и б)  $x''(t)$  – частного решения неоднородного дифференциального уравнения для  $t = \infty$ :

$$x(t) = x'(t) + x''(t).$$

Вид частного решения  $x''(t)$  для  $t = \infty$  определяется источниками энергии и соответствует значению искомой функции в установившемся послекоммутационном режиме:  $x''(t) = x_y(t)$ . В электротехнике эта составляющая решения получила название установившейся.

Полное решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x'(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots + A_n \cdot e^{p_n t},$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – постоянные интегрирования;  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – корни характеристического уравнения, которое получают из однородного дифференциального, заменив в нем  $x \rightarrow 1$ ,  $dx/dt \rightarrow p$  и т.д.:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0 = 0.$$

Эта составляющая решения не зависит от источников энергии, в электротехнике она получила название свободной:  $x'(t) = x_{cs}(t)$ .

Таким образом, решение для искомой функции (тока, напряжения) может быть представлено в принятой в электротехнике форме:

$$x(t) = x_y(t) + x_{cs}(t) = x_y(t) + A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots.$$

Физический смысл имеет только полное решение для искомой функции  $x(t)$ , а ее отдельные составляющие  $x_y(t)$  и  $x_{cs}(t)$  являются расчетными величинами.

Метод расчета переходного процесса, заключающийся в решении неоднородного дифференциального уравнения классическим методом математики, получил название классического.

Расчет переходного процесса классическим методом состоит из следующих составных частей или этапов:

- а) расчет установившейся составляющей  $x_y(t)$ ;
- б) составление характеристического уравнения и определение его корней  $p_1, \dots, p_n$ ;
- в) определение постоянных интегрирования  $A_1, A_2, \dots$ .

Следует отметить, что расчет переходного процесса классическим методом выполняется не в строгом соответствии с математическим методом решения неоднородного дифференциального уравнения. Физические законы электротехники позволяют существенно упростить это решение.

## 10.5 Определение установившейся составляющей $x_y(t)$

Как известно, установившаяся составляющая искомой функции  $x_y(t)$ , являясь частным решением неоднородного дифференциального уравнения при  $t \rightarrow \infty$ , соответствует значению искомой функции в установившемся после коммутации режиме. Определение этой составляющей математическим методом из решения дифференциального уравнения довольно сложно и трудоемко. Гораздо проще найти эту функцию инженерным методом путем расчета схемы цепи в установившемся режиме после коммутации, что и делают на практике.

**Пример.** Определить установившуюся составляющую для тока  $i_y$  в схеме рисунка 130 при заданных значениях параметров элементов:  $R_1=50$  Ом,  $L=100$  мГн,  $R_2=100$  Ом,  $C=50$  мкФ, а) для постоянной ЭДС  $e(t)=E=150$  В = const; б) для синусоидальной ЭДС  $e(t)=150\sin\omega t$ ,  $f=50$  Гц.

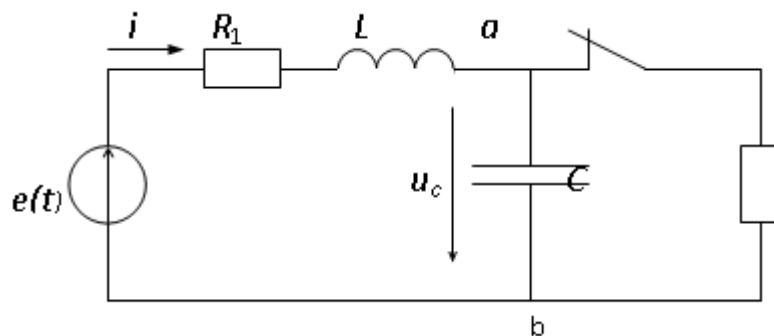


Рисунок 130

После коммутации ветвь с резистором  $R_2$  отключается и не оказывает влияния на режим остальной схемы.

а) При постоянной ЭДС источника  $e(t)=E=const$  ток в схеме протекать не может (сопротивление конденсатора постоянному току равно  $\infty$ ), следовательно  $i_y(t)=0$ .

б) При переменной ЭДС источника  $e(t)=E_m\sin\omega t$  расчет установившегося режима выполняется в комплексной форме для комплексных амплитуд функций. По закону Ома:

$$\underline{I}_{ym} = \frac{\underline{E}_m}{R_1 + jX_L - jX_C} = \frac{150e^{j0}}{50 + j31,4 - j63,7} = 2,52e^{j32,9} \text{ А}$$

$$i_y(t) = 2,52\sin(\omega t + 32,9^\circ) \text{ А}$$

Вид установившейся составляющей соответствует виду источников энергии, которые действуют в схеме цепи.

## 10.6 Методы составления характеристического уравнения

Свободный режим схемы не зависит от источников энергии, определяется только структурой схемы и параметрами ее элементов. Из этого

следует, что корни характеристического уравнения  $p_1, p_2, \dots, p_n$  будут одинаковыми для всех переменных функций (токов и напряжений).

Характеристическое уравнение можно составить различными методами. Первый метод – классический, когда характеристическое уравнение составляется строго в соответствии с дифференциальным по классической схеме. При расчете переходных процессов в сложной схеме составляется система из “ $m$ ” дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа для схемы цепи после коммутации. Так как корни характеристического уравнения являются общими для всех переменных, то решение системы дифференциальных уравнений выполняется относительно любой переменной (по выбору). В результате решения получают неоднородное дифференциальное уравнение с одной переменной. Составляют характеристическое уравнение в соответствии с полученным дифференциальным и определяют его корни.

**Пример.** Составить характеристическое уравнение и определить его корни для переменных в схеме (рисунок 131). Параметры элементов заданы в общем виде.

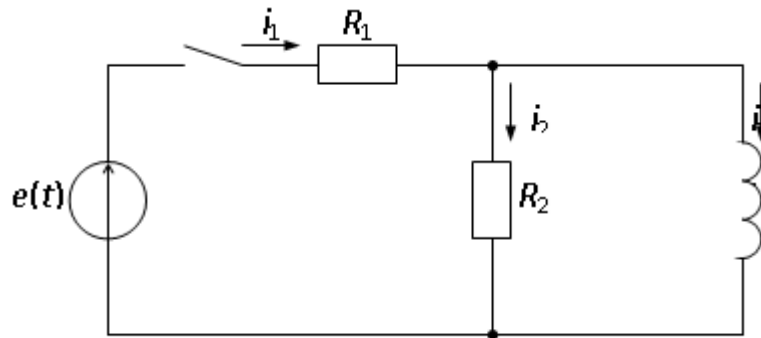


Рисунок 131

Система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L \frac{di_3}{dt} = e(t) & (1) \Rightarrow i_1 = \frac{e}{R_1} - \frac{L}{R_1} \cdot \frac{di_3}{dt} \\ -i_2 R_2 + L \frac{di_3}{dt} = 0 & (2) \Rightarrow i_2 = \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_3}{dt} \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Решим систему уравнений относительно переменной  $i_3$ , в результате получим неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{E}{R_1} - \frac{L}{R_1} \cdot \frac{di_3}{dt} - \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_3}{dt} - i_3 = 0 \Rightarrow \left( \frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2} \right) \cdot \frac{di_3}{dt} + i_3 = \frac{1}{R_1} e(t)$$

Характеристическое уравнение и его корень:

$$p\left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \text{ [с}^{-1}\text{]}$$

Второй способ составления характеристического уравнения заключается в приравнивании нулю главного определителя системы уравнений Кирхгофа для свободных составляющих переменных.

Пусть свободная составляющая произвольного тока имеет вид  $i_{к\text{св}} = A_k e^{p \cdot t}$ , тогда

$$\frac{di_{к\text{св}}}{dt} = p \cdot A_k e^{p \cdot t} = p \cdot i_{к\text{св}} ; \int i_{к\text{св}} dt = \int A_k e^{p \cdot t} dt = \frac{1}{p} A_k e^{p \cdot t} = \frac{1}{p} i_{к\text{св}}.$$

Система уравнений для свободных составляющих получается из системы дифференциальных уравнений Кирхгофа путем замены производных от переменных на множитель  $p$ , а интегралов – на  $1/p$ . Для рассматриваемого примера система уравнений для свободных составляющих имеет вид:

$$\begin{cases} i_{1\text{св}} R_1 + 0 + pL \cdot i_{3\text{св}} = 0 \\ 0 + i_{2\text{св}} R_2 + pL \cdot i_{3\text{св}} = 0 \\ i_{1\text{св}} - i_{2\text{св}} - i_{3\text{св}} = 0 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение и его корень:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & 0 & pL \\ 0 & -R_2 & pL \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = R_1 \cdot R_2 - R_1 \cdot pL - R_2 \cdot pL = 0 \Rightarrow p = \frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}.$$

Третий способ составления характеристического уравнения (инженерный) заключается в приравнивании нулю входного операторного сопротивления схемы относительно любой ее ветви.

Операторное сопротивление элемента получается из его комплексного сопротивления путем простой замены множителя  $j\omega$  на  $p$ , следовательно

$$Z_R(p) = R; \quad Z_L(p) = pL; \quad Z_C(p) = \frac{1}{pC}.$$

Для рассматриваемого примера:

$$Z_1(p) = R_1 + \frac{R_2 \cdot pL}{R_2 + pL} = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)};$$

$$Z_2(p) = R_2 + \frac{R_1 \cdot pL}{R_1 + pL} = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)};$$

$$Z_3(p) = pL + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}.$$

Третий способ является наиболее простым и экономичным, поэтому он чаще других применяется при расчете переходных процессов в электрических цепях.

Корни характеристического уравнения характеризуют свободный переходной процесс в схеме без источников энергии. Такой процесс протекает с потерями энергии и поэтому затухает во времени. Из этого следует, что корни характеристического уравнения должны быть отрицательными или иметь отрицательную вещественную часть.

В общем случае порядок дифференциального уравнения, которым описывается переходный процесс в схеме, и, следовательно, степень характеристического уравнения и число его корней равны числу независимых начальных условий, или числу независимых накопителей энергии (катушек  $L$  и конденсаторов  $C$ ). Если в схеме цепи содержатся параллельно включенные конденсаторы  $C_1, C_2, \dots$  или последовательно включенные катушки  $L_1, L_2, \dots$ , то при расчете переходных процессов они должны быть заменены одним эквивалентным элементом  $C_{\Sigma} = C_1 + C_2 + \dots$  или  $L_{\Sigma} = L_1 + L_2 + \dots$ .

Таким образом, общий вид решения для любой переменной при расчете переходного процесса может быть составлен только из анализа схемы цепи, без составления и решения системы дифференциальных уравнений.

Для рассматриваемого выше примера:

$$а) i_1(t) = i_{1y}(t) + i_{1cs}(t) = I_{1y} + A_1 e^{p_1 t} \text{ — при } e(t) = E = \text{const};$$

$$б) i(t) = i_{1y}(t) + i_{1cs}(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \psi) + A_1 e^{p_1 t} \text{ — при } e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha).$$

## 10.7 Определение постоянных интегрирования

Определение постоянных интегрирования производится на заключительном этапе расчета переходного процесса, когда остальные составляющие решения уже найдены. Постоянные интегрирования определяются путем подстановки в решение для искомой функции соответствующих начальных условий.

Пусть решение для искомой функции  $i(t)$  содержит только одну постоянную интегрирования:

$$i(t) = i_y(t) + i_{cs}(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha) + A e^{p_1 t}$$

Постоянная интегрирования находится путем подстановки в решение начального условия для самой функции, т.е.  $i(0)$ :

$$i(0) = i_y(0) + i_{cs}(0) = I_m \sin \alpha + A \Rightarrow A = i(0) - I_m \sin \alpha.$$

Пусть решение для искомой функции  $i(t)$  содержит две постоянных интегрирования и имеет вид:

$$i(t) = i_y(t) + i_{cs}(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

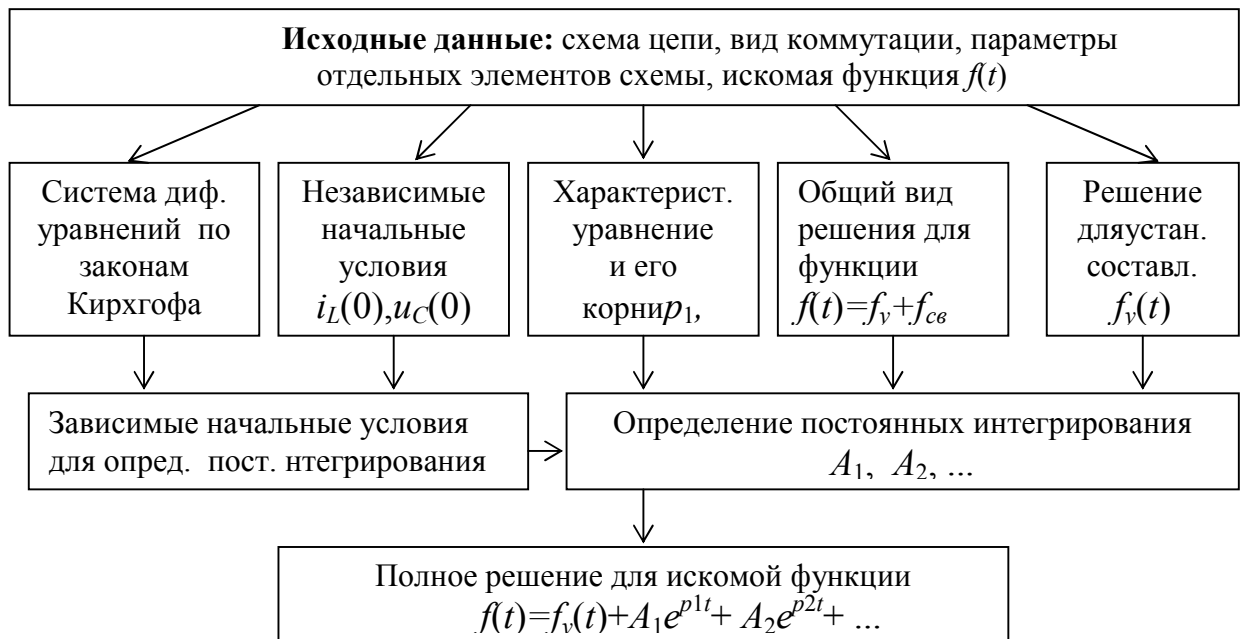
Постоянные интегрирования в этом случае находятся путем подстановки в решение начальных условий для самой функции  $i(0)$  и для ее первой производной  $\frac{di}{dt}(0)$ :

$$\begin{cases} i(0) = I_m \sin \alpha + A_1 + A_2 \\ \frac{di}{dt}(0) = \omega I_m \cos \alpha + p_1 A_1 + p_2 A_2 \end{cases}$$

В результате совместного решения этой системы уравнений определяют искомые постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ .

Последовательность выполнения отдельных этапов расчета переходных процессов классическим методом показана ниже в виде диаграммы.

### 10.8. Алгоритм расчета переходных процессов классическим



**Примечания:** 1. Выполнение всех этапов, обозначенных в диаграмме клетками, является обязательным и необходимым.

2. Выполнение первых пяти этапов, находящихся в верхнем горизонтальном ряду диаграммы, может производиться в любой последовательности, так как они не зависят друг от друга.

**Пример.** Для схемы (рисунок 132) с заданными параметрами элементов:  $E=100$  В,  $R=50$  Ом,  $R_1=20$  Ом,  $R_2=30$  Ом,  $C=83,5$  мкФ, определить ток  $i_1$  после коммутации.

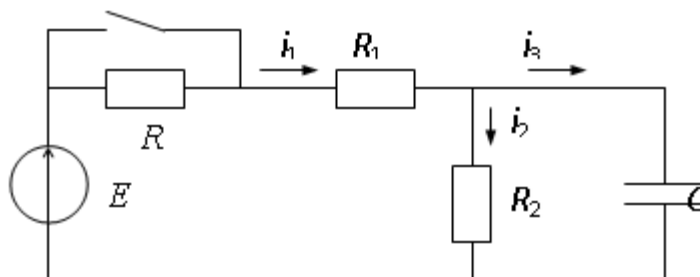


Рисунок 132

1)Общий вид решения для искомой функции:

$$i_1(t) = i_{1y} + i_{1cв} = I_{1y} + Ae^{pt}$$

2)Определение установившейся составляющей из расчета схемы после коммутации:

$$i_{1y}(t) = I_{1y} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{100}{20 + 30} = 2 \text{ А}$$

3)Характеристическое уравнение и его корень:

$$Z_3(p) = \frac{1}{pC} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0, \Rightarrow p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = \frac{20 + 30}{20 \cdot 30 \cdot 83.5 \cdot 10^{-6}} = -1000 \text{ с}^{-1}$$

4)Независимое начальное условие  $u_c(0)$  из расчета схемы до коммутации:

$$u_{C(\partial K)} = u_c(0) = i_2 R_2 = \frac{E \cdot R_2}{R + R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 30}{50 + 20 + 30} = 30 \text{ В}$$

5)Система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа для схемы после коммутации:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + \frac{1}{C} \int i_3 dt = E & (1) \\ -i_2 R_2 + \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0 & (2) \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

6)Начальное условие  $i_1(0)$ , необходимое для определения постоянной интегрирования из уравнения (1):

$$i_1(0) = \frac{E - u_c(0)}{R_1} = \frac{100 - 30}{20} = 3,5 \text{ А}$$

7)Определение постоянной интегрирования:

$$i_1(0) = i_{1y}(0) + i_{1cв}(0) = 2 + A_1 = 3,5 \Rightarrow A_1 = 3,5 - 2 = 1,5 \text{ А}$$

8)Решение для искомой функции:

$$i_1(t) = i_{1y} + i_{1cв} = 2 + 1,5e^{-1000t}$$

9)Графическая диаграмма искомой функции  $i_1(t)$  показана на рисунке 133:

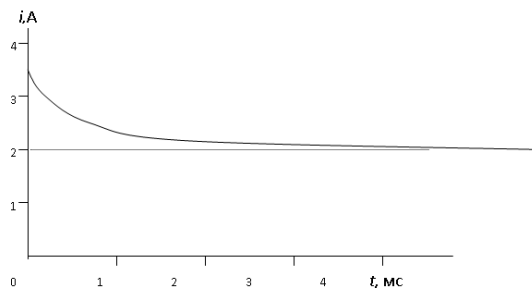


Рисунок 133

## 10.9 Операторный метод расчета переходных процессов

Если система дифференциальных уравнений, которыми описывается переходной процесс в схеме, решается операционным методом, то и сам метод расчета переходного процесса также называется операционным или операторным.

Сущность операторного метода состоит в том, что на 1-ом этапе действительные функции времени  $i(t)$ ,  $u(t)$ , называемые оригиналами, заменяются некоторыми новыми функциями  $I(p)$ ,  $U(p)$ , называемыми операторными изображениями. Соответствие между оригиналом функции  $f(t)$  и ее операторным изображением  $F(p)$  устанавливается на основе прямого преобразования интеграла Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \quad \text{или} \quad F(p) \Leftrightarrow f(t),$$

где  $\Leftrightarrow$  – знак соответствия;  $p = \sigma + j\omega$  – комплексный оператор Лапласа.

Если  $\sigma = 0$ , то  $p = j\omega$ , и преобразование Лапласа превращается в преобразование Фурье, которое лежит в основе комплексного метода расчета цепей переменного тока.

Преобразование Лапласа позволяет заменить операции 2-го рода над оригиналами функций (дифференцирование и интегрирование) на операции 1-го рода (умножение и деление) над операторными изображениями этих функций.

Расчет переходных процессов операторным методом условно выполняется в 3 этапа.

На 1-м этапе расчета система дифференциальных уравнений, составленная по законам Кирхгофа для оригиналов функций, после применения преобразования Лапласа превращается в систему алгебраических уравнений для операторных изображений этих функций.

На 2-ом этапе выполняется решение системы алгебраических операторных уравнений относительно искомой функции, в результате чего получают выражение искомой функции в операторной форме  $F(p)$ .

На заключительном 3-м этапе выполняется обратный переход от найденного операторного решения для искомой функции  $F(p)$  к соответствующей ей функции времени  $f(t)$ , т. е. Выполняется переход от изображения функции  $F(p)$  к ее оригиналу  $f(t)$ .

Теоретически обратный переход от операторного изображения функции  $F(p)$  к ее оригиналу  $f(t)$  устанавливается на основе обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} \cdot dp.$$

На практике для обратного перехода используются более простые и удобные методы, а именно: формула разложения и таблицы соответствия.

## 10.10 Операторные изображения некоторых функций времени

Найдем операторные изображения некоторых функций времени, которые встречаются в электротехнике.

1) Изображение постоянной функции  $f(t)=A$ :

$$f(t) = A \Leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = -\frac{A}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

2) Изображения экспоненциальных функций:

$$f(t) = e^{\pm \alpha t} \Leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{\pm \alpha t} e^{-pt} dt = \frac{1}{-p \pm \alpha} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p \mp \alpha};$$

$$f(t) = e^{j(\omega t + \psi)} = e^{j\psi} e^{j\omega t} \Leftrightarrow F(p) = \frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}.$$

3) Изображения гармонических функций:

$$f(t) = \sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \Leftrightarrow F(p) = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$f(t) = \cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \Leftrightarrow F(p) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

$$f(t) = \sin(\omega t + \psi) = \cos \psi \sin \omega t + \sin \psi \cos \omega t \Leftrightarrow F(p) = \frac{\omega \cos \psi + p \sin \psi}{p^2 + \omega^2}.$$

4) Изображения 1-ой и 2-ой производной от функции времени:

$$\frac{df}{dt} \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot df = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot d(e^{-pt}) =$$

$$= 0 - f(0) + p \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = pF(p) - f(0),$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Leftrightarrow p^2 F(p) - pf(0) - \frac{df}{dt}(0).$$

5) Изображение определенного интеграла от функции:

$$\int_0^t f(t) \cdot dt \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \left[ \int_0^t f(t) \cdot dt \right] \cdot e^{-pt} \cdot dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^t f(t) \cdot dt \right] \cdot d(e^{-pt}) =$$

$$= -\frac{1}{p} \left[ \int_0^t f(t) \cdot dt \right] \cdot e^{-pt} \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt = 0 + \frac{1}{p} F(p).$$

Для удобства пользования сведем полученные результаты в общую таблицу, которая называется таблицей соответствия.

Таблица соответствия

Оригинал функции $f(t)$	Изображение функции $F(p)$
$A$	$\frac{1}{p} A$
$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{p \pm \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\alpha t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$\frac{df}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0) - \frac{df}{dt}(0)$
$\int_0^t f(t) \cdot dt$	$\frac{1}{p} F(p)$

### 10.11 Законы электротехники в операторной форме

Мгновенные значения тока  $i(t)$  и напряжения  $u(t)$  на идеальных элементах электрических схем связаны между собой дифференциальной формой уравнений:  $u_R(t) = iR$  – для резистора;  $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$  – для катушки

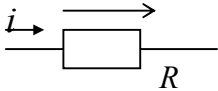
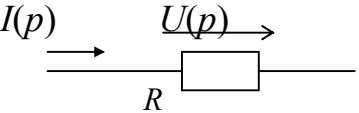
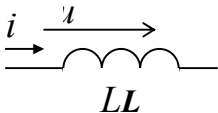
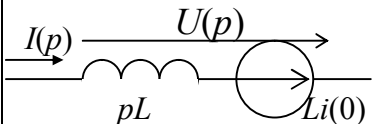
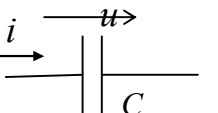
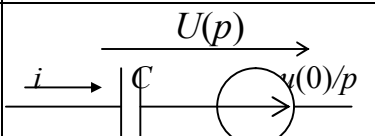
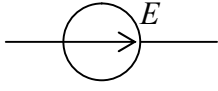
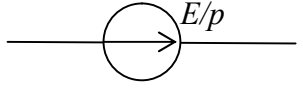
индуктивности;  $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$  – для конденсатора.

Применим к дифференциальным уравнениям преобразование Лапласа и получим соответствующее им операторные изображения:  $U_R(p) = I(p) \cdot R$  – для резистора;  $U_L(p) = I(p) \cdot pL - Li(0)$  – для катушки индуктивности;  $U_C(p) = I(p) \frac{1}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}$  – для конденсатора.

Таким образом, идеальным элементам  $R, L, C$  электрической схемы будут соответствовать новые схемные представления этих элементов в операторной схеме (см. табл.).

Здесь  $R, pL, 1/pC$  – операторные сопротивления соответственно резистора  $R$ , катушки  $L$  и конденсатора  $C$ . Операторное сопротивление  $Z(p)$  любого участка схемы можно получить из его комплексного сопротивления  $Z(j\omega)$ , заменив в выражении множитель  $j\omega$  на оператор  $p$ .

$Li(0), u_C(0)/p$  – внутренние источники ЭДС, обусловленные запасами энергии в магнитном и электрическом полях в момент коммутации при  $t=0$ . Направления действия внутренних источников ЭДС принимаются по направлению тока  $i(0)$  для источника  $L$  и навстречу напряжению  $u_C(0)$  для источника  $u_C(0)/p$ .

Электрическая схема	Дифференциальные уравнения	Операторные уравнения	Операторная схема
	$u = iR$	$U(p) = I(p)R$	
	$u = L \frac{di}{dt}$	$U(p) = pLI(p) - Li(0)$	
	$u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u(0)$	$U(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u(0)}{p}$	
	$E = const$	$\frac{E}{p}$	

С учетом полученных соотношений любую электрическую схему для оригиналов функций  $i(t), u(t)$  можно заменить соответствующей ей операторной схемой для изображений функций  $I(p), U(p)$ . Например, электрической схеме (рисунок 134) соответствует операторная схема, представленная на рисунке 135.

Для электрической схемы (рисунок 134) справедливо дифференциальное уравнение, составленное по 2-му закону Кирхгофа:

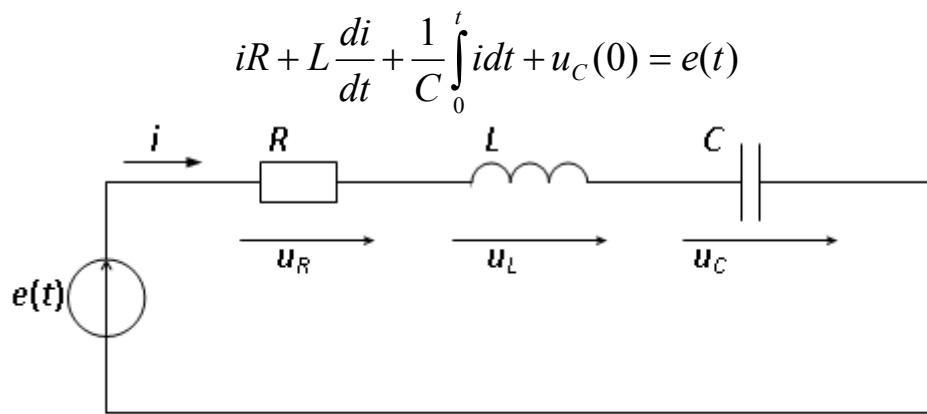


Рисунок 134

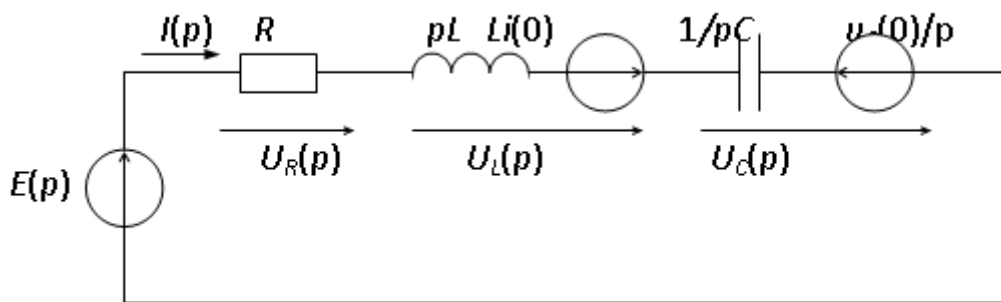


Рисунок 135

Для операторной схемы (рисунок 135) справедливо аналогичное уравнение, но в операторной форме:

$$R \cdot I(p) + pL \cdot I(p) - Li(0) + \frac{1}{pC} \cdot I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = E(p), \text{ откуда следует:}$$

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{\Sigma E(p)}{Z(p)},$$

где  $Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$  – операторное сопротивление всей схемы,  $\Sigma E(p)$  – сумма всех источников ЭДС контура, в том числе и внутренних.

Для сложных операторных схем справедливы 1-й и 2-й законы Кирхгофа в операторной форме:

$$\Sigma I(p) = 0$$

$$\Sigma I(p) \cdot Z(p) = \Sigma E(p)$$

Для расчета таких схем можно применять любые методы расчета линейных цепей: метод законов Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов и другие. Порядок составления операторных уравнений

для сложных схем аналогичен методу, тому порядку, который применяется по этому методу для электрических схем.

### 10.12 Способы составления системы операторных уравнений

При расчете переходных процессов операторным методом на практике применяется два способа составления системы операторных уравнений.

Сущность 1-го способа состоит в том, что для исходной электрической схемы составляется система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа. Затем каждое слагаемое в этих уравнениях непосредственно подвергается преобразованию Лапласа и таким образом система дифференциальных уравнений преобразуется в соответствующую ей систему операторных уравнений. Составление операторной схемы при этом не требуется.

По 2-му способу вначале составляется операторная схема цепи. Затем для операторной схемы по одному из методов расчета составляется система операторных уравнений, при этом преобразование Лапласа непосредственно не применяется.

Преимущество 2-го способа состоит в том, что система операторных уравнений для расчетной схемы может быть составлена по наиболее рациональному методу расчета.

Оба способа составления операторных уравнений иллюстрируются ниже на примере электрической схемы (рисунок 136).

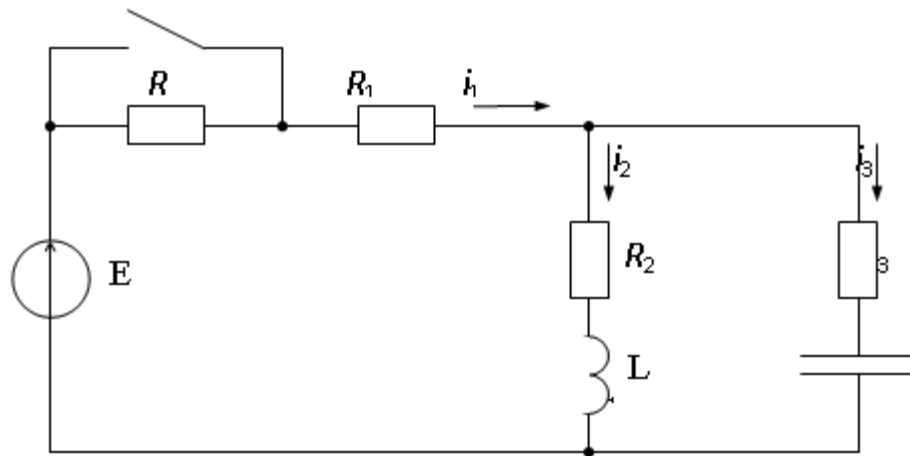


Рисунок 136

По 1-му способу составляем систему дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа для электрической схемы:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 R_1 + i_2 R_2 + L \frac{di_2}{dt} = E \\ i_1 R_1 + i_3 R_3 + \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt + u_C(0) = E \end{cases}$$

Подвергаем преобразованию Лапласа каждое слагаемое в этих уравнениях и таким образом превращаем их в систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0 \\ I_1(p)R_1 - I_2(p)R_2 + L[pI_2(0) - i_2(0)] = \frac{E}{p} \\ I_1(p)R_1 - I_3(p)R_3 + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p} I_3(p) + \frac{U_C(0)}{p} = \frac{E}{p} \end{cases}$$

По 2-му способу составляется операторная схема замещения (рисунок 137):

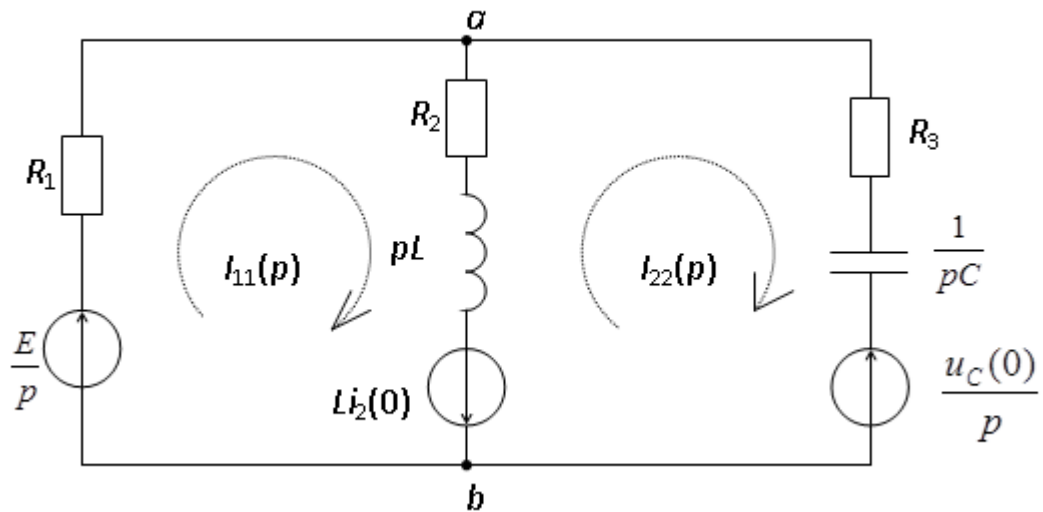


Рисунок 137

Для операторной схемы (рисунок 137) составляем систему уравнений по одному из методов расчета сложных цепей, например, по методу контурных токов:

$$\begin{cases} I_{11}(p)(R_1 + R_2 + pL) - I_{22}(p)(R_2 + pL) = \frac{E}{p} + Li_2(0) \\ -I_{11}(p)(R_2 + pL) + I_{22}(p)\left(R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC}\right) = -Li_2(0) - \frac{U_C(0)}{p} \end{cases}$$

или по методу двух узлов:

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{E}{pR_1} - \frac{Li_2(0)}{R_2 + pL} + \frac{u_C(0)}{p(R_3 + 1/pC)}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + pL} + \frac{1}{R_3 + 1/pC}}.$$

### 10.13 Переход от изображения функции $F(p)$ к ее оригиналу $f(t)$ .

#### 10.14 Формула разложения

В результате совместного решения системы операторных уравнений получают выражение для искомой функции в операторной форме, т.е. ее операторное изображение  $F(p)$ . Переход от операторного изображения функции к ее оригиналу, т.е. к функции времени  $f(t)$ , является наиболее трудоемкой частью операторного метода расчета. На практике для этой цели применяются два способа.

Первый способ – по таблице соответствия. В этом случае операторное выражение искомой функции  $F(p)$  преобразуется к одному из табличных видов и по таблице соответствия определяется оригинал функции  $f(t)$ . Следует заметить, что такое преобразование удастся осуществить только для простых выражений, что существенно ограничивает возможности этого способа.

Второй способ – по формуле разложения – является более универсальным, поэтому находит применение в большинстве практических случаев. Сущность этого способа изложена ниже.

При решении системы операторных уравнений для искомой функции получают операторное выражение  $F(p)$  в виде дроби, в числителе и знаменателе которой стоят степенные полиномы:

$$F(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Из курса математики известно, что при выполнении условий: а)  $m > n$  и б) уравнение  $M(p) = 0$  не содержит кратных корней, выражение

$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$  может быть представлена в виде суммы простых дробей:

$$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_m}{p - p_m} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{A_k}{p - p_k},$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_m$  – постоянные коэффициенты,  $p_1, p_2, \dots, p_m$  – корни уравнения  $M(p) = 0$ .

Для определения коэффициента  $A_1$  умножим обе части уравнения на множитель  $(p - p_1)$  и найдем предел выражения  $F(p)$  при  $p \rightarrow p_1$ . Очевидно, что в правой части уравнения получим  $A_1$ , а в левой – неопределенность, так как  $M(p_1) = 0$ . Раскроем эту неопределенность по правилу Лопиталя:

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{N(p)}{p} (p - p_1) = \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{N(p) \cdot 1 + (p - p_1) \cdot N'(p)}{M'(p)} = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)}.$$

Следовательно, формула для произвольного коэффициента:  $A_k = \frac{N(p_k)}{M'(p_k)}$ .

Тогда выражение искомой функции получает вид:

$$F(p) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \dots + \frac{N(p_m)}{M'(p_m)} \cdot \frac{1}{p - p_m} = \sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}$$

По таблице соответствия находим, что операторному изображению

$F(p) = \frac{A_k}{p - p_k}$  соответствует оригинал  $f(t) = A_k e^{p_k t}$ , следовательно,

оригинал искомой функции получает вид:

$$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}$$

Это уравнение получило название *формулы разложения* и используется для перехода от операторного изображения функции  $F(p)$  к ее оригиналу, т.е. функции времени  $f(t)$ . Порядок применения формулы разложения:

1) Операторное изображение искомой функции  $F(p)$  преобразуют к виду дроби  $F(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ , чтобы в числителе и знаменателе ее стояли степенные полиномы.

2) Приравнивают к нулю знаменатель дроби  $M(p) = 0$  и находят корни этого уравнения  $p_1, p_2, \dots, p_m$ .

3) Находят выражение производной знаменателя дроби  $M'(p) = \frac{dM(p)}{dp}$ .

4) Определяют коэффициенты  $A_k = \frac{N(p_k)}{M'(p_k)}$  путем поочередной подстановки значений каждого из корней  $p_1, p_2, \dots, p_m$  в это выражение.

5) Записывают решение для искомой функции времени  $f(t)$  в виде суммы отдельных слагаемых-экспонент, при необходимости

упрощают полученное выражение:  $f(t) = \sum_{k=1}^{k=m} A_k e^{p_k t}$ .

Последовательность выполнения отдельных этапов расчета переходных процессов операторным методом показано ниже в виде диаграммы.

Примечание. Составление системы операторных уравнений может выполняться по одному из двух вариантов: **А** – путем непосредственного преобразования дифференциальных уравнений Кирхгофа в операторные в и **В** – путем составления системы уравнений по одному из методов расчета для операторной схемы замещения.

## 10.15 Алгоритм расчета переходных процессов операторным методом



### Замечания к формуле разложения.

1) Если в исходной схеме имеются источники постоянных ЭДС  $E$ , то уравнение  $M(p) = 0$  может иметь один корень, равный нулю ( $p_1 = 0$ ). Подстановка этого корня в формулу разложения дает постоянную величину  $f_1(t) = \frac{N(0)}{M'(0)} e^{0t} = const$ , которая соответствует установившейся составляющей искомой функции.

2) Если в исходной схеме имеются источники синусоидальных ЭДС  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$ , то уравнение  $M(p) = 0$  будет иметь два чисто мнимых и сопряженных корня  $p_1 = j\omega$  и  $p_2 = -j\omega$ . Подстановка этих корней в формулу разложения в сумме дает синусоидальную функцию времени, которая соответствует установившейся составляющей искомой функции:

$$f_1(t) = \frac{N(j\omega)}{M'(j\omega)} e^{j\alpha t} + \frac{N(-j\omega)}{M'(-j\omega)} e^{-j\alpha t} = (C + jD)(\cos \alpha t + j \sin \alpha t) + (C - jD)(\cos \alpha t - j \sin \alpha t) =$$

$$= 2C \cos \alpha t - 2D \sin \alpha t = A \sin(\alpha t + \psi)$$

3) Если уравнение  $M(p) = 0$  имеет два комплексно сопряженных корня  $p_1 = -b + j\omega_o$  и  $p_2 = -b - j\omega_o$ , то подстановка этих корней в формулу разложения в сумме дает синусоидальную функцию с затухающей амплитудой:

$$f_1(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} = (C + jD) e^{(-b + j\omega_o)t} + (C - jD) e^{(-b - j\omega_o)t} =$$

$$= e^{-bt} \cdot (2C \cos \omega_o t - 2D \sin \omega_o t) = A \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega_o t + \psi)$$

4) Если уравнение  $M(p) = 0$  имеет кратные корни ( $p_1 = p_2$ ), то формула разложения неприменима. Случай кратных корней может встретиться в практике крайне редко. Чтобы применить формулу разложения в этом случае достаточно несущественно изменить параметры одного из элементов схемы.

**Пример.** Для схемы (рисунок 138) с заданными параметрами элементов ( $E=100$  В,  $R=50$  Ом,  $R_1=20$  Ом,  $R_2=30$  Ом,  $C=83,5$  мкФ) определить ток  $i_1(t)$  после коммутации.

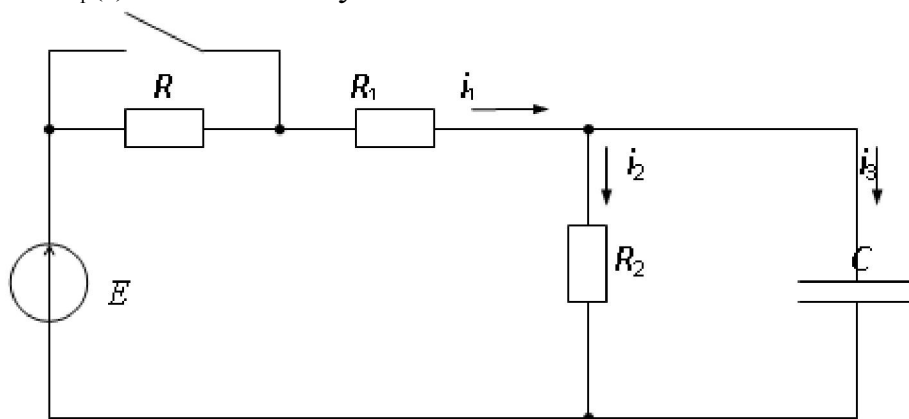


Рисунок 138

1) Определяется независимое начальное условие  $u_C(0)$  из расчета схемы (рисунок 138) в состоянии до коммутации:

$$u_{C0} = u_C(0) = I_2 R_2 = \frac{E \cdot R_2}{R + R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 30}{50 + 20 + 30} = 30 \text{ В}$$

2) Составляется операторная схема цепи после коммутации (рисунок 139):

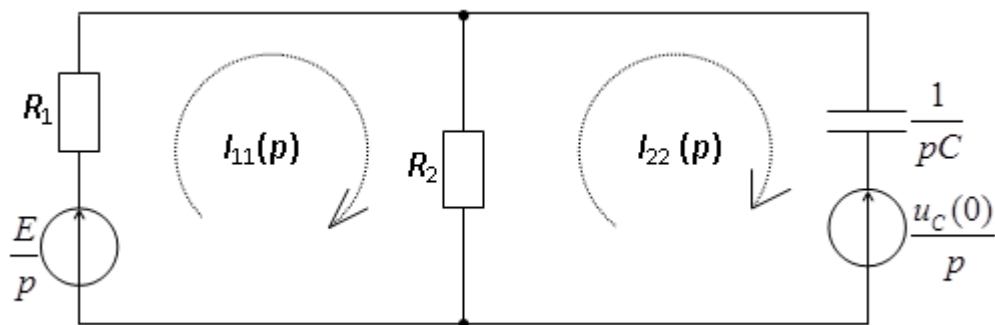


Рисунок 139

3) Составляется система контурных уравнений для схемы рисунка 139 в операторной форме:

$$\begin{cases} I_{11}(p) \cdot (R_1 + R_2) - I_{22}(p) \cdot R_2 = \frac{E}{p} \\ -I_{11}(p) \cdot R_2 + I_{22}(p) \cdot \left( R_2 + \frac{1}{pC} \right) = \frac{u_c(0)}{p} \end{cases}$$

4) Производится решение операторных уравнений относительно искомой функции  $I_1(p)$ :

$$I_1(p) = I_{11}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \dots = \frac{42p + 24000}{p(12p + 12000)} = \frac{N(p)}{M(p)},$$

где  $N(p) = 42p + 24000$ ;  $M(p) = p(12p + 12000)$ ;  $M'(p) = 24p + 12000$

5) Корни уравнения  $M(p) = 0$ :

$$p(12p + 12000) = 0 \Rightarrow p_1 = 0; p_2 = -1000$$

6) Коэффициенты  $A_k$  для отдельных корней  $p_k$ :

$$A_1 = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} = \frac{24000}{12000} = 2; \quad A_2 = \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} = \frac{42 \cdot (-1000) + 24000}{24 \cdot (-1000) + 12000} = 1.5$$

7) Окончательное решение для искомой функции времени:

$$i_1(t) = \sum A_k e^{p_k t} = 2 + 1.5 e^{-1000t} \text{ А}$$

### 10.16 Анализ переходных процессов в цепи $R, L$

Исследуем, как изменяется ток  $i(t)$  в цепи с резистором  $R$  и катушкой  $L$  в переходном режиме. В качестве примера рассмотрим переходной процесс при включении цепи  $R, L$  к источнику а) постоянной ЭДС  $e(t) = E = \text{const}$  и б) переменной ЭДС  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$  (рисунок 140).

Расчет переходного процесса выполним классическим методом.

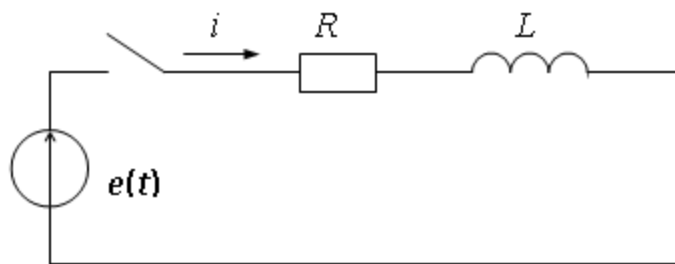


Рисунок 140

а) Включение цепи  $R, L$  к источнику постоянной ЭДС  $e(t) = E = \text{const}$ .

Общий вид решения для тока:  $i(t) = i_y(t) + i_{св}(t) = I_y + Ae^{pt}$ .

Установившаяся составляющая тока:  $I_y = \frac{E}{R}$ .

Характеристическое уравнение и его корни:

$$Z(p) = R + pL = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}.$$

Независимое начальное условие:  $i(0) = 0$ .

Постоянная интегрирования:  $i(0) = I_y + A = 0 \Rightarrow A = -I_y = -\frac{E}{R}$ .

Окончательное решение для искомой функции:

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$  – постоянная времени, численно равная времени, за которое амплитуда свободной составляющей затухает в  $e = 2,72$  раза. Чем

больше  $\tau = \frac{L}{R}$ , тем медленнее затухает переходной процесс.

Теоретически затухание свободной составляющей продолжается до бесконечности. Техническое время переходного процесса  $T_{mn}$  определяется из условия, что за это время свободная составляющая уменьшается до 0,01 от ее первоначального значения:

$$e^{-\frac{T_{mn}}{\tau}} = 0,01, \text{ откуда } T_{mn} \approx 4\tau = 4\frac{L}{R}.$$

На рисунке 141 представлена графическая диаграмма искомой функции  $i(t)$ .

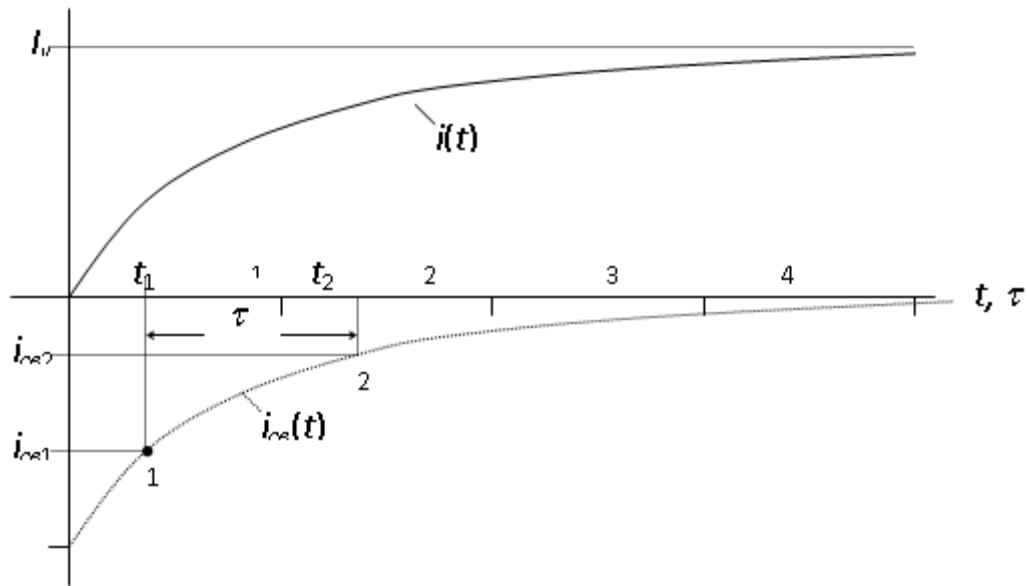


Рисунок 141

Для приближенного построения графической диаграммы свободной составляющей  $i_{св}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$  можно воспользоваться таблицей значений этой функции в интервале времени  $T_{nn} = 4\tau$ :

$t$	0	0,5	1,0	1,5	2	3	4
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	0,61	0,37	0,22	0,14	0,05	0,02

Постоянная времени  $\tau$  может быть определена из графической диаграммы функции  $i_{св}(t)$  как отрезок времени  $t_2 - t_1$ , по краям которого отношение значений функции равно  $\frac{i_{св1}}{i_{св2}} = e = 2.72$  раза (рисунок 141).

б) Включение цепи  $R, L$  к источнику синусоидальной ЭДС  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$

Общий вид решения для тока:

$$i(t) = i_y(t) + i_{св}(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) + Ae^{pt}$$

Характеристическое уравнение и его корни:

$$Z(p) = R + pL = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

Установившаяся составляющая тока:

$$\underline{I}_{ym} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_\omega} = \frac{E_m e^{j\alpha}}{R + jX_L} = \frac{E_m e^{j\alpha}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{E_m}{Z} e^{j(\alpha - \varphi)}, \text{ откуда следует}$$

$$i_y(t) = \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi),$$

где  $X_L = \omega L$ ,  $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{X_L}{R}$ .

Независимое начальное условие:  $i(0) = 0$

Постоянная интегрирования:

$$i(0) = \frac{E_m}{Z} \sin(\alpha - \varphi) + A = 0, \text{ откуда } A = -\frac{E_m}{Z} \sin(\alpha - \varphi)$$

Окончательное решение для искомой функции:

$$i(t) = i_y(t) + i_{ce}(t) = \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) - \frac{E_m}{Z} \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Из анализа решения видно, что амплитуда свободной составляющей  $A$  зависит от начальной фазы  $\alpha$  источника ЭДС. При  $\alpha - \varphi = \pm 90$  эта амплитуда имеет максимальное значение  $A = A_{\max} = \frac{E_m}{Z}$ , при этом переходной процесс протекает с максимальной интенсивностью. При  $\alpha - \varphi = 0$  амплитуда свободной составляющей равна нулю, и переходной процесс в цепи вообще отсутствует. На рисунке 142 представлена графическая диаграмма искомой функции  $i(t)$  при  $\alpha - \varphi = -90$ ,  $A = A_{\max} = \frac{E_m}{Z} = I_m$ .

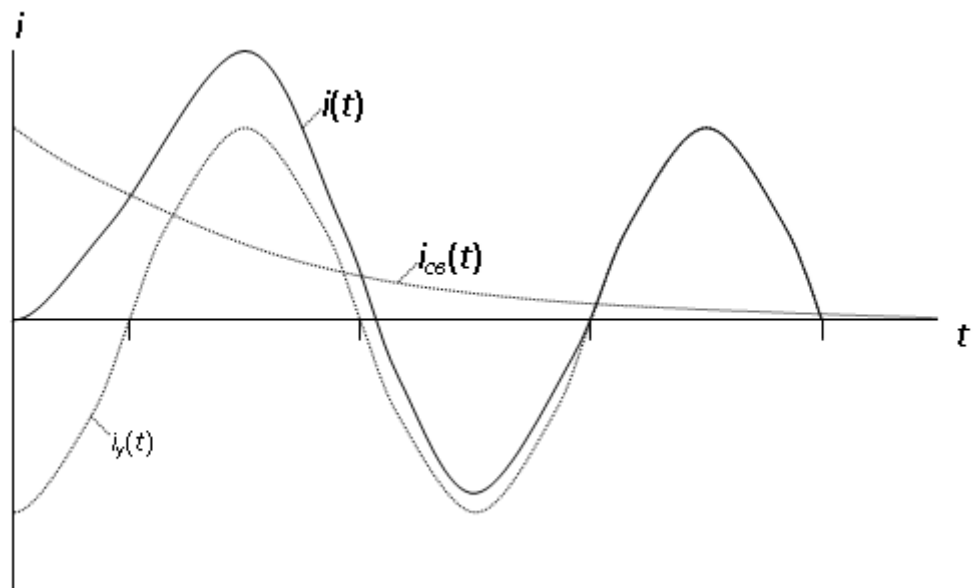


Рисунок 142

### 10.17 Анализ переходных процессов в цепи $R, C$

Исследуем характер переходных процессов в цепи  $R, C$  при включении ее к источнику а) постоянной ЭДС  $e(t) = E$ , б) переменной ЭДС  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$  (рисунок 143).

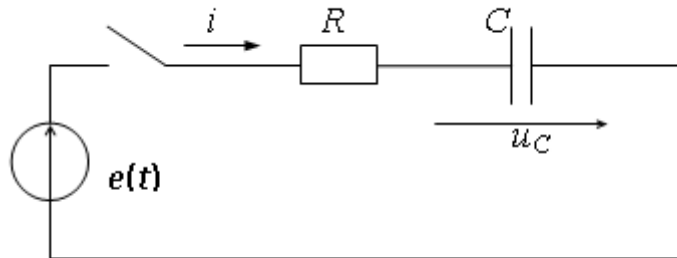


Рисунок 143

а) Включение цепи  $R, C$  к источнику постоянной ЭДС  $e(t) = E = \text{const}$ .

Общий вид решения для напряжения  $u_C(t)$ :

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{Ccs}(t) = U_{Cy} + Ae^{pt}.$$

Установившаяся составляющая напряжения:  $U_{Cy} = E$ :

Характеристическое уравнение и его корни:

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}, \text{ где } \tau = RC - \text{постоянная}$$

времени.

Независимое начальное условие:  $u_C(0) = 0$ .

Постоянная интегрирования:  $u_C(0) = u_{Cy} + A = 0 \Rightarrow A = -u_{Cy} = -E$ .

Окончательное решение для искомой функции:

$$u_C(t) = u_{Cy}(t) + u_{Ccs}(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}} = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0 + C \frac{E}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Подсчитаем баланс энергий при зарядке конденсатора.

Энергия источника ЭДС:

$$W_{ист} = \int_0^{\infty} E i dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{RC}} dt = -\frac{E^2 RC}{R} \left| e^{-\frac{t}{RC}} \right| = CE^2.$$

Энергия, выделяемая в резисторе  $R$  в виде тепла:

$$W_{менл} = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \frac{E^2 R}{R^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = -\frac{E^2 RC}{2R} \left| e^{-\frac{2t}{RC}} \right| = \frac{CE^2}{2}.$$

Энергия электрического поля конденсатора:

$$W_{эл} = \frac{Cu_{cy}^2}{2} = \frac{CE^2}{2}.$$

Таким образом, энергия электрического поля конденсатора составляет ровно половину энергии источника  $W_{эл} = \frac{W_{ист}}{2}$  и не зависит от величины сопротивления зарядного резистора  $R$  (закон половины).

Графические диаграммы функций  $u_c(t)$  и  $i(t)$  показаны на рисунке 144.

б) Включение цепи  $R, C$  к источнику синусоидальной ЭДС  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$ .

Общий вид решения для напряжения  $u_c$ :

$$u_c(t) = u_{cy}(t) + u_{cc}(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) + Ae^{pt}$$

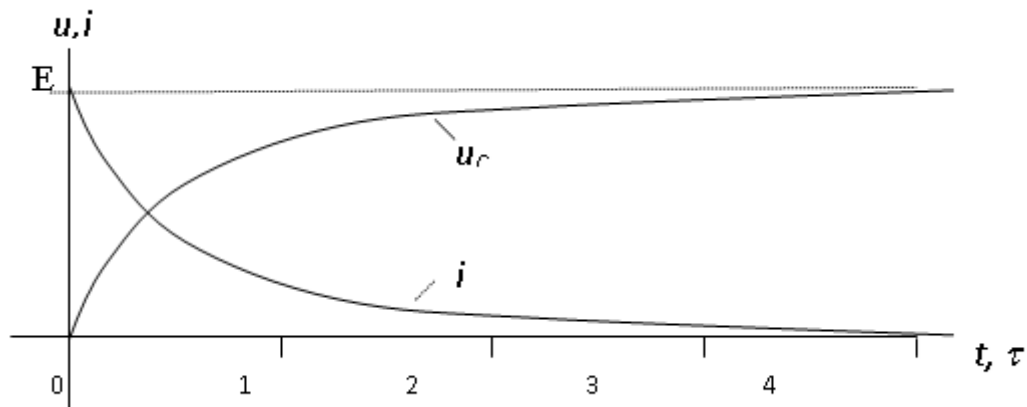


Рисунок 144

Характеристическое уравнение и его корень:

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} \Rightarrow p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$$

Установившаяся составляющая напряжения:

$$\underline{U}_{cm} = I_m(-jX_C) = \frac{Ee^{j\alpha}}{Ze^{j\varphi}} X_C e^{-j90} = \frac{E_m X_C}{Z} e^{j(\alpha - \varphi - 90)}, \text{ откуда}$$

$$u_{cy}(t) = \frac{E_m}{Z} X_C \sin(\omega t + \alpha - \varphi - 90),$$

где  $X_C = 1/\omega C$ ,  $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{X_C}{R}$ .

Независимое начальное условие:  $u_c(0) = 0$ .

Определение постоянной интегрирования:

$$u_c(0) = \frac{E_m X_C}{Z} \sin(\alpha - \varphi - 90^\circ) + A = 0; \text{ откуда } A = -\frac{E_m X_C}{Z} \sin(\alpha - \varphi - 90^\circ)$$

Как следует из полученного уравнения, амплитуда свободной составляющей  $A$  зависит от начальной фазы  $\alpha$  источника ЭДС. При  $\alpha - \varphi - 90^\circ = \pm 90^\circ$  эта амплитуда имеет максимальное значение  $A = A_{\max} = \frac{E_m X_C}{Z}$ , при этом переходной процесс протекает с максимальной интенсивностью. При  $\alpha - \varphi - 90^\circ = 0$  амплитуда свободной составляющей равна нулю и переходной процесс в цепи отсутствует.

### 10.18 Анализ переходных процессов в цепи $R, L, C$

Переходные процессы в цепи  $R, L, C$  описываются дифференциальным уравнением 2-го порядка. Установившиеся составляющие токов и напряжений определяются видом источника энергии и определяются известными методами расчета установившихся режимов. Наибольший теоретический интерес представляют свободные составляющие, так как характер свободного процесса оказывается существенно различным в зависимости от того, являются ли корни характеристического уравнения вещественными или комплексными сопряженными.

Проанализируем переходной процесс в цепи  $R, L, C$  при включении ее к источнику постоянной ЭДС (рисунок 145).

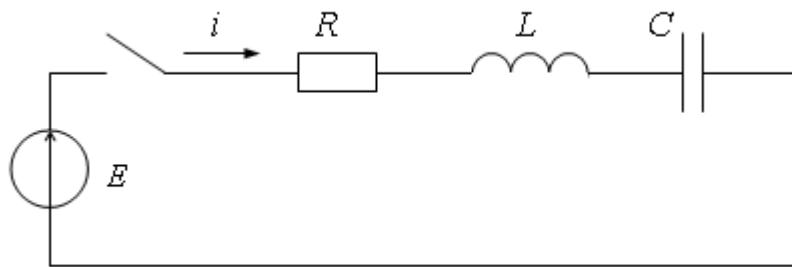


Рисунок 145

Общий вид решения для тока:  $i(t) = i_y(t) + i_{св}(t) = I_y + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

Установившаяся составляющая:  $I_y = 0$ .

Характеристическое уравнение и его корни:  $Z(p) = pL + \frac{1}{pC} + R = 0$ ,

откуда:

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}; \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Дифференциальное уравнение:  $iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = E$ .

Независимые начальные условия:  $i(0) = 0$ ;  $u_C(0) = 0$ .

Зависимое начальное условие:  $i(0)R + L \frac{di}{dt}(0) + u_C(0) = E$ ; откуда

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}.$$

Постоянные интегрирования определяется из совместного решения системы уравнений:

$$\begin{cases} i(0) = A_1 + A_2 = 0 \\ \frac{di}{dt}(0) = p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{E}{L} \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad A_1 = -A_2 = \frac{E}{(p_1 - p_2)L}.$$

Окончательное решение для тока:

$$i(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = \frac{E}{(p_1 - p_2)L} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Исследуем вид функции  $i(t)$  при различных значениях корней характеристического уравнения.

а) Корни характеристического уравнения вещественные, не равны друг другу. Это имеет место при условии  $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$  или  $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , тогда  $p_1 < 0$ ,  $p_2 < 0$ , причем  $|p_1| < |p_2|$ ,  $p_1 - p_2 > 0$ .

При изменении  $t$  от 0 до  $\infty$  отдельные функции  $e^{p_1 t}$  и  $e^{p_2 t}$  убывают по экспоненциальному закону от 1 до 0, причем вторая из них убывает быстрее, при этом их разность  $e^{p_1 t} - e^{p_2 t} \geq 0$ . Из этого следует вывод, что искомая функция тока  $i(t)$  в крайних точках при  $t = 0$  и при  $t = \infty$  равна нулю, а в промежутке времени  $0 < t < \infty$  — всегда положительна, достигая при некотором значении времени  $t_m$  своего максимального значения  $I_{\max}$ . Найдем этот момент времени:

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (p_1 e^{p_1 t_m} - p_2 e^{p_2 t_m}) = 0, \text{ или } p_1 e^{p_1 t_m} - p_2 e^{p_2 t_m} = 0, \text{ откуда}$$

$$t_m = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1}}{p_1 - p_2}.$$

Графическая диаграмма функции  $i(t)$  для случая вещественных корней характеристического уравнения показана на рисунке 146.

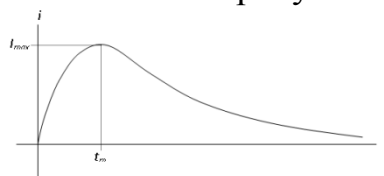


Рисунок 146

Продолжительность переходного процесса в этом случае определяется меньшим по модулю корнем:  $T_n = \frac{4}{|p_{min}|}$ .

Характер переходного процесса при вещественных корнях характеристического уравнения получил название затухающего или апериодического.

б) Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные.

Это имеет место при соотношении параметров  $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$  или  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , тогда

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -b \pm j\omega_0,$$

где  $b = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$  – угловая частота собственных колебаний.

Решение для исконой функции может быть преобразовано к другому виду:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{(p_1 - p_2)L} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{E}{(-b + j\omega_0 + b + j\omega_0)L} (e^{(-b+j\omega_0)t} - e^{(-b-j\omega_0)t}) = \\ &= \frac{Ee^{-bt}}{2j\omega_0 L} (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) = \frac{E}{\omega_0 L} e^{-bt} \sin \omega_0 t = Ae^{-bt} \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Таким образом, в случае комплексно сопряженных корней характеристического уравнения искомая функция  $i(t)$  изменяется во времени по гармоническому закону  $I_m \sin \omega_0 t$  с затухающей амплитудой  $I_m(t) = Ae^{-bt}$ . Графическая диаграмма функции  $i(t)$  показана на рисунке 147.

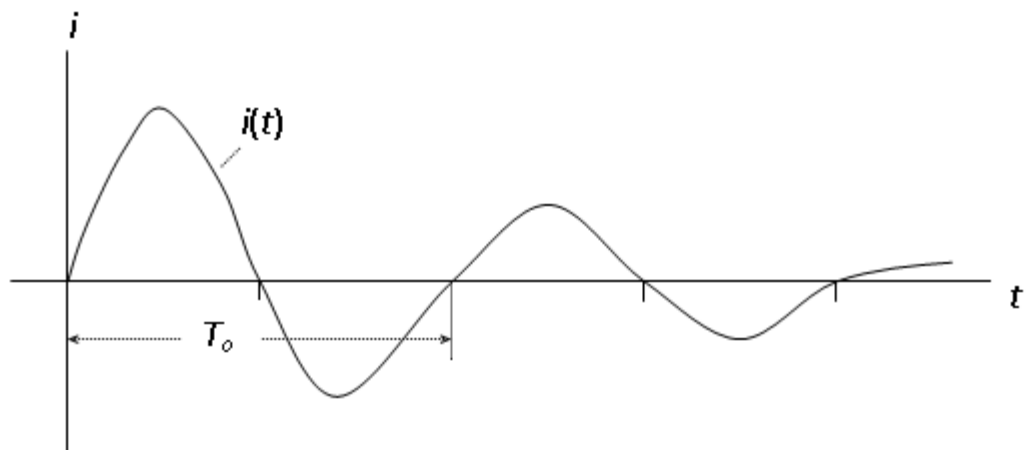


Рисунок 147

Период колебаний  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , продолжительность переходного процесса определяется коэффициентом затухания:  $T_n = \frac{4}{b}$ .

Характер переходного процесса при комплексно сопряженных корнях характеристического уравнения получил название колебательного или периодического.

В случае комплексно сопряженных корней для определения свободной составляющей применяют частную форму:

$$x_{ce}(t) = Ae^{-bt} \sin(\omega_0 t + \psi) \text{ или } x_{ce}(t) = e^{-bt} (B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t),$$

где коэффициенты  $A$  и  $\psi$  или  $B$  и  $C$  являются новыми постоянными интегрирования, которые определяются через начальные условия для искомой функции.

в) Корни характеристического уравнения вещественные и равны друг другу. Это имеет место при условии  $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0$  или  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{kp}$ , тогда  $p_1 = p_2 = p = \frac{R}{2L}$ .

Полученное ранее решение для искомой функции  $i(t)$  в этом случае становится неопределенным, так как числитель и знаменатель дроби превращаются в нуль. Раскроем эту неопределенность по правилу Лопиталя, считая  $p_2 = p = const$ , а  $p_1 = var$ , которая стремится к  $p$ . Тогда получим:

$$i(t) = \frac{E}{L} \lim_{p_1 \rightarrow p} \frac{e^{p_1 t} - e^{pt}}{p_1 - p} = \frac{E}{L} \lim_{p_1 \rightarrow p} \frac{te^{p_1 t}}{1} = \frac{E}{L} te^{pt} = Ate^{pt}.$$

Характер переходного процесса при равных корнях характеристического уравнения получил название критического. Критический характер переходного процесса является граничным между затухающим и колебательным и по форме ничем не отличается от затухающего. Продолжительность переходного процесса  $T_n = \frac{4}{p}$ . При изменении только сопротивления резистора  $R = var = 0 \div \infty$  затухающий характер переходного процесса соответствует области значений  $R_{var}$  ( $R_{kp} < R_{var} < \infty$ ), колебательный характер - также области значений ( $0 < R_{var} < R_{kp}$ ), а критический характер - одной точке  $R_{var} = R_{kp}$ . Поэтому на практике случай равных корней характеристического уравнения встречается крайне редко.

В случае равных корней для определения свободной составляющей применяют частную форму:

$$x_{ce}(t) = (A_1 + A_2 t)e^{pt},$$

где коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  являются новыми постоянными интегрирования, которые определяются через начальные условия для искомой функции.

Критический режим переходного процесса характерен тем, что его продолжительность имеет минимальное значение ( $T_{m \min} = 2 \cdot \frac{4}{p_{kp}} = \frac{4R}{L}$ ).

Указанное свойство находит применение в электротехнике.

### 10.19 Переходные функции по току и напряжению

Пусть произвольная электрическая цепь с нулевыми начальными условиями  $[i_L(0) = 0, u_C(0) = 0]$  в момент времени  $t = 0$  включается под действием источника постоянной ЭДС  $e(t) = E = \text{const}$  (рисунок 148).

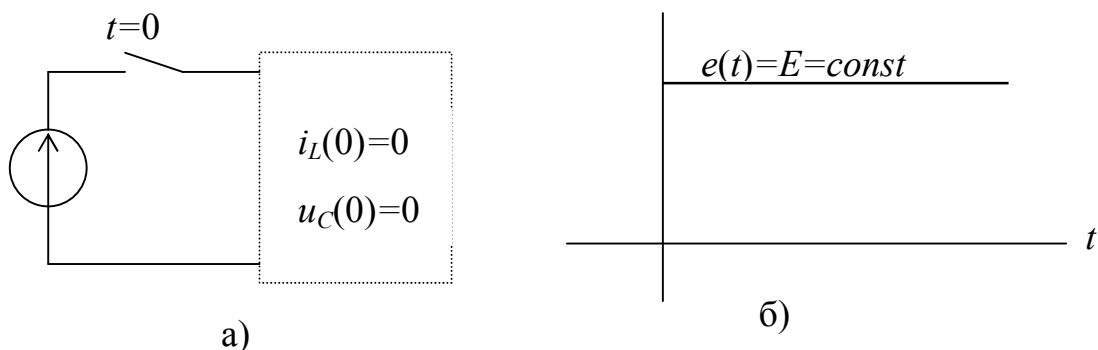


Рисунок 148

Переходной процесс не изменится, если из схемы убрать ключ, а постоянную ЭДС  $e(t) = E = \text{const}$  заменить скачкообразной  $e(t) = E \cdot 1(t)$  со скачком в момент  $t = 0$  (рисунок 149).

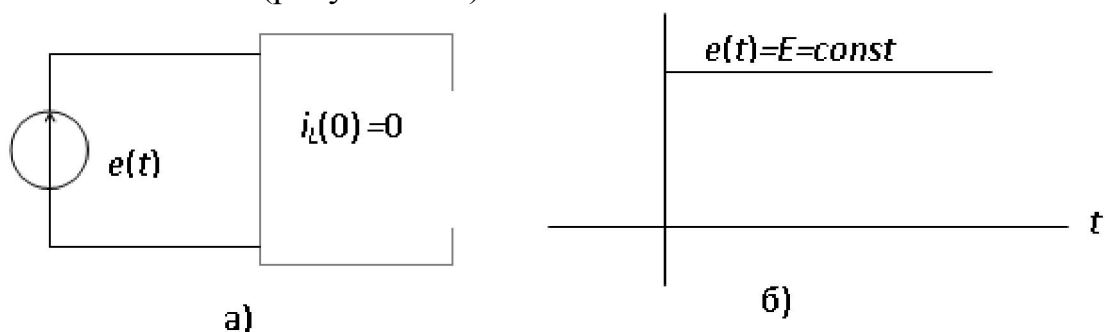


Рисунок 149

Функция  $1(t)$  называется единичной скачкообразной функцией, имеющей значения:

$$1(t) \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{при } t < 0 \\ \rightarrow 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

Возникающие на любых участках цепи токи  $i_k(t)$  и напряжения  $u_k(t)$  прямо пропорциональны скачкообразной ЭДС  $e(t) = E \cdot 1(t)$ :

$$i_k(t) = e(t) \cdot h_i(t) = e(t) \cdot g(t)$$

$$u_k(t) = e(t) \cdot h_u(t) = e(t) \cdot k(t)$$

где  $h_i(t) = g(t)$  – переходная функция по току, или переходная проводимость,  $h_u(t) = k(t)$  – переходная функция по напряжению.

Переходная функция по току  $g(t)$  или по напряжению  $k(t)$  называется функция по времени, численно равная соответствующему току  $i(t)$  или напряжению  $u(t)$  при включении цепи с нулевыми начальными условиями к источнику единичной постоянной  $e(t) = E \cdot 1(t)$ . Переходные функции  $g(t)$  и  $k(t)$  могут быть рассчитаны для любой схемы классическим или операторным методом.

**Пример.** Рассчитать переходные функции для тока  $i(t)$  и напряжения  $u_C(t)$  в цепи  $R, C$ .

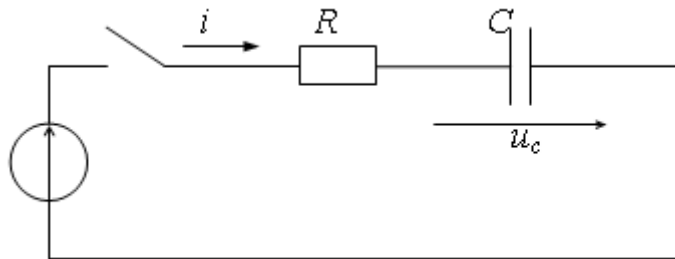


Рисунок 150

Выполним расчет переходного процесса в цепи  $R, C$  при включении ее к источнику постоянной ЭДС  $e(t) = E$  (рисунок 150) классическим методом. В результате найдем:

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}; u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Искомые переходные функции получим из найденных выражений, заменив в них  $E$  на 1.

$$g(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}}; k(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Переходные функции используются при расчете переходных процессов методом интеграла Дюамеля.

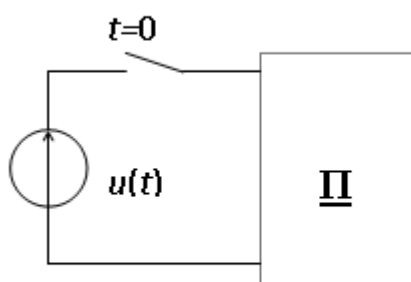
## 10.20 Расчет переходных процессов методом интеграла Дюамеля

Метод интеграла Дюамеля применяется для расчета переходных процессов в электрических цепях в том случае, если в рассматриваемой цепи

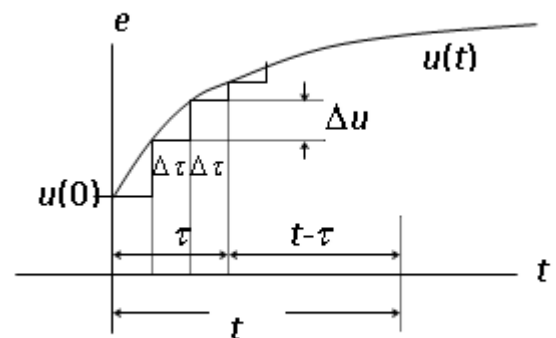
действует источник ЭДС  $u(t)$  произвольной формы, отличной от стандартной (постоянной или синусоидальной).

Пусть к источнику ЭДС произвольной формы  $u(t)$  подключается цепь с нулевыми начальными условиями и с заданной переходной проводимостью  $g(t)$  (рисунок 151).

Заменим непрерывную кривую ЭДС  $u(t)$  приближенно ступенчатой с интервалами по оси  $t$  между отдельными скачками, равными  $\Delta\tau$ . Первый скачок ЭДС равен  $u(0)$  и действует в момент  $t = 0$ . Все последующие скачки ЭДС можно определить как  $\Delta u = \Delta\tau \cdot \operatorname{tg} \alpha = e'(\tau) \Delta\tau$  и действуют они с запаздыванием на  $\tau$ , то есть в момент  $t - \tau$ . Ток на выходе цепи в произвольный момент времени  $t$  можно рассматривать в соответствии с принципом наложения как сумму частичных токов, возникающих под действием отдельных скачков ЭДС, следующих друг за другом через промежутки  $\Delta\tau$  в интервале времени от 0 до  $t$ .



а)



б)

Рисунок 151

Частичный ток, вызванный первым источником ЭДС, будет равен  $i'(t) = u(0) \cdot g(t)$ , а частичные токи, вызванные последующими скачками ЭДС, будут равны:  $i''(t) = \Delta u \cdot g(t - \tau) = u'(\tau) \cdot \Delta\tau \cdot g(t - \tau)$ .

Результирующий ток равен сумме частичных токов:

$$i(t) = i'(t) + \sum_0^t i''(t) = u(0) \cdot g(t) + \sum_{\tau=0}^{\tau=t} u'(\tau) \cdot g(t - \tau) \Delta\tau.$$

Перейдем к бесконечно малым интервалам  $\Delta\tau \Rightarrow d\tau$  и заменим сумму интегралом:

$$i(t) = u(0) \cdot g(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau.$$

Полученное выражение для  $i(t)$  носит название интеграла Дюамеля и применяется на практике для расчета переходных процессов в электрических

цепях при воздействии на них источников ЭДС или тока произвольной формы.

Порядок применения интеграла Дюамеля:

1) Выполняют расчет переходного процесса классическим или операторным методом при включении исследуемой цепи к источнику единичной постоянной ЭДС  $E = 1$  и таким образом определяют необходимую переходную функцию по току  $g(t)$  или по напряжению  $k(t)$ .

2) Определяют переходную функцию  $g(t - \tau)$  или  $k(t - \tau)$  путем замены в выражениях  $g(t)$  или  $k(t)$  переменной  $t$  на  $t - \tau$ .

3) Находят производную от функции ЭДС  $u'(t) = \frac{d[u(t)]}{dt}$  и в полученном выражении заменяют переменную  $t$  на  $\tau$ , в результате получают функцию  $e'(\tau)$ .

4) Выражения функций  $u'(\tau)$ ,  $g(t - \tau)$  или  $k(t - \tau)$  подставляют в формулу интеграла Дюамеля, выполняют интегрирование по переменной  $\tau$  и подставляют пределы интегрирования по переменной  $t$ . При необходимости упрощают структуру полученного выражения искомой функции  $i(t)$  или  $u(t)$ .

Замечания:

1) Если функция  $u(t)$  претерпевает скачки или разрывы, то она разбивается на отдельные участки с плавным изменением функции, при этом интеграл Дюамеля применяется к каждому участку в отдельности.

2) При расчете переходных процессов в цепях постоянного или синусоидального тока метод интеграла Дюамеля проигрывает классическому и операторному методам, поэтому для таких цепей он не применяется.

**Пример.** Рассчитать ток  $i(t)$  в цепи  $R, C$  при действии на нее трапециевидного импульса с заданными параметрами (рисунок 152):

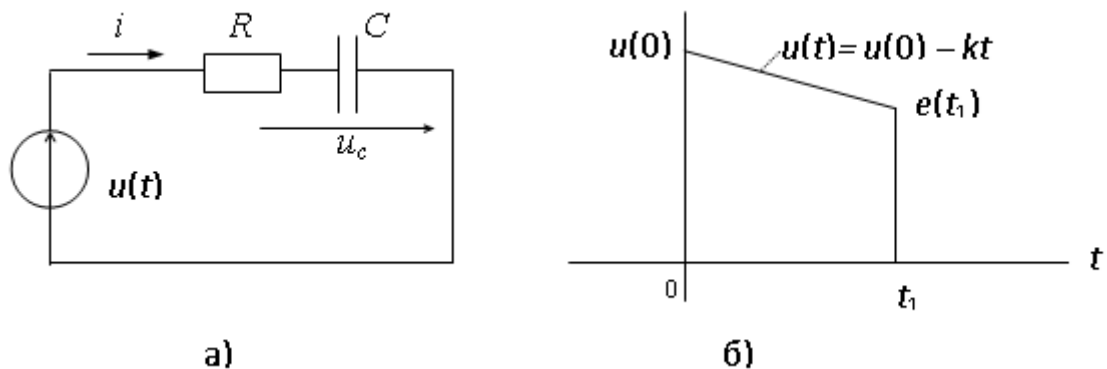


Рисунок 152

Переходная проводимость схемы:

$$g(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}}; \quad g(t - \tau) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} e^{\frac{\tau}{RC}}.$$

Производная от функции ЭДС  $u(t)$ :  $u'(t) = -k$ ;  $u'(\tau) = -k$ .

Так как функция  $u(t)$  в момент времени  $t = t_1$  изменяется скачком, то ее разбиваем на два участка  $(0 \div t_1, t_1 \div \infty)$ , для каждого из которых находим свое решение для искомой функции  $i(t)$ .

Решение для  $0 \leq t \leq t_1$ :

$$i(t) = u(0) \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} + \int_0^t -k \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau =$$

$$= \frac{e(0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{k}{R} e^{-\frac{t}{RC}} (RC e^{\frac{\tau}{RC}})_0^t = \frac{u(0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - kC e^{-\frac{t}{RC}} (e^{\frac{t}{RC}} - 1) = \left( \frac{e(0)}{R} + kC \right) e^{-\frac{t}{RC}} - kC$$

Решение для  $t_1 \leq t \leq \infty$ :

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^{t_1} u'(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau - u(t_1) \cdot g(t - t_1)$$

## 10.21 Расчет переходных процессов методом численного интегрирования дифференциальных уравнений на ЭВМ

Система дифференциальных уравнений, которыми описывается состояние любой электрической цепи, может быть решена методом численного интегрирования на ЭВМ (метод последовательных интервалов или метод Эйлера).

Сущность метода состоит в том, что исследуемый промежуток времени  $T$  (при расчете переходных процессов, это  $T_n$  – продолжительность переходного процесса) разбивается на большое число  $N$  элементарных отрезков времени  $\Delta t = \frac{T}{N} = h$ , которые называются шагом интегрирования.

В дифференциальных уравнениях дифференциалы функций заменяются их конечными приращениями, а производные функций – отношениями приращений:

$$dt \rightarrow \Delta t = h$$

$$dx_{(k)} \rightarrow \Delta x_{(k)} = x_{(k)} - x_{(k-1)}$$

$$\frac{dx}{dt}(k) \rightarrow \frac{\Delta x_{(k)}}{\Delta t} = \frac{x_{(k)} - x_{(k-1)}}{h}, \text{ откуда следует:}$$

$$x_{(k)} = x_{(k-1)} + h \frac{dx}{dt}(k)$$

На каждом шаге интегрирования решается система дифференциальных уравнений, в результате решения определяются численные значения производных и самих функций. В качестве исходных данных для их

определения используются значения этих же функций на предыдущем шаге, а на начальном 1-ом шаге – их значения в момент коммутации при  $t=0$ , т.е. начальные условия. В результате расчета для функций и их производных составляются массивы их значений в исследуемом интервале времени  $T$ , которые после завершения цикла подвергаются соответствующей математической обработке, а именно: строятся графические диаграммы функций, составляются необходимые таблицы, исследуются функции на наличие максимумов и минимумов, устанавливается продолжительность переходного процесса и его характер, и т.д.

Пример. Рассчитать переходный процесс в схеме рисунка 153 с заданными параметрами элементов:  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$ ,  $R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, C$ .

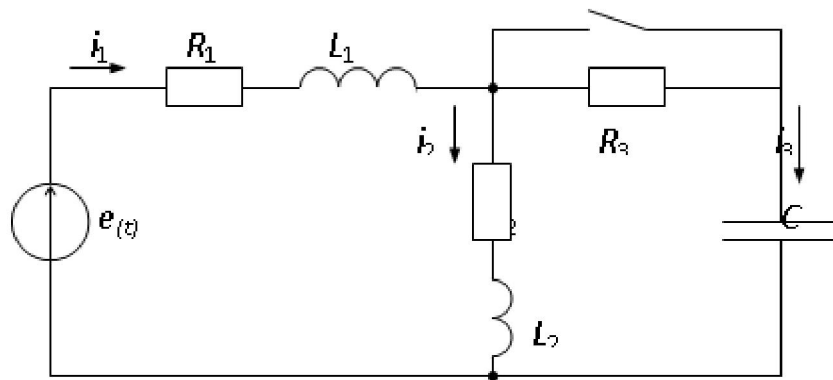


Рисунок 153

Путем расчета схемы в установившемся режиме до коммутации определяются независимые начальные условия  $i_1(0)$ ,  $i_2(0)$ ,  $u_C(0)$ .

По законам Кирхгофа для схемы после коммутации составляется система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0, \\ i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_C = E_m \sin(\omega t + \alpha), \\ -i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} + u_C = 0, \\ i_3 = C \frac{du_C}{dt}, \end{cases}$$

Выбирается шаг интегрирования  $h$  (например, из расчета  $N=1000$  шагов на период  $T=0,02$  с переменного тока, тогда  $h=T/N=2 \cdot 10^{-5}$  с).

Составляется алгоритм вычислений для произвольного  $k$ -го шага:

$i_{1(k-1)}, i_{2(k-1)}, u_{C(k-1)}$  – исходные данные,

$t_{(k)} = k \cdot h$  – текущее время,

$$\begin{aligned}
e_{(\kappa)} &= E_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_{(\kappa)} + \alpha\right), \\
\Rightarrow i_{3(\kappa)} &= i_{1(\kappa-1)} - i_{2(\kappa-1)}, \\
\Rightarrow \frac{di_1}{dt}(\kappa) &= \frac{1}{L_1} (e_{(\kappa)} - i_{1(\kappa-1)} R_1 - U_{C(\kappa-1)}), \\
\Rightarrow \frac{di_2}{dt}(\kappa) &= \frac{1}{L_2} (U_{C(\kappa-1)} - i_{2(\kappa-1)} \cdot R_2), \\
\Rightarrow \frac{du_C}{dt}(\kappa) &= \frac{1}{C} i_{3(\kappa)}, \\
i_{1(\kappa)} &= i_{1(\kappa-1)} + h \frac{di_1}{dt}(\kappa), \\
i_{2(\kappa)} &= i_{2(\kappa-1)} + h \frac{di_2}{dt}(\kappa), \\
u_{C(\kappa)} &= u_{C(\kappa-1)} + h \frac{du_C}{dt}(\kappa).
\end{aligned}$$

Далее следуют вычисления по тому же алгоритму для  $(\kappa+1)$ -го шага и т. д.

В соответствии с составленным алгоритмом на любом языке составляется программа вычислений на ЭВМ, что представляет собой несложную инженерную задачу.

В настоящее время метод численного интегрирования является наиболее универсальным и наиболее простым методом расчета переходных процессов в электрических цепях. Достоинствами метода являются:

1. Метод численного интегрирования одинаково просто может применяться для расчета переходных процессов в электрических цепях любой сложности, содержащих любое число независимых накопителей энергии  $L$  и  $C$ . В то же время в классическом и операторном методах с увеличением числа независимых накопителей энергии (и соответственно порядка дифференциального уравнения) значительно возрастают математические сложности, что практически не позволяет применять эти методы для решения дифференциальных уравнений выше 2-го порядка.

2. Метод численного интегрирования позволяет сравнительно просто выполнить математический анализ решения для искомой функции и получить выводы, необходимые для инженерной практики, а именно: определить характер и продолжительность переходного процесса, определить максимальные значения функции и т.д.

К недостаткам метода следует отнести необходимость составления индивидуальной расчетной программы для каждой конкретной задачи и решение ее на ЭВМ, что сегодня уже посильно каждому инженеру.

## 10.22 Расчет переходных процессов методом переменных состояния

Уравнениями состояния электрической цепи называют любую систему дифференциальных уравнений, которая описывает состояние (режим) данной цепи. Например, система уравнений Кирхгофа является уравнениями состояния цепи, для которой она составлена.

В более узком смысле в математике уравнениями состояния называют систему дифференциальных уравнений 1-го порядка, разрешенных относительно производных (форма Коши). Система уравнений состояния в обобщенной форме имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + F_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + F_2(t) \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + F_n(t) \end{cases}$$

Та же система уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_n(t) \end{bmatrix}$$

или в обобщенной матричной форме:

$$[x'] = [a] \times [x] + [F(t)]$$

Система уравнений состояния формы Коши решается методом численного интегрирования (метод Эйлера или метод Рунге-Кутты) на ЭВМ по стандартной программе, которая должна быть в пакете стандартных программ. При отсутствии такой программы в пакете она легко может быть составлена по следующему алгоритму (метод Эйлера) для  $k$ -го шага:

$$t_k = k \cdot h$$

Значения производных на  $k$ -ом шаге:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(k) = a_{11}x_{1(k-1)} + a_{12}x_{2(k-1)} + \dots + F_1(t_k) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt}(k) = a_{n1}x_{1(k-1)} + a_{n2}x_{2(k-1)} + \dots + F_n(t_k) \end{cases}$$

Значения переменных на  $k$ -ом шаге:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1(\kappa)} = x_{1(\kappa-1)} + h \frac{dx_1}{dt}(\kappa) \\ \dots \\ x_{n(\kappa)} = x_{n(\kappa-1)} + h \frac{dx_n}{dt}(\kappa) \end{array} \right.$$

Для определения значений переменных и их производных на 1-м шаге интегрирования используются их значения на момент  $t=0$ , т.е. их начальные условия  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ , ...  $x_n(0)$ .

Уравнения состояния формы Коши для заданной схемы могут быть получены из системы уравнений Кирхгофа путем их преобразования. Для этой цели: а) из системы уравнений Кирхгофа методом подстановки исключаются "лишние" переменные, имеющие зависимые начальные условия, и оставляют переменные  $i_L(t)$  и  $u_C(t)$ , которые не изменяются скачком и имеют независимые начальные условия  $i_L(0)$ ,  $u_C(0)$ ; б) оставшиеся уравнения решаются относительно производных и приводятся их к форме Коши.

В случае сложных схем уравнения состояния формы Коши могут быть составлены топологическими методами с использованием матриц соединений  $[A]$  и  $[B]$ .

Последовательность расчета переходного процесса методом переменных состояния выглядит так:

1. Производится расчет схемы в установившемся режиме до коммутации и определяются независимые начальные условия  $i_l(0)$  и  $u_C(0)$ .

2. Составляется система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа для схемы после коммутации.

3. Методом исключения "лишних" переменных система уравнений Кирхгофа преобразуется в систему уравнений Коши, составляются матрицы коэффициентов.

4. Выбирается расчетное время (продолжительность переходного процесса) и число шагов интегрирования N.

5. Решение задачи выполняется на ЭВМ по стандартной программе. Выходную функцию получают в виде графической диаграммы  $x = f(t)$  или в виде таблицы координат функций для заданных моментов времени.

Пример. Для схемы рисунка 154 с заданными параметрами элементов ( $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_E)$ ,  $j(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ ;  $R, R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, C$ ) выполнить расчет переходного процесса и определить функцию  $u_{ab}(t)$ .

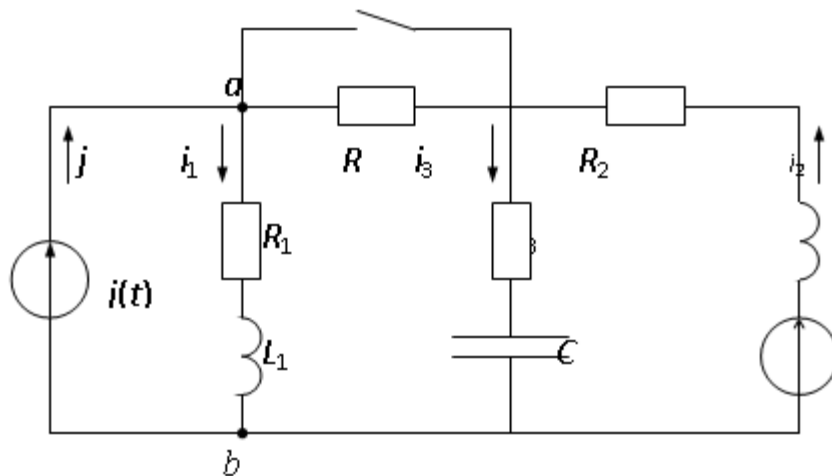


Рисунок 154

1. Выполняется расчет схемы в установившемся режиме переменного тока до коммутации и определяются начальные условия  $i_1(0), i_2(0), u_C(0)$ .

2. Составляется система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 + j(t) = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - i_3 R_3 - u_C = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + i_3 R_3 + u_C = e(t), & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_3 = C \frac{du_C}{dt}, & (4) \end{cases}$$

3. Система уравнений Кирхгофа преобразуется в систему уравнений Коши.

Для этой цели из (1) выражаем  $i_3 = i_1 - i_2 - j(t)$  и делаем подстановку в (2) и (3), а из (4) делаем подстановку в (1). Тогда получим:

$$\text{из (2)} \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{R_3 - R_1}{L_1} i_1 - \frac{R_3}{L_1} i_2 + \frac{1}{L_1} u_C - \frac{R_3}{L_1} j(t)$$

$$\text{из (3)} \quad \frac{di_2}{dt} = -\frac{R_3}{L_2} i_1 + \frac{R_3 - R_2}{L_2} i_2 - \frac{1}{L_2} u_C + \frac{1}{L_2} e(t) + \frac{R_3}{L_2} j(t)$$

$$\text{из (1)} \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_1 - \frac{1}{C} i_2 + 0 \cdot u_C - \frac{1}{C} j(t)$$

Введем обозначения:  $i_1 = x_1$ ;  $i_2 = x_2$ ;  $u_C = x_3$ . Подсчитаем значения отдельных коэффициентов.

$$a_{11} = \frac{R_3 - R_1}{L_1}; \quad a_{12} = -\frac{R_3}{L_1}; \quad a_{13} = \frac{1}{L_1}$$

$$F_1(t) = -\frac{R_3}{L_1} I_m \sin(\omega t + \psi_1) = E_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1), \text{ и т.д.}$$

Составляем матрицы коэффициентов:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad [F(t)] = \begin{bmatrix} F_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) \\ F_{2m} \sin(\omega t + \alpha_2) \\ F_{3m} \sin(\omega t + \alpha_3) \end{bmatrix}$$

В качестве исследуемого промежутка времени выбираем период переменного тока  $T = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ с}$ . Число шагов интегрирования принимаем  $N=1000$ .

Вводим исходные данные в ЭВМ и выполняем расчет.

В качестве выходной функции принимаем:

$$x_{\text{вых}}(t) = u_{ab}(t) = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = R_1 x_1 + L_1 \frac{dx_1}{dt} = ax_1 + b \frac{dx_1}{dt}.$$

Для выходной функции  $u_{ab}(t)$  строим графическую диаграмму в интервале периода  $T$ .

## 11 Четырехполюсники и фильтры

### 11.1 Уравнения четырехполюсника

Четырехполюсником называется часть электрической цепи или схемы, содержащая два входных вывода (полюса) для подключения источника энергии и два выходных вывода для подключения нагрузки. К четырехполюсникам можно отнести различные по назначению технические устройства: двухпроводную линию, двухобмоточный трансформатор, фильтры частот, усилители сигналов и др.

Теория четырехполюсников устанавливает связь между режимными параметрами на входе ( $U_1, I_1$ ) и режимными параметрами на его выходе ( $U_2, I_2$ ), при этом процессы, происходящие внутри четырехполюсника, не рассматриваются. Таким образом, единая теория четырехполюсника позволяет анализировать различные по структуре и назначению электрические цепи, которые могут быть отнесены к классу четырехполюсников.

Если четырехполюсник не содержит внутри себя источников энергии, то он называется пассивным (обозначается буквой П), если внутри четырехполюсника имеются источники, то он называется активным (обозначается буквой А).

В настоящей главе анализируются пассивные линейные четырехполюсники. На электрических схемах четырехполюсники условно обозначаются прямоугольником с двумя парами выводов: 1 и 1' - входные выводы, 2 и 2' - выходные выводы (рисунок 155). Соответственно

напряжение и ток на входе индексируются цифрой 1 ( $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ ), а на выходе – цифрой 2 ( $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ ).

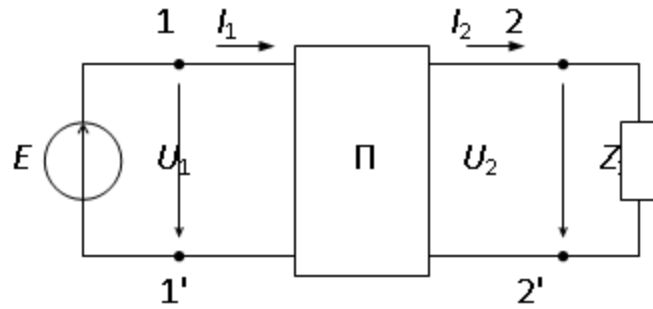


Рисунок 155

Установим связь между параметрами режима входа ( $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ ) и выхода ( $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ ). Для этой цели согласно теореме о компенсации заменим нагрузку  $\underline{Z}$  источником ЭДС  $\underline{E}_2 = \underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}$  и найдем токи по методу наложения от каждого источника в отдельности (рисунок 156а, б):

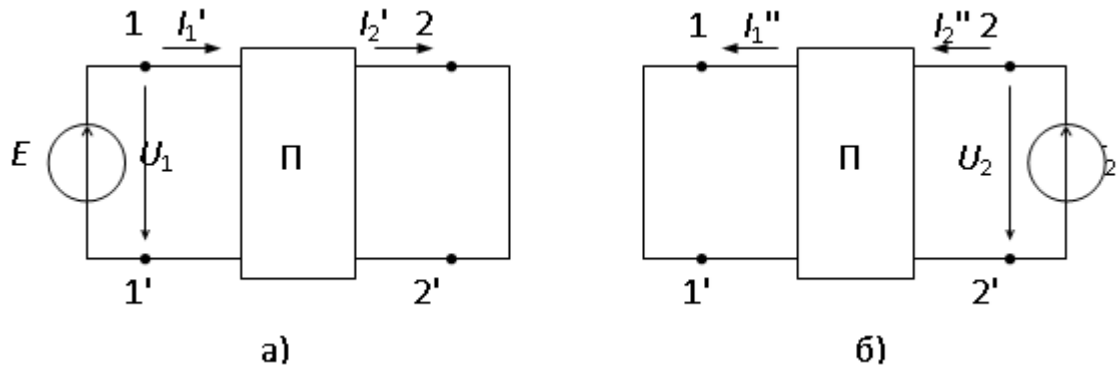


Рисунок 156

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_1' - \underline{I}_1'' = \underline{U}_1 \underline{Y}_{11} - \underline{U}_2 \underline{Y}_{21} \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_2' - \underline{I}_2'' = \underline{U}_1 \underline{Y}_{12} - \underline{U}_2 \underline{Y}_{22} \end{cases}$$

где  $\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{22}$  – входные проводимости входа и выхода,  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$  – взаимная проводимость между входом и выходом.

Выразим из полученных уравнений режимные параметры на входе:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} + \underline{I}_2 \frac{1}{\underline{Y}_{12}} = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{U}_2 \left( \frac{\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} - \underline{Y}_{21} \right) + \underline{I}_2 \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}} = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2, \end{aligned}$$

где  $\underline{A} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} [-]$ ;  $\underline{B} = \frac{1}{\underline{Y}_{12}} [\text{Ом}]$ ;  $\underline{C} = \frac{\underline{Y}_{11} \cdot \underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} - \underline{Y}_{21} [\text{См}]$ ;  $\underline{D} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}} [-]$  –

комплексные коэффициенты четырехполюсника.

С учетом принятых обозначений система основных уравнений четырехполюсника получит вид:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2\end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{– система основных уравнений} \\ \text{четырёхполюсника формы А.}\end{array}$$

Уравнения четырёхполюсника часто записывают в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [\underline{A}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix},$$

где  $[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$  – матрица коэффициентов формы А.

Выразим соотношение между коэффициентами четырёхполюсника:

$$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \cdot \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}} - \frac{1}{\underline{Y}_{12}} \cdot \left( \frac{\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}} - \underline{Y}_{21} \right) = 1$$

$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1$  – уравнение связи между коэффициентами. Уравнение связи показывает, что независимыми являются только три из четырёх коэффициентов четырёхполюсника.

Поменяем местами в схеме (рисунок 155) источник и приемник энергии. В новой схеме (рисунок 157) направления токов изменятся на противоположные.

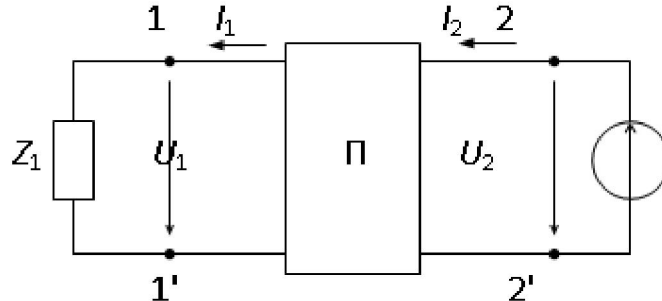


Рисунок 157

Уравнения четырёхполюсника с учетом изменения направлений токов примут вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 - \underline{B} \cdot \underline{I}_2 & (1) \\ -\underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 - \underline{D} \cdot \underline{I}_2 & (2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \times \underline{D} \times \underline{C} \\ \times \underline{B} \times \underline{A} \end{array}$$

Преобразуем полученную систему уравнений следующим образом. Умножим члены уравнения (1) на  $\underline{D}$ , члены уравнения (2) на  $\underline{B}$  и вычтем почленно из 1-го уравнения 2-ое. В результате получим:

$$\underline{D} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B} \cdot \underline{I}_1 = (\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{U}_2 + (\underline{B} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{D}) \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}_2.$$

Умножим члены уравнения (1) на  $\underline{C}$ , члены уравнения (2) на  $\underline{A}$  и вычтем из 1-го уравнения 2-ое. В результате получим:

$$\underline{C} \cdot \underline{U}_1 + \underline{A} \cdot \underline{I}_1 = (\underline{A} \cdot \underline{C} - \underline{A} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{U}_2 + (\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C}) \cdot \underline{I}_2 = \underline{I}_2$$

Новая система уравнений четырехполюсника получила название формы В:

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \underline{D} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B} \cdot \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 &= \underline{C} \cdot \underline{U}_1 + \underline{A} \cdot \underline{I}_1\end{aligned}\quad \begin{array}{l}\text{—система основных} \\ \text{уравнений четырехполюсника}\end{array}$$

Четырехполюсник называется симметричным, если перемена местами входных и выходных выводов не влияет на режим остальной цепи, частью которой является четырёхполюсник. Для симметричного четырёхполюсника  $\underline{A}=\underline{D}$  и  $\underline{A}^2-\underline{B} \cdot \underline{C}=1$ .

Кроме названных форм уравнений четырехполюсника А и В применяются на практике еще четыре формы, а именно формы Z, Y, H и G. Структура этих уравнений приведена ниже:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \cdot \underline{I}_2\end{aligned}\quad \begin{array}{l}\text{—система основных уравнений} \\ \text{четырёхполюсника формы Z.}\end{array}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \cdot \underline{U}_2\end{aligned}\quad \begin{array}{l}\text{—система основных уравнений} \\ \text{четырёхполюсника формы Y.}\end{array}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{H}_{11} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21} \cdot \underline{I}_1 + \underline{H}_{22} \cdot \underline{U}_2\end{aligned}\quad \begin{array}{l}\text{—система основных уравнений} \\ \text{четырёхполюсника формы H.}\end{array}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{G}_{11} \cdot \underline{U}_1 + \underline{G}_{12} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{G}_{21} \cdot \underline{U}_1 + \underline{G}_{22} \cdot \underline{I}_2\end{aligned}\quad \begin{array}{l}\text{—система основных уравнений} \\ \text{четырёхполюсника формы G.}\end{array}$$

Для уравнений формы Z, Y, H и G принята следующая ориентация токов и напряжений относительно выводов четырехполюсника (рисунок 158).

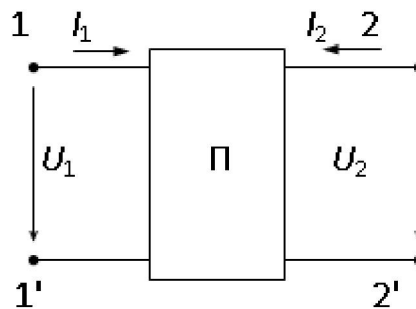


Рисунок 158

Соотношения между коэффициентами четырехполюсника различных форм приводятся в справочной литературе, однако их нетрудно получить, выполнив преобразование одной формы уравнений в другую. Например, пусть заданы коэффициенты формы  $A$  ( $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$ ) и требуется определить коэффициенты формы  $Z$  ( $\underline{Z}_{11}$ ,  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{21}$ ,  $\underline{Z}_{22}$ ). Для этого в уравнениях формы  $A$  изменим знак тока  $\underline{I}_2$  и решим их относительно переменных  $\underline{U}_1$  и  $\underline{U}_2$ :

$$\underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 - \underline{B} \cdot \underline{I}_2 \quad (1)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 - \underline{D} \cdot \underline{I}_2 \quad (2)$$

Из (2) следует:  $\underline{U}_2 = \frac{1}{\underline{C}} \underline{I}_1 + \frac{\underline{D}}{\underline{C}} \underline{I}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2$ .

Из (1) следует:  $\underline{U}_1 = \underline{A} \left( \frac{1}{\underline{C}} \underline{I}_1 + \frac{\underline{D}}{\underline{C}} \underline{I}_2 \right) - \underline{B} \cdot \underline{I}_2 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} \underline{I}_1 + \frac{1}{\underline{C}} \underline{I}_2 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2$ .

Сравнивая полученные выражения с уравнениями четырехполюсника формы  $Z$ , находим соотношения между коэффициентами двух форм:

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{12} = \frac{1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}.$$

## 11.2 Схемы замещения четырехполюсника

Так как четырехполюсник характеризуется тремя независимыми коэффициентами, то из этого следует, что его простейшая схема замещения должна содержать три независимые элементы. Существует две такие схемы: а) Т-образная схема или схема звезды, б) П-образная схема или схема треугольника (рисунок 159а, б).

Установим соотношения между коэффициентами четырехполюсника  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$  и параметрами элементов схем замещения.

На основании законов Кирхгофа получим для Т-образной схемы (рисунок 159а):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = \underline{I}_2 + (\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2) \underline{Y}_0 = \underline{U}_2 \underline{Y}_0 + \underline{I}_2 (1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0),$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{U}_2 = \underline{U}_2 (1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0) + \underline{I}_2 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0).$$

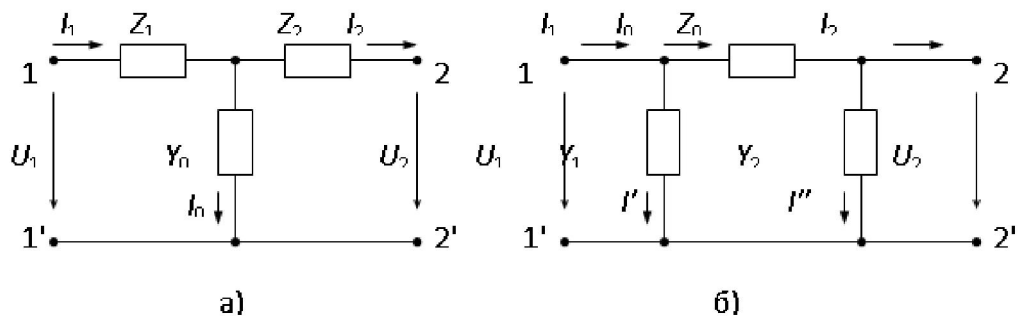


Рисунок 159

Сравнивая полученные выражения с уравнениями четырехполусника формы А, находим нужные соотношения:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0; \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0; \quad \underline{C} = \underline{Y}_0; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0;$$

$$\underline{Y}_0 = \underline{C}; \quad \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}-1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{D}-1}{\underline{C}}.$$

На основании законов Кирхгофа получим для П-образной схемы (рисунок 159б):

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_0 \underline{Z}_0 = \underline{U}_2 + (\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2) \underline{Z}_0 = \underline{U}_2 (1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0) + \underline{I}_2 \underline{Z}_0,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}'_2 + \underline{I}'_1 = \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 + \underline{U}_1 \underline{Y}_1 = \underline{U}_2 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0) + \underline{I}_2 (1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_0).$$

Сравнивая полученные выражения с уравнениями четырехполусника формы А, находим нужные соотношения:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0; \quad \underline{B} = \underline{Z}_0; \quad \underline{C} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_0;$$

$$\underline{Z}_0 = \underline{B}; \quad \underline{Y}_1 = \frac{\underline{D}-1}{\underline{B}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}-1}{\underline{B}}.$$

Для семитричного четырехполусника должны выполняться равенства:  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$  – для Т-образной схемы и  $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2$  – для П-образной схемы.

Переход от Т-образной схемы к П-образной и наоборот выполняется по известным формулам преобразования схемы звезды в схему треугольника и наоборот.

### 11.3 Определение коэффициентов четырехполусника

Коэффициенты четырехполусника могут быть определены расчетным или экспериментальным путем. Если известна внутренняя структура (схема) четырехполусника и параметры отдельных элементов, то коэффициенты четырехполусника определяются расчетным путем по одному из двух методов.

Сущность первого метода состоит в том, что сложная схема четырехполусника путем последовательных преобразований сворачивается к простейшей Т- или П-образной схеме. Коэффициенты четырехполусника определяются по соответствующим формулам, полученным ранее для этих схем.

Пусть требуется определить коэффициенты четырехполусника, схема которого приведена на рисунке 160.

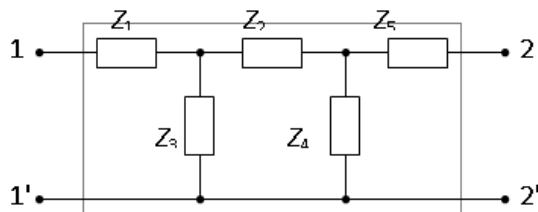


Рисунок 160

Выполняется первое преобразование: треугольник  $\underline{Z}_2, \underline{Z}_3, \underline{Z}_4$  преобразуется в эквивалентную звезду  $\underline{Z}_6, \underline{Z}_7, \underline{Z}_8$  (рисунок 161):

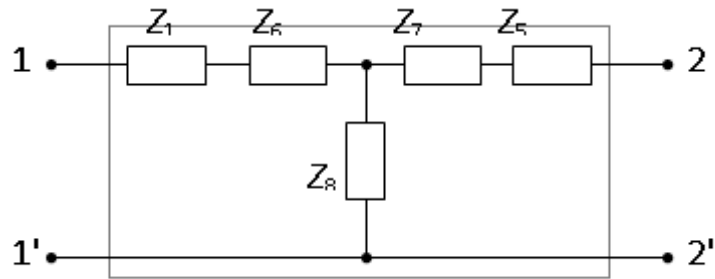


Рисунок 161

Затем выполняются последовательные преобразования  $\underline{Z}_{19} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_6$ ,  $\underline{Z}_{29} = \underline{Z}_7 + \underline{Z}_5$ ,  $\underline{Y}_0 = 1/\underline{Z}_8$ , после чего схема получает стандартный Т-образный вид (рисунок 162):

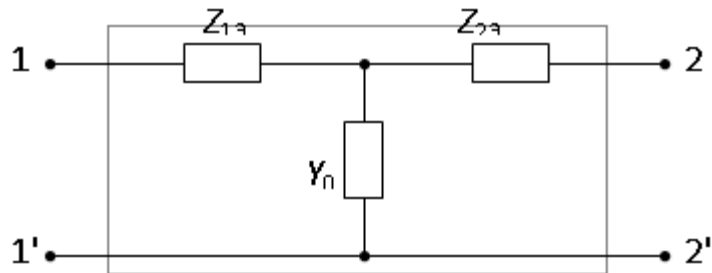


Рисунок 162

Коэффициенты четырехполюсника находятся по формулам для Т-схемы:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_{19} \underline{Y}_0; \quad \underline{B} = \underline{Z}_{19} + \underline{Z}_{29} + \underline{Z}_{19} \underline{Z}_{29} \underline{Y}_0; \quad \underline{C} = \underline{Y}_0; \quad \underline{D} = 1 + \underline{Z}_{29} \underline{Y}_0.$$

Сущность второго метода заключается в том, что коэффициенты четырехполюсника определяются через его входные сопротивления со стороны входных ( $\underline{Z}_{1X}$  и  $\underline{Z}_{1K}$ ) и выходных ( $\underline{Z}_{2X}$  и  $\underline{Z}_{2K}$ ) выводов в режимах холостого хода и короткого замыкания на противоположной стороне. Значения этих сопротивлений рассчитываются аналитически методом свертки схемы четырехполюсника в соответствующем режиме (х.х. или к.з.) относительно его выводов.

При питании четырехполюсника со стороны первичных выводов применяются уравнения формы А:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{D} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B} \cdot \underline{I}_1, \\ \underline{I}_2 = \underline{C} \cdot \underline{U}_1 + \underline{A} \cdot \underline{I}_1. \end{cases}$$

В режиме холостого хода на вторичной стороне  $\underline{I}_{2X} = 0$ , а в режиме короткого замыкания  $\underline{U}_{2K} = 0$ . Из уравнений следует:

$$\underline{Z}_{1X} = \frac{\underline{U}_{1X}}{\underline{I}_{1X}} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{U}_{2X} + 0}{\underline{C} \cdot \underline{U}_{2X} + 0} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}},$$

$$\underline{Z}_{1K} = \frac{\underline{U}_{1K}}{\underline{I}_{1K}} = \frac{0 + \underline{B} \cdot \underline{I}_{2K}}{0 + \underline{D} \cdot \underline{I}_{2K}} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}.$$

При питании четырехполосника со стороны вторичных выводов применяются уравнения формы В:

$$\underline{U}_2 = \underline{D} \cdot \underline{U}_1 + \underline{B} \cdot \underline{I}_1,$$

$$\underline{I}_2 = \underline{C} \cdot \underline{U}_1 + \underline{A} \cdot \underline{I}_1.$$

В режиме холостого хода на первичной стороне  $\underline{I}_{1X} = 0$ , а в режиме короткого замыкания  $-\underline{U}_{1K} = 0$ . Из уравнений следует:

$$\underline{Z}_{2X} = \frac{\underline{U}_{2X}}{\underline{I}_{2X}} = \frac{\underline{D} \cdot \underline{U}_{1X} + 0}{\underline{C} \cdot \underline{U}_{1X} + 0} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}},$$

$$\underline{Z}_{2K} = \frac{\underline{U}_{2K}}{\underline{I}_{2K}} = \frac{0 + \underline{B} \cdot \underline{I}_{1K}}{0 + \underline{A} \cdot \underline{I}_{1K}} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}.$$

Совместное решение полученных уравнений позволяет установить связь между входными сопротивлениями четырехполосника в режиме холостого хода и короткого замыкания, но не дает возможности определить его коэффициенты:

$$\frac{\underline{Z}_{1X}}{\underline{Z}_{1K}} = \frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{2K}}.$$

Для определения коэффициентов четырехполосника берут любые три из четырех уравнений для входных сопротивлений и дополняют их уравнением связи между коэффициентами  $\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1$ , после чего решают полученную систему из четырех уравнений. В качестве примера возьмем уравнения для  $\underline{Z}_{1X}$ ,  $\underline{Z}_{2X}$  и  $\underline{Z}_{2K}$ , тогда получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{Z}_{1X} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}, \text{ откуда } \underline{C} = \underline{A} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{1X}} \quad (1) \\ \underline{Z}_{2X} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}, \text{ откуда } \underline{D} = \underline{A} \cdot \frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X}} \quad (2) \\ \underline{Z}_{2K} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}, \text{ откуда } \underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{Z}_{2K} \quad (3) \\ \underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1 \quad (4) \end{array} \right.$$

Из уравнений (1), (2) и (3) делаем подстановку в уравнение (4), получим:

$$\underline{A} \cdot \underline{A} \cdot \frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X}} - \underline{A} \cdot \underline{A} \cdot \frac{\underline{Z}_{2K}}{\underline{Z}_{1X}} = 1, \text{ откуда следует } \underline{A} = \pm \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1X}}{\underline{Z}_{2X} - \underline{Z}_{2K}}}.$$

Остальные коэффициенты ( $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$ ) получим путем подстановки найденного значения  $\underline{A}$  в уравнения (1), (2) и (3).

При извлечении квадратного корня получаются два значения коэффициента  $\underline{A}$  и, соответственно, всех остальных коэффициентов, отличающиеся знаком (+ или –) или аргументом в  $\pm 180^\circ$ , например  $\underline{A}' = Ae^{j\alpha}$ ,  $\underline{A}'' = -\underline{A}' = Ae^{j(\alpha \pm 180)}$

Двойственность решения объясняется тем фактом, что входные сопротивления любой цепи, в том числе четырехполюсника, не зависят от полярности выводов. С другой стороны, изменения полярности двух выводов четырехполюсника ( $1 \Leftrightarrow 1'$  или  $2 \Leftrightarrow 2'$ ) приводит к изменению знаков перед всеми его коэффициентами. Таким образом, для утверждения знаков перед коэффициентами необходимы дополнительные исследования.

Входные комплексные сопротивления четырехполюсника могут быть измерены экспериментально по схеме рисунка 163:

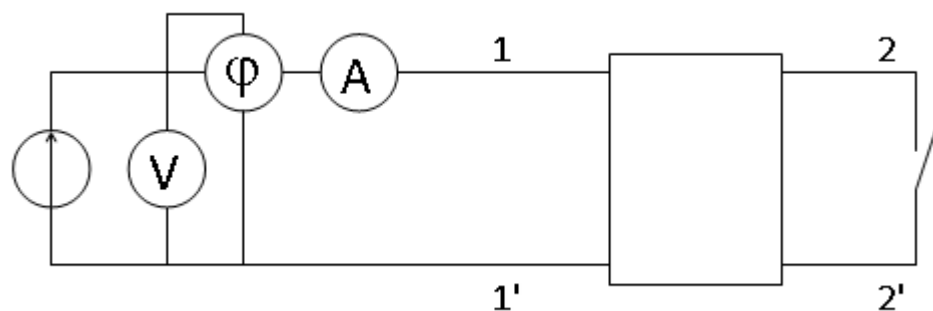


Рисунок 163

Комплексное входное сопротивление цепи находится по формуле:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j\varphi},$$

где  $U, I, \varphi$  – показания приборов в исследуемой цепи.

#### 11.4 Способы соединения четырехполюсников

Сложная цепь или схема может содержать несколько четырехполюсников, соединенных между собой тем или иным образом. При расчете таких схем отдельные группы четырехполюсников можно заменить эквивалентными одиночными четырехполюсниками и, таким образом, упростить схему цепи и, соответственно, решение задачи.

Различают 5 способов соединения четырехполюсников между собой: а) каскадное, б) последовательное, в) параллельное, г) последовательно-параллельное, д) параллельно-последовательное.

На рисунке 164 показано каскадное соединение двух четырехполюсников П' и П'':

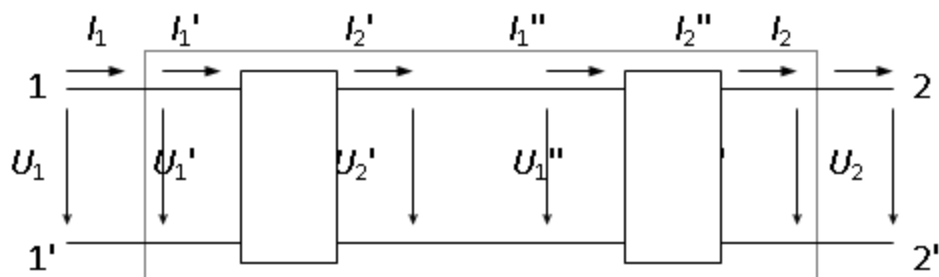


Рисунок 164

Для каскадного соединения, как видно из схемы удовлетворяются следующие равенства (в матричной форме):

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ I_1' \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} U_2' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1'' \\ I_1'' \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} U_2'' \\ I_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Используя уравнения четырехполюсника формы А, получим:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \underline{A}' \cdot \begin{bmatrix} U_2' \\ I_2' \end{bmatrix} = \underline{A}' \cdot \begin{bmatrix} U_1'' \\ I_1'' \end{bmatrix} = \underline{A}' \cdot \underline{A}'' \cdot \begin{bmatrix} U_2'' \\ I_2'' \end{bmatrix} = \underline{A} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица коэффициентов эквивалентного четырехполюсника равен произведению матриц каскадно включенных четырехполюсников:

$$\underline{A} = \underline{A}' \cdot \underline{A}'' = \begin{bmatrix} \underline{A}' & \underline{B}' \\ \underline{C}' & \underline{D}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{A}'' & \underline{B}'' \\ \underline{C}'' & \underline{D}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{A}' \underline{A}'' + \underline{B}' \underline{C}'') & (\underline{A}' \underline{B}'' + \underline{B}' \underline{D}'') \\ (\underline{C}' \underline{A}'' + \underline{D}' \underline{C}'') & (\underline{C}' \underline{B}'' + \underline{D}' \underline{D}'') \end{bmatrix}.$$

При последовательном соединении двух четырехполюсников включаются последовательно их входы и последовательно их выходы (рисунок 165):

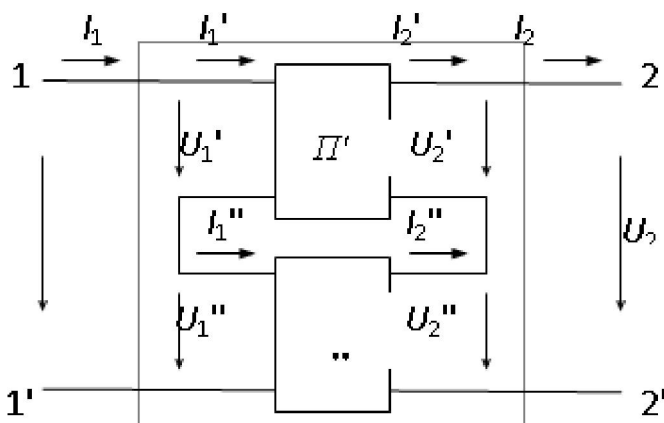


Рисунок 165

Для последовательного соединения, как следует из схемы (рисунок 165), удовлетворяются следующие равенства:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' + \underline{U}_1''; \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_2' + \underline{U}_2''; \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_1' = \underline{I}_1''; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2' = \underline{I}_2''.$$

Используя уравнения четырехполосника формы  $Z$ , получим:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{U}_2'' \end{bmatrix} = [\underline{Z}'] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{I}_2' \end{bmatrix} + [\underline{Z}''] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1'' \\ \underline{I}_2'' \end{bmatrix} = \{[\underline{Z}'] + [\underline{Z}'']\} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Z}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Следовательно, матрица коэффициентов  $[\underline{Z}]$  эквивалентного четырехполосника равна сумме матриц последовательно включенных четырехполосников:  $[\underline{Z}] = [\underline{Z}'] + [\underline{Z}'']$ .

При параллельном соединении двух четырехполосников включаются параллельно их входы и параллельно их выходы (рисунок 166):

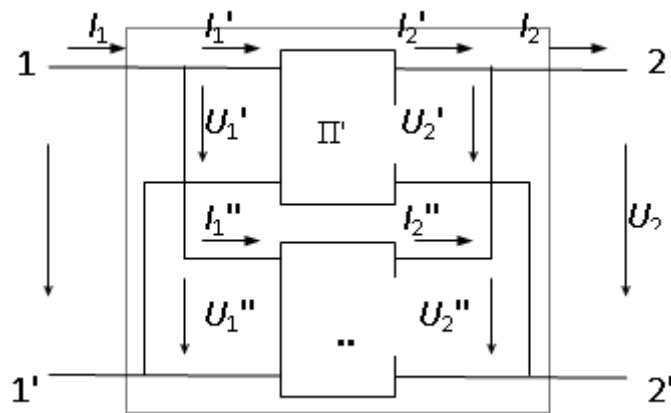


Рисунок 166

Для параллельного соединения, как следует из схемы (рисунок 166), удовлетворяют следующие равенства:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1''; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2' + \underline{I}_2''; \quad \underline{U}_1' = \underline{U}_1'' = \underline{U}_1; \quad \underline{U}_2' = \underline{U}_2'' = \underline{U}_2.$$

Используя уравнения четырехполосника формулы  $Y$ , получим:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{I}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_1'' \\ \underline{I}_2'' \end{bmatrix} = [\underline{Y}'] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \end{bmatrix} + [\underline{Y}'] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{U}_2'' \end{bmatrix} = \{[\underline{Y}'] + [\underline{Y}']\} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{Y}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица коэффициентов  $[\underline{Y}]$  эквивалентного четырехполосника  $\Pi'$  и  $\Pi''$  их входы включаются последовательно, а выходы – параллельно. При свертке схемы используются уравнения формы  $H$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{U}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{U}_2'' \end{bmatrix} = \{[\underline{H}'] + [\underline{H}'']\} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [\underline{H}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix},$$

где  $[H] = [H'] + [H'']$  – матрица коэффициентов  $[H]$  эквивалентного четырехполюсника.

При параллельно-последовательном соединении двух четырехполюсников  $\Pi'$  и  $\Pi''$  их входы включаются параллельно, а выходы – последовательно. При свертке схемы используются уравнения формы G:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1' \\ \underline{U}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_1'' \\ \underline{U}_2'' \end{bmatrix} = \{[G'] + [G'']\} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = [G] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix},$$

где  $[G] = [G'] + [G'']$  – матрица коэффициентов  $[G]$  эквивалентного четырехполюсника.

### 11.5 Характеристические параметры симметричного четырехполюсника

Для симметричного четырехполюсника коэффициент  $\underline{A} = \underline{D}$  и система уравнений формы A имеет вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{A} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{A}^2 - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1 \end{cases}$$

Характеристическим сопротивлением четырехполюсника  $\underline{Z}_C$  называется такое сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$ , при котором входное сопротивление четырехполюсника со стороны первичных выводов также равно сопротивлению нагрузки:

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$$

Установим связь между характеристическим сопротивлением  $\underline{Z}_C$  и коэффициентами четырехполюсника  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ . Для этой цели преобразуем уравнения четырехполюсника:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \left( \underline{A} + \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_C} \right) = \underline{I}_2 (\underline{A} \underline{Z}_C + \underline{B}) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{A} \underline{I}_2 = \underline{U}_2 \left( \underline{C} + \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_C} \right) = \underline{I}_2 (\underline{C} \underline{Z}_C + \underline{A}) \end{cases} \quad (2)$$

Разделим уравнение (1) на уравнение (2):

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A} \underline{Z}_C + \underline{B}}{\underline{C} \underline{Z}_C + \underline{A}} = \underline{Z}_C,$$

откуда получаем  $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = Z_C e^{j\varphi_C}$ , где  $-90^\circ \leq \varphi_C \leq 90^\circ$ ;

$$\text{из (1)} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = A + \frac{B}{Z_C} = A + \sqrt{BC} = Me^{j\beta} = e^\alpha e^{j\beta} = e^{\alpha+j\beta} = e^g;$$

$$\text{из (2)} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = A + CZ_C = A + \sqrt{BC} = e^g,$$

где  $g = \alpha + j\beta = \ln(A + \sqrt{BC})$  – постоянная (коэффициент) передачи четырехполюсника.

Вещественная часть коэффициента передачи  $\alpha$  показывает, как изменяется модуль напряжения (тока) при переходе через четырехполюсник, поэтому называется коэффициентом затухания:

$$\alpha = \ln \frac{|U_1|}{|U_2|} = \ln \frac{|I_1|}{|I_2|} \quad [\text{Нп}] \quad \text{или} \quad [\text{Непер}] \quad - \text{основная единица}$$

измерения затухания.

Затухание в 1 Нп соответствует уменьшению модуля величины в  $e = 2,72$  раза. На практике для измерения затухания сигналов применяется другая, более удобная для практики единица, а именно: 1 децибелл [дБ], которая определяется согласно уравнению:

$$\alpha = 20 \lg \frac{|U_1|}{|U_2|} \quad [\text{дБ}] ; \quad 1 \text{ дБ} = 10^{\frac{1}{20}} \approx 1,122 \text{ раза.}$$

Соотношение между единицами затухания: 1 Нп = 8,086 дБ ; 1 дБ = 0,115 Нп.

Мнимая часть коэффициента передачи показывает, как изменяется фаза напряжения (тока) при переходе через четырехполюсник, поэтому называется коэффициентом фазы:

$$\beta = \psi_{U_1} - \psi_{U_2} = \psi_{i_1} - \psi_{i_2} \quad [\text{рад}]$$

Характеристическое сопротивление  $Z_C$  и коэффициент передачи  $\underline{g} = \alpha + j\beta$  называются характеристическими параметрами четырехполюсника.

Выразим коэффициенты четырехполюсника через его характеристические параметры  $Z_C$  и  $\underline{g}$ .

Преобразуем уравнение связи между коэффициентами:

$$A^2 - BC = (A + \sqrt{BC})(A - \sqrt{BC}) = 1.$$

Так как  $A + \sqrt{BC} = e^g$ , то следовательно

$$A - \sqrt{BC} = \frac{1}{A + \sqrt{BC}} = \frac{1}{e^g} = e^{-g}.$$

Решаем совместно полученные уравнения:

$$\begin{cases} A + \sqrt{BC} = e^g \\ A - \sqrt{BC} = e^{-g} \end{cases}$$

Откуда следует, что  $\underline{A} = \frac{e^g + e^{-g}}{2} = ch \underline{g}$ ,  $\sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}} = \frac{e^g - e^{-g}}{2} = sh \underline{g}$ .

Учитывая, что  $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \frac{\underline{B}}{\sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}} = \frac{\sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}}{\underline{C}}$ , получим для коэффициентов:

$$\underline{B} = \underline{Z}_C \cdot \sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}} = \underline{Z}_C \cdot sh \underline{g}, \quad \underline{C} = \frac{\sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{\underline{Z}_C} sh \underline{g}.$$

С учетом этих выражений основные уравнения формы А получают окончательный вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 ch \underline{g} + \underline{I}_2 \underline{Z}_C sh \underline{g} \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 ch \underline{g} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} sh \underline{g} \end{cases}$$

Данная форма уравнений четырехполюсника используется в теории цепных схем и в теории электрических фильтров.

## 11.6 Основные понятия и определения электрических фильтров

Электрическим фильтром называется четырехполюсник, предназначенный для выделения (пропускания) сигналов определенной полосы частот. В зависимости от пропускаемого спектра частот фильтры подразделяют на 4 основных вида:

- 1) фильтры низких частот (ФНЧ), пропускающие сигналы в диапазоне частот от  $\omega_1=0$  до  $\omega_2$ ;
- 2) фильтры высоких частот (ФВЧ), пропускающие сигналы в диапазоне частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2 = \infty$ ;
- 3) полосовые фильтры (ПФ), пропускающие сигналы в диапазоне частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ ;
- 4) заграждающие или режекторные фильтры (ЗФ), пропускающие сигналы в диапазоне частот от 0 до  $\omega_1$  и в диапазоне частот от  $\omega_2$  до  $\infty$  и не пропускающие сигналы в диапазоне частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ .

Коэффициентом передачи напряжения фильтра называется отношение комплексных выходного напряжения ко входному:

$$\underline{k}(\omega) = \frac{\underline{U}_{2m}}{\underline{U}_{1m}} = \frac{\underline{U}_{2m}}{\underline{U}_{1m}} e^{j(\alpha_2 - \alpha_1)} = k(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

где  $k(\omega) = \frac{U_{2m}}{U_{1m}}$  показывает, как изменяется с частотой амплитуда выходного напряжения, и называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) фильтра;  $\varphi(\omega) = (\alpha_2 - \alpha_1)$  показывает, как изменяется с частотой фаза выходного напряжения, и называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) фильтра.

Диапазон частот, в котором фильтр пропускает к приемнику сигналы практически без изменения, называется полосой пропускания или зоной прозрачности фильтра. В полосе пропускания для идеального фильтра должны удовлетворяться два условия: 1)  $U_2 = U_1$ , при этом  $k(\omega) = 1$ ; 2)  $\varphi(\omega) = -\tau\omega$ , при этом все гармоники сигнала будут иметь одинаковое время запаздывания  $\Delta t = \frac{-\tau k \omega t}{k \omega t} = -\tau$ . При выполнении этих условий сигнал на выходе фильтра не изменится.

Электрические фильтры можно классифицировать:

1) по типу элементов, из которых они состоят, на а) реактивные, состоящие только из реактивных элементов  $L$  и  $C$ ; б) безиндукционные, состоящие из элементов  $R$  и  $C$ ; и др.;

2) по способу соединения элементов между собой на Т-, П- и Г-образные;

3) по виду частотных характеристик на типа “ $k$ ” и типа “ $m$ ”.

Электрические фильтры широко применяются в радиотехнике, в технике связи. В электроэнергетике фильтры применяются для сглаживания пульсаций выпрямленного напряжения.

## 11.7 Симметричные реактивные фильтры

Реактивные фильтры состоят только из реактивных элементов  $L$  и  $C$ . Существует две простейшие симметричные схемы таких фильтров: Т-образная или Т-схема (рисунок 167а) и П-образная или П-схема (рисунок 167б).

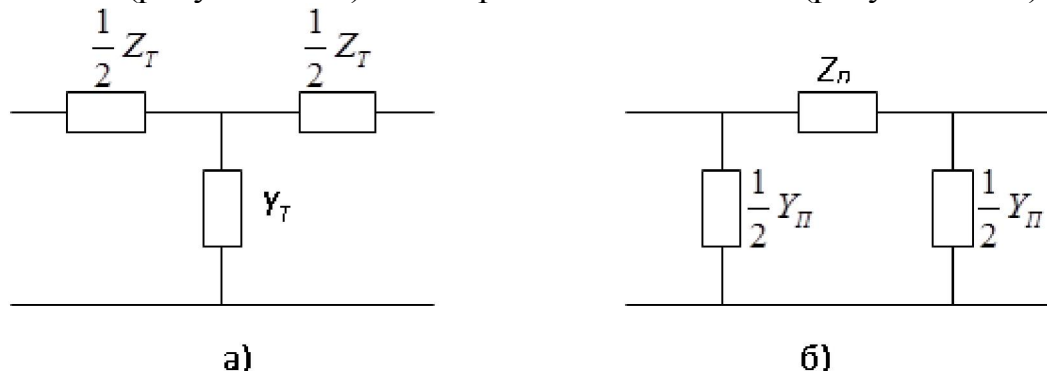


Рисунок 167

Рассматривая схемы фильтра как схемы четырехполосника, выразим коэффициент  $\underline{A}$  через параметры элементов:

$$\underline{A} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0 = 1 + \frac{\underline{Z}_T \underline{Y}_T}{2} \text{ — для Т-образной схемы;}$$

$$\underline{A} = 1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0 = 1 + \frac{\underline{Z}_\Pi \underline{Y}_\Pi}{2} \text{ — для П-образной схемы.}$$

Следовательно, независимо от схемы фильтра  $\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{2}$ . Так как по условию  $\underline{Z}$  и  $\underline{Y}$  являются чисто мнимыми числами, то их произведение  $\underline{Z} \cdot \underline{Y}$  является чисто вещественным, и, следовательно, коэффициент  $\underline{A}$  также является чисто вещественным. Ранее было получено:

$$\underline{A} = ch \underline{g} = ch(\alpha + j\beta) = ch\alpha \cdot \cos \beta + jsh\alpha \cdot \sin \beta = A + j0,$$

где  $\underline{g} = \alpha + j\beta = \ln(\underline{A} + \sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}}) = \ln \frac{U_1}{U_2}$  – коэффициент передачи фильтра

Комплексное уравнение распадается на 2 вещественных:

$$\begin{cases} sh\alpha \cdot \sin \beta = 0 \\ ch\alpha \cdot \cos \beta = 1 + \frac{ZY}{2} = A \end{cases}$$

Полученная система уравнений имеет два решения.

1-е решение:  $\alpha = 0$ ;  $sh\alpha = 0$ ;  $ch\alpha = 1$ ;  $\cos \beta = 1 + \frac{ZY}{2} = A$ . Это

решение соответствует полосе пропускания фильтра и существует при условии  $ZY < 0$ , что возможно, если одна из этих величин носит индуктивный характер, а другая – емкостный. Диапазон частот, удовлетворяющих решению, определяется соотношением:

$$-1 \leq 1 + \frac{ZY}{2} \leq +1 \quad \text{или} \quad 0 \leq -ZY \leq 4.$$

Частоты, определяющие границы полосы пропускания фильтра, находятся из решения неравенства:

$$1) - ZY = 0; \quad 2) - ZY = +4.$$

Характеристическое сопротивление схем может быть выражено через параметры элементов:

$$\underline{Z}_{CT} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{1 + \underline{Z} \cdot \underline{Y} + \frac{\underline{Z}^2 \underline{Y}^2}{4} - 1}{\underline{Y}^2}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{4}} = f(\omega) - \text{для Т-схемы};$$

$$\underline{Z}_{CP} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}^2}{1 + \underline{Z} \cdot \underline{Y} + \frac{\underline{Z}^2 \underline{Y}^2}{4} - 1}} = \frac{\sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}}}{\sqrt{1 + \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{4}}} = f(\omega) - \text{для П-схемы}.$$

В полосе пропускания характеристическое сопротивление фильтра является чисто активным, но зависит от частоты. Это означает, что фильтр не может иметь одинаковый коэффициент передачи для всех частот полосы пропускания, если сопротивление приемника остается постоянным.

2-е решение:  $\sin \beta = 0$ ;  $\cos \beta = -1$ ;  $ch \alpha = -\left(1 + \frac{ZY}{2}\right) = -A$ . Это

решение соответствует полосе задерживания, так как здесь  $\alpha > 0$ . Границы этой полосы определяются из условия:

$$1 \leq 1 + \frac{ZY}{2} \leq \infty \quad \text{или} \quad 4 \leq -ZY \leq \infty.$$

Частоты, определяющие границы полосы задерживания фильтра, находятся из решения неравенства:

$$1) -ZY = 4; \quad 2) -ZY = \infty.$$

Характеристическое сопротивление фильтра в полосе задерживания носит реактивный характер и зависит от частоты.

### 11.8 Фильтры нижних частот типа к

Простейшие Т- и П-схемы фильтров нижних частот типа к приведены на рисунке 168а,б:

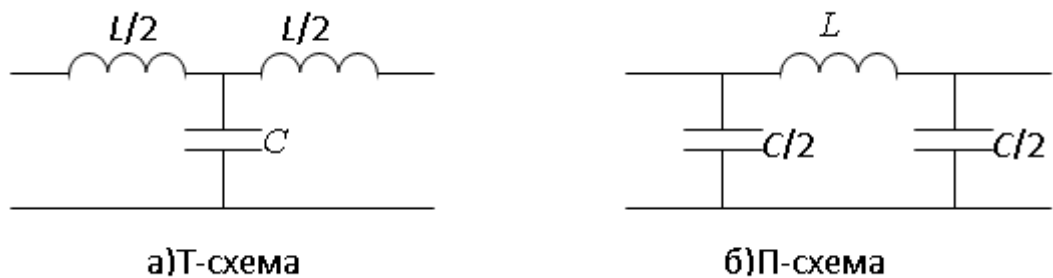


Рисунок 168

Для обеих схем:

$$\underline{Z} = j\omega L; \quad \underline{Y} = j\omega C; \quad k = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = const.$$

Граничные частоты для полосы пропускания определяются из условия:

$$-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = j\omega L \cdot j\omega C = \omega^2 LC = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases},$$

откуда следует  $\omega_1 = 0$ ;  $\omega_2 = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ . Фильтр низкой частоты

пропускает сигналы в диапазоне частот от  $\omega_1 = 0$  до  $\omega_0$ .

Характеристическое сопротивление для Т- и П-образных схем:

$$Z_{CT} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} = k \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

$$Z_{CT} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}} = \frac{k}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}.$$

Для коэффициента фазы в полосе пропускания решение имеет вид:

$$\beta = \arccos A = \arccos\left(1 + \frac{Z \cdot Y}{2}\right) = \arccos\left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right) = \arccos\left(1 - 2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right).$$

Зависимость характеристических параметров фильтров от частоты показана на рисунке 169а, б.

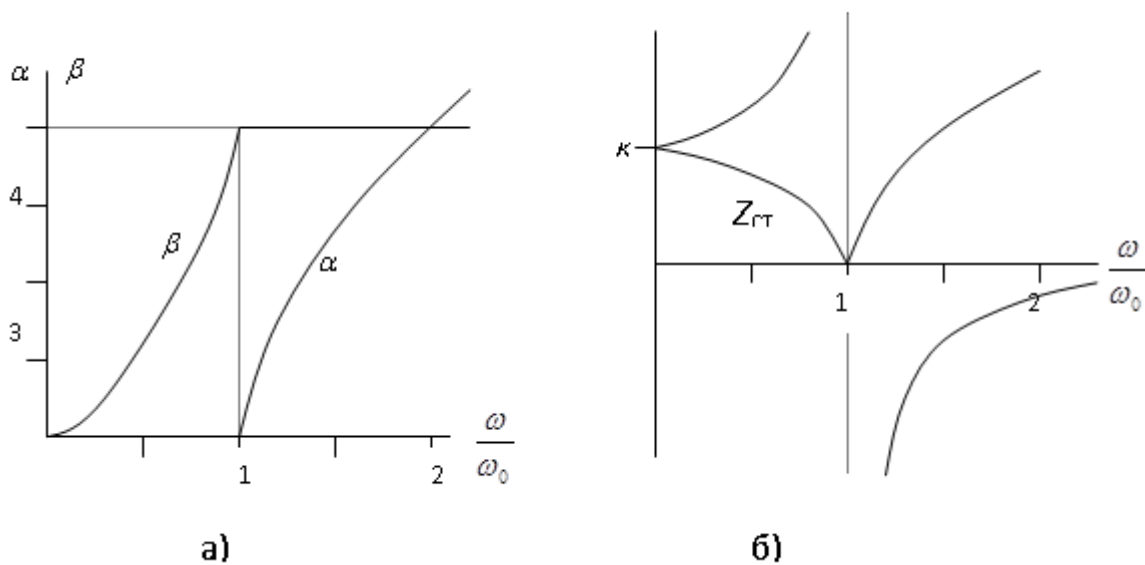


Рисунок 169

В полосе пропускания характеристическое сопротивление для обеих схем зависит от частоты, поэтому для нормальной работы фильтра требуется согласование сопротивления нагрузки с фильтром во всем диапазоне частот.

### 11.9 Фильтры верхних частот типа $\kappa$ .

Простейшие Т- и П-схемы фильтров верхних частот типа  $\kappa$  приведены на рисунке 170а,б:

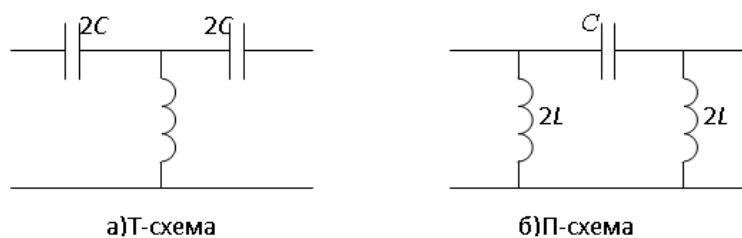


Рисунок 170

Для обеих схем:

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}; \quad \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L}; \quad k = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \text{const}.$$

Граничные частоты для полосы пропускания определяются из условия:

$$-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L \cdot j\omega C} = \frac{1}{\omega^2 LC} = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases},$$

откуда следует  $\omega_1 = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ ;  $\omega_2 = \infty$ . Фильтр высокой частоты пропускает сигналы в диапазоне частот от  $\omega_1 = \omega_0$  до  $\infty$ .

Характеристическое сопротивление для Т- и П-образных схем:

$$Z_{CT} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega^2 LC}} = k \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}},$$

$$Z_{CP} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\omega^2 LC}}} = \frac{k}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}.$$

Для коэффициента фазы в полосе пропускания решение имеет вид:

$$\beta = \arccos A = \arccos\left(1 + \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{2}\right) = \arccos\left(1 - \frac{1}{2\omega^2 LC}\right) = \arccos\left(1 - 2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right).$$

Зависимость характеристических параметров фильтров от частоты показана на рисунке 171а,б:

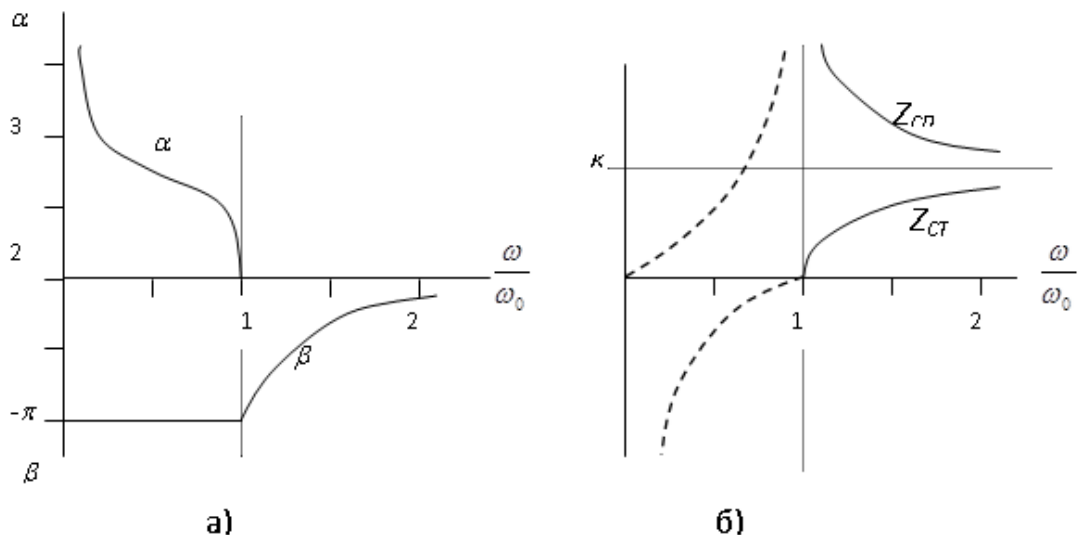


Рисунок 171

В полосе пропускания характеристическое сопротивление для обеих схем зависит от частоты, поэтому для нормальной работы фильтра требуется согласование сопротивления нагрузки с фильтром во всем диапазоне частот.

## 11.10 Полосовые фильтры

Простейшие Т- и П-схемы полосовых фильтров приведены на рисунке 172 и рисунке 173:

Параметры элементов фильтра должны удовлетворять условиям: при заданной частоте  $\omega_0$  продольное сопротивление  $\underline{Z} = j\omega_0 L - j\frac{1}{\omega_0 C} = 0$

(резонанс напряжений) и поперечная проводимость  $\underline{Y} = j\omega_0 C - j\frac{1}{\omega_0 L} = 0$

(резонанс токов), откуда следует:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad \text{или} \quad L_1 C_1 = L_2 C_2, \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{n^2}.$$

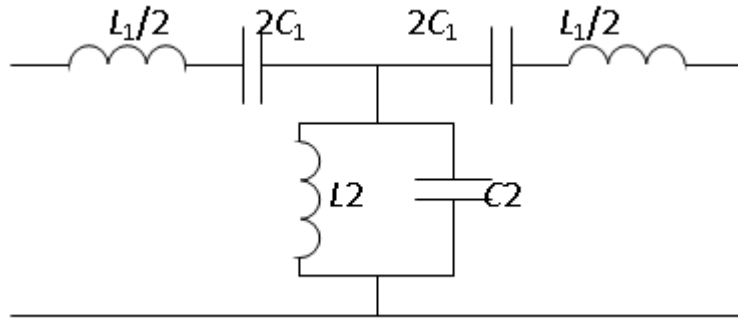


Рисунок 172

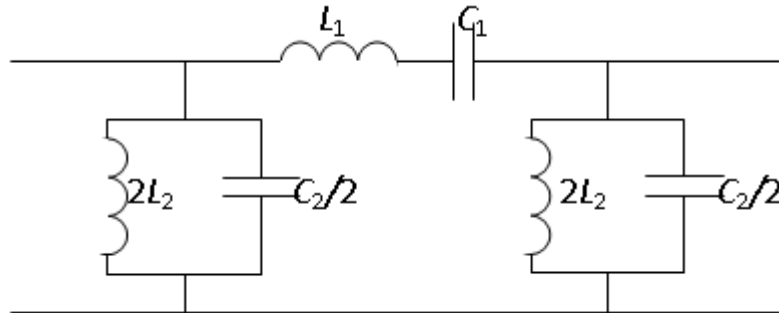


Рисунок 173

Обобщенные параметры элементов для обеих схем:

$$\underline{Z} = j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = j\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \left( \omega\sqrt{L_1 C_1} - \frac{1}{\omega\sqrt{L_1 C_1}} \right) = j\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right),$$

$$\underline{Y} = j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = j\sqrt{\frac{C_2}{L_2}} \cdot \left( \omega\sqrt{L_2 C_2} - \frac{1}{\omega\sqrt{L_2 C_2}} \right) = j\sqrt{\frac{C_2}{L_2}} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Уравнение, определяющее границы полосы пропускания фильтра:

$$-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1} \cdot \frac{C_2}{L_2}} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

При  $-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = 0$  решением этого уравнения является принятая ранее частота  $\omega_0$ .

При  $-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = 4$  с учетом, что  $\sqrt{\frac{L_1}{C_1} \cdot \frac{C_2}{L_2}} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{n^2}$ , получим решение в виде:

$$\frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 4 \text{ или } \omega^2 \pm 2n\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0.$$

Отбрасывая отрицательные корни уравнения, как не имеющие физического смысла, получим значения граничных частот:

$$\omega_1 = \omega_0(\sqrt{n^2 + 1} - n) \text{ и } \omega_2 = \omega_0(\sqrt{n^2 + 1} + n).$$

Таким образом, фильтр пропускает сигналы в диапазоне частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ . Резонансная частота  $\omega_0$  является промежуточной и равна среднегеометрическому значению из граничных частот:  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ .

Характеристика затухания  $\alpha = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  и фазовая характеристика  $\beta = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  показаны на рисунке 174 а, б.

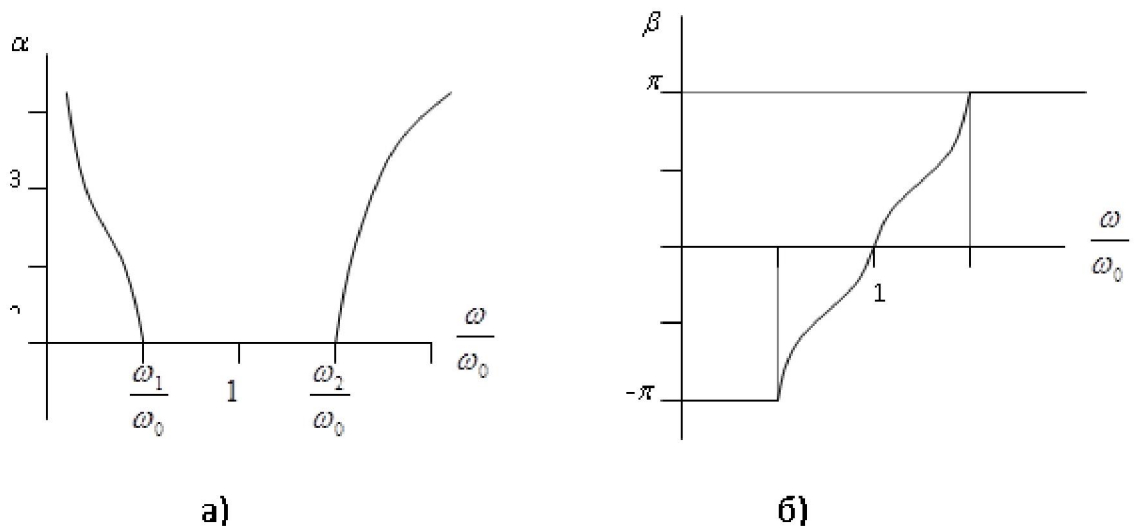


Рисунок 174

### 11.11. Заграждающие фильтры

Простейшие Т- и П-схемы заграждающих фильтров приведены на рисунок 175 и рисунок 176.

Условие резонанса на заданной частоте  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \text{ откуда следует: } L_1 C_1 = L_2 C_2 \text{ или } \frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{n^2}.$$

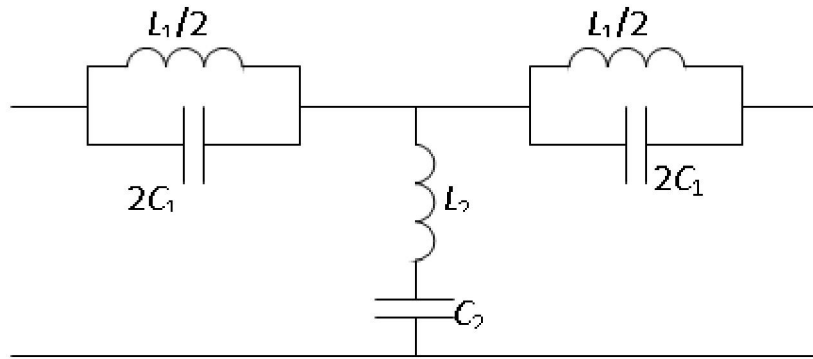


Рисунок 175

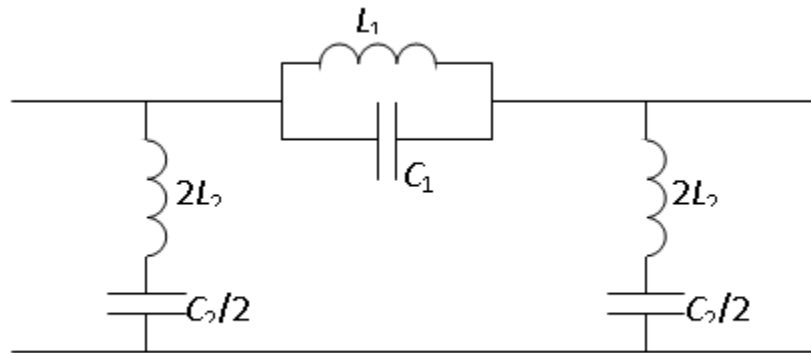


Рисунок 176

Обобщенные параметры элементов для обеих схем:

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C_1 - j\frac{1}{\omega L_1}} = \frac{1}{j\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \left( \omega\sqrt{L_1 C_1} - \frac{1}{\omega\sqrt{L_1 C_1}} \right)} = \frac{1}{j\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)},$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2}} = \frac{1}{j\sqrt{\frac{L_2}{C_2}} \cdot \left( \omega\sqrt{L_2 C_2} - \frac{1}{\omega\sqrt{L_2 C_2}} \right)} = \frac{1}{j\sqrt{\frac{L_2}{C_2}} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}.$$

Уравнение, определяющее границы полосы пропускания фильтра:

$$-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = \frac{1}{\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \frac{L_2}{C_2} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

При  $-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = 0$  решением этого уравнения является  $\omega' = 0$  и  $\omega'' = \infty$ .

При  $-\underline{Z} \cdot \underline{Y} = 4$  с учетом, что  $\sqrt{\frac{L_1}{C_1} \cdot \frac{C_2}{L_2}} = \frac{L_1}{L_2} = n^2$ , получим решение в виде:

$$\frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 4 \text{ или } \omega^2 \pm 2n\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0.$$

Отбрасывая отрицательные корни уравнения, как не имеющие физического смысла, получим значения граничных частот:

$$\omega_1 = \omega_0(\sqrt{n^2 + 1} - n) \text{ и } \omega_2 = \omega_0(\sqrt{n^2 + 1} + n).$$

Таким образом, фильтр пропускает сигналы в диапазонах частот от  $\omega' = 0$  до  $\omega_1$  и от  $\omega_2$  до  $\omega'' = \infty$ , а в диапазоне частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  сигналы задерживаются. Резонансная частота  $\omega_0$  является промежуточной и равна среднегеометрическому значению из граничных частот:  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ .

Характеристика затухания  $\alpha = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  и фазовая характеристика

$\beta = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  фильтра показаны на рисунке 177а, б.

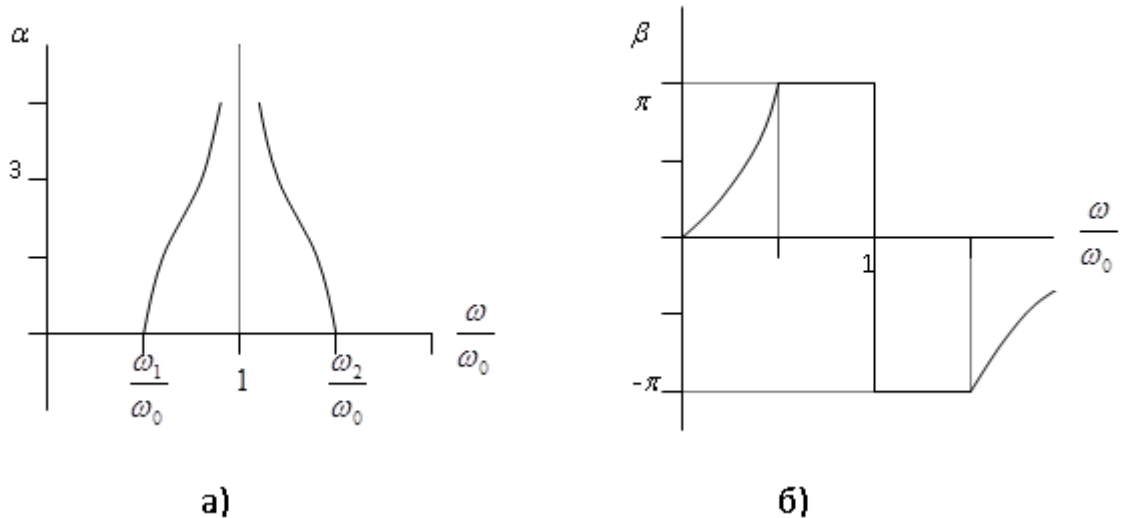


Рисунок 177

## 12 Электрические цепи с распределенными параметрами

### 12.1 Общие определения

Параметры электрических цепей в той или иной мере всегда распределены вдоль длины отдельных участков. В большинстве практических случаев распределением параметров вдоль длины пренебрегают и представляют электрическую цепь эквивалентной схемой с сосредоточенными схемными элементами  $R$ ,  $L$  и  $C$ .

Однако существует большой класс электрических цепей, для которых пренебрежение распределением параметров вдоль длины приводит к существенным погрешностям при их расчёте и становится неприемлемым.

Из курса физики известно, что электромагнитное поле распространяется вдоль электрической цепи не мгновенно, а с конечной скоростью  $v$ , проходя всю длину цепи  $l$  за время  $\Delta t = \frac{l}{v}$ . Если за время  $\Delta t$  режимные параметры в цепи ( $u, i$ ) изменяются незначительно и этим изменением можно пренебречь, то для такой цепи пренебрегают распределением параметров вдоль длины и замещают ее схемой с сосредоточенными элементами. Если за время  $\Delta t$  режимные параметры в цепи ( $u, i$ ) изменяются на заметную величину, которую необходимо учитывать в расчете, то такие цепи считаются с распределенными параметрами и расчет их проводится уже с учетом распределения параметров вдоль их длины.

**Пример 1.** Воздушная линия электропередачи длиной  $l = 50$  км работает на частоте  $f = 50$  Гц, скорость волны  $v = 300000$  км/с,  $T = \frac{1}{f}$ ,

$\lambda = \frac{v}{f} = 6000$  км,  $\Delta t = \frac{l}{v} = 2 \cdot 10^{-4}$  с,  $\Delta \omega t = \frac{360}{T} \cdot \Delta t = 3,6^\circ$ . Таким образом, фазовый сдвиг для волн напряжения и тока в начале и в конце линии составляет всего  $3,6^\circ$ , чем можно пренебречь и считать такую линию как цепь сосредоточенными параметрами.

**Пример 2.** Линия электропередачи длиной  $l = 500$  км:  $f = 50$  Гц,  $v = 300000$  км/с,  $\Delta t = \frac{l}{v} = 2 \cdot 10^{-3}$  с,  $\Delta \omega t = \frac{360}{T} \cdot \Delta t = 36^\circ$ .

Фазовый сдвиг для волн напряжения и тока в начале и конце линии составляет  $36^\circ$ , расчет режима в такой линии без учета распределения параметров по длине привел бы к существенным ошибкам, поэтому такую линию следует считать как цепь с распределенными параметрами.

**Пример 3.** Соединительный кабель от комнатной антенны до входного гнезда телевизора имеет длину  $l = 2$  м, телевизионный канал работает на частоте  $f = 150$  МГц,  $v = 200000$  км/с,  $T = \frac{1}{f} = 6,67 \cdot 10^{-9}$  с,  $\lambda = \frac{v}{f} = 1,3$  м,

$\Delta t = \frac{l}{v} = 10 \cdot 10^{-9}$  с,  $\Delta \omega t = \frac{360}{T} \cdot \Delta t = 540^\circ$ .

Вывод: соединительный кабель следует рассматривать как цепь с распределенными параметрами.

При синусоидальном режиме цепи критерием необходимости учета распределения параметров по длине может служить соотношение между длиной линии  $l$  и длиной волны  $\lambda$ . Если  $l \ll \lambda$ , то цепь рассматривается как с

сосредоточенными параметрами (в примере 1:  $\frac{l}{\lambda} = \frac{50}{6000} = 0,0083$ ), если  $l$  и  $\lambda$  соизмеримы, то цепь рассматривается как с распределенными параметрами (в примере 2:  $\frac{l}{\lambda} = \frac{500}{6000} = 0,083$ , в примере 3:  $\frac{l}{\lambda} = \frac{2}{1,3} = 1,6$ ).

К цепи с распределенными параметрами относятся все линии связи, линии электропередачи длиной  $l > 100$  км.

Одни и те же электрические цепи в зависимости от формы воздействующего напряжения в одних случаях принимаются с распределенными параметрами, а в других – с сосредоточенными параметрами. Например, обмотки силовых трансформаторов при расчете установившихся режимов в них на частоте  $f=50$  Гц считаются цепями с сосредоточенными параметрами, но при расчете переходных процессов, возникающих в результате коммутации или атмосферных разрядов те же обмотки считаются цепями с распределенными параметрами.

Если параметры цепи распределены равномерно по ее длине, то цепь называется, однородной, если неравномерно — то неоднородной. В курсе ТОО рассматриваются только однородные цепи.

## 12.2 Дифференциальные уравнения цепи с распределенными параметрами

Рассмотрим двухпроводную однородную линию, физические параметры которой равномерно распределены по ее длине:

$R_0$  — активное сопротивление пары проводов на единицу длины [Ом/м], определяется по известной формуле  $R = \rho \frac{l}{s} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{s}$ , зависит от материала провода ( $\gamma$ ) и от ее температуры  $R = R_0(1 + \alpha t)$ ;

$L_0$  — индуктивность пары проводов на единицу длины линии [Гн/м], определяется как отношение потокосцепления к току ( $L_0 = \frac{\Psi_0}{i}$ ), является отображением магнитного поля линии в ее схеме замещения, зависит от магнитных характеристик среды ( $\mu$ ) и геометрических размеров линии;

$G_0$  — активная проводимость между проводами на единицу длины линии [См/м], является следствием несовершенства изоляции между проводами, зависит от электрических параметров среды ( $\gamma$ ) и геометрических размеров линии;

$C_0$  — емкость между проводами на единицу длины линии [Ф/м], определяется как отношение заряда к напряжению ( $C_0 = \frac{q_0}{U}$ ), является

отображением электрического поля линии в ее схеме замещения, зависит от электрических характеристик среды ( $\varepsilon$ ) и геометрических размеров линии.

Удельные параметры линии  $R_0, L_0, G_0, C_0$  зависят от физических параметров самих проводов и окружающей их среды, поэтому они получили название физических или первичных.

Разделим всю линию на элементарные участки длиной  $dx$  и рассмотрим один из таких участков, находящийся на расстоянии  $x$  от начала линии. Схема замещения участка будет иметь вид (рисунок 178). Здесь  $u$  и  $i$  — напряжение и ток в начале рассматриваемого участка. В конце участка

напряжение и ток получают приращения:  $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} dx$  и  $\Delta i = \frac{\partial i}{\partial x} dx$ .

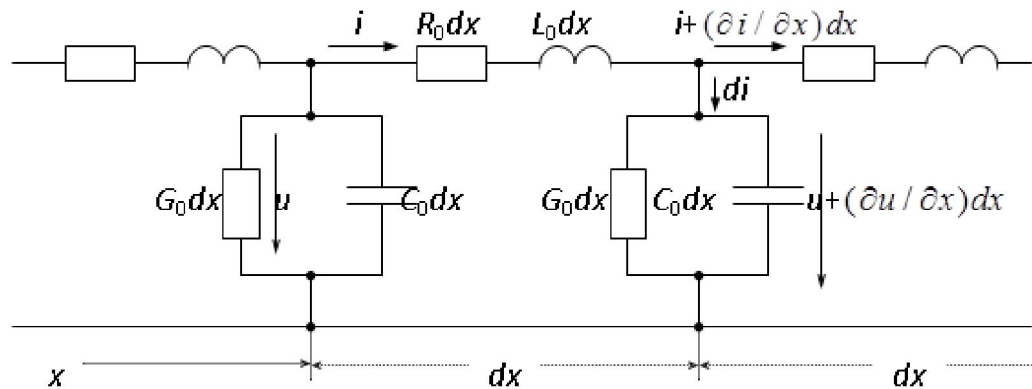


Рисунок 178

Функции напряжения и тока ( $u, i$ ) зависят от двух параметров  $t$  и  $x$ , они изменяются в пространстве и во времени, поэтому дифференциальные уравнения для схемы замещения следует составлять в частных производных.

Уравнение по 2-му закону Кирхгофа для контура:

$$-u + R_0 dx \cdot i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

После упрощения получим:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1).$$

По закону Ома и 1-му закону Кирхгофа:

$$di = (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial}{\partial t} (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) = u G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

В приведенном выражении пренебрегаем слагаемыми второго порядка малости, содержащими  $d^2 x$ .

По 1-му закону Кирхгофа для узла:

$$i = i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx + di = i + \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx + u G_0 dx + C_0 \cdot dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

После упрощения получим:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2).$$

Уравнения (1) и (2) являются основными дифференциальными уравнениями двухпроводной линии с распределенными параметрами, которые используются для расчета как переходного, так и установившегося режима линии.

### 12. 3 Решение уравнений линии с распределенными параметрами в установившемся синусоидальном режиме

Пусть напряжение и ток в линии с распределенными параметрами изменяются по синусоидальному закону:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j\psi_u},$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j\psi_i}.$$

Заменим в дифференциальных уравнениях линии синусоидальные функции  $u(t)$  и  $i(t)$  и их производные  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $\frac{\partial i}{\partial t}$  соответствующими комплексными изображениями  $u(t) \Rightarrow \underline{U}$ ,  $i(t) \Rightarrow \underline{I}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow j\omega \underline{U}$ ,  $\frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow j\omega \underline{I}$ :

$$-\frac{d\underline{U}}{dx} = R_0 \underline{I} + j\omega L_0 \underline{I} = (R_0 + j\omega L_0) \underline{I} = \underline{Z}_0 \underline{I} \quad (1)$$

$$-\frac{d\underline{I}}{dx} = G_0 \underline{U} + j\omega C_0 \underline{U} = (G_0 + j\omega C_0) \underline{U} = \underline{Y}_0 \underline{U} \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) приняты обозначения:  $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$  – комплексное сопротивление линии на единицу длины [Ом /м],  $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$  – комплексная проводимость линии на единицу длины [См /м].

Дифференцируем уравнение (2) по переменной  $x$  и делаем в него подстановку из (1):

$$-\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \frac{d\underline{I}}{dx} = \underline{Z}_0 (-\underline{Y}_0 \underline{U}) = -\underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \cdot \underline{U} \quad \text{или}$$

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \cdot \underline{U} = 0 \quad (3)$$

Решаем дифференциальное уравнение 2-го порядка (3) классическим методом. Характеристическое уравнение и его корни:

$$k^2 - \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 = 0, \text{ откуда } k_1 = -\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = -\underline{\gamma}, \quad k_2 = +\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = +\underline{\gamma}.$$

Решение для искомой функции в общем виде:

$$\underline{U}(x) = A_1 e^{-\underline{\gamma}x} + A_2 e^{+\underline{\gamma}x},$$

где  $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$  – безразмерная комплексная величина, названная коэффициентом (постоянной) распространения,  $\underline{A}_1, \underline{A}_2$  – комплексные постоянные интегрирования, которые определяются через граничные условия, т. е. через значения искомых функций  $\underline{U}(x), \underline{I}(x)$  в заданной точке линии, например в ее начале ( $x=0$ ) или в ее конце ( $x=l$ ).

Из уравнения (1) находим:

$$\begin{aligned}\underline{I}(x) &= -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\underline{U}}{dx} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} (-\gamma \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \gamma \underline{A}_2 e^{\gamma x}) = \\ &= \frac{\underline{Z}_0}{\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{\underline{Z}_c} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x})\end{aligned}$$

где  $\underline{Z}_c = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \underline{Z}_c e^{j\varphi_c}$  — волновое или характеристическое сопротивление линии.

Таким образом, решения для искомых функций  $\underline{U}(x)$  и  $\underline{I}(x)$  имеют вид:

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}, \quad (4)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_c} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}). \quad (5)$$

Волновое сопротивление  $\underline{Z}_c$  и постоянная распространения  $\underline{\gamma}$  получили название вторичных параметров линии.

Выразим постоянные интегрирования  $\underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$  через граничные условия начала линии. При  $x=0$   $\underline{U}(x) = \underline{U}_1$ ,  $\underline{I}(x) = \underline{I}_1$ , подставим эти значения в уравнения (4) и (5):

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ \underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_c} (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) \end{cases}$$

Совместное решение этих уравнений позволяет определить постоянные интегрирования:  $\underline{A}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_c)$ ,  $\underline{A}_2 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_c)$ .

Подставим полученные значения постоянных интегрирования в решения для искомых функций (4) и (5):

$$\begin{aligned}\underline{U}(x) &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_c) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_c) e^{\gamma x} = \\ &= \underline{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \underline{I}_1 \underline{Z}_c \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \underline{U}_1 ch \gamma x - \underline{I}_1 \underline{Z}_c sh \gamma x \\ \underline{I}(x) &= \frac{1}{\underline{Z}_c} \left\{ \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_c) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_c) e^{\gamma x} \right\} =\end{aligned}$$

$$= -\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} \cdot \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_1 \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \underline{I}_1 ch \gamma x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} sh \gamma x$$

Полученные уравнения используются при расчетах цепей с распределенными параметрами в установившемся синусоидальном режиме.

Если принять  $x=l$ , то получим значения параметров режима в конце линии:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{U}_1 ch \gamma l - \underline{I}_1 \underline{Z}_C sh \gamma l \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_1 ch \gamma l - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} sh \gamma l \end{cases}$$

Выразим постоянные интегрирования через граничные условия конца линии. Для этой цели в полученных ранее решениях (4) и (5) заменим переменные  $x$  на  $l-y$  из условия  $x=l-y$ , где  $l$  — длина всей линии, а  $y$  — расстояние от конца линии до рассматриваемой точки:

$$\underline{U}(y) = \underline{A}_1 e^{\gamma(l-y)} + \underline{A}_2 e^{\gamma(\ell-y)} = \underline{A}_1 e^{\gamma l} \cdot e^{-\gamma y} + \underline{A}_2 e^{\gamma l} \cdot e^{-\gamma y} = \underline{A}_1 e^{\gamma l} e^{-\gamma y} - \underline{A}_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma y} = \underline{A}_3 e^{\gamma y} - \underline{A}_4 e^{-\gamma y}$$

,

$$\underline{I}(y) = \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_1 e^{-\gamma(l-y)} - \underline{A}_2 e^{\gamma(\ell-y)}) = \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma y} - \underline{A}_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma y}) = \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_3 e^{\gamma y} - \underline{A}_4 e^{-\gamma y})$$

.

Здесь  $\underline{A}_3 = \underline{A}_1 e^{-\gamma l}$ ,  $\underline{A}_4 = \underline{A}_2 e^{\gamma l}$  — есть некоторые новые постоянные интегрирования.

При  $y=0$   $\underline{U}(y) = \underline{U}_2$ ,  $\underline{I}(y) = \underline{I}_2$  подставим эти значения в найденные уравнения, получим:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{A}_3 + \underline{A}_4 \\ \underline{I}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_C} (\underline{A}_3 - \underline{A}_4) \end{cases}$$

Совместное решение этих уравнений позволяет определить постоянные интегрирования:

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C), \quad \underline{A}_4 = \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C)$$

Подставляем значение постоянных в решение для искомых функций:

$$\begin{aligned} \underline{U}(y) &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{\gamma y} + \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{-\gamma y} = \\ &= \underline{U}_2 \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2} + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2} = \underline{U}_2 ch \gamma y + \underline{I}_2 \underline{Z}_C sh \gamma y \\ \underline{I}(y) &= \frac{1}{\underline{Z}_C} \left( \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{\gamma y} - \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_C) e^{-\gamma y} \right) = \\ &= \underline{I}_2 \frac{e^{\gamma y} + e^{-\gamma y}}{2} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \cdot \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2} = \underline{I}_2 ch \gamma y + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} sh \gamma y \end{aligned}$$

Полученные уравнения используются при расчете цепей с распределенными параметрами в установившемся синусоидальном режиме.

Если принять  $y=l$ , то получим значение параметров режима в начале линии:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \underline{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \gamma l \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \gamma l \end{cases}$$

## 12.4 Волновые процессы в линии с распределенными параметрами.

Ранее были получены решения для напряжения и тока в установившемся режиме:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}, \\ \underline{I}(x) &= \frac{1}{\underline{Z}_c} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}). \end{aligned}$$

Учитывая, что постоянные интегрирования и коэффициент распространения являются комплексными числами ( $\underline{A}_1 = a_1 e^{j\psi_1}$ ,  $\underline{A}_2 = a_2 e^{j\psi_2}$ ,  $\gamma = \alpha + j\beta$ ) преобразуем уравнение для  $\underline{U}(x)$ :

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= a_1 e^{j\psi_1} e^{-(\alpha + j\beta)x} + a_2 e^{j\psi_2} e^{(\alpha + j\beta)x} = \\ &= a_1 e^{-\alpha x} e^{j(-\beta x + \psi_1)} + a_2 e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \psi_2)}. \end{aligned}$$

Перейдем от комплексного изображения функции к ее оригиналу, т.е. к ее функции времени:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{2} a_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} a_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) = \\ &= U_{1m}(x) \cdot \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + U_{2m}(x) \cdot \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) = u_n(x, t) + u_o(x, t). \end{aligned}$$

Функция  $u(x, t)$  состоит из двух слагаемых, первое из которых представляет собой прямую или падающую волну  $u_n(x, t)$ , а второе – обратную или отраженную волну  $u_o(x, t)$ . Проанализируем, как изменяется каждая из волн в пространстве и во времени.

Падающая волна напряжения равна:  
 $u_n(x, t) = \sqrt{2} a_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1).$

В произвольной точке линии  $x = x' = \text{const}$  напряжение изменяется по синусоидальному закону с постоянной амплитудой:

$$u_n(x', t) = \sqrt{2} a_1 e^{-\alpha x'} \cdot \sin(\omega t - \beta x' + \psi_1) = U'_m \sin(\omega t + \psi'),$$

где  $U'_m = \sqrt{2} a_1 e^{-\alpha x'} = \text{const}$ ,  $\psi' = \psi_1 - \beta x'.$

В произвольно выбранный момент времени  $t = t' = \text{const}$  напряжение вдоль линии изменяется по синусоидальному закону, но с затуханием амплитуды с увеличением расстояния  $x$ :

$$u_n(x, t') = \sqrt{2} a_1 e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t' - \beta x + \psi) = U_m(x) \cdot \sin(-\beta x + \psi''),$$

где  $U_m(x) = \sqrt{2} a_1 e^{-\alpha x}$ ,  $\psi'' = \psi + \omega'$ .

Коэффициент  $\beta$  показывает, как изменяется фаза падающей волны напряжения на единицу длины линии [рад/м] и называется коэффициентом фазы.

Длиной волны  $\lambda$  называется расстояние  $\Delta x$  между двумя ближайшими точками линии, которые находятся в одинаковом фазовом состоянии, т.е. через интервал  $2\pi$ :

$$\beta \Delta x = \beta \lambda = 2\pi, \text{ откуда следует } \lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$

С течением времени синусоидальное распределение напряжения перемещается вдоль линии. Под скоростью распространения волны или фазовой скоростью понимают скорость перемещения вдоль линии определенного фазового состояния, для чего должно удовлетворяться условие:  $\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const}$ .

Продифференцируем члены этого уравнения, в результате получим:  $\omega dt - \beta dx = 0$ , откуда следует:

$$v_n = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{2\pi / \lambda} = f\lambda$$

Неравенство  $v_n > 0$  означает, что падающая волна перемещается в положительном направлении, т.е. от начала линии к ее концу.

Амплитуда падающей волны зависит от координаты  $x$ :  $U_m(x) = \sqrt{2} a_1 e^{-\alpha x}$ , она

убывает (затухает) по показательному закону  $e^{-\alpha x}$  в направлении возрастания  $x$ , т.е. в направлении движения волны. Скорость затухания определяется коэффициентом  $\alpha$ , который получил название коэффициента затухания волны [Неп/м].

Коэффициент  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$  показывает в комплексе характер изменения волны при движении ее вдоль линии, поэтому получил название коэффициента распространения волны.

Характер распространения падающей волны напряжения  $u_n(x, t)$  показан на рисунке 179.

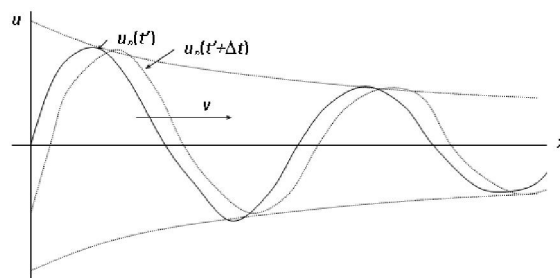


Рисунок 179

Отраженная волна напряжения равна:

$$u_o(x, t) = \sqrt{2} a_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2),$$

Фазовая скорость отраженной волны найдется из уравнения:

$$\omega t + \beta x + \psi_2 = \text{const.}$$

После дифференцирования получим:  $\omega dt + \beta dx + 0 = 0$ , откуда следует

$$v_0 = \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta} = -v_n$$

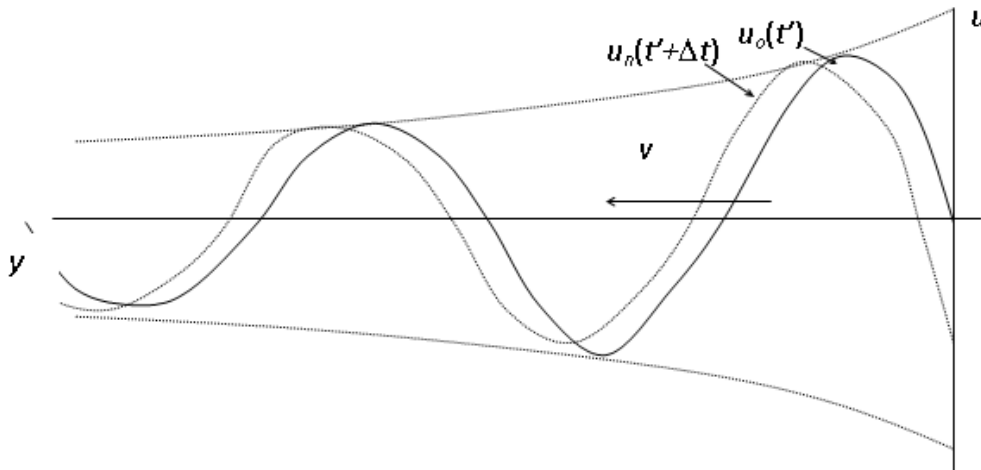


Рисунок 180

Отраженная волна распространяется с той же фазовой скоростью, что и падающая, но в обратном направлении (знак минус), т.е. от конца линии к ее началу. Она имеет ту же длину волны  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ . Амплитуда отраженной

волны  $U_{mo}(x) = \sqrt{2} a_2 e^{\alpha x}$ , при  $\alpha > 0$  убывает (затухает) в направлении уменьшения координаты  $x$ , т.е. в направлении движения волны.

Характер распространения отраженной волны показан на рисунке 180.

Действительное значение напряжения в любой точке линии  $x'$  в любой момент времени  $t'$  будет равно сумме значений напряжений падающей и отраженной волн:

$$u(x', t') = u_n(x', t') + u_o(x', t').$$

Очевидно, что функцию тока в линии  $i(x, t)$  также можно рассматривать как результат наложение падающей  $i_n(x, t)$  и отраженной  $i_o(x, t)$  волн, но лишь разницей, что отраженная волна накладывается с обратным знаком:

$$i(x, t) = i_n(x, t) - i_o(x, t).$$

## 12.5 Линия с распределенными параметрами в различных режимах

Расчет токов и напряжений в линии с распределенными параметрами при произвольной нагрузке  $\underline{Z}_2 = Z_2 \cdot e^{j\varphi_2}$  на основе совместного решения полученных ранее комплексных уравнений. Уравнения режима линии дополняются уравнениями закона Ома для начала и конца линии:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \gamma l \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \gamma l \end{cases}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1$$

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \gamma l - \underline{I}_1 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \gamma l \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \operatorname{ch} \gamma l - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \gamma l \end{cases}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2$$

где  $\underline{Z}_1$  – входное сопротивление линии при заданной нагрузке:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \gamma l}{\underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \gamma l} = \underline{Z}_C \cdot \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_C \cdot \operatorname{th} \gamma l}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_2 \cdot \operatorname{th} \gamma l}$$

Выбор алгоритма расчета определяется конкретными условиями задачи. Рассмотрим характерные режимы линии, представляющие теоретический интерес.

1. Режим холостого хода ( $Z_2 = \infty$ ).

В режиме холостого хода  $\underline{U}_2 = \underline{U}_{2x}$ ;  $\underline{I}_2 = \underline{I}_{2x} = \frac{\underline{U}_{2x}}{\infty} = 0$ , следовательно уравнения линии получают укороченный вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_{1x} = \underline{U}_{2x} \cdot \operatorname{ch} \gamma l \\ \underline{I}_{1x} = \frac{\underline{U}_{2x}}{\underline{Z}_C} \cdot \operatorname{sh} \gamma l \end{cases}$$

Входное сопротивление линии в режиме холостого хода:

$$\underline{Z}_{1x} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{I}_{1x}} = \frac{\underline{U}_{2x} \cdot \operatorname{ch} \gamma l}{\frac{\underline{U}_{2x}}{\underline{Z}_C} \cdot \operatorname{sh} \gamma l} = \underline{Z}_C \cdot \frac{1}{\operatorname{th} \gamma l}.$$

2. Режим короткого замыкания ( $Z_2 = 0$ ).

В режиме короткого замыкания  $\underline{I}_2 = \underline{I}_{2k}$ ,  $\underline{U}_2 = \underline{U}_{2k} = \underline{I}_2 \cdot 0 = 0$ , следовательно уравнения линии получают указанный вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_{1k} = \underline{I}_{2k} \underline{Z}_C \cdot sh \gamma l \\ \underline{I}_{1k} = \underline{I}_{2k} \cdot ch \gamma l \end{cases}$$

Входное сопротивление линии в режиме короткого замыкания:

$$\underline{Z}_{1k} = \frac{\underline{U}_{1k}}{\underline{I}_{1k}} = \frac{\underline{I}_{2k} \underline{Z}_C \cdot sh \gamma l}{\underline{I}_{2k} \cdot ch \gamma l} = \underline{Z}_C \cdot th \gamma l.$$

Совместно выполненные опыты холостого хода и короткого замыкания позволяют экспериментально определить сначала вторичные параметры линии ( $\underline{Z}_c$  и  $\gamma$ ), а затем и первичные ( $R_0, L_0, G_0, C_0$ ).

Входные сопротивления линии  $\underline{Z}_{1x}$  и  $\underline{Z}_{1k}$  экспериментально измеряются по схеме трех приборов (амперметра, вольтметра и фазометра), как  $\underline{Z}_{ex} = \frac{U}{I} \cdot e^{j\varphi}$ .

Вторичные параметры линии ( $\underline{Z}_c$  и  $\gamma$ ) находятся из совместного решения уравнений для  $\underline{Z}_{1x}$  и  $\underline{Z}_{1k}$ :

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_{1x} \cdot \underline{Z}_{1k}} ; \quad th \gamma l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{1x}}}.$$

Первичные параметры линии ( $R_0, L_0, G_0, C_0$ ) определяются из совместного решения уравнений для  $\underline{Z}_c$  и  $\gamma$ :

$$\begin{cases} \gamma = \sqrt{(R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0)} \\ \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} \end{cases},$$

Решая совместно эти уравнения, получим:

$$R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0 = \underline{Z}_c \cdot \gamma, \quad G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0 = \frac{\gamma}{\underline{Z}_c}.$$

## 12.6 Режим согласованной нагрузки ( $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c$ ).

В режиме согласованной нагрузки входное сопротивление линии равно:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_c \cdot \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c \cdot th \gamma \cdot \ell}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_2 \cdot th \gamma \cdot \ell} = \underline{Z}_c = \underline{Z}_2.$$

Исследуем волновые процессы в линии:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_n(x) + \underline{U}_o(x) = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x} = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_c) \cdot e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{I}_1 \underline{Z}_c) \cdot e^{\gamma x} = \\ &= \underline{U}_1 \cdot e^{-\gamma x} + 0 = \underline{U}_n(x). \end{aligned}$$

В режиме согласованной нагрузки в линии отсутствуют отраженные волны напряжения и тока. Вся энергия, доставляемая падающей волной в конец линии полностью потребляется нагрузкой, при этом передаваемая приемнику активная мощность имеет максимальное значение:

$$P_{2\max} = U_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_c = U_1 \cdot e^{-\alpha \cdot \ell} \cdot I_1 \cdot e^{-\alpha \cdot \ell} \cdot \cos \varphi_c = U_1 \cdot I_1 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot \ell} \cdot \cos \varphi_c.$$

Мощность источника энергии:  $P_1 = U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_c.$

Коэффициент полезного действия:  $\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_1 \cdot I_1 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot \ell} \cdot \cos \varphi_c}{U_1 \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_c} = e^{-2 \cdot \alpha \cdot \ell}.$

Если сопротивление нагрузки несогласованно с волновым сопротивлением линии ( $Z_2 \neq Z_c$ ), то часть энергии, доставляемой падающей волной, отражается и возвращается генератору в виде отраженных волн напряжения и тока.

В линиях связи отраженные волны ухудшают качество основного сигнала (снижается разборчивость речи, четкость изображения и др.). Все линии связи работают в режиме, близком к согласованному. При различии сопротивлений нагрузки и линии ( $Z_2 \neq Z_c$ ) принимаются специальные технические меры для их согласования.

В линиях электропередачи согласование режима не требуется, так как в них основным критерием является передача энергии с наименьшими потерями.

## 12.7 Линия с распределенными параметрами без искажений

Сигналы, передаваемые по линиям связи, являются несинусоидальными функциями времени и состоят из суммы гармоник различных частот. Если в линии созданы неодинаковые условия для различных гармоник, то в конце линии гармонический состав сигнала будет отличаться от гармонического состава этого же сигнала в начале линии, т.е. сигнал будет искажен. Для линий связи очень важным условием является создание такого режима работы, при котором отсутствовало бы искажение сигнала.

Различают два вида искажений сигнала амплитудные и фазовые. Амплитудные искажения имеют место в том случае, когда коэффициент затухания  $\alpha$  зависит от частоты, при этом амплитуды отдельных гармоник затухают с неодинаковой скоростью, что приводит к искажению формы сигнала. Фазовые искажения возникают в том случае, когда фазовая скорость  $v$  зависит от частоты, при этом происходит сдвиг отдельных гармоник по фазе, что приводит к искажению формы сигнала. Итак, искажение сигнала будет отсутствовать при постоянстве двух параметров:  $\alpha = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$ .

Вторичные параметры линии  $Z_c$  и  $\gamma$  зависят от частоты, что в общем случае создает в линии неодинаковые условия для прохождения волн напряжения и тока различных частот и такая линия является искажающей.

Отсутствие искажений в линии наблюдается только при определенном соотношении между ее первичными параметрами.

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} \quad \text{или} \quad \frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}$$

При соблюдении этого условия получим:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0 \left( \frac{R_0}{L_0} + j\omega \right)}{C_0 \left( \frac{G_0}{C_0} + j\omega \right)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

– волновое сопротивление линии является чисто активным и не зависит от частоты;

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{L_0 \left( \frac{R_0}{L_0} + j\omega \right) \cdot C_0 \left( \frac{G_0}{C_0} + j\omega \right)} = \sqrt{L_0 C_0} \cdot \left( \frac{R_0}{L_0} + j\omega \right) = \\ &= R_0 \cdot \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + j\omega \cdot \sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta, \end{aligned}$$

где  $\alpha = \sqrt{R_0 \cdot G_0} = \text{const}$  – коэффициент затухания не зависит от частоты,

$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$  – коэффициент фазы,  $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \cdot \sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \text{const}$  – фазовая скорость не зависит от частоты.

В реальных кабельных линиях связи соотношение между первичными параметрами  $\frac{R_0}{L_0} > \frac{G_0}{C_0}$ , так как вследствие совершенства изоляции активная проводимость  $G_0$  очень мала. Режим без искажений может быть получен искусственно путем включения в рассечку линии через определенные интервалы дополнительных катушек индуктивности  $L_d$  из условия  $\frac{R_0}{L_0 + L_d} = \frac{G_0}{C_0}$ . Однако с увеличением эквивалентной индуктивности  $L_{\Sigma} = L_0 + L_d$  снижается фазовая скорость  $v$ , в результате чего увеличивается общее время прохождения сигнала  $T$ , которое по техническим нормам не должно превышать определенную величину.

Реальные линии связи в своем большинстве являются искажающими, а искажения сигналов на приемных концах линии устраняются с помощью специальных корректирующих устройств.

## 12.8 Линия с распределенными параметрами без потерь

Для кабельных линий с распределенными параметрами, работающих на высоких частотах (линии связи), реактивные параметры значительно

превосходят активные  $\omega L_0 \gg R_0$  и  $\omega C_0 \gg G_0$ . При расчете режимов таких линий можно без особого ущерба для точности расчета пренебречь активными параметрами и принять их равными нулю ( $R_0 = 0, G_0 = 0$ ). В таком случае линия становится идеальной или без потерь.

Волновое сопротивление линии без потерь:

$$Z_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_C \cdot e^{j0} -$$

является чисто активным и не зависит от частоты.

Постоянная распространения линии без потерь:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = 0 + j\omega\sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta,$$

где  $\alpha = 0$ ;  $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$ ;  $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \text{const.}$

В линии без потерь отсутствует затухание сигнала ( $\alpha = 0$ ), а фазовая скорость  $v$  не зависит от частоты, следовательно, линия без потерь является неискажающей.

Учитывая математические соотношения, что  $\underline{\gamma} = j\beta$ , и

$$\text{sh}jx = \frac{1}{2}(e^{jx} - e^{-jx}) = \frac{1}{2}(\cos x + j\sin x - \cos x + j\sin x) = j\sin x,$$

$$\text{ch}jx = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) = \frac{1}{2}(\cos x + j\sin x + \cos x - j\sin x) = \cos x,$$

$$\text{th}jx = \frac{\text{sh}jx}{\text{ch}jx} = \frac{j\sin x}{\cos x} = j\text{tg}x,$$

преобразуем комплексные уравнения установившегося синусоидального режима линии:

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_1 \cos \beta x - j\underline{I}_1 Z_C \sin \beta x, \\ \underline{I}(x) = \underline{I}_1 \cos \beta x - j\frac{\underline{U}_1}{Z_C} \sin \beta x \end{cases} \quad \text{— при отсчете координаты } x \text{ от начала}$$

линии,

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \cos \beta y + j\underline{I}_2 Z_C \sin \beta y, \\ \underline{I}(y) = \underline{I}_2 \cos \beta y + j\frac{\underline{U}_2}{Z_C} \sin \beta y \end{cases} \quad \text{— при отсчете координаты } y \text{ от конца}$$

линии,

$$\underline{Z}_1 = Z_C \frac{\underline{Z}_2 + jZ_C \text{tg}\beta l}{Z_C + j\underline{Z}_2 \text{tg}\beta l} \text{— входное сопротивление линии.}$$

Режим линии без потерь определяется свойствами (параметрами) самой линии и величиной и характером нагрузки  $\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi}$  на ее конце. Исследуем работу линии в различных режимах нагрузки.

1. Режим согласованной нагрузки:  $\underline{Z}_2 = Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ .

Учитывая, что  $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = \underline{I}_2 Z_c$ , комплексные уравнения линии получают следующий вид:

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \cos \beta y + j \underline{U}_2 \sin \beta y = \underline{U}_2 e^{j\beta y} = \underline{U}_n(y), \\ \underline{I}(y) = \underline{I}_2 \cos \beta y + j \underline{I}_2 \sin \beta y = \underline{I}_2 e^{j\beta y} = \underline{I}_n(y) \end{cases} \quad \text{— при отсчете координаты } y$$

от конца линии,

$$\underline{Z}_1(y) = Z_c \frac{Z_c + j Z_c \operatorname{tg} \beta y}{Z_c + j Z_c \operatorname{tg} \beta y} \text{ — входное сопротивление линии.}$$

В режим согласованной нагрузки напряжение  $u(t, y)$  и ток  $i(t, y)$  состоят только из падающих волн, которые распространяются от начала линии к ее концу без затухания. Действующие значения напряжения  $U(y)$  и тока  $I(y)$  не зависят от координаты  $y$  и во всех точках линии имеют одинаковые значения.

Входное сопротивление линии  $\underline{Z}_1$  равно волновому ( $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_c$ ) и не зависит от длины линии. Графические диаграммы названных функций показаны на рисунке 181

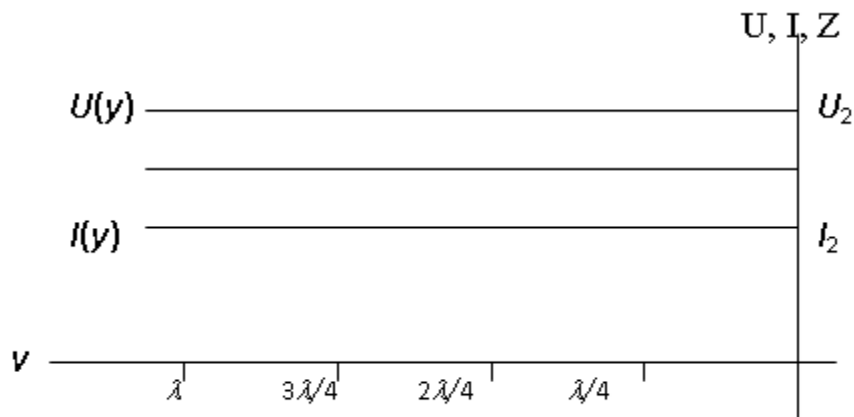


Рисунок 181

2. Режим холостого хода:  $Z_2 = \infty$ ,  $I_2 = 0$ . Комплексные уравнения режима линии получают вид:

$$\begin{cases} \underline{U}(y) = \underline{U}_2 \cos \beta y, \\ \underline{I}(y) = j \frac{\underline{U}_2}{Z_c} \sin \beta y = \underline{I}_2 \sin \beta y \cdot e^{j90^\circ} \end{cases} \quad \text{— при отсчете координаты } y \text{ от конца ли-}$$

нии,

$\underline{Z}_1(y) = Z_c \frac{\underline{Z}_2 + jZ_c \operatorname{tg} \beta y}{Z_c + j\underline{Z}_2 \operatorname{tg} \beta y} = Z_c \frac{1}{j \operatorname{tg} \beta y} = -jZ_c \frac{1}{\operatorname{tg} \beta y}$  – входное сопротивление линии.

Входное сопротивление линии  $\underline{Z}_1(y)$ , является чисто реактивным, его величина и характер зависят от длины линии.

Графические диаграммы названных функций показаны на рисунке 182.

Режим линии, при котором в некоторых ее точках наблюдаются максимальные значения напряжения (тока) или пучности, а в других ее точках – нулевые значения этих величин или узлы, получил название в технике режима стоячих волн. Узлы и пучности для одной и той же величины следуют друг за другом через отрезки равные  $\lambda/4$ , где  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f}$  – длина волны, при этом узлы одной величины совпадают с пучностями другой.

Режим стоячих волн физически можно объяснить как результат наложения падающей и наложенной волн с одинаковыми амплитудами. В точках линии, в которых мгновенные значения падающей и отраженной волн всегда совпадают, образуются пучности, а в точках, где эти значения складываются с противоположным знаком (в противофазе), образуются узлы.

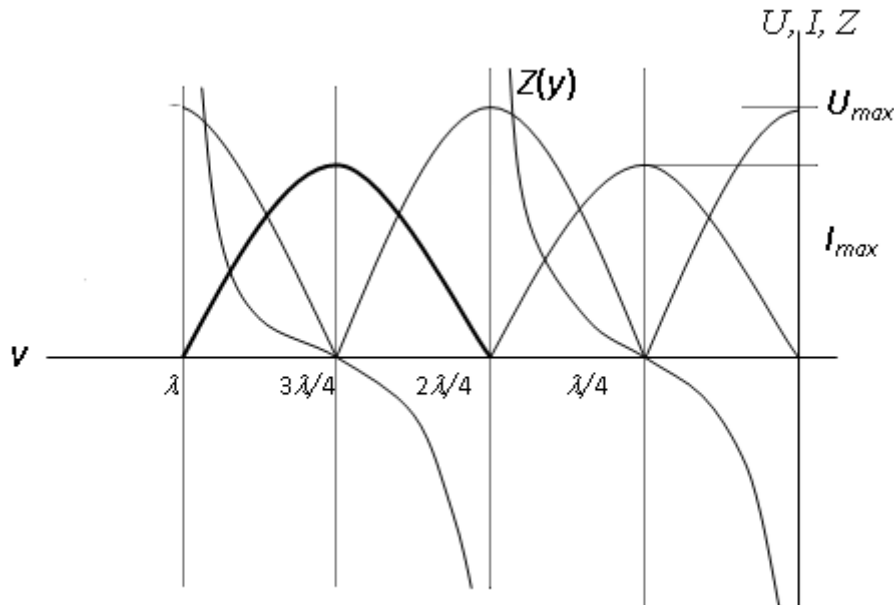


Рисунок 182

Следует отметить, что режим стоячих волн имеет место в линии без потерь при чисто реактивной нагрузке  $\underline{Z}_2 = \pm jX_2$  любой величины ( $\infty \geq X_2 \geq -\infty$ ). При реактивной нагрузке энергия, доставляемая падающей волной в конец линии, полностью отражается, при этом амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей волны. Входное сопротивление линии при реактивной нагрузке  $\underline{Z}_2 = \pm jX_2$  является чисто реактивным:

$$\underline{Z}_1(y) = Z_c \frac{\pm jX_2 + jZ_c \operatorname{tg} \beta y}{Z_c + j(\pm jX_2) \operatorname{tg} \beta y} = jZ_c \operatorname{tg}(\beta y + \varphi), \text{ где } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\pm X_2}{Z_c}.$$

3. Режим произвольной нагрузки:  $\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi}$ .

Расчет режима линии производится путем совместного решения ее комплексных уравнений и уравнений закона Ома:  $\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_2$  и  $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1$ . При произвольной несогласованной нагрузке в конце линии происходит частичное отражение волн, при этом амплитуды отраженных волн напряжения и тока будут меньше амплитуд падающих волн. Распределение действующих значений напряжения и тока вдоль линии будет носить волнообразный характер (рисунок 183), при этом максимумы и минимумы функции будут следовать друг за другом через интервал  $\lambda/4$ .

Степень несогласованности сопротивления нагрузки  $\underline{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi}$  с волновым сопротивлением линии  $Z_c$  характеризуется коэффициентом стоячей волны:

$$K_c = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{U_n + U_o}{U_n - U_o}$$

В реальных условиях для согласования нагрузки с линией применяются специальные согласующие устройства.

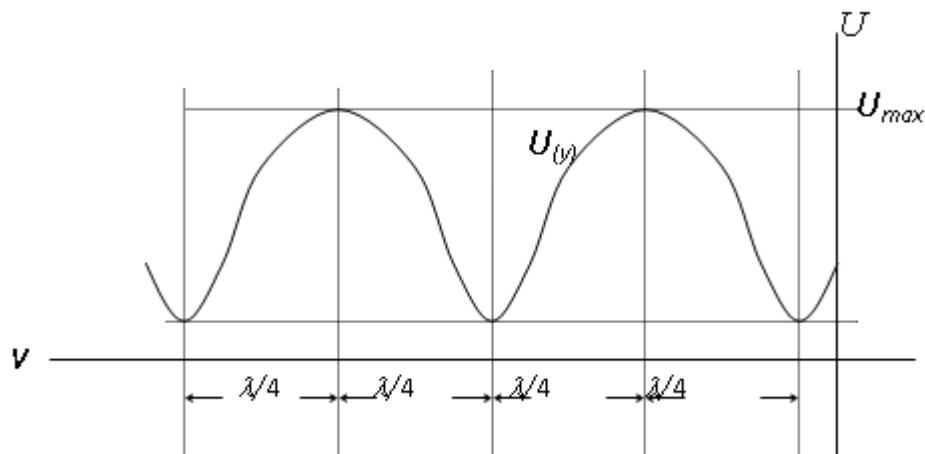


Рисунок 183

## 12.9 Переходные процессы в линии с распределенными параметрами

В цепях с сосредоточенными параметрами переходные процессы протекают одновременно во всех направлениях цепи с одинаковой скоростью затухания.

В цепях с распределенными параметрами переходной процесс, начавшийся в какой-либо точке цепи, распространяется на остальные элементы в

виде волн, которые распространяются вдоль цепи с конечной скоростью  $v$ . Эта скорость близка к скорости света  $c = 3 \cdot 10^5$  км/с в воздушных линиях и  $v < c$  для кабельных линий. По мере распространения вдоль линии волна изменяет свою форму, поэтому переходной процесс в разных точках линии выглядит по-разному. Таким образом, переходной процесс в цепи с распределенными параметрами протекает в функции двух переменных – пространства и время.

В высоковольтных линиях электропередачи переходные процессы возникают при различных коммутациях, а так же от грозových явлений в атмосфере. При переходом процессе на отдельных участках линии могут возникнуть перенапряжения, нередко приводящие к пробое изоляции, или большие токи, вызывающие механические разрушения конструкций. Умение рассчитывать эти перенапряжения и сверхтоки необходимы в инженерной практике для правильного выбора и расчета отдельных частей электроустановок.

Анализ переходных процессов в линии с распределёнными параметрами проводится на основе решения ее дифференциальных уравнений, полученных ранее:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

Решение дифференциальных уравнений в частных производных в общем случае представляет сложную математическую задачу, решение которой выходит за рамки учебного курса ТОЭ. Поэтому здесь ограничимся рассмотрением частного случая линии без потерь, т.е. при условии  $R_0 = 0$ ,  $G_0 = 0$ .

Дифференциальные уравнения линии без потерь получают вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

Выполним решение этой системы дифференциальных уравнений, для чего каждое из уравнений продифференцируем сначала по переменной  $x$ , а потом по переменной  $t$ :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial x \cdot \partial t} - \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial t} \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x \cdot \partial t} = C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial t} = L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial t} \end{cases}$$

Совместное решение каждой пары полученных уравнений дает результат:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Введем обозначение  $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$  – скорость волны, после чего уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

В курсе математики уравнения данного вида получили название волновых, и им соответствует следующие решения (без вывода):

$$u(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v} + \tau_1\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v} + \tau_2\right) = u_n(x, t) + u_o(x, t),$$

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_c} f_1\left(t - \frac{x}{v} + \tau_1\right) - \frac{1}{Z_c} f_2\left(t + \frac{x}{v} + \tau_2\right) = i_n(x, t) - i_o(x, t).$$

### 12.10 Расчет падающих волн в линии с распределенными параметрами при подключении ее к источнику ЭДС

Пусть линия с волновым сопротивлением  $Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$  в момент  $t = 0$  подключается к источнику ЭДС  $e(t) = E = const$  или  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$  с нулевыми или с ненулевыми внутренними параметрами  $R_0, L_0$ . Источник ЭДС воспринимает линию как волновое сопротивление  $Z_c$ , поэтому эквивалентная схема цепи для расчета режима в начале линии будет иметь вид (рисунок 185 а, б).

Рассмотрим различные варианты форм падающих волн  $u_n(x, t), i_n(x, t)$  в зависимости от параметров источника ЭДС.

1. Источник постоянной ЭДС  $e(t) = E$  с нулевыми внутренними параметрами  $R_0 = 0, L_0 = 0$  ( рисунок 185а ).

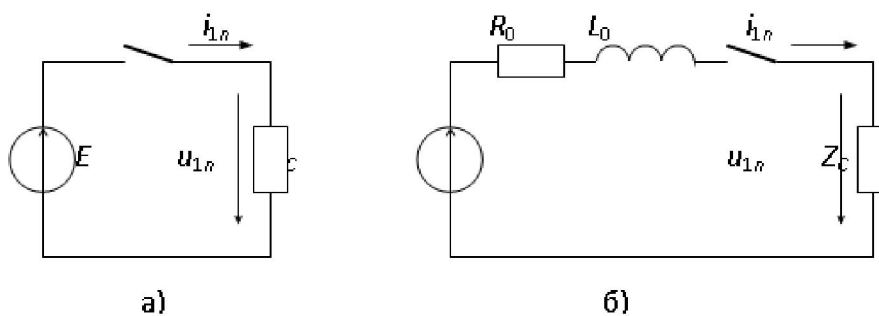


Рисунок 185

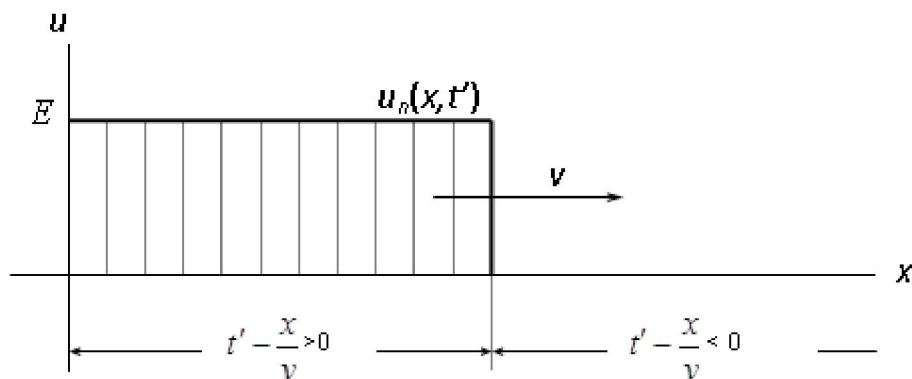


Рисунок 186

После замыкания рубильника в момент  $t=0$  возникнут падающие волны с прямоугольным фронтом:  $u_n(x, t) = E(t - \frac{x}{v})$ ,  $i_n(x, t) = \frac{1}{Z_c} E(t - \frac{x}{v})$ . Фронтом волны называется ее начальный участок. Во всех точках линии, пройденных фронтом волны, устанавливается постоянный режим ( $t - \frac{x}{v} > 0$ ),  $u(t) = E$ ,  $i(t) = \frac{E}{Z_c}$ . Для точек линии, куда фронт не дошел ( $t - \frac{x}{v} < 0$ ),  $u=0$  и  $i=0$  (рисунок 186). Так как формы падающих волн  $u_n(x, t)$  и  $i_n(x, t)$  идентичны, то на графической диаграмме (рисунок 186) изображена только падающая волна напряжения  $u(x, t')$ .

2. Источник синусоидальной ЭДС  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$  с нулевыми внутренними параметрами  $R_0 = 0$ ,  $L_0 = 0$  (рисунок 185а).

Напряжение и ток в начале линии после замыкания рубильника установятся мгновенно и будут равны:

$$u_{1n} = E_m \sin(\omega t + \alpha), \quad i_{1n} = \frac{E_m}{Z_c} \sin(\omega t + \alpha).$$

Фронт волны будет определяться начальной фазой  $\alpha$  в момент времени включения  $t = 0$ ;  $u_\phi = E_m \sin \alpha$ . С течением времени волны будут

распространяться вдоль линии. Для их математического выражения заменим в предыдущих уравнениях переменную  $t$  на  $t - \frac{x}{v}$ :

$$U_n(x, t) = E_m \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right] = E_m \sin(\omega t - \beta x + \alpha),$$

$$i_n(x, t) = \frac{E_m}{Z_C} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right] = \frac{E_m}{Z_C} \sin(\omega t - \beta x + \alpha).$$

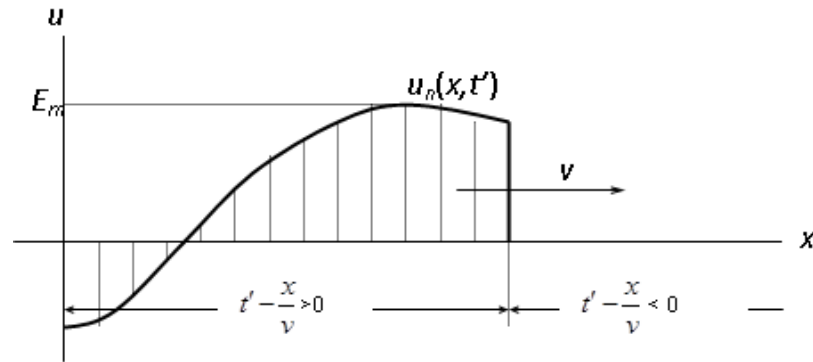


Рисунок 187

Как и в предыдущем случае, решение справедливо при условии  $t - \frac{x}{v} > 0$ . Из решения следует, что падающие волны  $u_n(x, t')$  и  $i_n(x, t')$  распределяются вдоль линии по синусоидальному закону (рисунок 187).

3. Источник постоянной ЭДС  $e(t) = E$  с параметрами  $R_0 > 0, L_0 > 0$  (рисунок 185б).

Напряжение и ток в начале линии после замыкания рубильнику определяются путем расчета переходного процесса в схеме замещения классическим или операторным методом:

$$u_{1n}(t) = \frac{E \cdot Z_C}{R_0 + Z_C} (1 - e^{pt}), \quad i_{1n}(t) = \frac{E}{R_0 + Z_C} (1 - e^{pt}),$$

где  $p = -\frac{R_0 + Z_C}{L_0}$  — корень характеристического уравнения.

Для математического выражения волн в линии заменим переменную  $t$  на  $t - \frac{x}{v}$ :

$$u_n(x, t) = \frac{E \cdot Z_C}{R_0 + Z_C} \left( 1 - e^{p(t - \frac{x}{v})} \right), \quad i_n(x, t) = \frac{E}{R_0 + Z_C} \left( 1 - e^{p(t - \frac{x}{v})} \right).$$

Полученные решения справедливы при условии  $t - \frac{x}{v} > 0$ . Из решения следует, что падающие волны  $u_n(x, t)$  и  $i_n(x, t)$  изменяются во времени и пространстве по экспоненциальному закону (рисунок 188а, б).

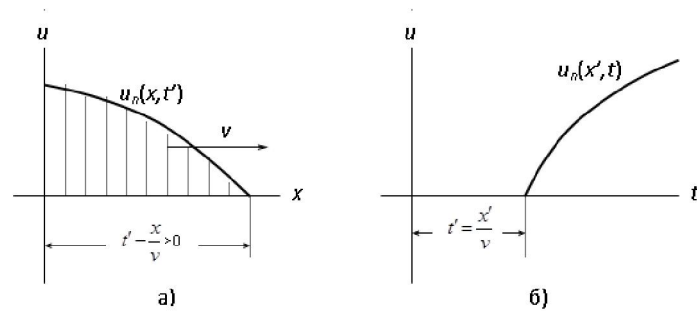


Рисунок 188

Таким образом, для расчета падающих волн в линии  $u_n(x, t)$ ,  $i_n(x, t)$  необходимо выполнить расчет переходного процесса в схеме замещения для начала линии и в полученных выражениях заменить переменную  $t$  на  $t - \frac{x}{v}$ .

### 12.11 Расчет отраженных волн в линии с распределенными параметрами при подключении ее к источнику ЭДС

После того как падающие волны  $u_n(x, t)$  и  $i_n(x, t)$  достигнут конца линии, при  $Z_2 \neq Z_C$  возникнут отраженные волны и законы распределения напряжения и тока вдоль линии будут определяться наложением этих волн:

$$u(x, t) = u_n(x, t) + u_0(x, t), \quad i(x, t) = i_n(x, t) - i_0(x, t)$$

Рассмотрим режим конца линии после прохождения падающей волны. Будем считать, что формы падающих волн  $u_n(x, t)$  и  $i_n(x, t)$  нам известны. Тогда получим:

$$\begin{cases} u_2(t) = u_{2n}(t) + u_{2o}(t) & (1) \\ i_2(t) = i_{2n}(t) - i_{2o}(t) & (2) \end{cases}$$

Умножим члены второго уравнения на  $Z_C$  и почленно сложим левые и правые части уравнений:

$$u_2(t) + i_2(t) \cdot Z_C = u_{2n}(t) + u_{2o}(t) + i_{2n}(t) \cdot Z_C - i_{2o}(t) \cdot Z_C = 2u_{2n}(t)$$

Полученному уравнению соответствует расчетная схема замещения для конца линии (рисунок 189).

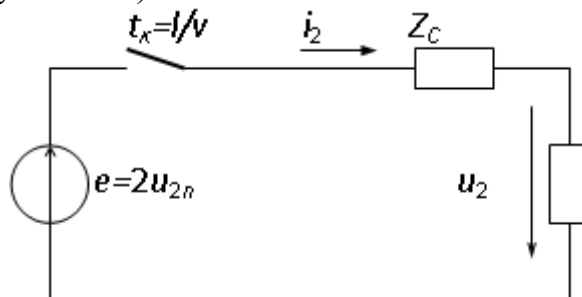


Рисунок 189

В расчетной схеме ЭДС равна  $e(t) = 2U_{2n}(t)$ , линия представлена своим волновым сопротивлением  $Z_C$ , а нагрузка – своими физическими параметрами  $R, L, C$ . Момент коммутации в расчетной схеме должен происходить с задержкой времени  $t_k = \Delta t = \frac{l}{v}$ , равный времени прохождения линии падающей волной.

Таким образом, для определения напряжения и тока в конце линии  $u_2(t)$  и  $i_2(t)$  с учетом наложения падающей и отраженной волн, необходимо выполнить расчет переходного процесса в схеме замещения для конца линии и определить искомые величины.

Ранее при решении дифференциальных уравнений линии были получены выражения в общем виде для отраженных волн:

$$u_o(x, t) = f_2\left(t + \frac{x}{v} + \tau_2\right); \quad i_o(x, t) = \frac{1}{Z_C} f_2\left(t + \frac{x}{v} + \tau_2\right)$$

Чтобы достичь начала линии ( $x = 0$ ) отраженной волне потребуется время  $\frac{l}{v}$ , а с момента включения линии пройдет время  $\frac{2l}{v}$  и, следовательно,  $\tau_2 = -\frac{2l}{v}$ . Таким образом:

$$u_o(x, t) = f_2\left(t + \frac{x}{v} + \frac{2l}{v}\right); \quad i_o(x, t) = \frac{1}{Z_C} f_2\left(t + \frac{x}{v} + \frac{2l}{v}\right).$$

Заменим в выражениях для отраженных волн переменную  $x$  на  $y$  из условия  $x = l - y$ :

$$u_o(y, t) = f_2\left(t - \frac{y}{v} + \frac{l}{v}\right); \quad i_o(y, t) = \frac{1}{Z_C} f_2\left(t - \frac{y}{v} + \frac{l}{v}\right).$$

Выражения для отраженных волн в конце линии могут быть получены из найденных ранее решений для напряжения и тока в конце линии  $u_2(t)$ ,  $i_2(t)$ :

$$u_{2o}(t) = u_2(t) - u_{2n}(t), \quad i_{2o}(t) = -i_2(t) + i_{2n}(t) = \frac{1}{Z_C} u_{2o}(t).$$

Выражения для законов распределения отраженных волн вдоль линии получим из уравнений этих волн в конце линии путем замены в них переменной  $t$  на  $t - \frac{y}{v}$ .

Рассмотрим примеры расчета отраженных волн в линии.

**Пример 1.** В момент  $t = 0$  линия с волновым сопротивлением  $Z_C$  включается к источнику постоянной ЭДС  $e(t) = E$ ,  $R_o = 0$ ,  $L_o = 0$ .

Падающие волны будут иметь прямоугольный фронт:  $u_n = E$ ;  $i_n = \frac{E}{Z_C}$ .

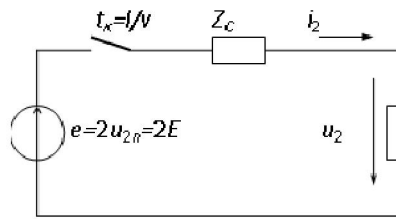


Рисунок 190

Напряжение и ток в конце линии находим из расчета схемы замещения для конца линии (рисунок 190). Так как в этой схеме содержатся только активные элементы, то режим в схеме установится мгновенно без переходного процесса:

$$i_2 = \frac{2u_{2n}}{R_2 + Z_C} = \frac{2i_{2n}Z_C}{R_2 + Z_C}; \quad u_2 = \frac{2u_{2n}R_2}{R_2 + Z_C}.$$

Отраженные волны в конце линии:

$$u_{2o} = u_2 - u_{2n} = \frac{2u_{2n}R_2}{R_2 + Z_C} - u_{2n} = \frac{R_2 - Z_C}{R_2 + Z_C} u_{2n} = k_o u_{2n}$$

$$i_{2o} = -i_2 + i_{2n} = -\frac{2i_{2n}R_2}{R_2 + Z_C} + i_{2n} = \frac{R_2 - Z_C}{R_2 + Z_C} i_{2n} = k_o i_{2n}.$$

Здесь  $k_o = \frac{u_{2o}}{u_{2n}} = \frac{i_{2o}}{i_{2n}} = \frac{R_2 - Z_C}{R_2 + Z_C}$  – коэффициент отраженной волны.

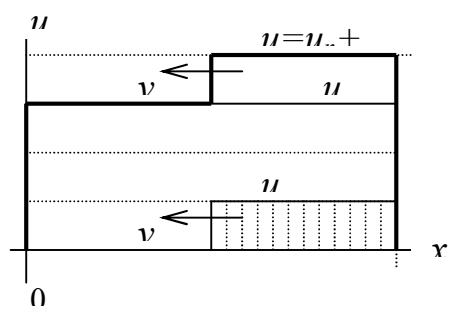
В случае активной нагрузки отраженные волны в линии можно определять через коэффициент отражения:

$$u_{2o} = k_o u_{2n}, \quad i_{2o} = k_o i_{2n} = k_o \frac{u_{2n}}{Z_C}.$$

Сопротивление нагрузки  $R_2$  может изменяться от 0 до  $\infty$ . В режиме холостого хода  $R_2 = \infty$ , следовательно, коэффициент отраженной волны  $k_{оxx} = 1$ . В режиме согласованной нагрузки  $R_2 = Z_C$  и  $k_o = 0$ , в режиме короткого замыкания  $R_2 = 0$  и  $k_{окк} = -1$ . Это означает, что в режиме холостого хода падающие волны полностью отражаются от конца линии с тем же знаком, в режиме короткого замыкания – с противоположным знаком, а при согласованной нагрузке отраженные волны вообще отсутствуют.

Пусть  $R_2 = Z_C$ , тогда  $k_o = \frac{2Z_C - Z_C}{2Z_C + Z_C} = \frac{1}{3}$  и  $u_{2o} = \frac{1}{3}u_{2n}$ ,  $i_{2o} = \frac{1}{3}i_{2n}$ .

Графические диаграммы распределения напряжения и тока вдоль линии с учетом отраженных волн показаны на рисунке 191а, б.



a)

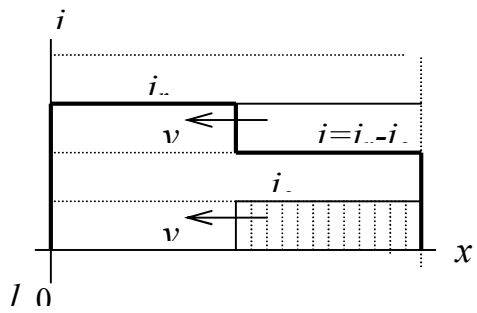


Рис 19

Пример 2. В момент  $t = 0$  линия с волновым сопротивлением  $Z_C$  включается к источнику постоянной ЭДС  $e(t) = E$ ,  $R_o = 0$ ,  $L_0 = 0$ . В конце линии включен конденсатор  $C$ .

Падающие волны будут иметь прямоугольный фронт:  $u_n = E$ ;  $i_n = \frac{E}{Z_C}$ .

Напряжение и ток в конце линии находим из расчета переходного процесса в схеме замещения для конца линии (рисунок 192).

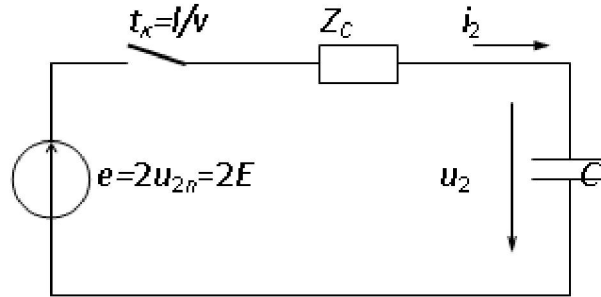


Рисунок 192

Рассчитываем переходной процесс в схеме классическим методом и получаем:

$$i_2(t) = \frac{2E}{Z_C} e^{p(t-\frac{l}{v})}; \quad u_2(t) = 2E(1 - e^{p(t-\frac{l}{v})}),$$

где  $p = -\frac{1}{Z_C C}$  – корень характеристического уравнения, переменная  $t$  заменена на  $t - \frac{l}{v}$  с учетом смещения начала переходного процесса в конце линии на  $\Delta t = \frac{l}{v}$ .

Отраженные волны напряжения и тока в конце линии:

$$u_{2o}(t) = u_2(t) - u_{2n}(t) = 2E(1 - e^{p(t-\frac{l}{v})}) - E = E(1 - 2e^{p(t-\frac{l}{v})})$$

$$i_{2o}(t) = \frac{1}{Z_C} u_{2o}(t) = \frac{E}{Z_C(1 - 2e^{p(t-\frac{l}{v})})}.$$

Выражения для распределения отраженных волн вдоль линии получим из их выражений для конца линии путем замены переменной  $t$  на  $t - \frac{y}{v}$ :

$$u_{2o}(y, t) = E(1 - 2e^{p(t-\frac{y}{v}-\frac{l}{v})}), \quad i_{2o}(y, t) = \frac{E}{Z_C}(1 - 2e^{p(t-\frac{y}{v}-\frac{l}{v})}).$$

Графические диаграммы распределения напряжения и тока вдоль линии с учетом отраженных волн показаны на рисунке 193а,б.

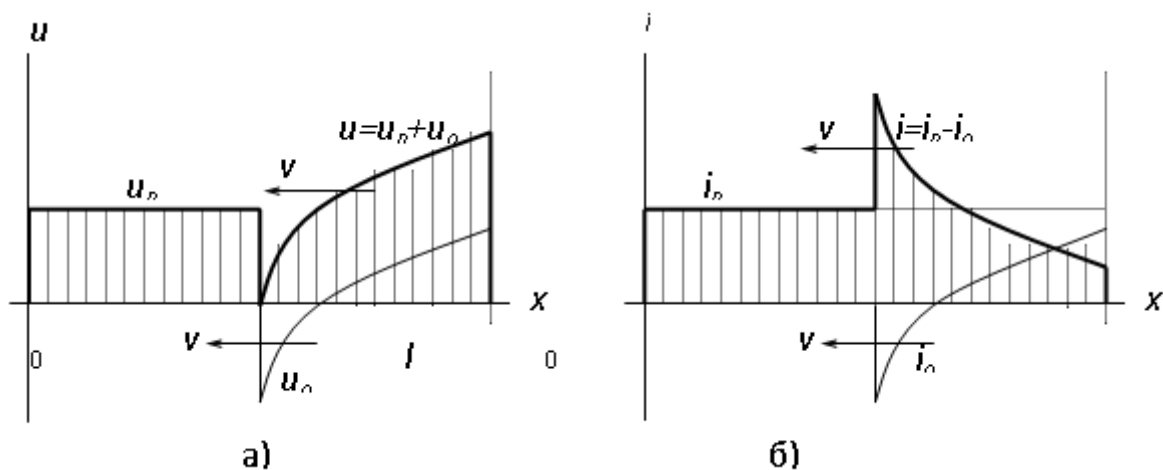


Рисунок 193

## 12.12 Расчет переходного процесса в линии с учетом многократных отражений волн

Переходной процесс в линии с распределенными параметрами складывается из наложения волн после их многократных отражений не только от конца линии, но и от ее начала, если внутреннее сопротивление источника не равно волновому сопротивлению линии  $Z_C$ .

Рассмотрим протекание переходного процесса в идеальной линии без потерь с волновым сопротивлением  $Z_C$  в режиме холостого хода ( $Z_2 = \infty$ ) при включении ее к идеальному источнику постоянной ЭДС  $e(t) = E$ ,  $R_0 = 0$ .

Для расчета отраженных волн будем пользоваться коэффициентом отражения, который равен для конца линии  $k_{o2} = +1$  и для начала линии  $k_{o1} = -1$ .

Весь переходной процесс состоит из 4-х отрезков времени или стадий.

1-ая стадия. В момент  $t=0$  линия включается к источнику ЭДС  $e(t) = E$  и возникают первые ( по порядку ) падающие волны с прямоугольным фронтом  $u_{n1} = E, i_{n1} = \frac{E}{Z_C} = I$ , которые перемещаются от начала линии к ее концу с фазовой скоростью  $v$  (рисунок 194а.).

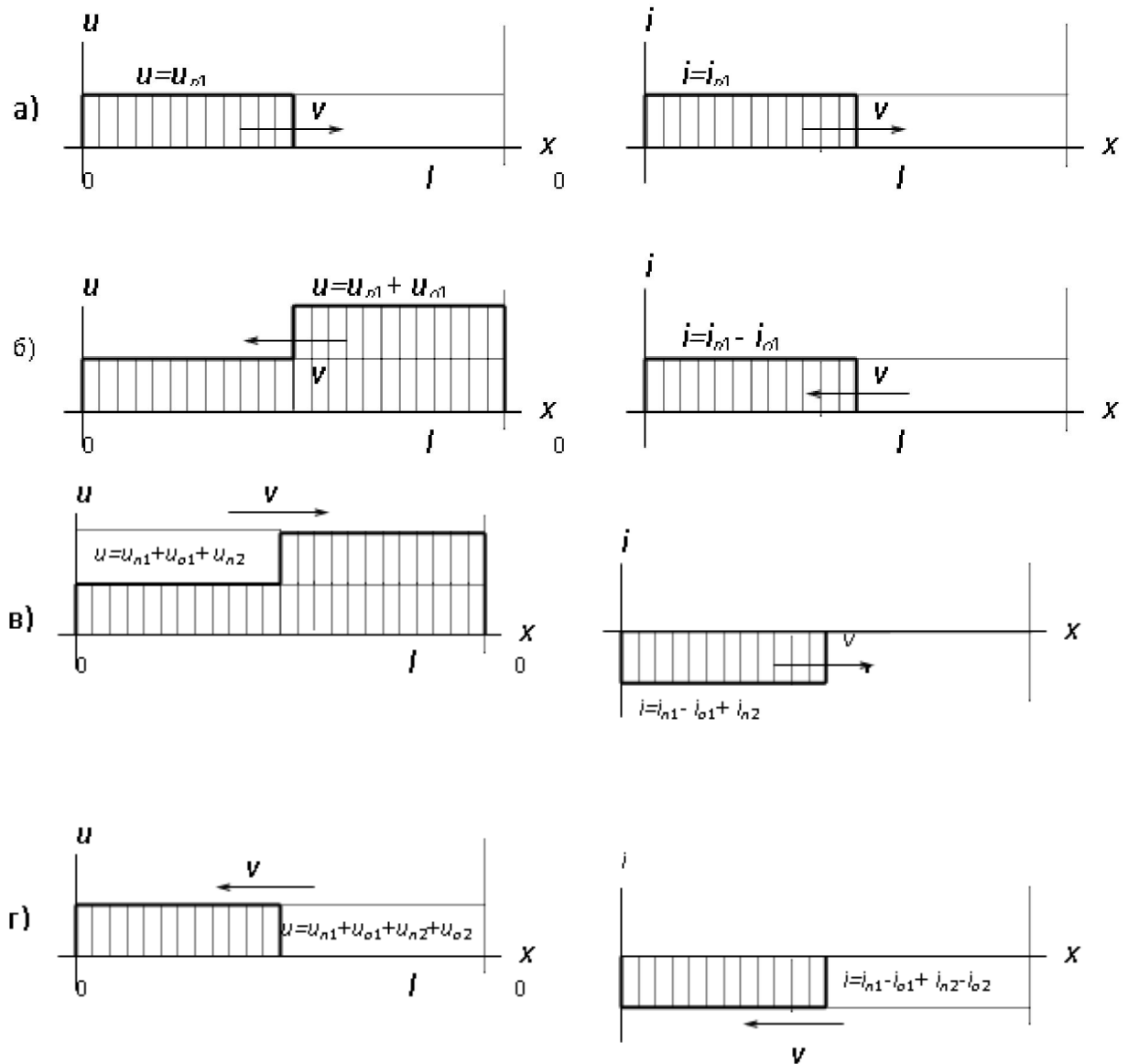


Рисунок 194

2-ая стадия. Падающие волны, достигнув конца линии, отражаются с коэффициентом  $k_{o2} = 1$ , т.е.  $u_{o1} = k_{o2}u_{n1} = 1 \cdot E = E$ ,  $i_{o1} = k_{o2}i_{n1} = I$ . Напряжение и ток вдоль линии определяются как результат наложения падающих и отраженных волн:

$$u = u_{n1} + u_{o1} = E + E = 2E, \quad i = i_{n1} - i_{o1} = I - I = 0.$$

Диаграммы функций  $u(x)$ ,  $i(x)$  показаны на рисунке 194б.

3-я стадия. 1-е отраженные волны достигают начала линии и отражаются с коэффициентом  $k_{o1} = -1$ , т.е. с обратным знаком, в результате этого отражения появляются 2-е (по порядку) падающие волны:  $U_{n2} = k_{o1}u_{o1} = -1 \cdot E = -E$ ,  $i_{n2} = k_{o1}i_{o1} = -1 \cdot I = -I$ .

Напряжение и ток вдоль линии определяются как результат наложения двух падающих и одной отраженной волн:

$$u = u_{n1} + u_{o1} + u_{n2} = E + E - E = E, \quad i = i_{n1} - i_{o1} + i_{n2} = I - I - I = -I.$$

Диаграммы функций  $u(x)$ ,  $i(x)$  показаны на рисунке 194в.

4-ая стадия. 2-е падающие волны, достигнув конца линии, отражаются с коэффициентом  $k_{o2} = 1$ , в результате этого отражения появляются 2-ые (по порядку) отраженные волны: т.е.  $u_{o2} = k_{o2}u_{n2} = 1 \cdot (-E) = -E$ ,  $i_{o2} = k_{o2}i_{n2} = 1 \cdot (-I) = -I$ . Напряжение и ток вдоль линии определяются как результат наложения падающих и отраженных волн:

$$u = u_{n1} + u_{o1} + u_{n2} + u_{o2} = E + E - E - E = 0,$$

$$i = i_{n1} - i_{o1} + i_{n2} - i_{o2} = I - I - I + I = 0.$$

Диаграммы функций  $u(x)$ ,  $i(x)$  показаны на рисунке 194г. В конце 4-ой стадии напряжение и ток в линии становятся равными нулю, после чего процесс в линии повторяется по тому же сценарию. Период повторения

$$T = \frac{4l}{v}.$$

В реальных линиях наличие потерь (хоть и незначительных) приводит к быстрому затуханию переходного процесса.

Если в линии содержатся только активные элементы, то расчет переходного процесса и построение графических диаграмм распределения и напряжения и тока вдоль линии при многократных отражениях волн выполняются по тому же алгоритму, как и для рассмотренного выше случая холостого хода, с той лишь разницей, что коэффициенты отражения в начале и конце линии определяются по формуле  $k_o = \frac{R - Z_C}{R + Z_C}$  и могут иметь любые значения в интервале от  $-1$  до  $+1$ .

Если линия содержит накопители энергии  $L$  или  $C$ , то после отражения волн от этих элементов изменяются формы волн. Расчет каждой новой отраженной волны становится все сложнее, в результате чего расчет переходного процесса по методу наложения волн становится практически невозможным. В этом случае применяются специальные методы расчета, рассмотрение которых выходит за рамки учебного курса ТОЭ.

## 13 Синтез электрических цепей

### 13.1 Характеристика задач синтеза

Синтезом электрической цепи называют определение структуры цепи и параметров составляющих ее элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  по известным свойствам (характеристикам), которым должна удовлетворять цепь. Задачи синтеза цепей противоположны по цели и содержанию задачам анализа. В отличие от задач анализа, имеющих, как правило, единственное решение, задачи синтеза могут иметь несколько решений, удовлетворяющих заданным условиям. В

этом случае выбирают наиболее рациональное решение (например, по стоимости, по габаритам, по массе, по числу элементов и т. д.) Кроме того, физического решения может не существовать вообще, так как из существующих реальных элементов не всегда можно построить электрическую цепь, удовлетворяющую заданным условиям.

Пусть требуется синтезировать электрическую цепь, для которой заданы временные характеристики на входе:  $u(t) = 100 \sin \omega t$ ,  $i(t) = 1 \sin(\omega t - 30^\circ)$ . Комплексное сопротивление и комплексная проводимость такой цепи равны:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{100e^{j0}}{1e^{-j30}} = 100e^{j30} = 86,7 + j50 = R + j\omega L,$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{1e^{-j30}}{100e^{j0}} = 0,01e^{-j30} = 0,00867 - j0,005 = \frac{1}{115} + \frac{1}{j200} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}.$$

Полученным значениям для  $\underline{Z}$  и  $\underline{Y}$  соответствуют две различные схемы замещения цепи (рисунок 195а, б):

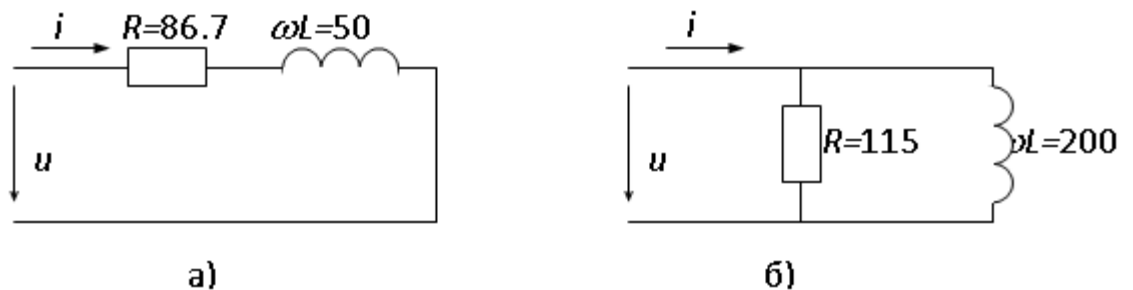


Рисунок 195

Пусть временные характеристики цепи на входе имеют вид:

$u(t) = 100 \sin \omega t$ ,  $i(t) = 1 \sin(\omega t - 120^\circ)$ . Комплексное сопротивление такой цепи равно:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{100e^{j0}}{1e^{-j120}} = 100e^{j120} = -50 + j86,7 = ? + j\omega L.$$

Данная цепь на основе пассивных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  физически нереализуема, так как в природе не существует резисторов с отрицательным сопротивлением.

С задачами синтеза на практике встречаются при проектировании сложных фильтров, корректирующих устройств в радиотехнике, технике связи, автоматике и телемеханике.

Синтез электрических цепей развивался по нескольким направлениям:

- 1) синтез цепи, заданной операторной входной характеристикой;
- 2) синтез цепи, заданной временной характеристикой в виде реакции цепи на воздействие импульса напряжения или тока прямоугольной формы, и др.

Наиболее простые результаты получены по первому направлению, которое и будет в дальнейшем рассмотрено.

### 13.2 Свойства входных операторных функций пассивных электрических цепей

Входной функцией цепи (двухполюсника) называется входное операторное сопротивление  $Z(p)$  или входная операторная проводимость  $Y(p)$ . Пусть задана операторная схема некоторой цепи (рисунок 196):

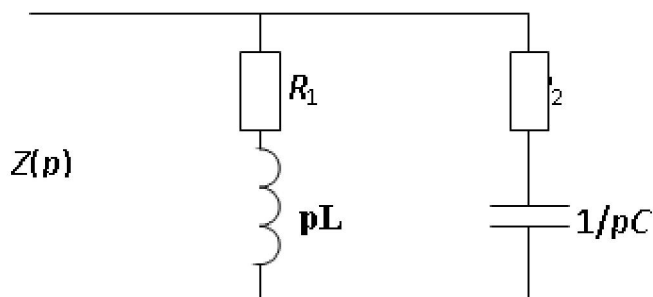


Рисунок 196

Входное операторное сопротивление схемы будет равно:

$$Z(p) = \frac{(R_1 + pL)(R_2 + \frac{1}{pC})}{(R_1 + pL) + (R_2 + \frac{1}{pC})} = \dots = \frac{LCR_2p^2 + (R_1R_2C + L)p + R_1}{LCp^2 + (R_1C + R_2C)p + 1} = \frac{N(p)}{M(p)}$$

Таким образом, входное операторное сопротивление  $Z(p)$  или входную операторную проводимость  $Y(p)$  для любой схемы можно представить в виде отношения двух полиномов:

$$Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}.$$

Входные операторные функции обладают следующими свойствами:

1) все коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  в числителе и знаменателе выражения  $Z(p)$  должны быть вещественными и положительными числами, так как они образуются суммами, произведениями и частными от вещественных параметров элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ ;

2) наивысшая степень числителя должна отличаться от наивысшей степени знаменателя не более, чем на 1;

3) нули и полюсы функции  $Z(p)$  должны иметь отрицательную вещественную часть;

4) при замене оператора Лапласа на оператор Фурье ( $p = \sigma + j\omega \Rightarrow j\omega$ ) вещественная часть функции должна быть положительной:  $\text{Re}[Z(p)] = \text{Re}[Z(j\omega)] \geq 0$ .

Нулями функции  $Z(p)$  называются корни  $p_k$  уравнения  $N(p)=0$ , при подстановке которых значение функции равно нулю:  $Z(p_k)=0$ . Полюсами функции  $Z(p)$  называются корни  $p_k$  уравнения  $M(p)=0$ , при подстановке которых значение функции равно бесконечности:  $Z(p_k)=\infty$ . Известно, что свободные составляющие переходного процесса в электрической цепи описываются слагаемыми вида  $A_k e^{p_k t}$  и обязательно должны затухать во времени, что возможно только, если действительная часть корней  $p_k$  отрицательна.

При замене оператора Лапласа на оператор Фурье ( $p = \sigma + j\omega \Rightarrow j\omega$ ) операторное сопротивление  $Z(p)$  превращается в комплексное сопротивление  $\underline{Z}(j\omega)=R+jX$ , вещественная часть которого равна активному сопротивлению  $R$ , которое не может быть отрицательным.

Функции, обладающие перечисленными свойствами, называются положительными вещественными функциями. Только такие функции могут быть реализованы в виде конкретной электрической цепи.

### 13. 3 Синтез двухполюсника лестничной (цепной) схемой

Непрерывной дробью называется математическое уравнение вида:

$$D = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}}$$

Пусть электрическая цепь имеет лестничную (цепную) схему (рисунок 197).

Методом свертки выразим входное сопротивление и входную проводимость цепной схемы:

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}}}; \quad Y_{\text{вх}} = \frac{1}{Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}}}}.$$

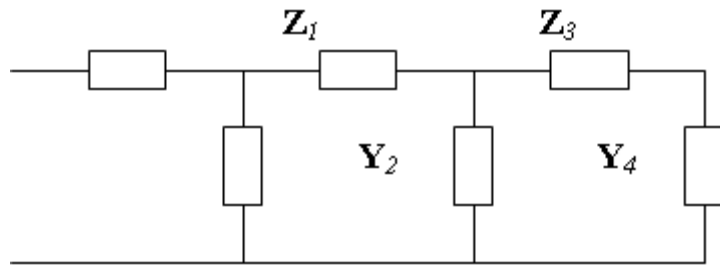


Рисунок 197

Входное сопротивление и входная проводимость цепной схемы выражается уравнением, которое имеет структурную форму непрерывной дроби.

Таким образом, задача синтеза двухполюсника, заданного входной функцией  $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$  или  $Y(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ , сводится к преобразованию этой функции к виду непрерывной дроби и последующему переходу к соответствующей этой дроби цепной схеме.

В математике разработаны способы преобразования простых дробей к виду непрерывной дроби. Порядок такого преобразования показан на конкретном примере:

$$D = \frac{41}{30} = 1 + \frac{11}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{11}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{8}{11}} = \dots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}$$

По аналогичной форме выполняется преобразование к виду непрерывной дроби выражений входных функций  $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$  или

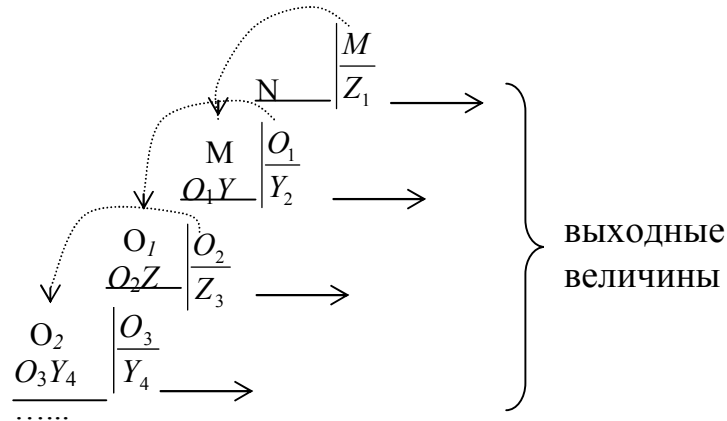
$Y(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ . Процесс преобразования можно представить следующим образом:

- 1) располагают полиномы  $N(p)$  и  $M(p)$  либо по убывающим, либо по возрастающим степеням  $p$ ;
- 2) делят  $N(p)$  на  $M(p)$  как многочлен на многочлен, в результате получают частное  $Ч_1(p)$  и некоторый остаток  $O_1(p)$ ;
- 3) делят  $M(p)$  на остаток  $O_1(p)$  как многочлен на многочлен, в результате получают частное  $Ч_2(p)$  и некоторый остаток  $O_2(p)$ ;
- 4) и т. д. продолжают процесс деления до получения частного без остатка;
- 5) в соответствии с полученной непрерывной дробью составляют цепную схему замещения в операторной форме;

6) переходят к физическим параметрам элементов схемы (к электрической схеме) на основе формул соответствия:

$$Z_R(p) = R; \quad Z_L(p) = pL; \quad Z_C(p) = \frac{1}{pC}.$$

На основании изложенного процесс последовательного деления можно представить следующей схемой:



При делении многочлена на многочлен следят за тем, чтобы в процессе деления в частном содержались только положительные члены, и чтобы они не содержали множитель  $p$  в степени больше 1.

### 13.4 Синтез двухполюсника методом разложения входной функции на простейшие составляющие

Выражение для входной функции  $Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$  или  $Y(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$

математически можно разложить на простые слагаемые по форме:

$$Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = A_{\infty}p + A_0 + \frac{N_1(p)}{M(p)} = A_{\infty}p + A_0 + \sum_1^m \frac{A_k}{p - p_k}.$$

Первые два слагаемые выделяют из входной функции  $Z(p)$  путем деления  $N(p)$  на  $M(p)$  как многочлен на многочлен с целью понижения показателя числителя до значения  $n=m-1$ , в результате получают частное  $A_{\infty}p + A_0$  и некоторый остаток  $N_1(p)$ . Остаток функции раскладывают на простые слагаемые по известной в математике формуле разложения:

$$Z_1(p) = \frac{N_1(p)}{M(p)} = \sum_1^m \frac{A_k}{p - p_k},$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_m$  – корни уравнения  $M(p)=0$ ,  $A_k = \frac{N_1(p_k)}{M'(p_k)}$  –

коэффициенты, определяемые согласно формуле разложения.

После разложения входной функции на простые слагаемые каждому слагаемому подбирают соответствующий ему участок операторной схемы,

отдельные участки соединяют между собой последовательно для функции  $Z(p)$  или параллельно для функции  $Y(p)$ , и таким образом получают схему цепи, соответствующей входной функции  $Z(p)$  или  $Y(p)$ .

Рассмотрим простейшие схемы соединения элементов и соответствующие им операторные изображения.

$$\Rightarrow Z(p) = \boxed{\phantom{R}} \quad R \quad \Rightarrow \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow Z(p) = \text{---} \text{---} \text{---} L \text{---} \text{---} \text{---} \Rightarrow \frac{1}{pL}$$

$$\Rightarrow Z(p) = \text{---} \text{---} \text{---} \frac{1}{pC} \text{---} \text{---} \text{---} \quad C \quad Y(p) = pC$$

$$\Rightarrow Z(p) = \begin{array}{c} \text{---} L \text{---} \\ | \\ \text{---} pL \text{---} \\ | \\ \text{---} C \text{---} \end{array} \Rightarrow \frac{p \cdot \frac{1}{C}}{p^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\Rightarrow Z(p) = \begin{array}{c} \text{---} R \text{---} \\ | \\ \text{---} R \text{---} \\ | \\ \text{---} C \text{---} \end{array} \Rightarrow \frac{\frac{1}{C}}{p + \frac{1}{RC}}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} R \text{---} \\ | \\ \text{---} L \text{---} L \text{---} \end{array} \Rightarrow Z(p) = \frac{R \cdot pL}{R + pL} = \frac{R \cdot p}{p + \frac{R}{L}}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} L \text{---} \\ | \\ \text{---} pL \text{---} \\ | \\ \text{---} \frac{1}{pC} \text{---} \end{array} \Rightarrow \frac{p \cdot \frac{1}{L}}{p^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} R \text{---} \\ | \\ \text{---} R \text{---} \\ | \\ \text{---} L \text{---} \end{array} \Rightarrow \frac{\frac{1}{L}}{p + \frac{R}{L}}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} R \text{---} \\ | \\ \text{---} R \text{---} \\ | \\ \text{---} \frac{1}{pC} \text{---} \end{array} \Rightarrow \frac{p \cdot \frac{1}{R}}{p + \frac{1}{RC}}$$

Рассмотрим, каким образом может быть реализовано каждое слагаемое входной функции  $Z(p)$ . Первому слагаемому  $A_\infty p$  соответствует катушка индуктивности  $L = A_\infty$ , так как  $Z_L(p) = Lp$ . Второму слагаемому  $A_0$  соответствует резистор  $R = A_0$ .

Если среди корней  $p_k$  имеется корень  $p_1 = 0$ , то его подстановка в формулу разложения дает выражение вида  $\frac{A_k}{p}$ , которое в схеме может быть реализовано конденсатором  $C = \frac{1}{A_k}$ , так как  $Z_C(p) = \frac{1}{pC}$ .

Если среди корней  $p_k$  имеются мнимые сопряженные корни  $p_2 = j\omega$  и  $p_3 = -j\omega$ , то их подстановка в формулу разложения дает следующее выражение ( $A_2 = A_3 = A_k$ ):

$$\frac{A_2}{p - j\omega} + \frac{A_3}{p + j\omega} = \frac{2A_k \cdot p}{p^2 - \omega^2},$$

которому соответствует параллельный резонансный контур, состоящий из элементов  $L$  и  $C$ , для которого  $\frac{1}{L} = 2A_k$  и  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ .

Если среди корней  $p_k$  имеется вещественный отрицательный корень  $p_4 = -b$ , то его подстановка в формулу разложения дает выражение вида  $\frac{A_k}{p + b}$ , которое может быть реализовано схемой с параллельным соединением элементов  $R$  и  $C$  при соотношении  $A_k = \frac{1}{C}$ , и  $b = \frac{1}{RC}$ .

Слагаемые, соответствующие комплексно сопряженным корням  $pk = -b \pm j\omega_0$ , могут быть реализованы более сложными методами, рассмотрение которых здесь не приводится.

## 14 Нелинейные цепи постоянного тока

### 14.1 Нелинейные элементы, их характеристики и параметры

В теории линейных цепей предполагалось, что параметры всех элементов цепи являются постоянными величинами, не зависящих от токов и напряжений. Каждому идеальному элементу цепи приписывалось определенное значение его параметра: резистору – сопротивление  $R$ , катушке – индуктивность  $L$ , конденсатору – емкость  $C$ . Физические характеристики таких элементов ( $u = R \cdot i$  – для резистора,  $\psi = L \cdot i$  – для катушки,  $q = C \cdot u$  – для конденсатора) описываются уравнением прямой линии  $y = a \cdot x$ , поэтому такие элементы получили общее название линейных, а

электрические цепи, состоящие из таких элементов, также называются линейными.

Идеальных линейных элементов в природе не существует. В действительности параметры всех элементов в той или иной мере зависят от их физического состояния, т.е. от тока, напряжения, температуры. Если эта зависимость выражена незначительно, то ею при расчете цепей пренебрегают и элементы считают линейными.

Однако существует обширный класс элементов электрических цепей, параметры которых существенно зависят от тока и напряжения и эту зависимость необходимо учитывать при расчете электрических цепей. Такие элементы получили название нелинейных, так как их физические характеристики не могут быть описаны уравнением прямой линии. Таким элементам нельзя придать определенное значение параметра сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$ . С целью отличия нелинейных элементов от линейных на электрических схемах на обозначение элемента наносятся дополнительный знак “ключка” (рисунок 198):

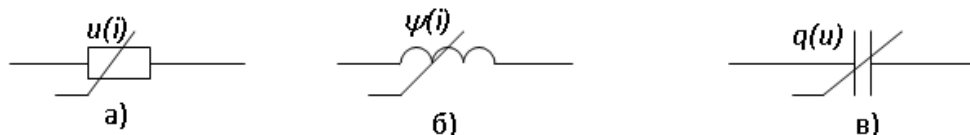


Рисунок 198

При расчете электрических цепей нелинейные элементы задаются их физическими характеристиками в исследуемом диапазоне значений физических параметров. Эти характеристики получили следующие названия: а) для нелинейного резистора  $u=f(i)$  или  $i=f(u)$  – вольт-амперная характеристика или сокращенно ВАХ; б) для нелинейной катушки  $\psi=f(i)$  или  $i=f(\psi)$  – вебер-амперная характеристика или сокращенно ВАХ; в) для нелинейного конденсатора  $q=f(u)$  или  $u=f(q)$  – кулон-вольтная характеристика или сокращенно КВХ.

Физические характеристики нелинейных элементов могут быть заданы тремя способами:

1) графической диаграммой функции  $y=f(x)$  с указанием масштабов физических величин по координатным осям, например, для нелинейного резистора ВАХ  $u=f(i)$  показана на рисунке 199;

2) таблицей координат точек функции  $y=f(x)$  в исследуемом диапазоне значений физических величин, например, для нелинейного резистора ВАХ  $u=f(i)$  задана табл. 1;

3) в виде нелинейного математического уравнения  $y=f(x)$ , которое приближенно описывает функцию в исследуемом диапазоне значений физических величин, например, для нелинейного резистора ВАХ  $u=f(i)$  задано уравнением  $u=100i^2$ .

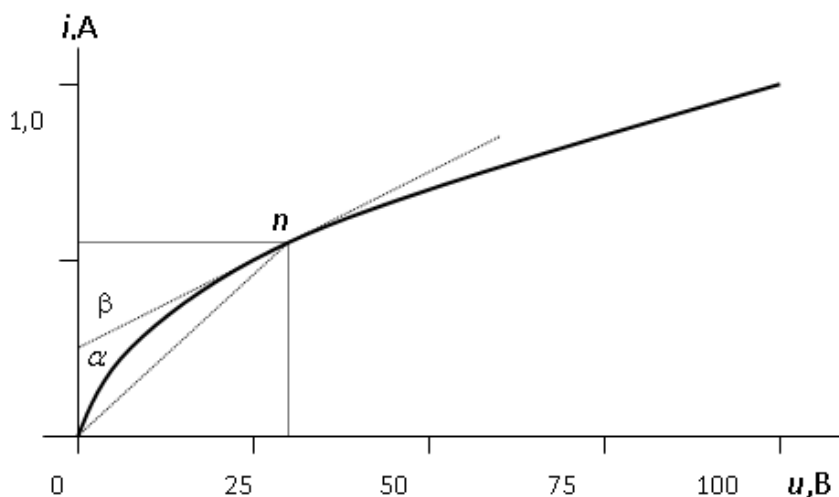


Рисунок 199

Т а б л и ц а 1

<i>i, A</i>	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
<i>u, B</i>	9	25	49	64	81	100	121

Для каждой точки характеристики нелинейного элемента могут быть определены статические и дифференциальные параметры. Для рассматриваемого примера нелинейного резистора в каждой точке характеристики  $u=f(i)$  могут быть определены статическое и дифференциальное сопротивления:

$$R_{cm} = \frac{u}{i} = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{tg} \alpha, \quad R_d = \frac{du}{di} = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{tg} \beta$$

Как статическое так и дифференциальное сопротивления нелинейного резистора зависят от положения точки на ВАХ, т.е. от параметров режима ( $u, i$ ). Как следует из графической диаграммы (рисунок 199) для рассматриваемой точки  $n \alpha \neq \beta$  и, следовательно,  $R_{cm} \neq R_d$ . Статическое сопротивление нелинейного резистора  $R_{cm}$  во всех точках ВАХ всегда положительно ( $R_{cm} > 0$ ), а дифференциальное сопротивление на некоторых участках ВАХ может быть отрицательным.

Ниже приводятся графические диаграммы ВАХ некоторых нелинейных элементов, наиболее часто встречающихся в цепях электроэнергетики (рисунок 200а, б, в, г).

На рисунке 200а представлена графическая диаграмма ВАХ  $i=f(u)$  для лампы накаливания. Характерная особенность ВАХ: увеличение  $R_{cm}$  с ростом тока, что объясняется зависимостью сопротивления металлов от температуры. Для ламп накаливания  $R_{гор} / R_{хол} \approx 10$ .

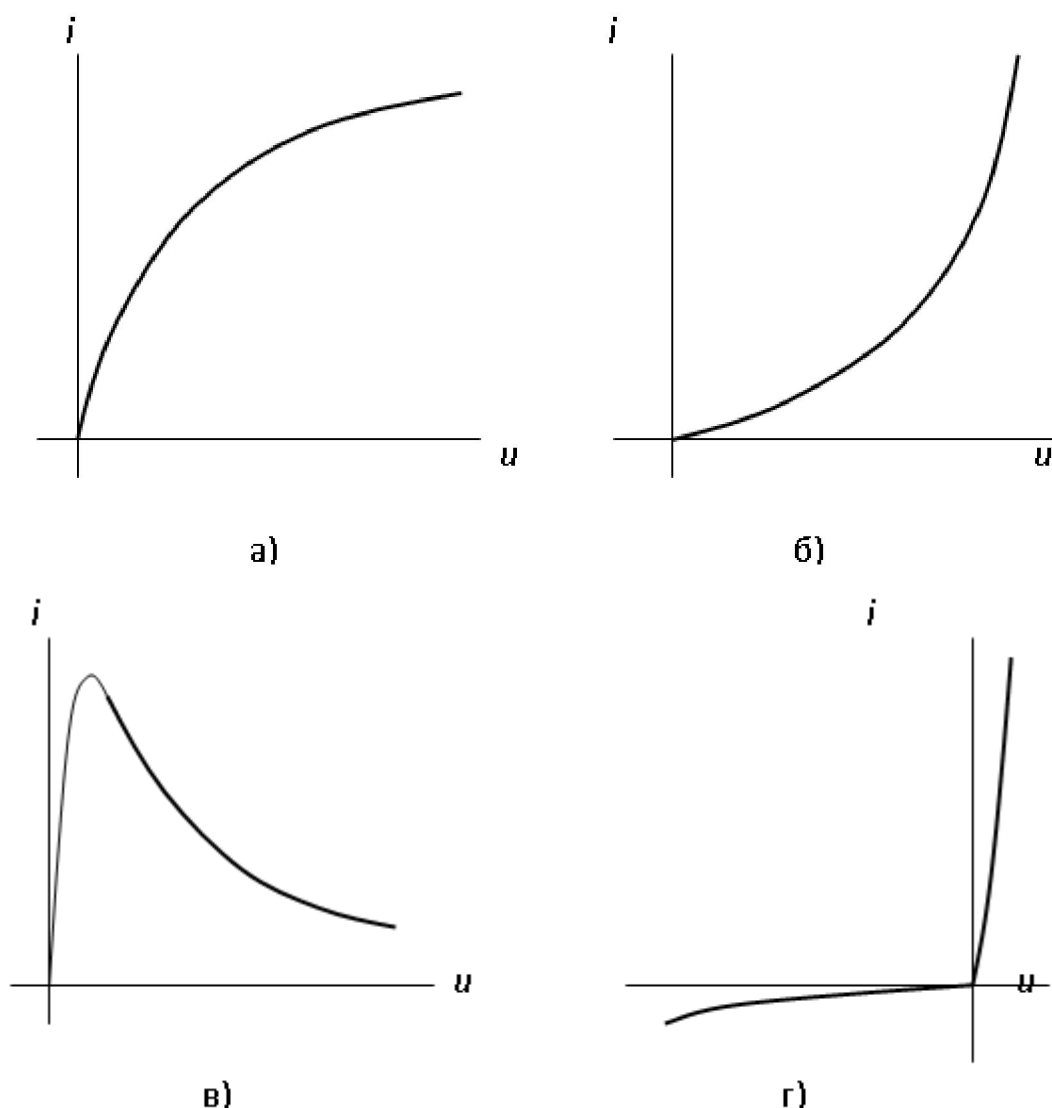


Рисунок 200

На рисунке 200б представлена графическая диаграмма ВАХ  $i=f(u)$  тиристового (вилитового) элемента разрядника. Характерная особенность ВАХ: уменьшение  $R_{cm}$  с ростом тока. Элементы такого типа используются в разрядниках для гашения дуги.

На рисунке 200в представлена графическая диаграмма ВАХ  $i=f(u)$  электрической дуги. Характерная особенность ВАХ – падающая форма с отрицательным значением дифференциального сопротивления ( $R_d < 0$ ).

На рисунке 200г представлена графическая диаграмма ВАХ  $i=f(u)$  полупроводникового диода. ВАХ имеет ярко выраженную несимметричную форму в положительной и отрицательной областях, при этом  $R_n \ll R_o$ . Элементы такого типа применяются для преобразования переменного тока в постоянный.

Как известно, в электрических цепях постоянного тока катушки и конденсаторы не влияют на установившийся режим цепи и в схемах таких цепей не показываются. Далее в настоящей главе будут рассматриваться

только нелинейные цепи постоянного тока в установившемся режиме, для которых приняты обозначения  $i \rightarrow I$ ,  $u \rightarrow U$ .

## 14.2 Нелинейные цепи и их свойства

Электрическая цепь называется нелинейной, если она содержит хотя бы один нелинейный элемент.

Состояние нелинейной цепи постоянного тока в установившемся режиме можно описать системой нелинейных алгебраических уравнений, составленных для схемы цепи по законам Кирхгофа. В математике не существует стандартных методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений, и, как следствие, на практике не существует общих методов расчета нелинейных цепей постоянного тока, таких, как метод контурных токов и метод узловых потенциалов для линейных цепей.

Одна из главных особенностей нелинейных цепей состоит в том, что к ним неприменим принцип наложения. Докажем это положение на примере расчета схемы (рисунок 201), в которой включены последовательно два источника ЭДС ( $E_1, E_2$ ) и нелинейный резистор с заданной ВАХ  $I = kU^2$ .

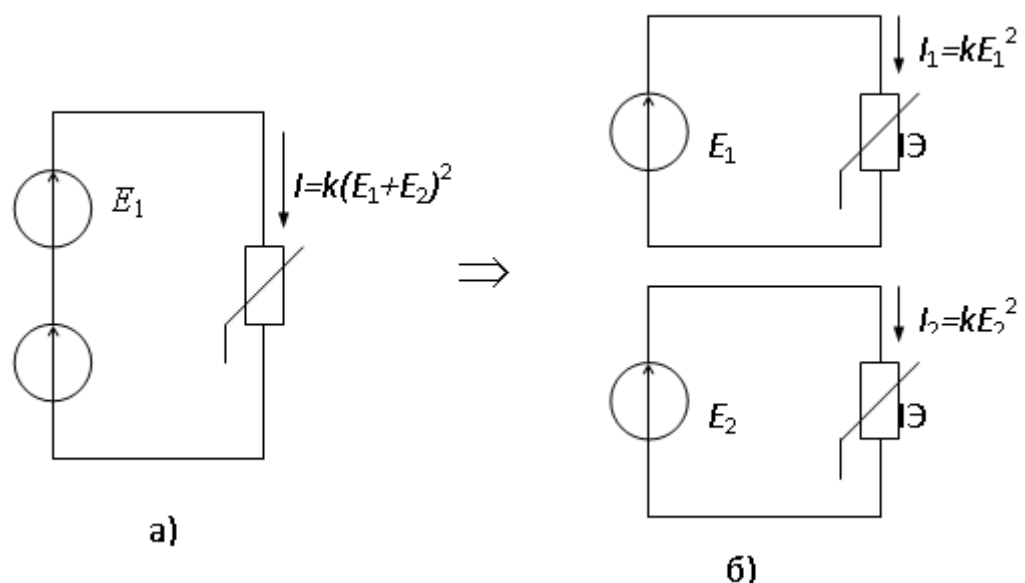


Рисунок 201

Действительный ток в исходной схеме (рисунок 201а) определится по заданному уравнению ВАХ:

$$I = kU^2 = k(E_1 + E_2)^2 = k(E_1^2 + 2E_1E_2 + E_2^2).$$

Ток, рассчитанный по методу наложения (рисунок 201б):

$$I_p = I_1 + I_2 = kE_1^2 + kE_2^2 = k(E_1^2 + E_2^2).$$

Сравнение правых частей равенств показывает, что  $I \neq I_p$ .

Метод расчета для каждой нелинейной цепи постоянного тока устанавливается индивидуально. Выбор того или другого метода зависит от конкретных условий задачи: структуры схемы цепи, характера нелинейности ВАХ нелинейных элементов, требований к результату расчета и др. Возможно применение не одного, а нескольких методов, каждый из которых позволяет более четко определить одну из сторон процесса в цепи.

В нелинейных цепях могут возникать особые процессы, которые в принципе невозможны в линейных цепях. Многообразием таких процессов объясняется широкое применение устройств на нелинейных элементах в различных областях современной техники. Современные средства связи, радиоэлектроника, компьютерная техника основаны на использовании нелинейных свойств элементов электрических цепей.

Перечислим некоторые явления, имеющие место в нелинейных цепях, которые находят практическое применение в электроэнергетике:

- 1) преобразование переменного тока в постоянный или выпрямление;
- 2) преобразование постоянного тока в переменный произвольной частоты или инвертирование;
- 3) преобразование переменного тока одной частоты в переменный ток другой частоты;
- 4) стабилизация режимных параметров (напряжения или тока) на некоторых участках цепи при изменении этих параметров на других участках;
- 5) трансформация постоянного тока и напряжения;
- 6) усиление сигналов по напряжению, по току или по мощности;
- 7) возможность существования нескольких установившихся режимов цепи при одних и тех же параметрах элементов;
- 8) скачкообразные изменения режима цепи; и т.д.

#### **14.3 Графический метод расчета простых нелинейных цепей**

Сущность графического метода расчета состоит в том, что решение нелинейных уравнений, составленных для схемы по законам Кирхгофа, выполняется графически путем графического сложения соответствующих ВАХ элементов.

Пусть нелинейная цепь состоит из двух нелинейных элементов НЭ1 и НЭ2, включенных последовательно с источником ЭДС (рисунок 202а). ВАХ нелинейных элементов заданы графически (рисунок 202б).

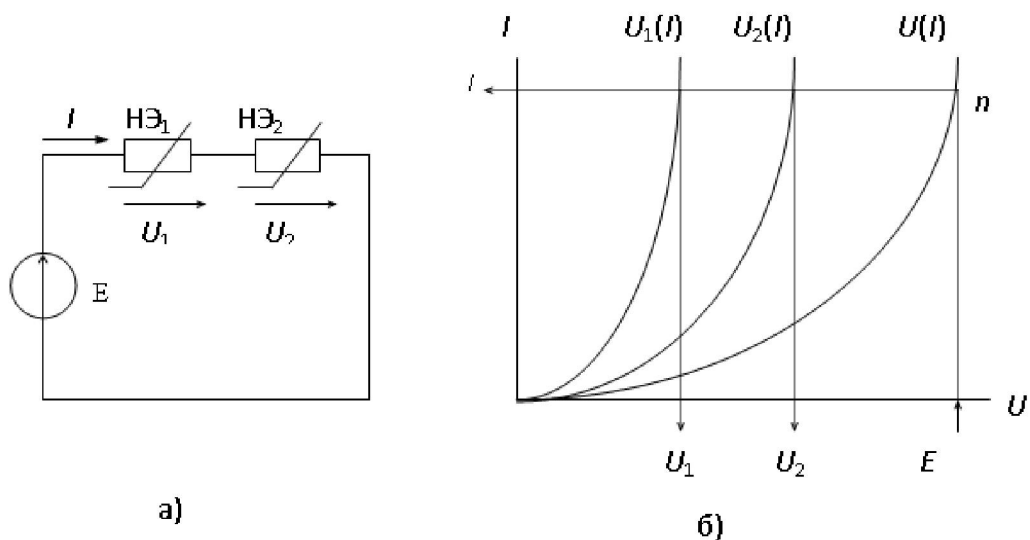


Рисунок 202

Уравнения Кирхгофа для схемы:  $U_1 + U_2 = E$ ;  $I_1 = I_2 = I$ .

В соответствии с уравнениями производится сложение ВАХ отдельных элементов  $U_1(I)$  и  $U_2(I)$  по оси напряжений (последовательно), в результате чего получается ВАХ для всей схемы  $U(I)$ . На этой характеристике для значения  $U=E$  определяется положение рабочей точки  $n$ . Последовательность графического решения показана на рисунке 202б стрелками.

Пусть нелинейная цепь состоит из двух нелинейных элементов НЭ<sub>1</sub> и НЭ<sub>2</sub>, включенных параллельно с источником ЭДС  $E$  (рисунок 203а). ВАХ нелинейных элементов заданы графически (рисунок 203б).

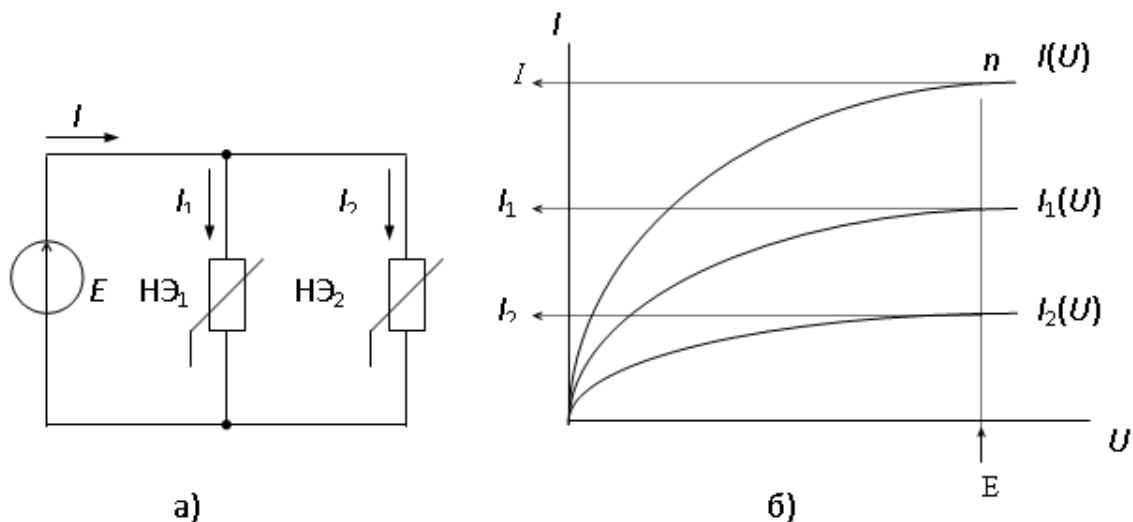


Рисунок 203

Уравнения Кирхгофа для схемы:  $I_1 + I_2 = I$ ;  $U_1 = U_2 = E$ .

В соответствии с уравнениями производится сложение ВАХ отдельных элементов  $I_1(U)$  и  $I_2(U)$  по оси токов (параллельно), в результате чего получа-

ется ВАХ для всей схемы  $I(U)$ . На этой характеристике для заданного значения  $U=E$  определяется положение рабочей точки  $n$ . Последовательность графического решения показано на рисунке 203б стрелками.

Пусть нелинейная цепь состоит из двух нелинейных элементов НЭ1 и НЭ2 и линейного резистора  $R_3$ , включенных по смешанной схеме (рисунок 204а). ВАХ нелинейных элементов заданы графически (рисунок 204б), а резистор – своим сопротивлением  $R_3$ . Диаграмма ВАХ для линейного резистора строится в той же системе координат согласно уравнению закона Ома  $U_3 = I_3 \cdot R_3$

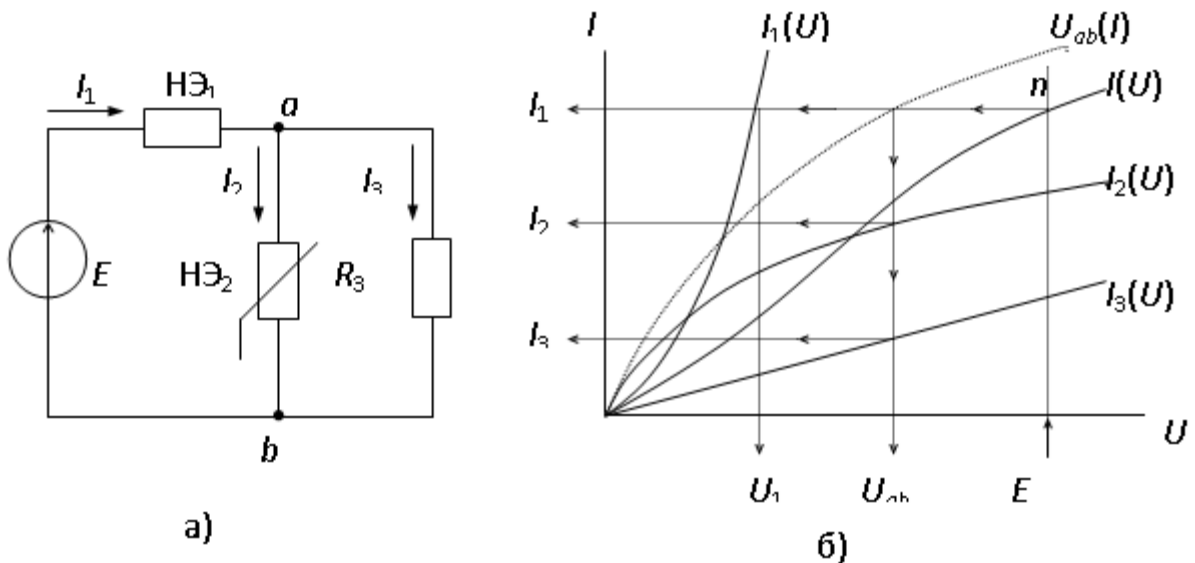


Рисунок 204

Уравнения Кирхгофа для схемы:

$$\begin{cases} I_2 + I_3 = I_1 \\ U_1 + U_{23} = E \\ U_2 = U_3 = U_{23} \end{cases}$$

Графическое решение задачи выполняется в два этапа. На 1-ом первом этапе проводится сложение ВАХ  $I_2(U_2)$  и  $I_3(U_3)$  по оси токов (параллельно), в результате этого сложения получается ВАХ для параллельного участка схемы  $U_{23}(I_1)$ . На 2-ом этапе проводится сложение ВАХ  $U_1(I_1)$  и  $U_{23}(I_1)$  по оси напряжений (последовательно), в результате чего получается ВАХ для всей схемы  $I(U)$ . На этой характеристике для  $U=E$  определяется положение рабочей точки  $n$ . Дальнейшая последовательность графического решения показана на рисунке 204б стрелками.

#### 14.4 Графический метод расчета нелинейной цепи с несколькими источниками ЭДС

Графический метод расчета можно применять также и для более сложных схем с несколькими источниками ЭДС. Последовательность графических операций при решении одной и той же задачи может быть различной и зависит от выбора алгоритма решения.

Выделим из схемы цепи ветвь, содержащую источник ЭДС  $E$  и нелинейный элемент с заданной ВАХ  $U(I)$  (рисунок 205 а).

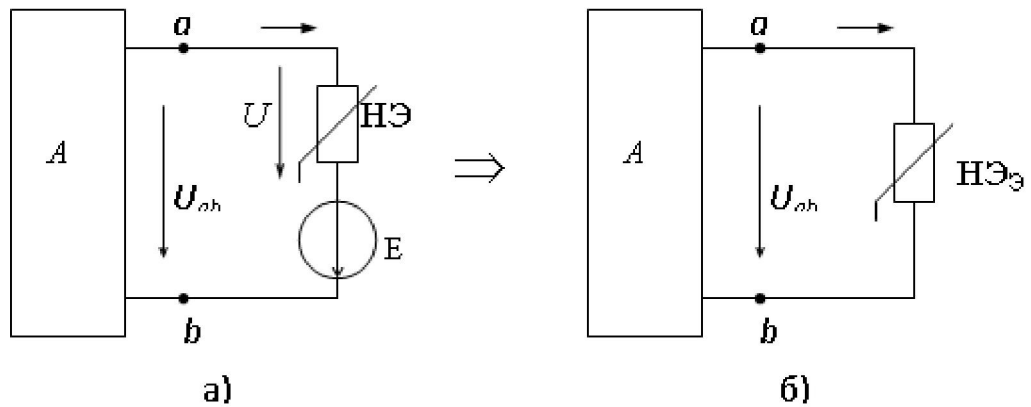


Рисунок 205

Из уравнения 2-го закона Кирхгофа следует:  $U_{ab}(I) = U(I) - E$ .

В той же системе координат  $U-I$  построим новую диаграмму ВАХ  $U_{ab}(I)$  путем смещения заданной ВАХ  $U(I)$  по оси  $U$  на величину  $(-E)$  согласно уравнению 2-го закона Кирхгофа (рисунок 206). Можно утверждать, что новая ВАХ  $U_{ab}(I)$  соответствует некоторому новому нелинейному элементу  $НЭ_э$ , не содержащему ЭДС (рисунок 205б). Таким образом, ветвь схемы, содержащую источник ЭДС  $E$  и резистивный (линейный или нелинейный) элемент, можно заменить путем параллельного переноса ВАХ  $U(I)$  заданного элемента на величину ЭДС  $\pm E$  некоторой новой ветвью без источника ЭДС с ВАХ  $U_{ab}(I)$  (рисунок 205б).

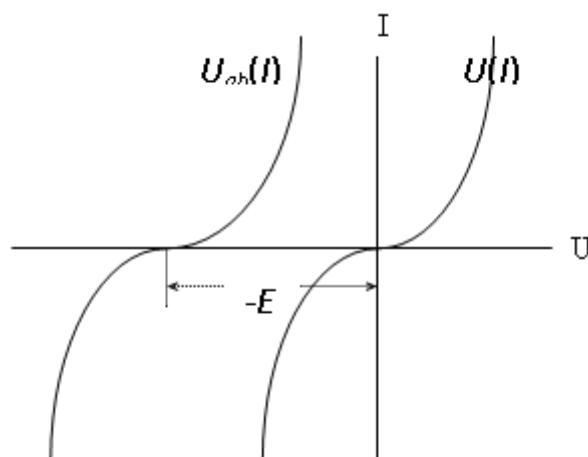


Рисунок 206

Если в схеме содержится ветвь с источником тока  $J$ , то такая ветвь может быть объединена с резистивной ветвью и заменена некоторой

эквивалентной, при этом смещение ВАХ элемента производится по оси  $I$  на величину  $\pm J$  согласно 1-му закону Кирхгофа для узла.

Пусть требуется выполнить расчет схемы (рисунок 207а), в которой нелинейные элементы НЭ<sub>1</sub> и НЭ<sub>2</sub> заданы своими ВАХ, а линейный резистор – сопротивлением  $R_3$  (рисунок 207а).

Рассмотрим 2 варианта решения данной задачи.

1-ый вариант – метод свертки схемы к одному из источников ЭДС, например  $E_1$ . Для этого заменим ветвь 2, содержащую нелинейный элемент НЭ<sub>2</sub> и ЭДС  $E_2$ , новой эквивалентной ветвью с элементом НЭ<sub>3</sub>, но без источника ЭДС. После такой замены сложная схема превращается в простую со смешанным соединением элементов (рисунок 207б). Графический метод расчета такой схемы был рассмотрен в предыдущем параграфе.

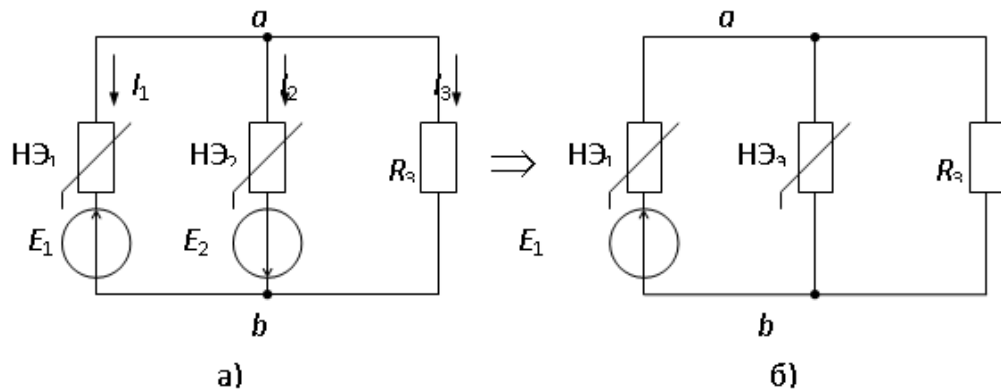


Рисунок 207

2-й вариант решения – метод двух узлов. Зададимся положительными направлениями токов во всех ветвях схемы от узла  $a$  к узлу  $b$  (рисунок 207а). Для каждой ветви по 2-му закону Кирхгофа запишем выражения для узлового напряжения:

$$\begin{cases} U_{ab}(I_1) = U_1(I_1) + E_1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{ab}(I_2) = U_2(I_2) - E_2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{ab}(I_3) = U_3(I_3) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Графическое решение задачи производится в соответствии с полученными уравнениями в следующей последовательности:

1) строится диаграмма ВАХ  $U_{ab}(I_1)$  путем смещения заданной ВАХ  $U_1(I_1)$  по оси  $U$  на величину  $+E_1$  согласно уравнению (1) (рисунок 208);

2) строится диаграмма ВАХ  $U_{ab}(I_2)$  путем смещения заданной ВАХ  $U_2(I_2)$  по оси  $U$  на величину  $-E_2$  согласно уравнению (2) (рисунок 208);

3) диаграмма ВАХ  $U_{ab}(I_3)$  совпадает с заданной  $U_3(I_3)$  согласно уравнению (3) (рисунок 208);

4) производится графическое сложение диаграмм ВАХ отдельных ветвей  $U_{ab}(I_1)$ ,  $U_{ab}(I_2)$ ,  $U_{ab}(I_3)$  по оси  $I$  согласно уравнению (4), в результате чего получается диаграмма результирующей ВАХ  $U_{ab}(\Sigma I)$  (жирная линия на рисунке 208).

Рабочая точка  $n$  удовлетворяет уравнению (4)  $\sum I = 0$ , что соответствует точке пересечения диаграммы результирующей ВАХ  $U_{ab}(\Sigma I)$  с осью  $U$ . Последовательность дальнейшего графического решения показана на рисунке 208 стрелками.

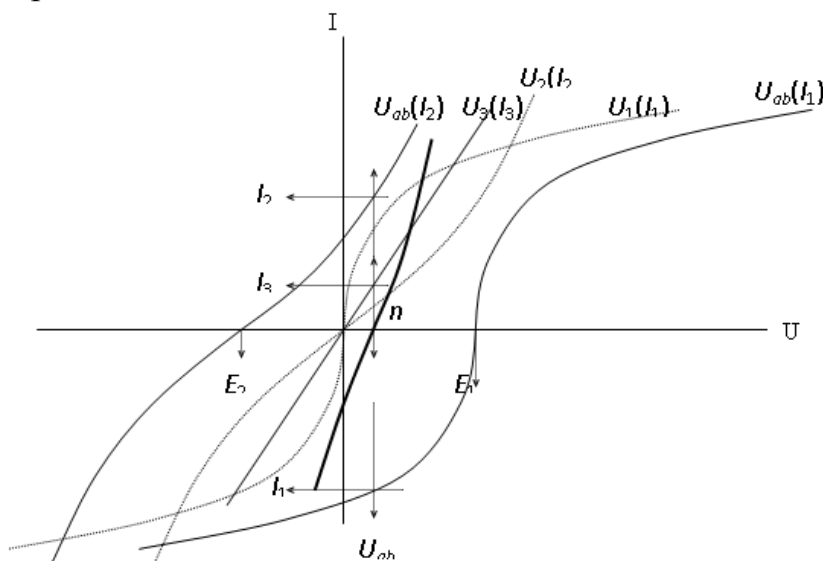


Рисунок 208

#### 14.5 Комбинированный графоаналитический метод расчета нелинейной цепи с одним или двумя нелинейными элементами

Если схема нелинейной цепи содержит только один нелинейный элемент НЭ с заданной ВАХ, то расчет токов и напряжений в такой схеме может быть выполнен комбинированным методом в три этапа.

1-й этап. Выделяется ветвь с нелинейным элементом НЭ, а оставшаяся часть схемы заменяется эквивалентным генератором (рисунок 209а). Параметры эквивалентного генератора  $E_0$  и  $R_0$  могут быть определены аналитически любым из методов расчета линейных цепей, так как в оставшейся части схемы не содержатся более нелинейные элементы.

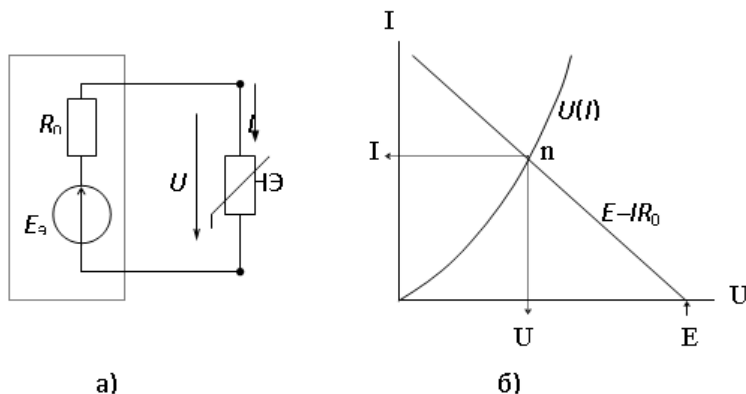


Рисунок 209

На 2-м этапе выполняется графический расчет эквивалентной схемы (рисунок 209а), как правило, методом встречного построения диаграмм. Из уравнения 2-го закона Кирхгофа для схемы рисунка 209а, следует, что  $U(I) = E - IR_0$ . Для графического решения данного уравнения проводится прямая линия по уравнению  $U = E - IR_0$  в той же системе координат, где задана диаграмма ВАХ  $U(I)$  нелинейного элемента. Положение рабочей точки  $i$  соответствует точке пересечения прямой с заданной диаграммой ВАХ  $U(I)$ . Достоинство данного метода состоит в том, что не требуется графическое сложение диаграмм ВАХ отдельных элементов. В результате графического расчета определяется напряжение  $U$  и ток  $I$  нелинейного элемента.

На заключительном 3-м этапе нелинейный элемент НЭ в исходной схеме в соответствии с теоремой о компенсации заменяется идеальным источником ЭДС с  $E=U$ , направленной навстречу току  $I$ . Такая замена позволяет превратить исходную схему из нелинейной в линейную. Расчет схемы после такой замены выполняется одним из методов расчета сложных линейных цепей, в результате чего определяются все токи и напряжения в исходной схеме.

Комбинированный метод расчета может быть применен к сложной схеме с двумя и более нелинейными элементами.

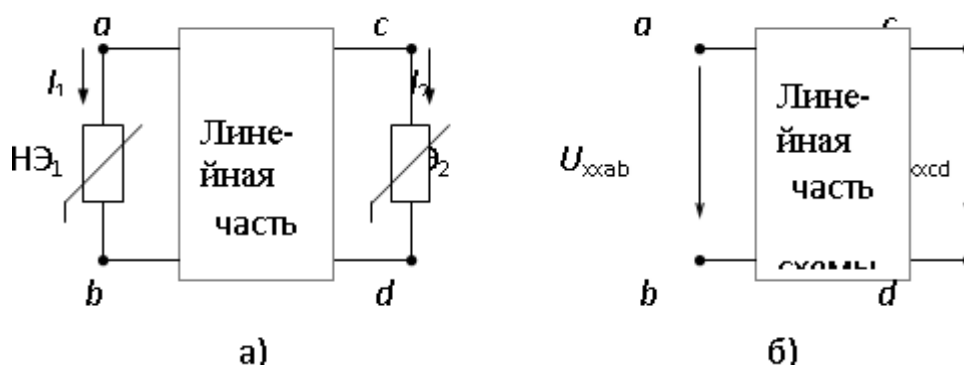


Рисунок 210

Пусть сложная схема содержит два нелинейных элемента НЭ<sub>1</sub> и НЭ<sub>2</sub> (рисунок 210а).

На 1-м этапе из сложной схемы выделяются одновременно оба нелинейных элемента (рисунок 210а). Выполняется режим холостого хода одновременно для обеих ветвей (рис. 310б) и аналитическим путем определяются напряжения холостого хода  $U_{xxab} = \varphi_a - \varphi_b$  и  $U_{xxcd} = \varphi_c - \varphi_d$ . В соответствии с теоремой об эквивалентном генераторе линейная часть схемы заменяется эквивалентным генератором (активным четырехполюсником) по схеме рисунка 211.

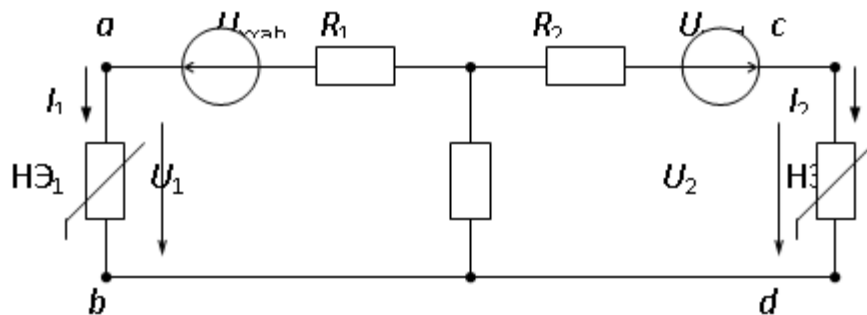


Рисунок 211

Внутренние сопротивления генератора ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ) рассчитываются путем свертки линейной части схемы (без источников) к эквивалентной схеме звезды.

На 2-м этапе выполняется графический расчет эквивалентной схемы (рисунок 211) одним из графических методов, рассмотренных ранее, в результате графического расчета определяются токи и напряжения нелинейных элементов ( $U_1$ ,  $U_2$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ). На заключительном этапе определяются токи и напряжения на элементах линейной части схемы.

Если исходная схема цепи содержит три или более нелинейных элементов, то к ней так же может быть применен метод эквивалентного генератора, при этом линейная часть схемы заменяется активным шести- и более полюсником, что при большом числе нелинейных элементов не дает положительного эффекта.

#### 14.6 Аппроксимация ВАХ нелинейных элементов

Вольтамперные характеристики нелинейных элементов на практике чаще всего получают экспериментальным путем и представляют их или в графической форме [в виде графической диаграммы функции  $I = f(U)$ ], или в табличной форме [в виде таблицы координат точек функции  $I = f(U)$ ]. При аналитических методах расчета нелинейных цепей к ВАХ предъявляются требования, чтобы они были представлены в аналитической форме, т.е. в виде аналитического выражения.

Под аппроксимацией ВАХ понимают замену ее графической или табличной формы на аналитическую. К уравнению аппроксимации предъявляются два противоречивых требования. Во-первых, уравнение аппроксимации должно по возможности точно описывать заданную ВАХ. Для более полного выполнения этого требования необходимо усложнять структуру этого уравнения. Во-вторых, уравнение аппроксимации, будучи введенным в систему уравнений Кирхгофа, должно позволять решение этой системы доступными методами. Для выполнения этого требования структура этого уравнения должна быть по возможности более простой. Таким образом, при выборе уравнения аппроксимации всегда приходится принимать компромиссное решение между этими двумя требованиями.

Различают два способа аппроксимации нелинейных ВАХ – полная и кусочная (по частям).

В простейших случаях при монотонном характере изменения функции  $I(U)$  ВАХ может быть аппроксимирована полностью одним нелинейным уравнением (рисунок 212а).

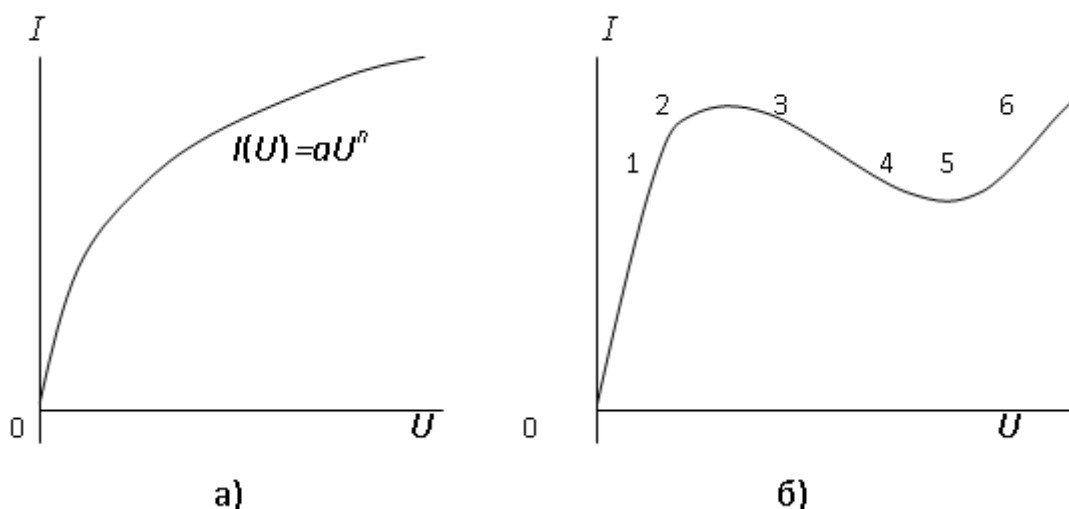


Рисунок 212

В более сложных случаях, когда функция  $I(U)$  имеет несколько максимумов и минимумов, полная аппроксимация ВАХ одним уравнением становится проблематичной и нерациональной. В таких случаях применяют кусочную аппроксимацию. Суть ее состоит в том, что вся ВАХ разбивается по тому или другому принципу на отдельные участки (куски) (рисунок 212б). Отдельные участки аппроксимируются однотипными, но простыми по структуре, уравнениями, коэффициенты в которых изменяются при переходе от одного участка к другому. Если отдельные участки ВАХ аппроксимируются отрезками прямой  $y = a + bx$ , то такая аппроксимация получила название кусочно-линейной. Если отдельные участки ВАХ аппроксимируются квадратичной ( $y = a + bx + cx^2$ ) или кубической ( $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ ) параболой, то отдельные участки получили название сплайнов, а сама аппроксимация – аппроксимации сплайнами. Кусочная аппроксимация позволяет получить высокую степень приближения к заданной ВАХ, однако требует большого числа однотипных расчетов при определении коэффициентов в уравнениях аппроксимации.

Кусочная аппроксимация широко применяется при расчете нелинейных цепей на ЭВМ.

## 14.7 Аналитические методы расчета нелинейных цепей

Установившейся режим нелинейной цепи постоянного тока можно описать системой нелинейных алгебраических уравнений Кирхгофа, в

которых связь между напряжением и током на нелинейных элементах выражена в виде нелинейного уравнения аппроксимации.

Как известно, в математике не существует общих методов решения систем нелинейных уравнений. В каждом конкретном случае метод решения определяется конкретными условиями задачи: структурой системы уравнений, типом аппроксимации ВАХ нелинейных элементов и другими факторами.

В самых простых случаях возможно выполнить непосредственное решение нелинейного уравнения. Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника ЭДС  $E$ , линейного резистора  $R_1$  и нелинейного резистора НЭ<sub>2</sub> (рисунок 213), ВАХ которого аппроксимирована уравнением:

$$\text{а) } U_2(I) = aI + bI^2; \text{ б) } I(U_2) = cU_2 + dU_2^2; \text{ в) } U_2(I) = aI + bI^5.$$

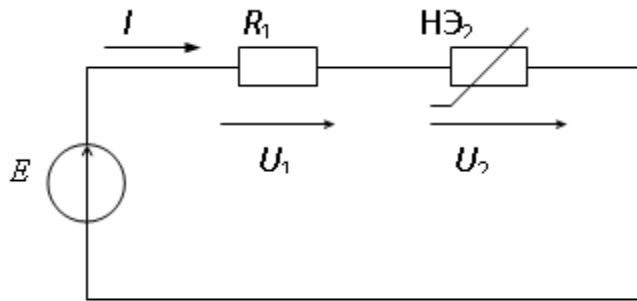


Рисунок 213

По второму закону Кирхгофа получим уравнение:  $E = U_1 + U_2$ .

Вид решения этого уравнения зависит от структуры уравнения аппроксимации ВАХ.

а)  $E = U_1 + U_2 = IR_1 + aI + bI^2 = (R_1 + a)I + bI^2$  – решение задачи сводится к решению квадратного уравнения с неизвестным током  $I$ ;

б)  $E = U_1 + U_2 = IR_1 + U_2 = (cU_2 + dU_2^2)R_1 + U_2 = (1 + cR_1)U_2 + dR_1U_2^2$  – решение задачи сводится к решению квадратного уравнения с неизвестным напряжением  $U_2$ ;

в)  $E = U_1 + U_2 = IR_1 + aI + bI^5 = (R_1 + a)I + bI^5$  – требуется решение алгебраического уравнения 5-й степени, что выполнить обычным методом невозможно.

В общем случае для решения системы нелинейных алгебраических уравнений используют так называемый метод последовательных приближений или метод итераций. Сущность данного метода состоит в следующем: задаются в первом приближении значение искомой величины  $x'$ . Решают задачу по выбранному алгоритму в направлении к источнику, в результате чего определяют расчетное значение ЭДС источника  $E'$ .

Сравнивают расчетное значение ЭДС источника  $E'$  с заданным значением  $E$  и с учетом неравенства  $E' > < E$  задаются значением искомой величины во втором приближении и повторяют расчет по тому же алгоритму. Циклы расчета (итерации) повторяют до достижения желаемой точности искомой величины.

Метод последовательных приближений широко используется при расчете нелинейных цепей с помощью ЭВМ. При составлении алгоритма расчета для ЭВМ следует особое внимание обращать на то, чтобы итерационный процесс сходиллся, в противном случае ЭВМ выдаст ошибку. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример.** Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника ЭДС  $E$ , линейного резистора  $R_1$  и нелинейного элемента НЭ<sub>2</sub> (рисунок 213). На рисунке 214а,б показаны два варианта ВАХ нелинейного элемента.

По 2-му закону Кирхгофу получим:  $E = U_1 + U_2 = IR_1 + U_2(I)$  или  $U_2(I) = E - IR_1$ . На рисунке 214а, б показано графическое решение этого уравнения, где точка  $n$  соответствует значению искомой величины ( $U_2, I$ ).

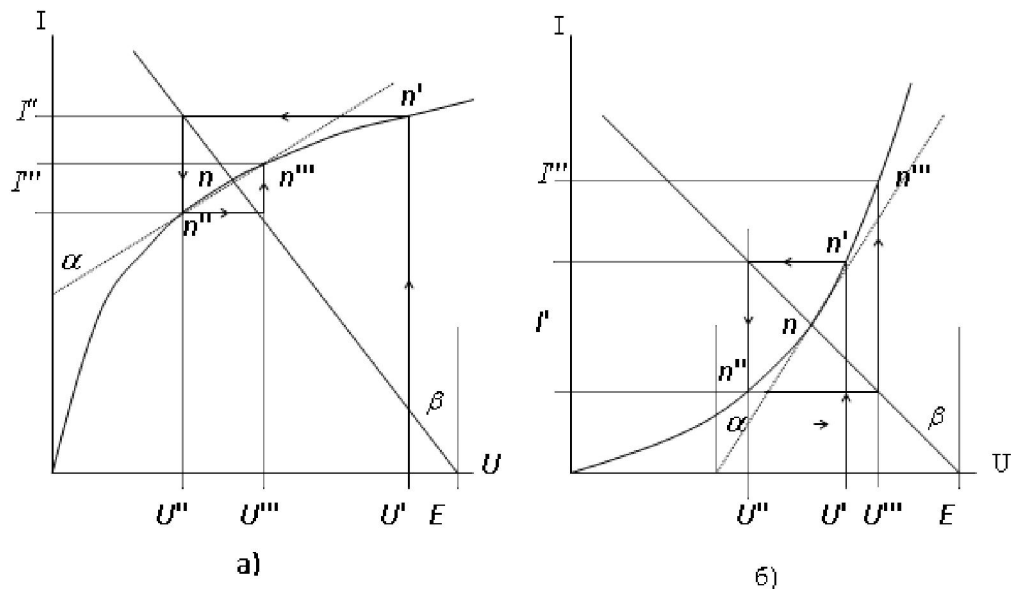


Рисунок 214

Составим алгоритм (схему) вычислений для ЭВМ методом последовательных приближений. Произвольно задаем первое приближение для напряжения на нелинейном элементе  $U'_2$ . Первое приближение для тока находим по ВАХ нелинейного элемента  $I' = f(U'_2)$ . Последующие приближения для напряжения на нелинейном элементе находим из уравнения 2-го закона Кирхгофа:  $U''_2(I) = E - I'R_1$ ,  $I'' = f(U''_2)$ ; и т. д.

Процесс расчета по этому алгоритму на рисунке 214а, б выглядит в виде спирали, которая на рисунке 214а закручивается вокруг точки  $n$ , а на рисунке 214б раскручивается. Это означает, что в первом случае

итерационный процесс сходится и ЭВМ выдаст результаты решения, а во втором случае итерационный процесс расходится и ЭВМ укажет на ошибку программы.

В курсе математики доказывается, что итерационный процесс сходится при условии, если абсолютное значение производной от искомой величины в окрестностях искомого корня (точки  $n$ ) меньше 1:

$$\left| \frac{dU_2(I)}{dU_2} \right| = \left| \frac{d(E - IR_1)}{dU_2} \right| = \left| -R_1 \cdot \frac{dI}{dU_2} \right| = \frac{R_1}{R_0} < 1 \quad \text{или} \quad \frac{R_1}{R_0} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} < 1 \quad \text{или} \quad \beta < \alpha.$$

Для решения данной задачи можно составить другую схему вычислений:

$$I'; \rightarrow U'_2 = f(I'); \rightarrow I'' = \frac{E - U'_2}{R_1}; \rightarrow U''_2 = f(I''); \text{ и т. д.}$$

Тогда условие сходимости примет следующий вид:

$$\left| \frac{dI(U_2)}{dI} \right| = \left| \frac{d(E - U_2)}{dI} \right| = \left| -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{dU_2}{dI} \right| = \frac{R_0}{R_1} < 1 \quad \text{или} \quad \beta > \alpha.$$

Очевидно, если по первой схеме вычислений итерационный процесс сходится, то по второй он расходится, и наоборот.

Схему вычислений на ЭВМ можно организовать по известному из математики методу половинного деления. По этому методу приближение для искомой величины устанавливается на середине предполагаемой области его значений. В рассматриваемом примере для напряжения  $U_2$  прилагаемая область значений  $O_1=0$ ;  $O_2=E$ . Схема вычислений будет иметь вид:

$$U'_2 = \frac{O_1 + O_2}{2} \rightarrow I' = f(U'_2) \rightarrow E' = I'R_1 + U'_2 \rightarrow \begin{cases} \text{если } E' > E, \text{ то } O_2 = E' \\ \text{если } E' < E, \text{ то } O_1 = E' \end{cases}$$

$$\rightarrow U''_2 = \frac{O_1 + O_2}{2}$$

Сходимость итерационного процесса по этой схеме вычислений показана на рисунке 215.

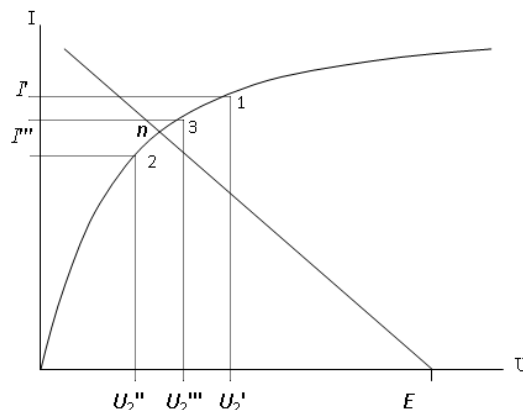


Рисунок 215

В общем случае для сложной цепи быстрота сходимости итерационного процесса зависит от вида ВАХ НЭ, параметров линейных элементов, выбора начальных приближений. Однако основным фактором, определяющим решение нелинейных уравнений итерационным методом, является выбор схемы (алгоритма) вычислений.

Итерационный метод сегодня является основным методом расчета нелинейных цепей.

## **15 Нелинейные магнитные цепи постоянного потока**

### **15.1 Основные понятия и законы магнитной цепи**

Электромагнитное поле, которое лежит в основе всех многообразных явлений и процессов, исследуемых в электротехнике, имеет две равнозначные стороны – электрическую и магнитную. Как известно, в электрической цепи под воздействием источников энергии возникают электрические токи, которые протекают по электрическим проводам. Подобно электрическим цепям существуют также магнитные цепи, состоящие из магнитных проводов или кратко магнитопроводов, в которых под воздействием магнитодвижущих сил (МДС) возникают и замыкаются магнитные потоки  $\Phi$ . Формальную схожесть или аналогию между электрическими и магнитными цепями в дальнейшем будем именовать принципом двойственности. Следует помнить, что при формальной схожести электрические и магнитные явления физически различны.

Магнитные цепи применяются в электрических машинах, трансформаторах, электромагнитных аппаратах, реле, приборах и т.д. Их назначением является создание заданной величины и формы магнитного потока  $\Phi(t)$  и проведение его по заданному пути.

Как известно, магнитное поле характеризуется векторными величинами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ , между которыми существует связь  $\vec{B} = \mu\mu_0 \cdot \vec{H}$ , где  $\vec{B}$  – вектор индукции (или плотности) магнитного поля [Тл],  $\vec{H}$  – вектор напряженности магнитного поля [А/м], который создается электрическим током и является первопричиной магнитного поля,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,257 \cdot 10^{-6}$  [Гн/м] – магнитная проницаемость пустоты,  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость, характеризующая способность материала к намагничиванию.

Все материалы по способности их к намагничиванию условно разделяют на две группы: ферромагнитные и неферромагнитные. Для ферромагнитных материалов  $\mu \gg 1$ . К ним относятся железо (Fe), никель (Ni), кобальт (Co) и их сплавы. Ферромагнитные материалы способны к намагничиванию и создают малое магнитное сопротивление для магнитного потока, поэтому применяются в технике для изготовления магнитопроводов. Для неферромагнитных материалов  $\mu = 1$ , они создают большое

сопротивление магнитному потоку и в магнитной цепи выполняют роль магнитных изоляторов.

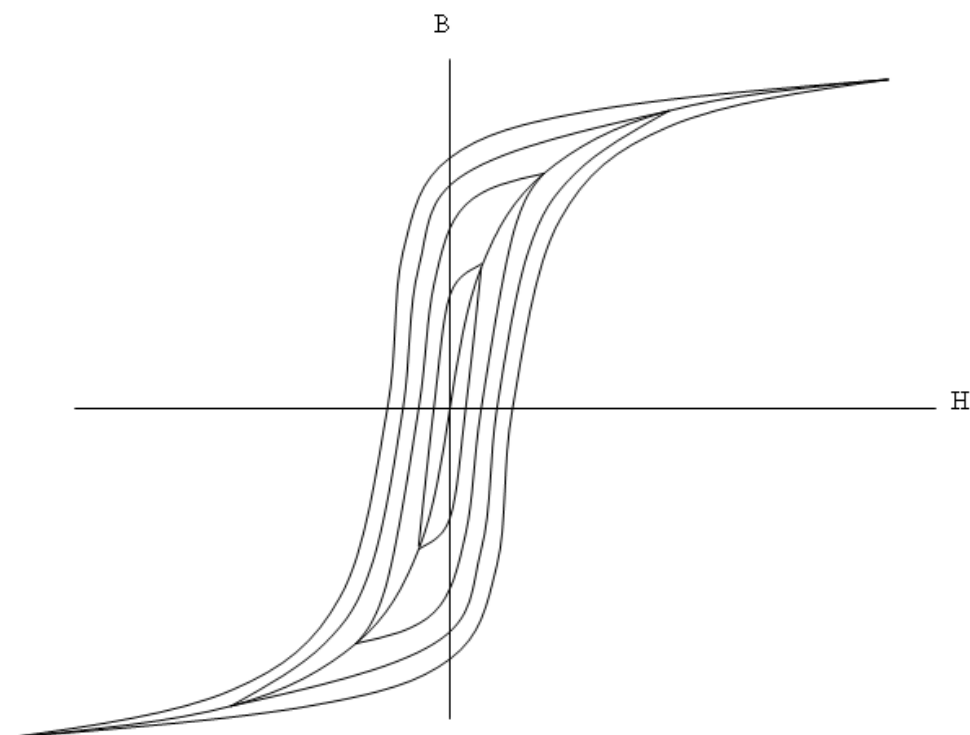


Рисунок 216

Следует отметить, что если в электрической цепи соотношение между удельной проводимостью металла (провода) и диэлектрика (изоляция) составляет  $10^{12} - 10^{15}$ , то для магнитной цепи это соотношение составляет всего около  $10^3$ . Это означает, что изоляция в магнитных цепях очень несовершенна, что в таких цепях существенная часть магнитного потока рассеивается, т.е. замыкается через участки с несовершенной магнитной изоляцией.

Зависимость между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  для ферромагнитных материалов не имеет точного аналитического выражения, на графической диаграмме эта зависимость  $B=f(H)$ , имеет форму петли и называется петлей гистерезиса (рисунок 216).

При периодическом перемагничивании материала с увеличением амплитуды индукции  $B_m$  площадь петли гистерезиса увеличивается, а ее вершина все больше смещается в область насыщения материала. Кривая, проходящая через вершины симметричных петель гистерезиса, называется основной кривой намагничивания  $B=f(H)$  для данного материала. Сведения об основных кривых намагничивания  $B=f(H)$  для ферромагнитных материалов, которые применяются в технике для изготовления магнитопроводов, приводятся в справочной литературе в виде таблиц или графических диаграмм и используются в инженерной практике для расчета магнитных цепей.

Пусть требуется выполнить расчет магнитной цепи электромагнитного реле, состоящей из катушки с  $w$  витками, ярма (неподвижная часть магнитопровода), якоря (подвижная часть магнитопровода) и воздушного зазора между ярмом и якорем (рисунок 217а). Геометрические размеры магнитной цепи заданы.

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum Hl = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 \delta = Iw$$

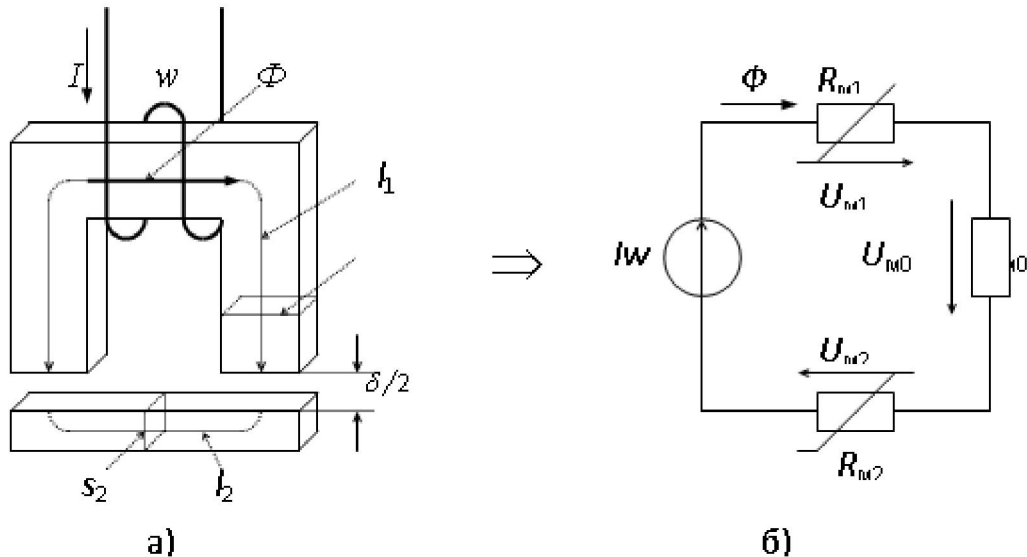


Рисунок 217

В основе расчета магнитных цепей лежит известный из физики закон полного тока:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i$$

При применении закона полного тока к магнитной цепи ее разбивают на отдельные однородные участки, для которых  $H = \text{const}$ , а контур интегрирования выбирают вдоль магнитных линий. При выполнении этих условий интеграл по замкнутому контуру заменяется суммой простых произведений  $H_k l_k$ , а  $\sum i = i \cdot w$ . Для рассматриваемого примера получим:

Здесь произведение  $Iw = F$  называется магнитодвижущей силой (МДС) или намагничивающей силой (НС), является источником магнитного потока  $\Phi$ .

Слагаемые типа  $H_k l_k$  называются магнитным напряжением:  $U_{Mk} = H_k l_k$  [A], а полученное выше уравнение представляет собой второй закон Кирхгофа для магнитной цепи:

$$\sum Hl = Iw \text{ или } \sum U_M = F$$

Из курса физики известно, что магнитные линии поля непрерывны. Из этого следует, что магнитный поток  $\Phi$  на всех участках неразветвленной маг-

нитной цепи имеем одно и то же значение  $\Phi = const$ . Индукция поля  $\bar{B}$  и напряженность поля  $\bar{H}$  на отдельных участках будут различны:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}; \quad B_0 = \frac{\Phi}{S_0};$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1 \mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_1 \mu_0 S_1}; \quad H_2 = \frac{\Phi}{\mu_2 \mu_0 S_2}; \quad H_0 = \frac{\Phi}{\mu_0 S_0}.$$

Сделаем подстановку в уравнение 2-го закона Кирхгофа:

$$I \cdot w = \frac{\Phi \cdot l_1}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1} + \frac{\Phi \cdot l_2}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2} + \frac{\Phi \cdot l_0}{\mu_0 \cdot S_0} = \Phi \left( \frac{l_1}{\mu_1 \cdot \mu_0 \cdot S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 \cdot \mu_0 \cdot S_2} + \frac{l_0}{\mu_0 \cdot S_0} \right)$$

Здесь  $R_{mk} = \frac{l_k}{\mu_k \mu_0 S_k}$  – магнитное сопротивление  $k$ -го участка магнитной цепи. Для сравнения: формула электрического сопротивления проводника имеет аналогичную структуру:  $R = \frac{l}{\gamma \cdot S}$ , т.е. в магнитной цепи электрической

проводимости  $\gamma$  соответствует магнитная проницаемости материала  $\mu \mu_0$ . Магнитные сопротивления для участков магнитопровода зависят от магнитной проницаемости  $\mu \mu_0$ , которая является функцией магнитного состояния  $(\bar{B}, \bar{H})$ . Следовательно, магнитные сопротивления отдельных участков магнитопровода являются нелинейными и на схеме представляются нелинейными элементами. Магнитное сопротивление зазора

$$R_{m0} = \frac{l_0}{\mu_0 \cdot S_0} = \frac{l_0}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot S_0} \approx 8 \cdot 10^5 \cdot \frac{l_0}{S_0} = const \quad \text{и, следовательно, является}$$

линейным элементом. С учетом сказанного выше, рассматриваемая магнитная цепь может быть представлена эквивалентной схемой с нелинейными элементами (рисунок 217б).

Для сложных магнитных цепей, имеющих разветвления и содержащих несколько источников МДС, в полной мере соблюдаются оба закона Кирхгофа:

1) 1-й закон Кирхгофа:  $\sum \Phi = 0$  – алгебраическая сумма магнитных потоков в узле магнитной цепи равна нулю;

2) 2-й закон Кирхгофа:  $\sum Hl = \sum Iw$  – алгебраическая сумма падений магнитных напряжений в замкнутом контуре магнитной цепи равна алгебраическая сумма МДС.

Магнитные цепи постоянного потока относятся к классу нелинейных цепей. В силу принципа двойственности к их расчету применимы все методы расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока.

Следует отметить, что магнитные цепи обладают своими характерными особенностями, которые вносят некоторые отличия в методы их расчета.

## 15.2 Аппроксимация вебер-амперных характеристик $U_m=f(\Phi)$ нелинейных элементов магнитных цепей

Как было уже сказано, в справочной литературе для каждого типа ферромагнитного материала, применяемого для изготовления магнитопроводов, приводятся сведения об основной кривой намагничивания  $B=f(H)$  в виде таблицы координат точек или в виде графической диаграммы этой функции (рисунок 218).

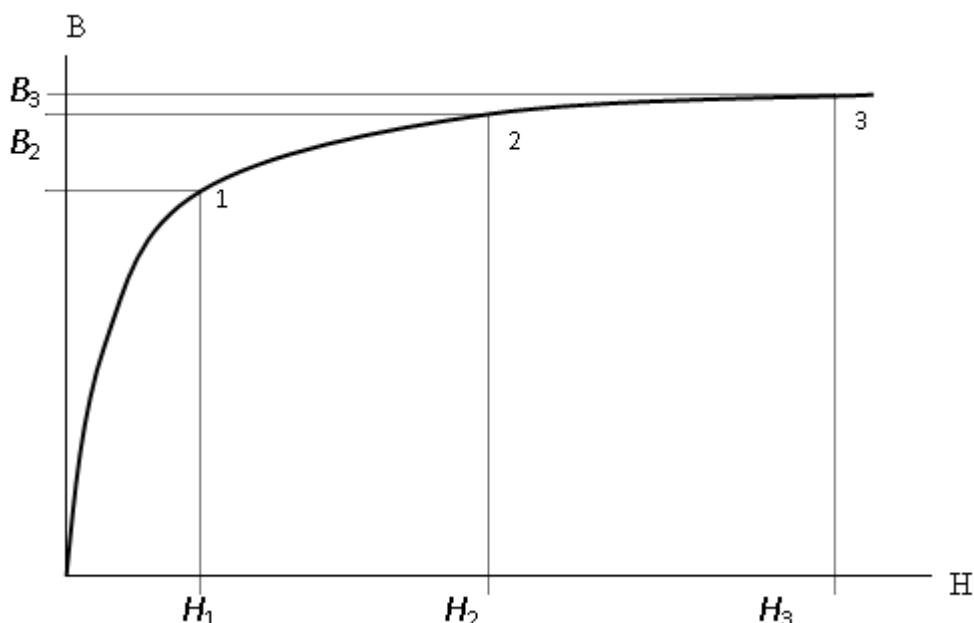


Рисунок 218

Вебер-амперные характеристики (ВАХ)  $U_m=f(\Phi)$  отдельных однородных участков магнитной цепи рассчитывается через их геометрические размеры по основной кривой намагничивания:  $U_m = H \cdot l$ ,  $\Phi = B \cdot S$ . Вследствие пропорциональной зависимости  $U_m \equiv H$  и  $\Phi \equiv B$  графические диаграммы ВАХ отдельных участков магнитной цепи будут в некотором линейном масштабе подобны диаграмме основной кривой намагничивания  $B=f(H)$  (рисунок 218).

В аналитических методах расчета магнитных цепей применяется аппроксимация  $U_m=f(\Phi)$  для отдельных участков. Рассмотрим эту процедуру на примере аппроксимации основной кривой намагничивания  $B=f(H)$  (рисунок 218).

Для аппроксимации ВАХ, симметричных относительно начала координат, используют нечетные математические функции, например, степенной полином с нечетными степенями или уравнение гиперболического синуса:

$$1) x = a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + \dots; \quad 2) x = a \cdot sh(by).$$

Выберем для аппроксимации основной кривой намагничивания степенной полином усеченного вида:  $H = a \cdot B + b \cdot B^n$ . Коэффициенты аппроксимации  $a$ ,  $b$ ,  $n$  можно определить по методу выбранных точек. Для этой цели на графической диаграмме (или в таблице координат) функции  $B=f(H)$  выбираются три точки 1, 2, 3 (по числу определяемых коэффициентов), как показано на рис. 3. и определяются их координаты, например: 1(1,0 Тл, 100 А/м), 2(1,4 Тл, 500А/м), 3(1,5 Тл, 800 А/м). Так как функция  $B=f(H)$  в области насыщения описывается в основном вторым слагаемым  $bB^n$ , то для точек 2 и 3 можно приближенно принять:

$$\begin{cases} H_2 \approx b \cdot B_2^n \\ H_3 \approx b \cdot B_3^n \end{cases} \Rightarrow n = \frac{\ln(H_3/H_2)}{\ln(B_3/B_2)} = \frac{\ln(800/500)}{\ln(1,5/1,4)} = 6,81$$

Так как показатель степени  $n$  должен быть целым нечетным числом, то принимаем  $n=7$ .

Коэффициенты  $a$  и  $b$  определяются из совместного решения системы уравнений для точек 1 и 2:

$$\begin{cases} H_1 = a \cdot B_1 + b \cdot B_1^7 \\ H_2 = a \cdot B_2 + b \cdot B_2^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100 = a \cdot 1,0 + b \cdot 1,0^7 \\ 500 = a \cdot 1,4 + b \cdot 1,4^7 \end{cases} \Rightarrow a = 60,6; b = 39,4$$

Уравнение аппроксимации примет окончательный вид:

$$H = 60,6 \cdot B + 39,4 \cdot B^7.$$

При аппроксимации основной кривой намагничивания уравнением гиперболического синуса  $H = a \cdot sh(b \cdot B)$  коэффициенты аппроксимации определяются также по методу выбранных точек. Используем для этой цели координаты точек 1 и 2:

$$\begin{cases} H_2 = a \cdot sh(b \cdot B_2) \\ H_1 = a \cdot sh(b \cdot B_1) \end{cases}$$

Совместное решение этих уравнений позволяет определить коэффициенты  $a$  и  $b$ :

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{a \cdot sh(b \cdot B_2)}{a \cdot sh(b \cdot B_1)} \approx \frac{e^{b \cdot B_2}}{e^{b \cdot B_1}} = e^{b(B_2 - B_1)}, \text{ откуда следует}$$

$$b = \frac{\ln(H_2/H_1)}{B_2 - B_1} = \frac{\ln(500/100)}{1,4 - 1,0} = 4,02; \quad a = \frac{H_1}{shb \cdot B_1} = \frac{H_2}{shb \cdot B_2} = \frac{100}{sh4,02 \cdot 1,0} = 3,59.$$

Уравнение аппроксимации примет окончательный вид:

$$H = 3,59 \cdot sh(4,02 \cdot B).$$

Уравнения аппроксимации используются в аналитических методах расчета магнитных цепей.

### 15.3 Расчет неразветвленной магнитной цепи

Пусть требуется выполнить расчет магнитной цепи электромагнитного реле, эскизный вид которого и схема магнитной цепи показана на рисунке 217а, б. Будем считать, что геометрические размеры участков и основная кривая намагничивания материала  $B=f(H)$  заданы. Возможны два варианта постановки задачи:

а) по заданному магнитному потоку  $\Phi$  (или индукции  $B$  в заданном сечении) требуется определить ток  $I$  в обмотке – прямая задача;

б) по заданному току в обмотке  $I$  требуется определить магнитный поток  $\Phi$  или индукцию  $B$  в заданном сечении – обратная задача.

Прямая задача сравнительно просто решается аналитическим путем.

Пусть магнитный поток  $\Phi$  известен. Тогда  $B_1 = \frac{\Phi}{S_1}$ ;  $B_2 = \frac{\Phi}{S_2}$ ;  $B_0 = \frac{\Phi}{S_0}$ .

Значения координат  $H_1$  и  $H_2$  находим по заданной кривой намагничивания  $B=f(H)$  для расчетных точек  $B_1$  и  $B_2$ . Значение напряженности поля в зазоре определяем из уравнения  $H_0 = B_0/\mu_0 = 8 \cdot 10^5 \cdot B_0$ .

По 2-ому закону Кирхгофа для схемы замещения находим значение МДС:

$$I \cdot w = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_0 \cdot \delta. \text{ Искомый ток в обмотке равен: } I = \frac{I \cdot w}{w}.$$

Обратная задача решается методом последовательных приближений.

Пусть задан ток в обмотке реле  $I$  и требуется определить магнитный поток  $\Phi$ .

Задаются в первом приближении значением магнитного потока  $\Phi'$  и, решая прямую задачу, определяют значение тока  $I'$  в первом приближении. С учетом неравенства  $I' > < I$  задаются значением магнитного потока  $\Phi''$  во втором приближении и определяют значение тока  $I''$  во втором приближении. Циклы расчета или итерации выполняются до достижения требуемой точности определения искомой величины. Учитывая, что решение прямой задачи является сравнительно простым и нетрудоемким, то и решение обратной задачи, требующее выполнения нескольких циклов расчета, является относительно нетрудоемким и может выполняться вручную, без помощи ЭВМ.

Как прямая, так и обратная задача могут быть решены графически методом сложения ВАХ отдельных участков. Для этой цели на основе заданных кривой намагничивания  $B=f(H)$  и геометрических размеров отдельных участков магнитной цепи ( $l$ ,  $s$ ) производится расчет веберамперных характеристик (ВАХ) для отдельных участков  $U_M = Hl = f(\Phi = BS)$ .

Как правило, расчетные точки ВАХ для всех участков сводят в общую таблицу:

	Вб	Задают	...	...	...	...	...	...	...
$B_1$	Тл	$\Phi/S_1$							
$B_2$	Тл	$\Phi/S_2$							
$B_0$	Тл	$\Phi/S_0$							
$H_1$	А/м	$H_1=f(B_1)$							
$H_2$	А/м	$H_2=f(B_2)$							
$H_0$	А/м	$H_1=8 \cdot 10^5 B_0$							
$U_1$	А	$H_1 l_1$							
$U_2$	А	$H_2 l_2$							
$U_0$	А	$H_0 \delta_0$							
<b>w</b>	А	$\sum Hl$							

По результатам расчета в одной системе координат строятся графические диаграммы ВАХ всех участков (рисунок 219):

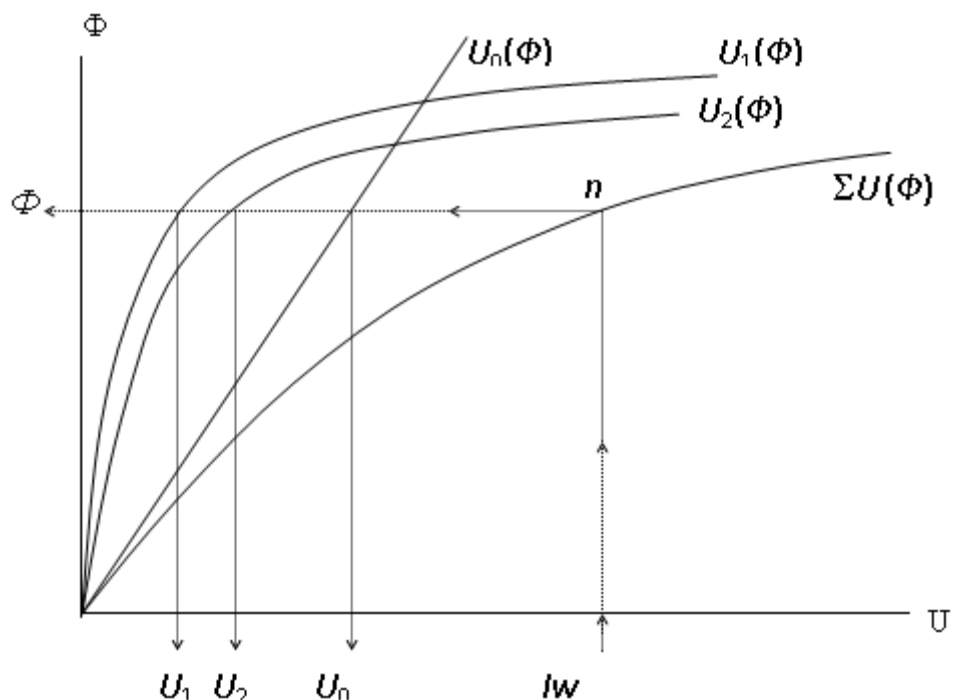


Рисунок 219

Производится графическое сложение ВАХ отдельных участков согласно схеме цепи. В рассматриваемом примере производится последовательное (по оси  $U$ ) сложение ВАХ  $U_1(\Phi)$ ,  $U_2(\Phi)$ , и  $U_0(\Phi)$ , в результате сложения получается входная ВАХ  $\sum U = f(\Phi)$ . На входной ВАХ определяется положение рабочей точки  $n$  для  $\sum U = Iw$  и выполняется графическое решение для всех величин (на рисунке 219 показано стрелками).

## 15.4 Расчет разветвленной магнитной цепи

Расчет разветвленных магнитных цепей может выполняться графическим или аналитическим методами точно так же, как и нелинейных электрических цепей.

**Пример 1.** Заданы геометрические размеры разветвленной магнитной цепи (рисунок 220а) и основная кривая намагничивания  $B=f(H)$  для материала магнитопровода.

Графическое решение задачи выполняется в следующей последовательности.

1. Магнитная цепь разбивается на однородные участки и согласно этой разбивке составляется эквивалентная схема (рисунок 220б).

2. На основе заданных геометрических размеров ( $l$ ,  $S$ ) и основной кривой намагничивания  $B=f(H)$  выполняется расчет ВАХ для каждого выделенного участка цепи по форме  $U_M = Hl = f(\Phi = BS)$ . Результаты расчета ВАХ сводятся для удобства пользования в общую таблицу.

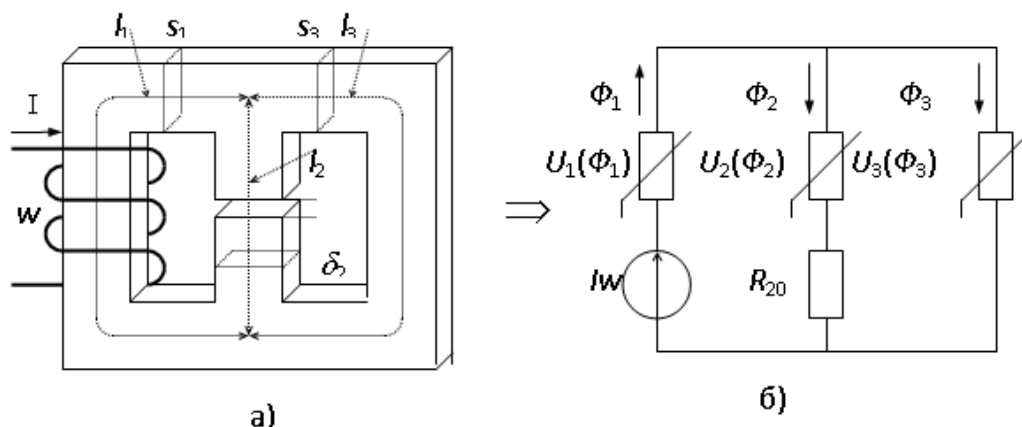


Рисунок 220

3. В одной системе координат в выбранных масштабах для  $\Phi$  и  $U$  строятся графические диаграммы ВАХ для отдельных участков цепи (рисунок 221).

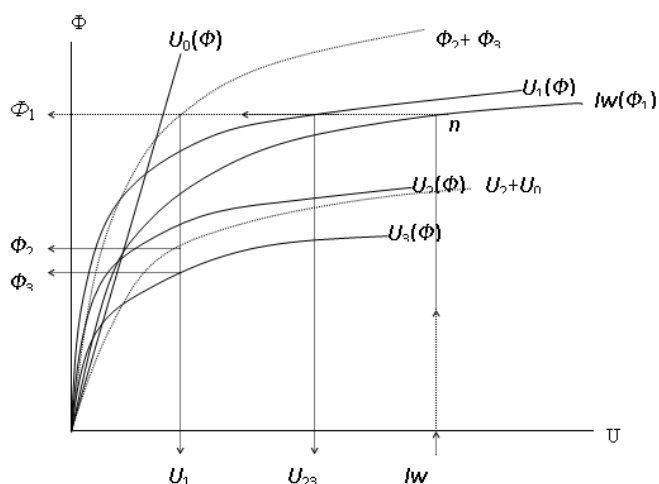


Рисунок 221

4. Выполняется графическое сложение ВАХ отдельных участков в соответствии с порядком свертки эквивалентной схемы:

а). ВАХ  $U_2(\Phi_2)$  и  $U_0(\Phi_2)$  складываются последовательно (по оси  $U$ ), в результате их сложения получается ВАХ  $(U_2 + U_0)$ ;

б). ВАХ  $(U_2 + U_0)$  и  $U_3(\Phi_3)$  складываются параллельно (по оси  $\Phi$ ), в результате их сложения получается ВАХ  $(\Phi_2 + \Phi_3)$ ;

в). ВАХ  $U_1(\Phi_1)$  и  $(\Phi_2 + \Phi_3)$  складываются последовательно (по оси  $U$ ), в результате их сложения получается входная ВАХ  $I_w(\Phi_1)$ ;

5. На входной ВАХ  $I_w(\Phi_1)$  для заданного значения  $I_w$  определяется положение рабочей точки  $n$ , после чего проводится графическое определение остальных величин (решение показано стрелками на рисунке 221).

**Пример 2.** Заданы геометрические размеры разветвленной магнитной цепи (рисунок 222а) и основная кривая намагничивания  $B=f(H)$  для материала магнитопровода.

Аналитическое решение задачи выполняется в следующей последовательности.

1. Магнитная цепь разбивается на однородные участки и согласно этой разбивке составляется эквивалентная схема (рисунок 222б). Направления МДС на схеме определяются по правилу правоходового винта.

2. На основе заданных геометрических размеров ( $l$ ,  $S$ ) и основной кривой намагничивания  $B=f(H)$  выполняется расчет ВАХ для отдельных участков цепи. Результаты расчета ВАХ сводятся для удобства пользования в общую таблицу.

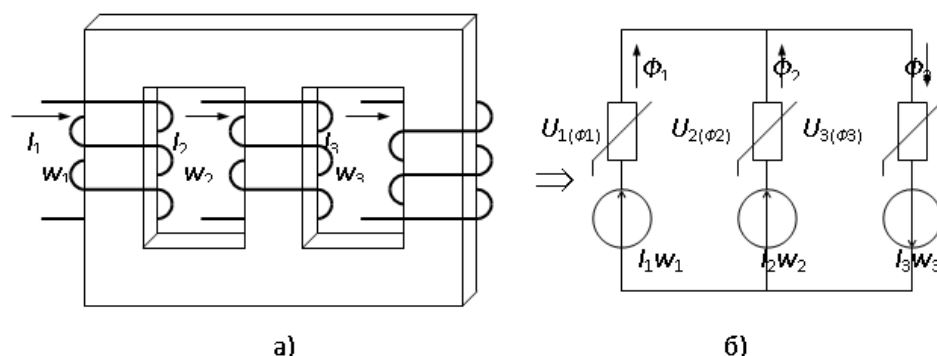


Рисунок 222

3. ВАХ отдельных участков  $[U_1(\Phi_1), U_2(\Phi_2), U_3(\Phi_3)]$  аппроксимируются выбранным уравнением, например, уравнением гиперболического синуса:  $U_1 = a_1 \cdot sh(b_1 \Phi_1)$ ,  $U_2 = a_2 \cdot sh(b_2 \Phi_2)$ ,  $U_3 = a_3 \cdot sh(b_3 \Phi_3)$ , определяются коэффициенты аппроксимации  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ .

4. Составляется система нелинейных уравнений (по законам Кирхгофа или по методу двух узлов) для эквивалентной схемы цепи:

$$U_{ab} = -U_1(\Phi_1) + I_1 w_1 = -a_1 \cdot sh(b_1 \Phi_1) + I_1 w_1 \quad (1)$$

$$U_{ab} = -U_1(\Phi_1) + I_1 w_1 = -a_1 \cdot sh(b_1 \Phi_1) + I_1 w_1 \quad (2)$$

$$U_{ab} = -U_1(\Phi_1) + I_1 w_1 = -a_1 \cdot sh(b_1 \Phi_1) + I_1 w_1 \quad (3)$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \quad (4)$$

5. Система нелинейных алгебраических уравнений решается методом последовательных приближений на ЭВМ. Составляется алгоритм (блок-схема) решения, в соответствии с которым составляется программа. Один из возможных вариантов алгоритма вычислений для рассматриваемого примера приведен ниже.

1) Задаются в первом приближении магнитным напряжением между узлами схемы  $U_{ab1}$  (начало главного цикла).

2) Для решения нелинейного уравнения (1) создается 1-й частный цикл вычислений: задаются  $\Phi'_1$  (первое приближение); из (1)  $\Rightarrow U'_{ab1}$ ;  $U'_{ab1} > < U_{ab1}$ ; задаются  $\Phi''_{ab1}$  и т.д., в итоге находят  $\Phi_{11}$ .

3) Для решения нелинейного уравнения (2) создается 2-й частный цикл вычислений: задаются  $\Phi'_2$  (первое приближение); из (2)  $\Rightarrow U'_{ab1}$ ;  $U'_{ab1} > < U_{ab1}$ ; задаются  $\Phi''_{ab1}$  и т.д., в итоге находят  $\Phi_{21}$ .

4) Для решения нелинейного уравнения (3) создается 3-й частный цикл вычислений: задаются  $\Phi'_3$  (первое приближение); из (3)  $\Rightarrow U'_{ab1}$ ;  $U'_{ab1} > < U_{ab1}$ ; задаются  $\Phi''_{ab1}$  и т.д., в итоге находят  $\Phi_{31}$ .

5) Решается уравнение (4):  $\Phi_{11} + \Phi_{21} - \Phi_{31} > < 0$  (конец главного цикла).

Задаются  $U_{ab2}$  (второе приближение) и повторяют вычисления до достижения требуемой точности.

В соответствии с алгоритмом составляется программа вычислений на любом алгоритмическом языке для ЭВМ.

Решение рассматриваемой задачи может быть выполнено графически подобно примеру 1.

Недостатками графического метода расчета являются его низкая точность и большая трудоемкость. С другой стороны, решение той же задачи на ЭВМ методом последовательных приближений требует дополнительных затрат на составление и отладку программы для ЭВМ.

## 15. 5. Расчет магнитной цепи с постоянным магнитом

Постоянные магниты находят применение в автоматике, измерительной технике и других отраслях для получения постоянных магнитных полей. В основе их принципа действия лежит физическое явление остаточного намагничивания. Известно, что любой ферромагнитный материал, будучи намагниченным от внешнего источника, способен сохранять некоторые остатки магнитного поля после снятия внешней намагничивающей силы. Ферромагнитные материалы, способные длительное время сохранять остаточное поле, получили название магнитотвердых. К таким материалам относятся сплавы из ферромагнитных металлов магнито-

(Ma, Ni, Co) и альнико (Al, Ni, Co). Из магнитотвердых материалов изготавливаются постоянные магниты различных конструктивных форм.

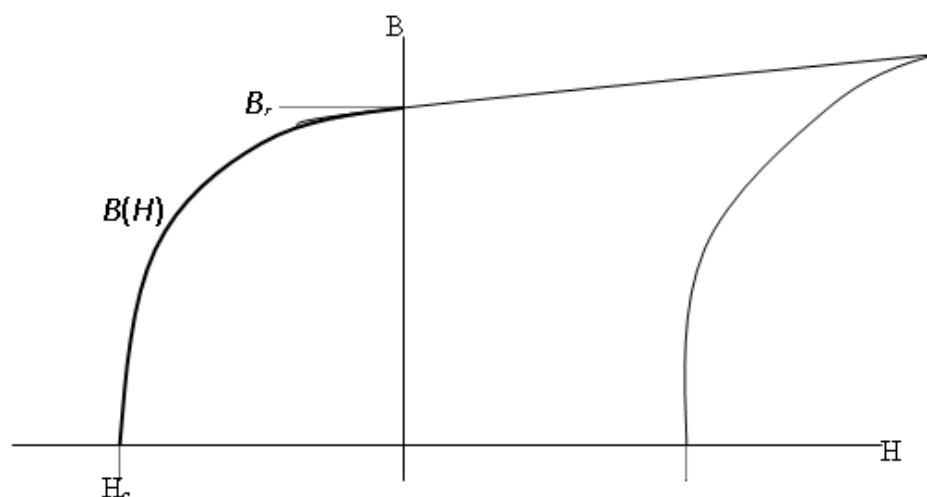


Рисунок 223

Ферромагнитные материалы, имеют широкую петлю гистерезиса (рисунок 223), стенка которой и является кривой размагничивания  $B(H)$  и приводится в справочной литературе.

Пусть требуется рассчитать магнитную цепь, состоящую из постоянного магнита ( $l_1, S_1$ ), магнитопровода ( $l_2, S_2$ ) и зазора ( $S_2, \delta$ ) (рисунок 224а). Геометрические размеры, кривая размагничивания для постоянного магнита  $B_1(H_1)$  и основная кривая намагничивания  $B_2(H_2)$  для магнитопровода заданы. Схема замещения цепи представлена на рисунке 224б.

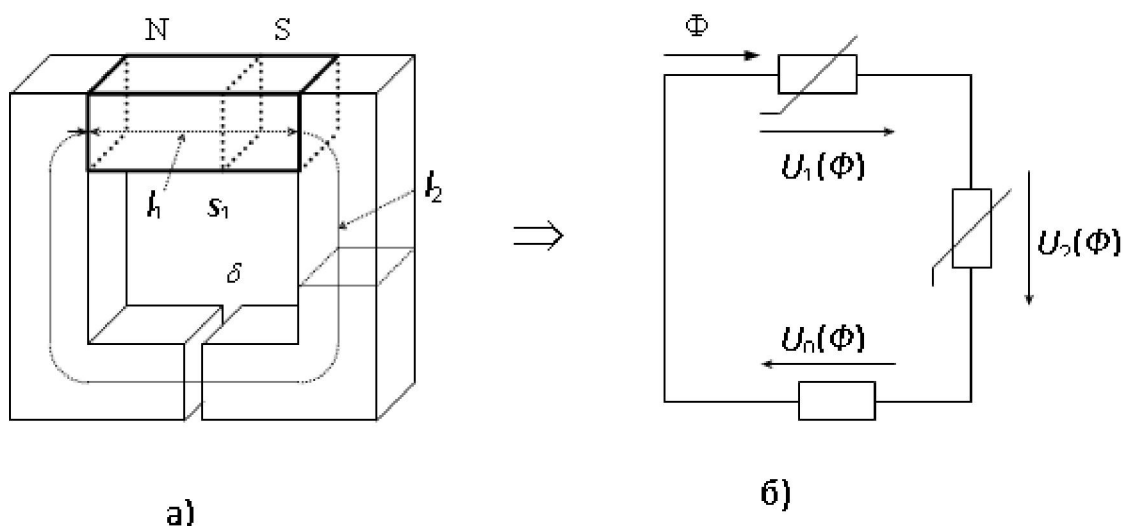


Рисунок 224

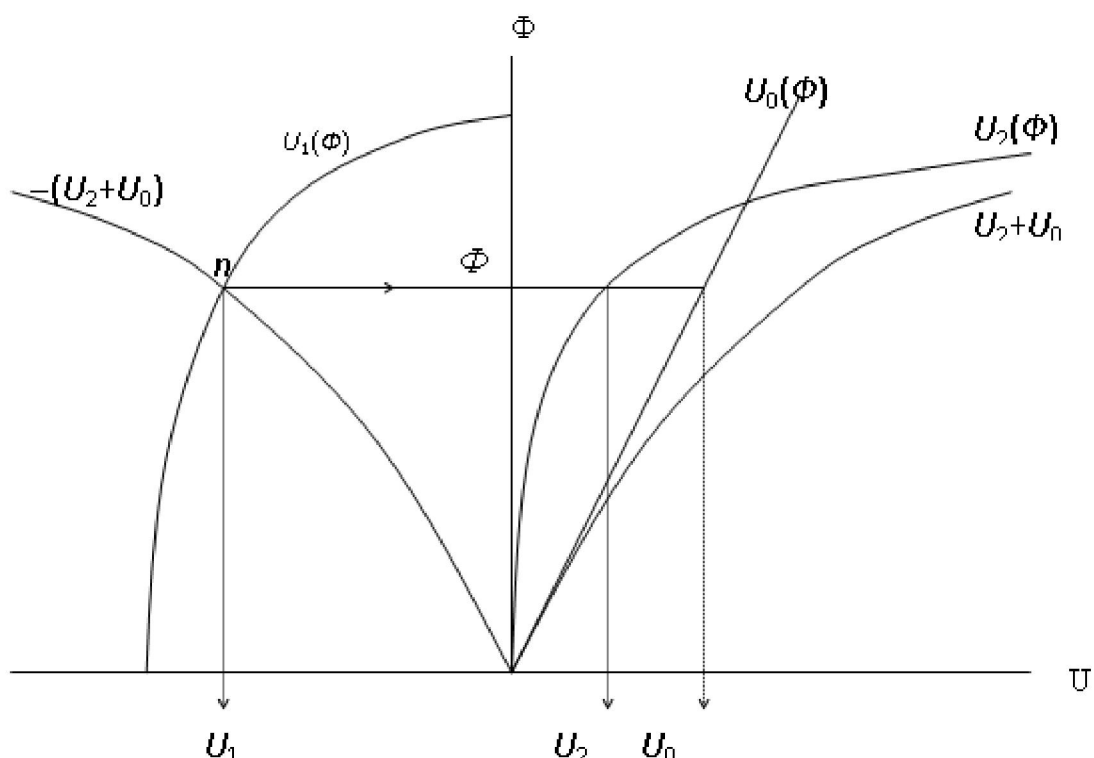


Рисунок 225

Ниже приводится графическое решение задачи.

1. На основе заданных геометрических размеров ( $l$ ,  $s$ ) и кривых намагничивания  $B=f(H)$  производится расчет ВАХ для отдельных участков цепи:  $U_1(\Phi)$ ,  $U_2(\Phi)$  и  $U_0(\Phi)$ .

2. В одной системе координат в выбранных масштабах строятся графические диаграммы ВАХ отдельных участков (рисунок 225).

3. По 2-ому закону Кирхгофа для схемы цепи:  $U_1(\Phi) + U_2(\Phi) + U_0(\Phi) = 0$  или  $U_1(\Phi) = -(U_2(\Phi) + U_0(\Phi))$ . Согласно полученному уравнению складываются последовательно (по оси  $U$ ) ВАХ  $U_2(\Phi)$  и  $U_0(\Phi)$ , в результате сложения получается ВАХ  $(U_2 + U_0)$ . Полученная суммарная ВАХ обращается относительно оси  $\Phi$  (знак  $-$ ) (рисунок 225). Точка пересечения обращенной ВАХ с ВАХ  $U_1(\Phi)$  определяет положение рабочей точки  $n$ . Дальнейшее решение задачи показана стрелками.

## 16 Нелинейные цепи переменного тока

### 16.1 Общая характеристика нелинейных цепей переменного тока и методов их исследования

Нелинейные цепи переменного тока могут содержать в своей структуре нелинейные элементы любого рода: нелинейные резисторы  $u(i)$ , нелинейные катушки  $\psi(i)$  и нелинейные конденсаторы  $q(u)$ . Физические характеристики

нелинейных элементов на переменном токе могут существенно отличаться от их аналогичных характеристик на постоянном токе.

Существуют нелинейные элементы, у которых время установления режима соизмеримо с периодом переменного тока, т.е. проявляется инерционность. По этому показателю все нелинейные элементы разделяют на инерционные и безинерционные.

К инерционным относятся те нелинейные элементы, нелинейность характеристик которых обусловлена температурным режимом (лампы накаливания, термисторы). Установление температурного режима в таких элементах требует некоторого времени. Температура и, следовательно, сопротивление такого элемента определяется действующим значением тока в нем. Таким образом, для действующих значений тока и напряжения инерционный элемент является нелинейным, а для мгновенных значений в интервале периода – линейным.

Физические характеристики безинерционных нелинейных элементов остаются практически неизменными в широком диапазоне частот. Нелинейность таких элементов проявляется как для действующих, так и для мгновенных значений величин. Нелинейность физических характеристик приводит к искажению форм кривых физических величин на зажимах таких элементов. Так, например, при синусоидальном напряжении на зажимах безинерционного нелинейного резистора ток в нем будет несинусоидальным и, наоборот, при синусоидальном токе напряжение на его зажимах будет несинусоидальным. К безинерционным нелинейным элементам относят полупроводниковые приборы: диоды, туннельные диоды, транзисторы, стабилитроны, тиристоры и др.

Статическими характеристиками нелинейных элементов называются соответствующие зависимости  $u(i)$  – для резистора,  $\psi(i)$  – для катушки,  $q(u)$  – для конденсатора, полученные при медленном изменении переменных.

Динамическими характеристиками нелинейных элементов называются те же зависимости  $u(i)$ ,  $\psi(i)$ ,  $q(u)$ , но полученные при быстрых изменениях переменных.

При сравнительно невысоких частотах динамические характеристики практически совпадают со статическими. Существенные различия этих характеристик начинают проявляться в области высоких частот (радиочастот).

Электромагнитные процессы в нелинейной цепи переменного тока могут быть описаны системой нелинейных дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по уравнениям Кирхгофа. В математике не существует общих методов решения таких систем уравнений и, следовательно, не существует общих методов расчета нелинейных цепей переменного тока.

Все задачи по расчету нелинейных цепей переменного тока в установившемся режиме можно разделить на две группы.

К первой группе задач относятся такие, в которых целью расчета является определение действующих значений токов и напряжений. Такие

задачи встречаются в электроэнергетике, где искажение форм кривых токов и напряжений незначительны и не играют существенную роль, а определяются действующие значения этих величин.

Ко второй группе задач относятся такие, в которых целью расчета является определение мгновенных значений токов и напряжений, а также форм кривых и гармонических спектров функций. Такие задачи встречаются в электронике, где принцип действия устройств основан на преобразовании форм кривых переменных с помощью нелинейных характеристик элементов.

Методы решения задач первой и второй групп могут существенно отличаться.

## 16.2 Замена несинусоидальных функций $u(t)$ и $i(t)$ эквивалентными синусоидальными

В электрических цепях электроэнергетики, содержащих нелинейные элементы, искажение форм кривых токов и напряжений незначительны, играют второстепенную роль и ими можно пренебречь. Для исследования таких цепей можно применять так называемый метод эквивалентных синусоид. Сущность метода состоит в том, что при незначительных искажениях форм кривых несинусоидальные функции токов и напряжений  $i(t)$  и  $u(t)$  заменяются эквивалентными по действующему значению синусоидальными функциями (рисунок 226а, б).

При малых искажениях форм кривых высшие гармоники практически не влияют на величину действующего значения функции, поэтому действующее значение несинусоидальной функции практически равно действующему значению ее первой гармоники.

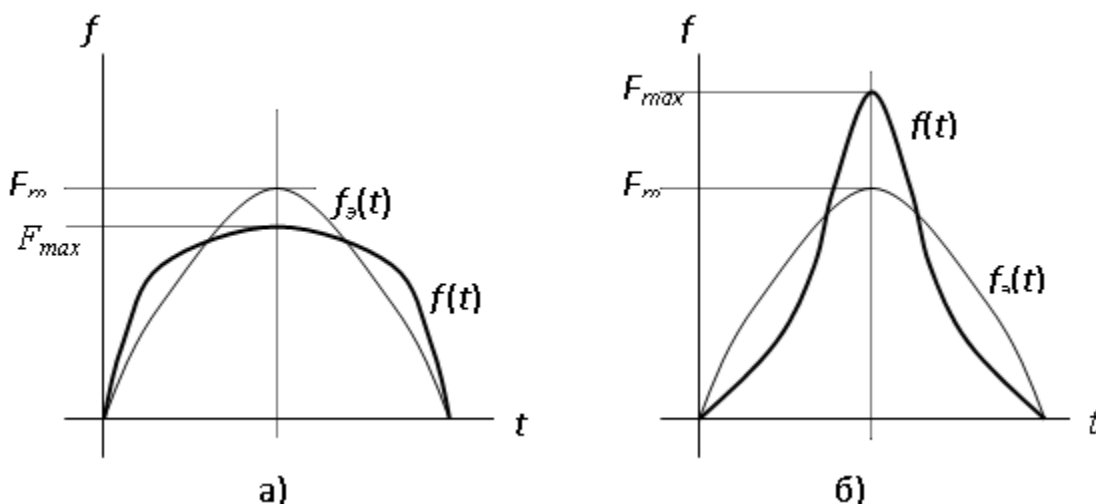


Рисунок 226

При переходе к эквивалентным синусоидам происходит полная потеря информации о формах кривых функций, их гармонических составах, максимумах и минимумах и т. д.

При расчете нелинейных цепей методом эквивалентных синусоид физические характеристики нелинейных элементов  $u(t)$  – для резистора,  $\psi(i)$  – для катушки и  $q(u)$  – для конденсатора заменяются расчетными вольтамперными характеристиками  $U(I)$  или  $I(U)$  для действующих значений эквивалентных синусоидальных величин. Расчетные ВАХ для конкретных линейных элементов могут быть получены экспериментально путем проведения измерений действующих значений  $U$  и  $I$  в произвольном режиме. Если заданы физические характеристики для мгновенных значений величин, то соответствующие ВАХ могут быть получены расчетным путем для синусоидального режима по напряжению или току. Например, пусть веберамперная характеристика нелинейной катушки выражается уравнением  $i(\psi) = a\psi + b\psi^5$ . При синусоидальном напряжении на зажимах катушки  $u(t) = U_m \sin(\omega t - 90^\circ)$  ее потокосцепление также будет изменяться по синусоидальному закону :

$$\psi(t) = \int u \cdot dt = \frac{U_m}{\omega} \cdot \sin \omega t = \Psi_m \cdot \sin \omega t, \text{ где } \Psi_m = \frac{U_m}{\omega}.$$

Закон изменения тока в катушке получим из уравнения аппроксимации:

$$i(t) = a\psi + b\psi^5 = a\Psi_m \cdot \sin \omega t + b\Psi_m^5 \sin^5 \omega t = \dots = I_{1m} \sin \omega t - I_{3m} \sin 3\omega t + I_{5m} \sin 5\omega t$$

$$\text{Действующее значение тока будет равно: } I = \sqrt{\frac{1}{2}(I_{1m}^2 + I_{3m}^2 + I_{5m}^2)}.$$

Следует иметь в виду тот факт, что ВАХ  $U(I)$  нелинейных элементов, снятые экспериментально или полученные расчетным путем, соответствуют определенному режиму, при котором они были получены, например, синусоидальному напряжению. В условиях конкретной цепи напряжение на этих элементах могут существенно отличаться от синусоидальной формы, поэтому реальные ВАХ могут несущественно отличаться от экспериментальных или расчетных.

### 16.3 Методы расчета нелинейных цепей переменного тока на основе ВАХ для эквивалентных синусоид

Замена несинусоидальных функций  $i(t)$  и  $u(t)$  эквивалентными синусоидальными позволяет применить к расчету нелинейных цепей переменного тока комплексный метод со всеми вытекающими из него преимуществами.

В простейших случаях, когда схема цепи состоит только из последовательно или только из параллельно включенных элементов, решение задачи может быть выполнено графически методом сложения ВАХ. Отличительной особенностью данного метода является то обстоятельство, что отдельные ВАХ складываются не арифметически, как это имело место в цепях постоянного тока, а векторно в соответствии с уравнениями Кирхгофа в комплексной (векторной) форме.

Пусть требуется рассчитать режим нелинейной цепи с последовательным соединением источника ЭДС  $E$ , линейного резистора  $R$  и нелинейной катушки с ВАХ  $U_L(I)$  (рисунок 227а)

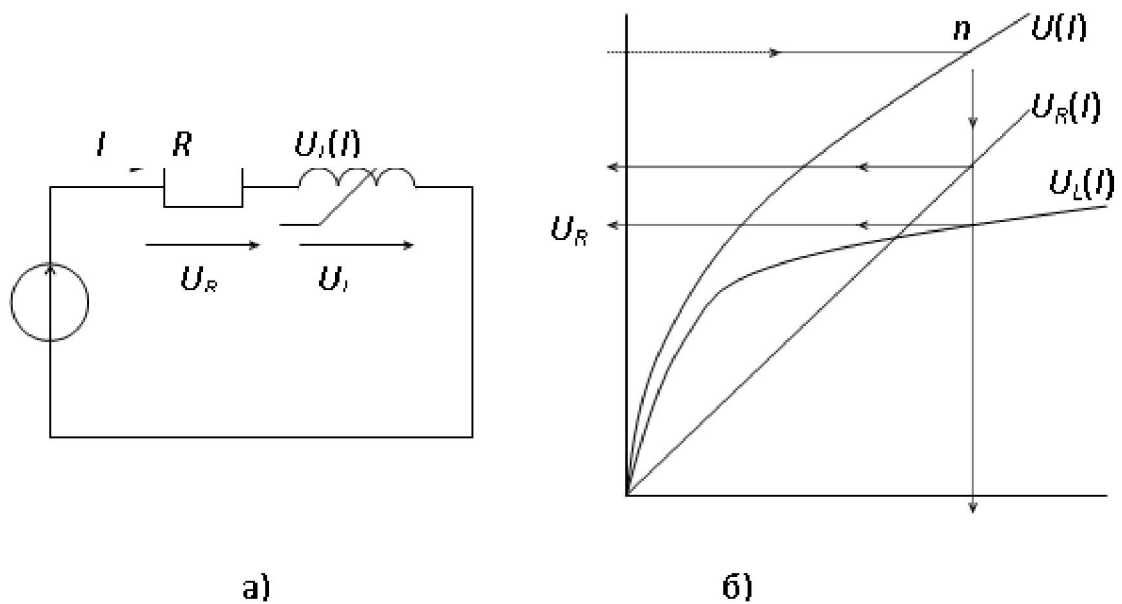


Рисунок 227

Построим в одной системе координат  $U-I$  графические диаграммы ВАХ отдельных элементов: резистора  $U_R=IR$  и катушки  $U_L(I)$ . Векторное сложение ВАХ отдельных элементов по оси  $U$  следует выполнить в соответствии со вторым законом Кирхгофа  $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$ , в результате сложения получим результирующую ВАХ  $U(I)$  (рисунок 227б). Положение рабочей точки  $n$  на результирующей ВАХ определяется условием  $U=E$ . Последовательность графического решения показана на рисунке 227б стрелками.

Та же задача может быть решена аналитически методом последовательных приближений. Так как в аналитических методах расчета используется математическая форма ВАХ, то заданную ВАХ нелинейной катушки аппроксимируем одним из уравнений, например  $I=aU+bU^5$ .

Составляется схема вычислений:

$U'_L$  – задаются в первом приближении. Далее следуют вычисления:

$$I' = aU'_L + bU'^5_L \rightarrow U'_R = RI' \rightarrow E' = \sqrt{U'^2_R + U'^2_L} \rightarrow E' > E \rightarrow U''$$

и т.д. до достижения требуемой точности, например,  $\delta = \frac{|E - E'|}{E} < 0,01$ .

Метод последовательных приближений применим к расчету схем любой сложности. Вычисления в отдельном цикле для сложных схем выполняются в комплексной форме. В качестве примера приведем расчет схемы (рисунок 228). Заданы параметры линейных элементов  $E, R, X_C$ . ВАХ нелинейных элементов заданы аналитически в виде уравнений аппроксимации:  $U_R = aI + bI^3$ ;  $I_L = cU + dU^5$ .

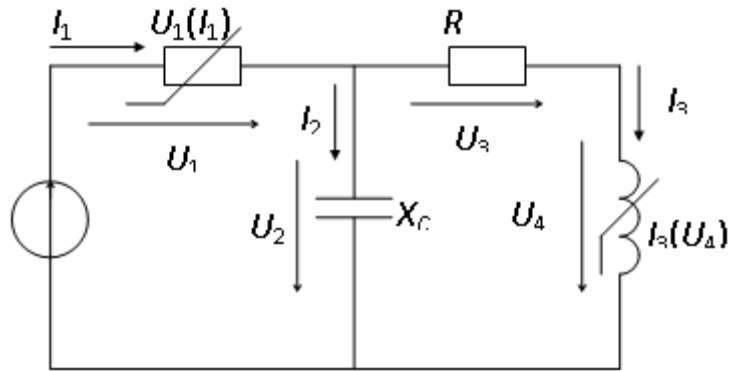


Рисунок 228

Для исследуемой схемы система комплексных уравнений Кирхгофа совместно с уравнениями аппроксимации имеет вид:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \quad (1) \\ \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{E} \quad (2) \\ -\underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \underline{U}_4 = 0 \quad (3) \\ \underline{U}_2 = a\underline{I}_1 + b\underline{I}_1^3 \quad (4) \\ \underline{I}_3 = c\underline{U}_4 + d\underline{U}_4^5 \quad (5) \end{cases}$$

Один из вариантов решения полученной системы уравнений методом последовательных приближений представлен ниже.

1) Задаются в первом приближении комплексным напряжением на нелинейной катушке, например:  $\underline{U}'_4 = 50e^{j0}$ .

2) Определяется модуль тока  $I'_3$  аналитически из уравнения (5) или графически по диаграмме функции  $I_L(U_L)$ . Аргумент этого комплекса принимается равным  $-90^\circ$  (в катушке ток отстает от напряжения на угол  $\varphi=90^\circ$ ). В комплексной форме  $\underline{I}'_3 = I'_3 \cdot e^{-j90}$ .

3) Определяется напряжение на линейном резисторе по закону Ома:  $\underline{U}'_3 = \underline{I}'_3 \cdot R$ .

4) Из уравнения (3) находится напряжение на конденсаторе:  $\underline{U}'_2 = \underline{U}'_3 + \underline{U}'_4$ .

5) По закону Ома определяется ток конденсатора:  $\underline{I}'_2 = \frac{\underline{U}'_2}{-jX_c}$ .

6) Из уравнения (1) находится ток источника  $\underline{I}'_1 = \underline{I}'_2 + \underline{I}'_3 = I'_1 \cdot e^{j\alpha}$ .

7) Определяется модуль напряжения  $U'_1$  аналитически из уравнения (4) или графически по диаграмме функции  $U_R(I_R)$ . Аргумент этого комплекса принимается равным аргументу комплекса тока  $\underline{I}'_1$  (в резисторе ток совпадает с напряжением). В комплексной форме  $\underline{U}'_1 = U'_1 \cdot e^{j\alpha}$ .

8) Из уравнения (2) находится расчетное значение ЭДС:  $\underline{E}' = \underline{U}'_1 + \underline{U}'_2 = E' \cdot e^{j\beta}$ .

9) Сравнивают найденное в первом приближении значение модуля ЭДС  $E'$  с заданным значением ЭДС  $E$  и с учетом вида полученного неравенства  $E' > < E$  задаются новым значением напряжения  $U''_4$  во втором приближении и повторяют расчет по тому же алгоритму. Циклы расчета (итерации) повторяют до достижения желаемой точности. В результатах последнего цикла корректируют аргументы комплексных токов и напряжений путем добавления к ним значения  $-\beta$ .

## 16.4 Резонансные явления в нелинейных цепях

Резонанс в цепи, содержащей нелинейную катушку с ферромагнитным сердечником и линейный конденсатор, получил название феррорезонанса. Для качественного исследования явления феррорезонанса воспользуемся методом эквивалентных синусоид.

Феррорезонанс напряжений будет иметь место в схеме с последовательным соединением элементов (рисунок 229а) при выполнении условия  $U_L = U_C$ .

Графический расчет схемы представлен на рисунке 229б. Векторное сложение ВАХ отдельных элементов  $U_R(I)$ ,  $U_L(I)$  и  $U_C(I)$  производится в соответствии с уравнением 2-го закона Кирхгофа  $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$ .

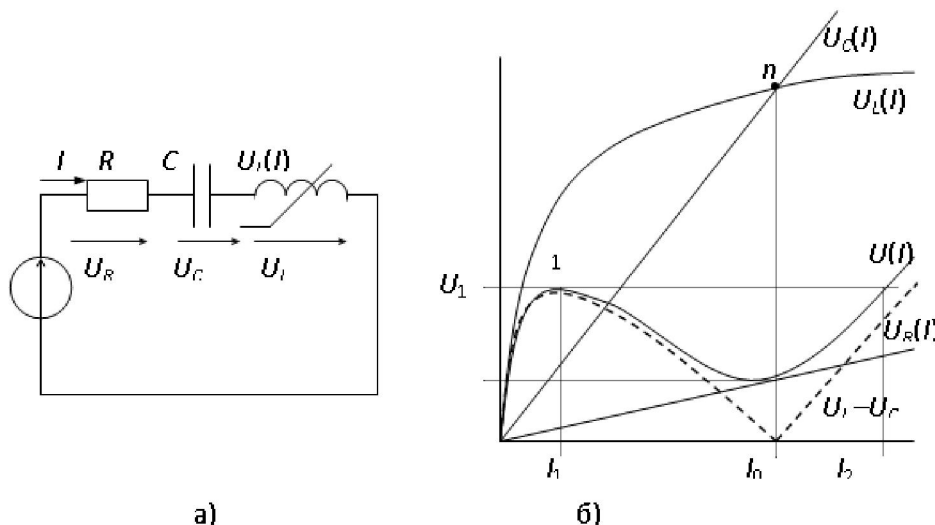


Рисунок 229

При плавном повышении напряжения от 0 до  $U_1$  ток будет также плавно изменяться от 0 до  $I_1$ . При  $U=U_1$  произойдет скачкообразное изменение тока от  $I_1$  до  $I_2$ . При последующем повышении напряжения будет наблюдаться опять плавное изменение тока. При плавном уменьшении напряжения обратный скачок тока от  $I_0$  до  $I_3$  произойдет при напряжении  $U=U_0$ . Участок ВАХ 1–0 с отрицательным дифференциальным сопротивлением является участком с неустойчивым режимом работы и при питании цепи от источника ЭДС экспериментально не может быть зафиксирован. Если питать цепь от источника тока  $J$ , то можно получить все

точки ВАХ, включая и неустойчивый участок 1–0. Резонансу напряжений на результирующей ВАХ соответствует точка 0, для которой выполняется условие  $U_L = U_C$ . Таким образом, исследуемая нелинейная цепь обладает следующими свойствами, нехарактерными для линейной цепи: 1) резонансный режим в цепи достигается изменением приложенного к ней напряжения; 2) в цепи могут иметь место скачкообразные изменения тока или триггерный эффект; 3) при одном и том же напряжении источника в цепи могут наблюдаться три различных режима, один из которых неустойчивый.

При параллельном соединении тех же элементов в цепи будет наблюдаться феррорезонанс токов. На рисунке 230а представлена схема цепи, а на рисунке 230б ее графический расчет.

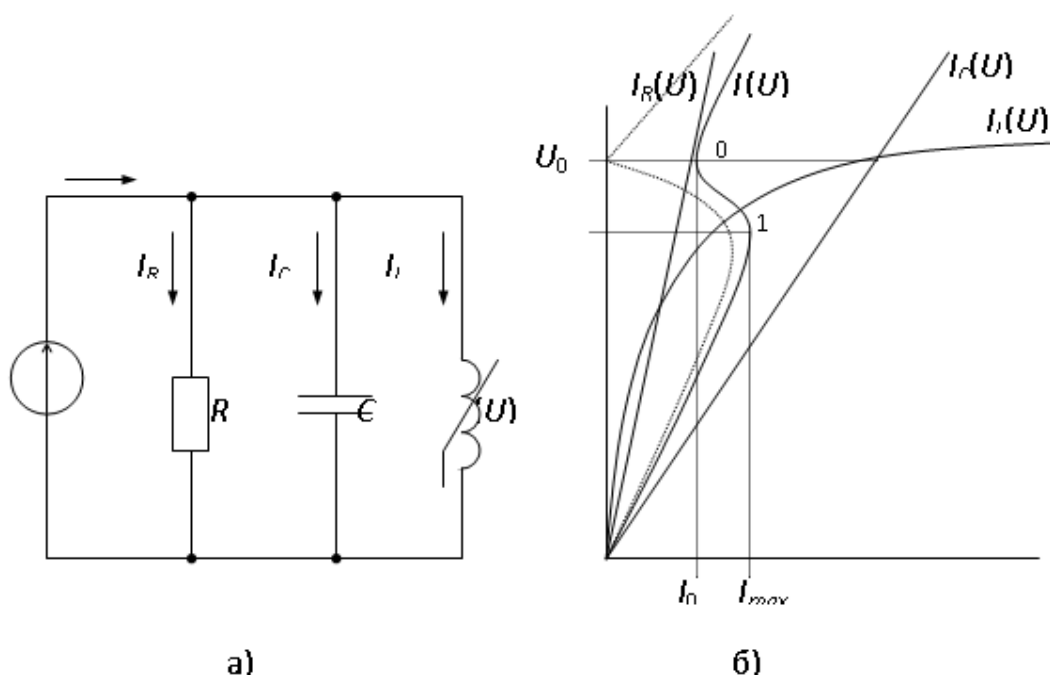


Рисунок 230

Векторное сложение ВАХ отдельных элементов  $I_R(U)$ ,  $I_C(U)$ ,  $I_L(U)$  производится в соответствии с уравнением 1-го закона Кирхгофа:

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}.$$

При плавном увеличении напряжения ток вначале плавно увеличивается до значения  $I_1$ , затем уменьшается до значения  $I_0$ , после чего наблюдается его быстрый рост. Резонансному режиму соответствует точка 0 на результирующей ВАХ, для которой соблюдается условие  $I_L = I_C$ .

При питании цепи от источника тока  $J$  будут наблюдаться скачкообразные изменения напряжения на ее входе.

## 16. 5. Нелинейная катушка с сердечником на переменном токе

Рассмотрим физические процессы, протекающие в катушке с сердечником на переменном токе (рисунок 231а).

Протекающий по обмотке  $w$  ток  $i$  создает магнитный поток  $\phi$ , большая часть которого (основной поток)  $\phi_0$  замыкается по сердечнику, и незначительная часть (поток рассеяния)  $\phi_s$  – по воздуху. Основной поток  $\phi_0$  нелинейно зависит от тока  $i$ , а поток рассеяния пропорционален току, следовательно:  $L_s = \frac{\phi_s \cdot w}{i} = \frac{\psi_s}{i} = \text{const}$  – индуктивность рассеяния.

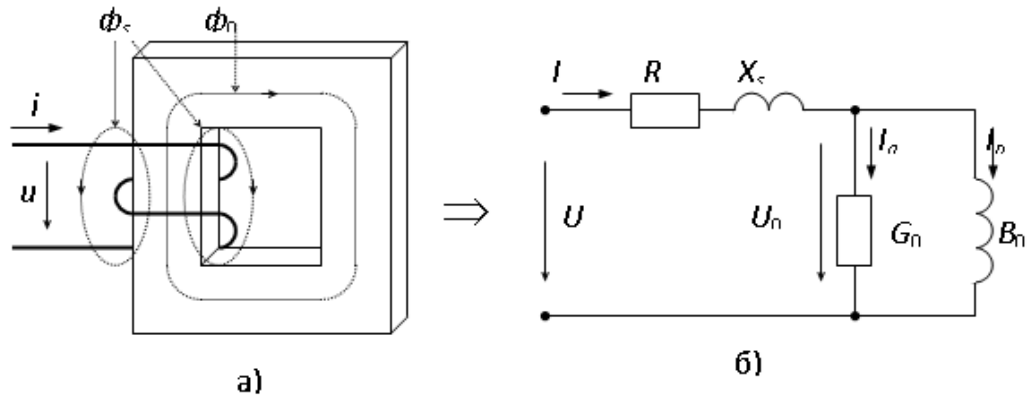


Рисунок 231

Протекающий по обмотке  $w$  ток  $i$  создает магнитный поток  $\phi$ , большая часть которого (основной поток)  $\phi_0$  замыкается по сердечнику, и незначительная часть (поток рассеяния)  $\phi_s$  – по воздуху. Основной поток  $\phi_0$  нелинейно зависит от тока  $i$ , а поток рассеяния пропорционален току, следовательно:  $L_s = \frac{\phi_s \cdot w}{i} = \frac{\psi_s}{i} = \text{const}$  – индуктивность рассеяния.

Электрическое состояние цепи можно описать нелинейным дифференциальным уравнением:

$$u = Ri + \frac{d\psi}{dt} = Ri + \frac{d\psi_s}{dt} + \frac{d\psi_0}{dt} = Ri + L_s \frac{di}{dt} + w \frac{d\phi_0}{dt} = Ri + L_s \frac{di}{dt} + u_0 .$$

При синусоидальном напряжении на зажимах искажения форм кривых других переменных ( $i$ ,  $\phi_0$ ) будут незначительны, поэтому для исследования режима катушки можно применить метод эквивалентных синусоид.

Уравнение цепи в комплексной форме получит вид:

$$\underline{U}_m = R \underline{I}_m + j\omega L_s \underline{I}_m + j\omega w \Phi_{0m} = \underline{I}_m (R + jX_s) + \underline{U}_{0m} - \text{для комплексных амплитуд;}$$

$$\underline{U} = \underline{I}(R + jX_s) + \underline{U}_0 - \text{для комплексных действующих значений.}$$

Данному уравнению соответствует эквивалентная схема замещения катушки с сердечником (рисунок 231б), в которой приняты следующие обозначения:  $R$ ,  $X_s$  – активное и реактивное (рассеяния) сопротивления обмотки катушки;  $G_0$ ,  $B_0$  – активная и реактивная проводимости, вносимые сердечником, значения которых для конкретной катушки определяются через

$$(B_0 = \frac{Q_{cm}}{U_0^2}).$$

Векторная диаграмма для схемы замещения показана на рисунке 232:

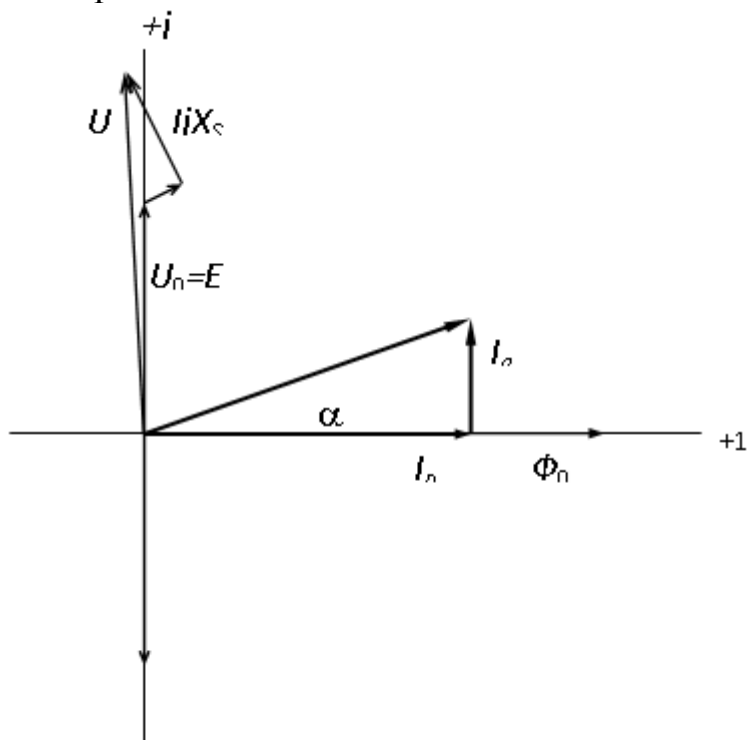


Рисунок 232

Вследствие наличия потерь в сердечнике, магнитный поток  $\Phi_0$  будет отставать от тока  $I_n$  на угол  $\alpha$ , который принято называть углом потерь.

## 16.6 Трансформатор с сердечником и его схема замещения

Картина распределения магнитных потоков в трансформаторе с сердечником показана на рисунке 233:

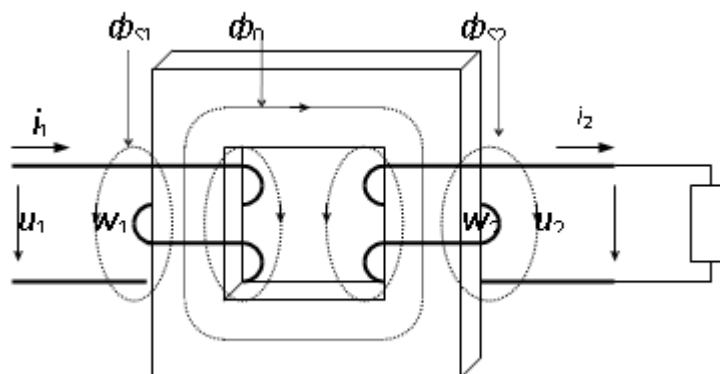


Рисунок 233

$L_{S1} = \frac{w_1 \cdot \phi_{S1}}{i_1}$  – индуктивность рассеяния первичной обмотки,

$L_{S2} = \frac{w_2 \cdot \phi_{S2}}{i_2}$  – индуктивность рассеяния вторичной обмотки.

Основной поток  $\phi_0$ , замыкающийся по сердечнику, создается с суммарной МДС, с которой он связан нелинейно:  $F = i_1 w_1 + i_2 w_2$ .

Дифференциальные уравнения для первичной и вторичной цепей:

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_{S1} \frac{di_1}{dt} + w_1 \frac{d\phi_0}{dt} \\ R_2 i_2 + L_{S2} \frac{di_2}{dt} + w_2 \frac{d\phi_0}{dt} + u_2 = 0 \end{cases}$$

Введем обозначения:  $e_1 = -w_1 \frac{d\phi_0}{dt}$ ,  $e_2 = -w_2 \frac{d\phi_0}{dt}$ , тогда уравнения примут вид:

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_{S1} \frac{di_1}{dt} - e_1 \\ e_2 = R_2 i_2 + L_{S2} \frac{di_2}{dt} + u_2 \end{cases}$$

Анализ полученных уравнений показывает, что ЭДС в первичной цепи  $e_1$  направлена навстречу приложенному уравнению  $u_1$  и уравнивает большую его часть, т.е. играет роль противодействующей ЭДС, а ЭДС во вторичной цепи  $e_2$  создает ток  $i_2$ , т.е. играет роль генераторной ЭДС.

Применим к уравнениям трансформатора методом эквивалентных синусоид и запишем их в комплексной форме:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_1 jX_{S1} - \underline{E}_1 = (R_1 + jX_{S1})\underline{I}_1 - \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 = \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_2 jX_{S2} + \underline{U}_2 = (R_2 + jX_{S2})\underline{I}_2 + \underline{U}_2 \end{cases}$$

Если числа витков обмоток существенно отличаются, т.е. коэффициент трансформации  $k_T = \frac{w_1}{w_2} \gg 1$ , то все переменные величины вторичной цепи «приводят» к первичной цепи. Приведение заключается в замене реального трансформатора с  $k_T = \frac{w_1}{w_2} \gg 1$  эквивалентным расчетным трансформатором

с коэффициентом трансформации  $k_T = \frac{w_1}{w_2} = 1$ . Все приведенные величины обозначаются штрихом сверху. Условием эквивалентности приведенной схемы являются:

- 1) сохранение без изменения намагничивающей силы  $F_2 = I_2 w_2 = I'_2 w'_2$ ;
- 2) сохранение без изменения мощности  $S_2 = U_2 I_2 = U'_2 I'_2$ .

Формулы приведения:

$$\begin{aligned}
 1) \quad w'_2 &= w_1 - \text{согласно условию;} \\
 2) \quad I'_2 w'_2 &= I_2 w_2 \Rightarrow I'_2 = I_2 \frac{w_2}{w'_2} = \frac{1}{k_T} I_2; \\
 3) \quad U'_2 I'_2 &= U_2 I_2 \Rightarrow U'_2 = U_2 \frac{I_2}{I'_2} = k_T U_2; \\
 4) \quad Z'_2 &= \frac{U'_2}{I'_2} = \frac{k_T U_2}{\frac{1}{k_T} I_2} = k_T^2 Z_2; \\
 5) \quad Y'_2 &= 1/Z'_2 = \frac{1}{k_T^2} Y_2.
 \end{aligned}$$

Уравнения приведенного трансформатора получают вид:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + jX_{S1})\underline{I}_1 - \underline{E}_1 \\ \underline{E}'_2 = (R'_2 + jX'_{S2})\underline{I}'_2 + \underline{U}'_2 \end{cases}$$

Этим уравнениям соответствует схема замещения (рисунок 234):

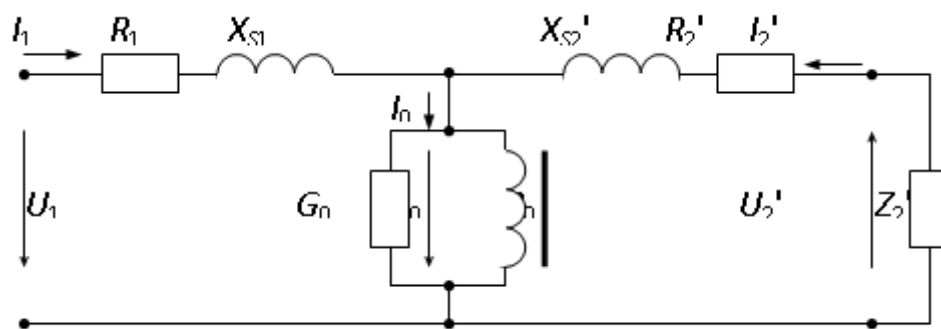


Рисунок 234

Основной магнитный поток  $\Phi_0$  создается суммой МДС обеих обмоток. По закону Ома для магнитной цепи:

$$\underline{\Phi}_0 = \frac{\underline{I}_1 w_1 + \underline{I}'_2 w'_2}{\underline{Z}_M} = \frac{(\underline{I}_1 + \underline{I}'_2) w_1}{\underline{Z}_M} = \frac{\underline{I}_0 w_1}{\underline{Z}_M},$$

где  $\underline{Z}_M$  — комплексное магнитное сопротивление сердечника,  $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}'_2$  — суммарный намагничивающий ток, равный току холостого хода. Из полученного уравнения следует:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 - \underline{I}'_2$ , т.е. ток первичной цепи трансформатора равен сумме тока холостого хода  $\underline{I}_0$  и приведенного вторичного тока с обратным знаком ( $-\underline{I}'_2$ ).

Векторная диаграмма токов и напряжений для приведенного трансформатора показана на рисунке 235.

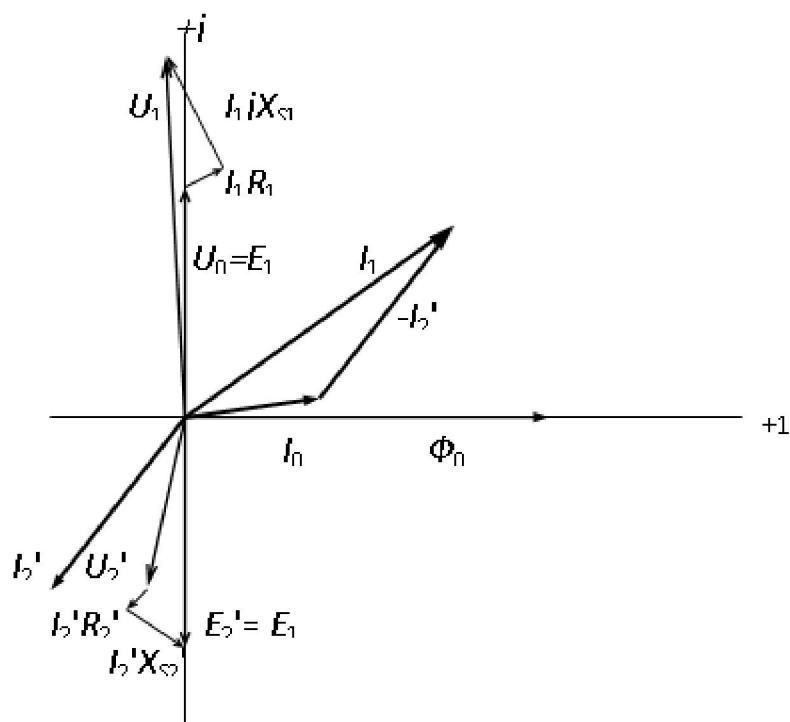


Рисунок 235

## 16.7 Управляемая катушка индуктивности

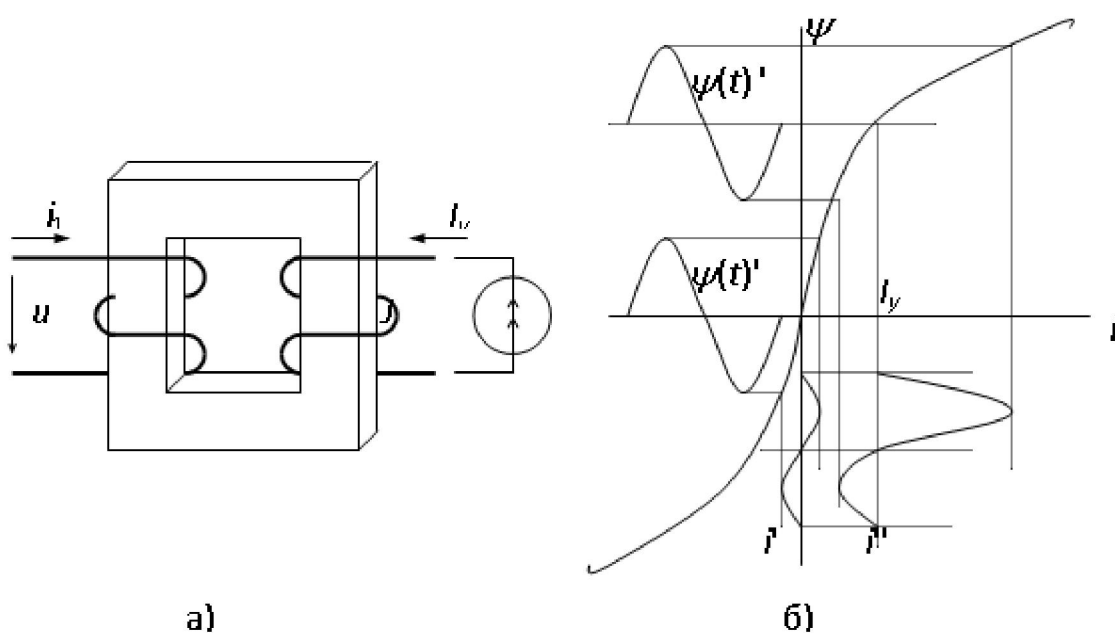


Рисунок 236

Управляемая нелинейная катушка индуктивности содержит на общем магнитопроводе две обмотки, одна из которых рабочая обмотка  $w_1$  включается в цепь переменного тока в качестве управляемого элемента, а вторая – обмотка управления  $w_0$ , которая питается от источника постоянного тока  $J$  (рисунок 236а).

Принцип управления заключается в том, что при увеличении тока в обмотке управления  $I_y$  процесс перемагничивания сердечника смещается в область насыщения, при этом для получения того же значения переменного потока требуется больший переменный намагничивающий поток первичной обмотки (рисунок 236б), что эквивалентно уменьшению ее индуктивного сопротивления  $X_L = \omega L$ .

Управляемые катушки нашли применение в устройствах автоматики и управления, в магнитных усилителях мощности.

Магнитный усилитель состоит из двух одинаковых управляемых катушек (рисунок 237а):

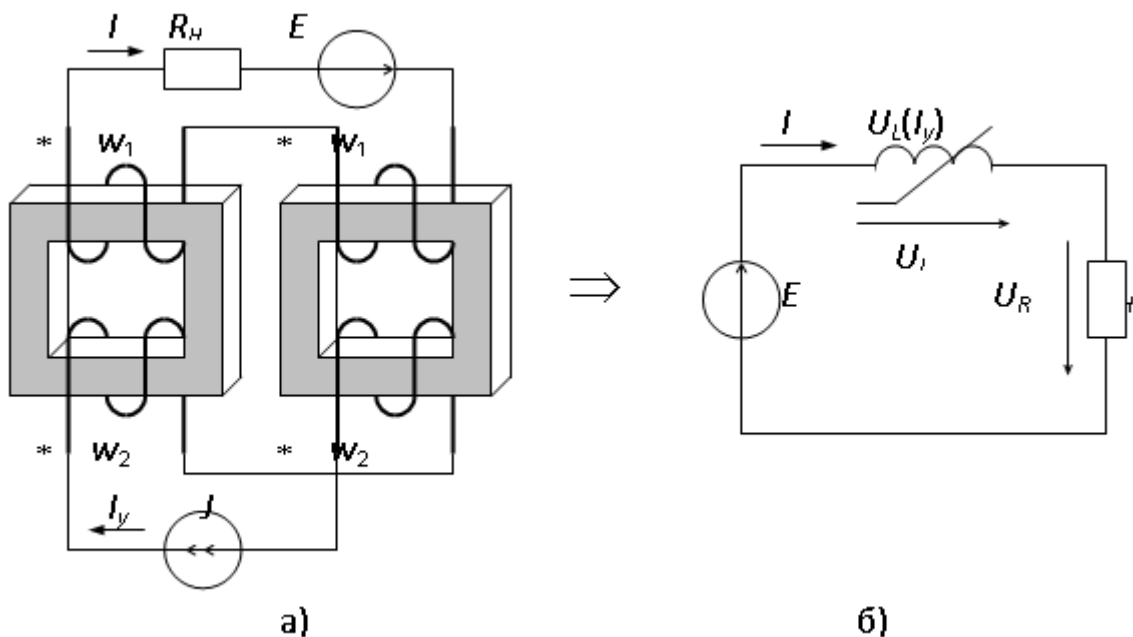


Рисунок 237

Рабочие обмотки катушек могут включаться между собой последовательно или параллельно, но обязательно согласно, а обмотки управления – только последовательно и обязательно встречно. При такой схеме включения наводимые в обмотках управления переменные ЭДС будут направлены навстречу друг другу и взаимно компенсироваться. Таким образом исключается влияние рабочей цепи на цепь управления.

Исследуем работу магнитного усилителя методом эквивалентных синусоид.

Семейство диаграмм ВАХ  $U_L(I)$  магнитного усилителя для различных значений тока  $I_y$  имеет вид (рисунок 238):

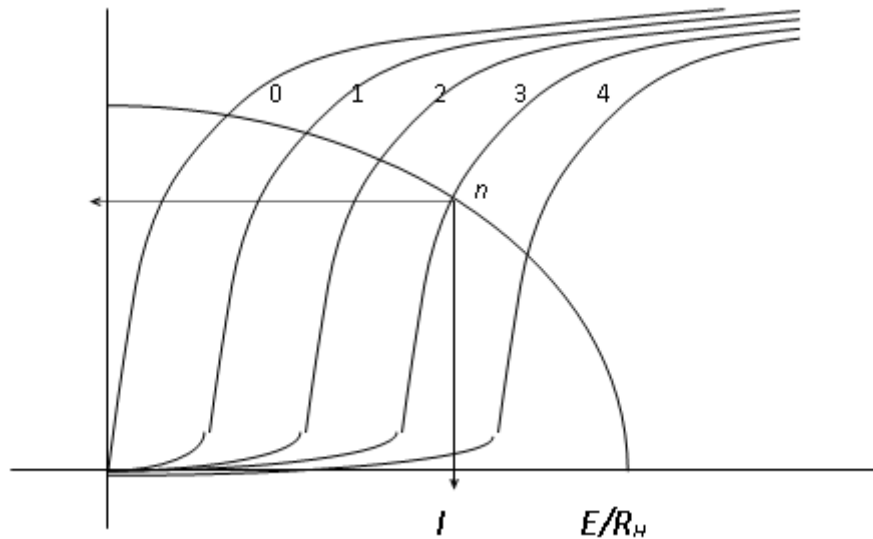


Рисунок 238

При активной нагрузке магнитного усилителя  $\underline{Z}_H = R_H + j0$  эквивалентная схема всей цепи получит вид (рисунок 237б). По 2-му закону Кирхгофа для эквивалентной схемы:

$\underline{E} = \underline{I} \cdot R_H + \underline{U}_L(I_y)$  – в комплексной форме или  $E = \sqrt{(I \cdot R_H)^2 + U_L^2}$  – для

модулей, откуда следует  $\left(\frac{U_L}{E}\right)^2 + \left(\frac{I}{E/R_H}\right)^2 = 1$  – уравнение эллипса с

полуосями  $E$  и  $I = \frac{E}{R_H}$ .

Таким образом, для определения параметров режима  $U_L$ ,  $U_R$ ,  $I$  магнитного усилителя при заданной нагрузке  $R_H$  и заданном токе управления  $I_y$  необходимо на графической диаграмме семейства ВАХ провести эллипс с полуосями  $E$  и  $E/R_H$ , точка пересечения которого с заданной ВАХ определит положение рабочей точки  $n$ . Из диаграммы непосредственно определяются  $U_L$  и  $I$ , а определение других величин уже не представляет сложности.

Относительно небольшое изменение мощности в цепи управления  $\Delta P_y = (I_{y1}^2 - I_{y2}^2)R_y$  вызывает существенное изменение мощности, потребляемой нагрузкой:  $\Delta P_H = (I_1^2 - I_2^2)R_H$ . Коэффициент усиления магнитного усилителя по мощности определяется как отношение  $K_y = \frac{\Delta P_H}{\Delta P_y}$  и составляет несколько десятков единиц.

## 16.8 Расчет мгновенных значений параметров режима графическим методом

При расчете мгновенных значений напряжений  $u(t)$  и токов  $i(t)$  в нелинейной цепи используются физические характеристики нелинейных элементов, а именно: вольтамперная характеристика  $u=f(i)$  или  $i=f(u)$  для резистора, веберамперная характеристика  $i=f(\psi)$  или  $\psi=f(i)$  для катушки и кулон-вольтная характеристика  $q=f(u)$  или  $u=f(q)$  для конденсатора.

В простейших случаях, если задан или может быть рассчитан закон изменения во времени одной из спаренных физических величин, то закон изменения во времени другой величины может быть получен графически методом проекции заданной функции на соответствующую физическую характеристику нелинейного элемента. В качестве примера рассмотрим графический расчет тока нелинейной катушки в режиме синусоидального напряжения (тока холостого хода трансформатора) (рисунок 239).

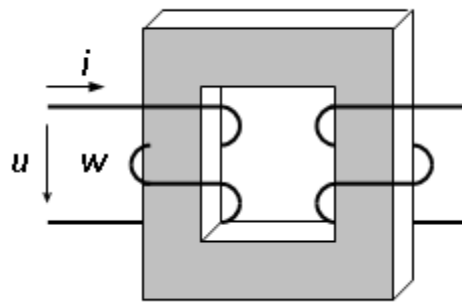


Рисунок 239

Пусть к зажимам катушки приложено напряжение  $u(t)=U_m \cdot \sin \omega t$ . Магнитный поток в сердечнике связан с напряжением уравнением индукции:

$$u = -e = w \frac{d\phi}{dt}, \text{ откуда } \phi(t) = \frac{1}{w} \int u \cdot dt = \frac{U_m}{\omega w} (-\cos \omega t) = \Phi_m \sin(\omega t + 90^\circ).$$

Графические диаграммы функций  $u(t)$  и  $\phi(t)$  показаны на рисунке 240. Справа приведена вебер-амперная характеристика  $\phi(i)$  магнитной цепи в виде петли гистерезиса, соответствующая расчетной амплитуде магнитного потока  $\Phi_m$ . Расчетные точки искомой функции  $i(t)$  получаются методом проекции точек заданной функции  $\phi(t)$  на вебер-амперную характеристику  $\phi(i)$  магнитной цепи.

Для построения графической диаграммы искомой функции  $i(t)$  исследуемый интервал времени (период  $T$ ) разбивается на отдельные отрезки  $\Delta t$ . Для каждого момента времени  $t_0, t_1, t_2 \dots$  определяются на диаграмме координаты точек заданной функции  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ , которые проектируются на вебер-амперную характеристику  $\phi(i)$  магнитной цепи. Найденные соответствующие значения искомой функции  $i_0, i_1, i_2 \dots$  в масштабе откладываются на диаграмме для каждого момента времени  $t_0, t_1, t_2 \dots$ . Отдельные точки соединяются плавной кривой, в результате чего получается графическая диаграмма искомой функции  $i(t)$  (на рисунке 240 показана жирной линией). Процедура построения графической диаграммы искомой функции  $i(t)$  на рисунке 240 показана стрелками для 5 точек (0, 1, 2, 3, 4).

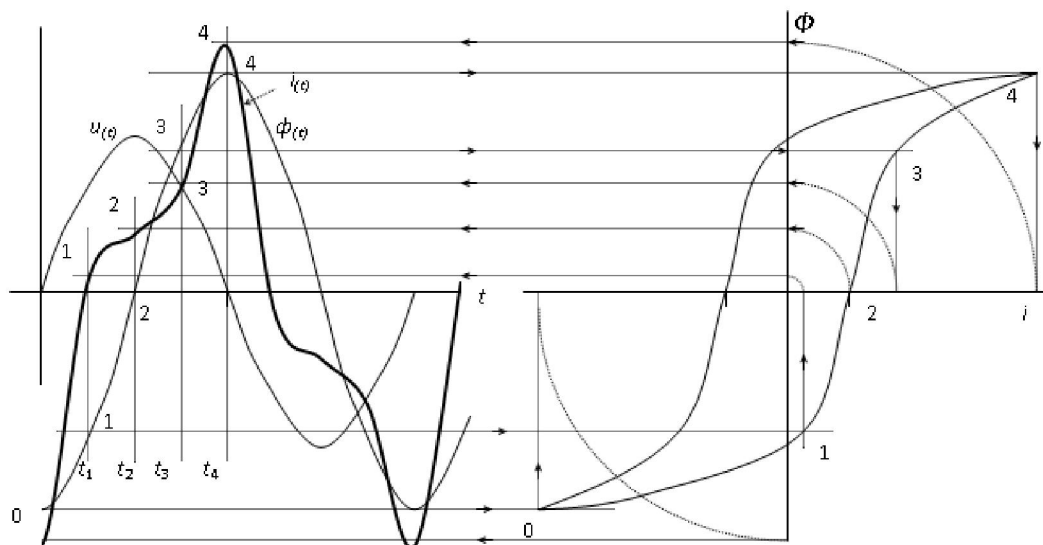


Рисунок 240

Анализ решения показывает, что намагничивающий ток катушки имеет несинусоидальную форму и содержит в своем составе только нечетные гармоники.

### 16.9 Расчет мгновенных значений параметров режима гармоническими методами

В нелинейных цепях переменного тока происходят искажения форм кривых токов и напряжений. Несинусоидальные функции токов  $i(t)$  и напряжений  $u(t)$ , как известно, можно представить в виде гармонических рядов Фурье. В гармонических методах расчета решение для искомых величин находят в виде суммы отдельных гармоник.

В простейших случаях решение для искомой функции в виде гармонического ряда Фурье удастся получить в результате разложения в ряд Фурье найденного в общем виде решения. В качестве примера рассмотрим расчет тока в нелинейной катушке (тока холостого хода трансформатора) (рисунок 241). Чтобы получить сравнительно простое решение, применим для катушки параллельную схему замещения. Вебер-амперную характеристику катушки аппроксимируем уравнением степенного полинома:  $i_L(\psi) = a\psi + b\psi^5$ .

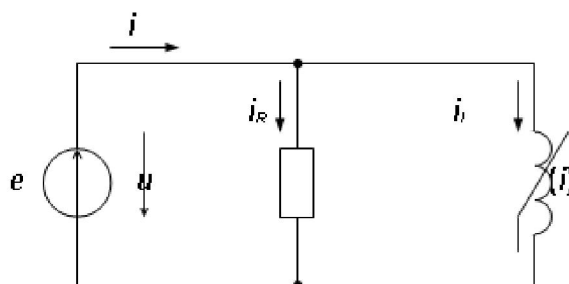


Рисунок 241

Пусть к зажимам катушки приложено напряжение  $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$ . Магнитное потокоцепление катушки связано с напряжением уравнением индукции:

$$u = -e = \frac{d\psi}{dt}, \text{ откуда } \psi(t) = \int u \cdot dt = \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t = \Psi_m \sin \omega t.$$

Ток в резисторе определяется по закону Ома:

$$i_R = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + 90^\circ) = I_{Rm} \cos \omega t.$$

Ток в катушке найдется в результате подстановки функции  $\psi(t)$  в уравнение аппроксимации:

$$\begin{aligned} i_L(t) = a\psi + b\psi^5 &= a\Psi_m \cdot \sin \omega t + b\Psi_m^5 \cdot \sin^5 \omega t = a\Psi_m \sin \omega t + b\Psi_m^5 \left( \frac{10}{16} \sin \omega t - \frac{5}{16} \sin 3\omega t + \right. \\ &\left. + \frac{1}{16} \sin 5\omega t \right) = I_{L1m} \sin \omega t - I_{L3m} \sin 3\omega t + I_{L5m} \sin 5\omega t \end{aligned}$$

Ток источника определяется по первому закону Кирхгофа, при этом сложение гармоник токов одинаковой частоты можно выполнять в комплексной форме:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) - I_{3m} \sin 3\omega t + I_{5m} \sin 5\omega t,$$

где  $I_{1m} = I_{L1m} + jI_{R1m} = I_{1m} e^{j\alpha_1}$ .

Анализ решения показывает, что намагничивающий ток катушки имеет несинусоидальную форму и содержит в своем составе только нечетные гармоники, при этом основная гармоника тока отстает от приложенного напряжения на угол  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ - \alpha_1$ .

Решение для искомой функции в виде суммы гармоник можно получить также методом гармонического баланса. Суть этого метода состоит в том, что ожидаемое решение для функции  $f(t)$  представляется в виде суммы основной и нескольких высших гармоник:

$$f(t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + B_2 \sin 2\omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots,$$

где  $B_1, C_1, B_2, C_2, \dots$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Затем амплитуды гармоник всех токов и напряжений выражаются через неизвестные коэффициенты. После этого балансируются коэффициенты для одинаковых гармоник в уравнениях Кирхгофа, составленных для расчетной схемы. В результате получается система алгебраических уравнений с неизвестными коэффициентами искомой функции, в результате решения которой определяются сами коэффициенты.

В качестве примера рассмотрим расчет режима в схеме (рисунок 242).

Пусть к выводам схемы приложено синусоидальное напряжение  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha) = U'_m \sin \omega t + U''_m \cos \omega t$ , а вебер-амперная характеристика нелинейной катушки аппроксимирована уравнением  $i(\psi) = a\psi + b\psi^3$ .

Дифференциальное уравнение цепи будет иметь вид:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) = R \cdot i(t) + \frac{d\psi}{dt}.$$

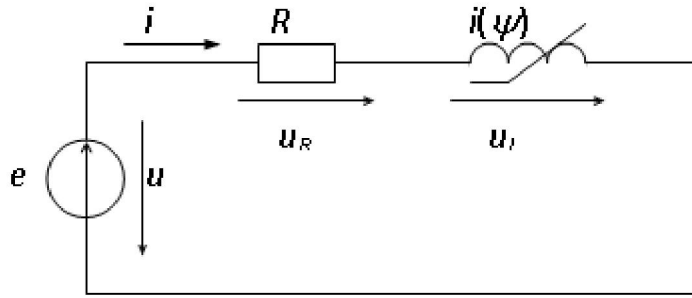


Рисунок 242

В качестве неизвестной функции, подлежащей определению, принимаем потокосцепление  $\psi(t)$ , решение для которой будем искать в виде суммы 1-й и 3-й гармоник (четные гармоники в решении отсутствуют):

$$\psi(t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + B_3 \sin 3\omega t + C_3 \cos 3\omega t,$$

где  $B_1, C_1, B_3, C_3$  – неизвестные коэффициенты.

Выражаем ток и напряжения на отдельных участках схемы через искомую функцию  $\psi(t)$ :

$$\begin{aligned} i(t) &= a\psi(t) + b\psi(t)^3 = a(B_1 \sin \omega t + \dots) + b(B_1 \sin \omega t + \dots)^3 = \dots = \\ &= I'_{1m} \sin \omega t + I''_{1m} \cos \omega t + I'_{3m} \sin 3\omega t + I''_{3m} \cos 3\omega t, \end{aligned}$$

где амплитуды гармоник состоят в некоторой функциональной зависимости от неизвестных коэффициентов  $B_1, C_1, B_3, C_3$ .

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = \dots = U'_{R1m} \sin \omega t + U''_{R1m} \cos \omega t + U'_{R3m} \sin 3\omega t + U''_{R3m} \cos 3\omega t.$$

$$u_L(t) = \frac{d\psi}{dt} = \dots = U'_{L1m} \sin \omega t + U''_{L1m} \cos \omega t + U'_{L3m} \sin 3\omega t + U''_{L3m} \cos 3\omega t.$$

Теперь составляется баланс коэффициентов для отдельных гармоник (уравнения гармонического баланса) в соответствии со 2-м законом Кирхгофа  $u(t) = u_R(t) + u_L(t)$ :

$$\begin{cases} U'_{R1m} + U'_{L1m} = U'_{1m}, \\ U''_{R1m} + U''_{L1m} = U''_{1m}, \\ U'_{R3m} + U'_{L3m} = 0, \\ U''_{R3m} + U''_{L3m} = 0. \end{cases}$$

В алгебраических уравнениях гармонического баланса отдельные слагаемые в левой части являются некоторыми функциями неизвестных коэффициентов  $B_1, C_1, B_3, C_3$ . Решение этой системы уравнений представляет зачастую большую математическую трудность.

В виду больших математических осложнений, возникающих при определении неизвестных коэффициентов, метод гармонического баланса оказывается мало эффективным и применяется редко.

## **17 Переходные процессы в нелинейных цепях**

### **17.1 Общая характеристика переходных процессов в нелинейных цепях**

Переходные процессы в нелинейных цепях описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по законам Кирхгофа. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях сводится, таким образом, к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений. Значительные трудности, возникающие при таких расчетах, обусловлены сложностью решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Для расчета переходных процессов в нелинейных цепях нельзя указать общие методы, применимые для любого класса цепей. Выбор метода расчета всегда индивидуален и определяется конкретными условиями задачи: структурой схемы цепи, видом уравнения аппроксимации нелинейной характеристики, требованиями к форме искомой функции и др. Ниже перечислены наиболее важные методы, которые применяются для расчета переходных процессов в нелинейных цепях:

- 1) метод интегрируемой аппроксимации характеристики нелинейного элемента;
- 2) метод кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элемента;
- 3) метод условной линеаризации нелинейного дифференциального уравнения;
- 4) метод численного интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Переходные процессы в нелинейных цепях могут существенно отличаться от переходных процессов в аналогичных по структуре линейных цепях. Нелинейность характеристики какого-либо элемента цепи может привести или только к чисто количественному изменению переходного процесса или к его качественным изменениям. В первом случае на некоторых отрезках времени скорость переходного процесса увеличивается, а на других отрезках времени - замедляется. Во втором случае в цепи возникает качественно новые явления, принципиально невозможные в линейных цепях, например, незатухающие автоколебания с произвольной постоянной или плавающей частотой.

## 17.2 Расчет переходного процесса методом интегрируемой аппроксимации

Метод основан на аппроксимации характеристики нелинейного элемента такой функцией, которая позволяет проинтегрировать дифференциальное уравнение цепи стандартным методом.

Ценность метода заключается в том, что в результате интегрирования, решение для искомой функции получается в общем виде, что позволяет исследовать влияние на искомую функцию различных факторов. Метод применим главным образом к простым электрическим цепям, процессы в которых описываются дифференциальным уравнением 1-го порядка.

Рассмотрим применение данного метода к расчету переходного процесса при включении нелинейной катушки  $i(\psi)$  к источнику постоянной ЭДС  $E$  (рисунок 245). Вебер-амперную характеристику нелинейной катушки аппроксимируем уравнением  $i = k \cdot \psi^2$ . Дифференциальное уравнение

цепи составляется по 2-му закону Кирхгофа:  $iR + \frac{d\psi}{dt} = E$ , откуда следует:

$$dt = \frac{d\psi}{E - iR} = \frac{d\psi}{E - R \cdot k\psi^2} = \frac{1}{kR} \cdot \frac{dx}{a^2 - x^2},$$

где обозначены  $x = \psi$ ,  $a = \sqrt{\frac{E}{kR}}$ .

По таблице интегралов находим решение:

$$t = \frac{1}{kR} \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{kR} \cdot \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

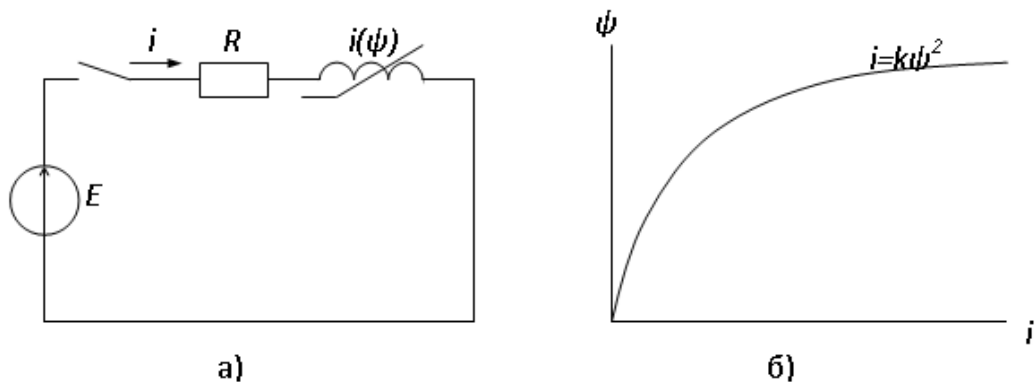


Рисунок 245

Настоящая задача имеет аналитическое решение при аппроксимации нелинейной характеристики некоторыми другими уравнениями, например  $i = k\psi^3$ ,  $i = k\psi^4$ .

### 17.3 Расчет переходного процесса методом кусочно-линейной аппроксимации

Метод основан на аппроксимации характеристики нелинейного элемента отрезками прямой. При такой аппроксимации дифференциальные уравнения цепи на отдельных участках будут линейными и могут быть решены известными методами (классическим или операторным). При переходе от одного участка к другому в дифференциальных уравнениях будут скачком изменяться постоянные коэффициенты, что повлечет скачкообразное изменение коэффициентов в их решении. Решения для отдельных участков сопрягаются между собой на стыках участков на основе законов коммутации.

Рассмотрим применение данного метода к расчету переходного процесса при включении нелинейной катушки к источнику постоянной ЭДС  $E$  (рисунок 245а). Нелинейную вебер-амперную характеристику катушки  $\psi(i)$  заменим отрезками прямой линии (ломаной линией 0-1-2-3) (рисунок 246):

Аппроксимируем отдельные отрезки ломаной линии уравнениями прямой:

- 1) для отрезка 0-1  $\psi_1 = L_1 \cdot i_1$ , где  $0 \leq i_1 \leq I_1$ ;
- 2) для отрезка 1-2  $\psi_2 = \Psi_{20} + L_2 \cdot i_2$ , где  $I_1 \leq i_2 \leq I_2$ ;
- 3) для отрезка 2-3  $\psi_3 = \Psi_{30} + L_3 \cdot i_3$ , где  $I_2 \leq i_3 \leq I_y$ .

Коэффициенты аппроксимации  $\Psi_{20}$ ,  $\Psi_{30}$  определяются из графической диаграммы, а коэффициенты  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  — через координаты точек стыка отрезков (0, 1, 2, 3):

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{I_1}, \quad L_2 = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{I_2 - I_1}, \quad L_3 = \frac{\Psi_3 - \Psi_2}{I_3 - I_2}.$$

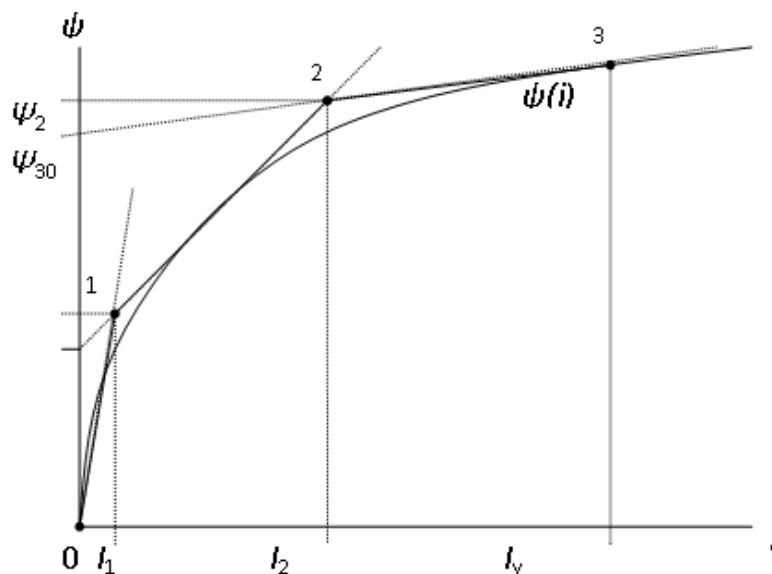


Рисунок 246

Дифференциальные уравнения для отдельных участков будут иметь вид:

$$L_1 \frac{di}{dt} + Ri = E, \text{ где } 0 \leq i \leq I_1, 0 \leq t \leq t_1,$$

$$L_2 \frac{di}{dt} + Ri = E, \text{ где } I_1 \leq i \leq I_2, t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$L_3 \frac{di}{dt} + Ri = E, \text{ где } I_2 \leq i \leq I_y, t_2 \leq t \leq \infty$$

Решения уравнений для отдельных участков, найденные классическим методом, будут отличаться только постоянными коэффициентами:

$$1) i_1 = I_y + A_1 e^{p_1 t}, \quad 2) i_2 = I_y + A_2 e^{p_2(t-t_1)}, \quad 3) i_3 = I_y + A_3 e^{p_3(t-t_2)},$$

$$\text{где } I_y = \frac{E}{R}, \quad p_1 = -\frac{R}{L_1}, \quad p_2 = -\frac{R}{L_2}, \quad p_3 = -\frac{R}{L_3}.$$

Постоянные интегрирования находятся из начальных условий и законов коммутации:

- 1) при  $t = 0$ ,  $i_1(0) = 0$ , из решения (1) следует  $A_1 = -I_y$ ,
- 2) при  $t = t_1$ ,  $i_2(t_1) = I_1$ , из решения (2) следует  $A_2 = I_1 - I_y$ ,
- 3) при  $t = t_2$ ,  $i_3(t_2) = I_2$ , из решения (3) следует  $A_3 = I_2 - I_y$ .

Моменты времени  $t_1$ ,  $t_2$ , соответствующие переходу процесса с одного участка характеристики на другой, определяются из совместного решения уравнений для смежных участков в точке стыка:

$$1) \text{ для точки 1: } i(t_1) = I_y + A_1 e^{p_1 t_1} = I_y + A_2, \text{ откуда следует } t_1 = \frac{1}{p_1} \ln \frac{A_2}{A_1}$$

$$2) \text{ для точки 2: } i(t_2) = I_y + A_2 e^{p_2(t_2-t_1)} = I_y + A_3, \text{ откуда следует}$$

$$t_2 = \frac{1}{p_2} \ln \frac{A_3}{A_2} - t_1.$$

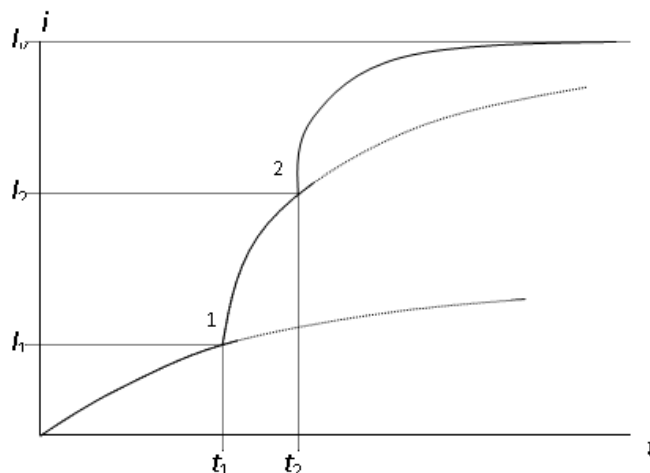


Рисунок 247

Графическая диаграмма переходного процесса показана на рисунке 247. Наличие изломов на графической диаграмме искомой функции  $i(t)$  объясняется погрешностями аппроксимации характеристики нелинейного элемента возле точек стыка отдельных участков. Достоинство данного метода состоит в том, что он позволяет применить к расчету переходных процессов в нелинейных цепях известные методы расчета переходных процессов в линейных цепях.

#### 17.4 Расчет переходного процесса методом линеаризации дифференциального уравнения

Сущность данного метода заключается в том, что в нелинейном дифференциальном уравнении, описывающем переходной процесс, пренебрегают нелинейностью второстепенных членов этого уравнения, при этом функциональные коэффициенты в этих членах заменяются постоянными. После такой замены нелинейное дифференциальное уравнение превращается в линейное и решается известными методами (классическим или операторным).

Рассмотрим применение данного метода на примере расчета переходного тока в трансформаторе при его включении на холостом ходу к источнику синусоидального напряжения  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha)$  (рисунок 245a).

Дифференциальное уравнение цепи имеет вид:

$$iR + \frac{d\psi}{dt} = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$

Так как активное сопротивление  $R$  обмотки трансформатора незначительно, то  $\frac{d\psi}{dt} \gg iR$  и второе слагаемое  $iR$  можно считать второстепенным членом этого уравнения.

Выразим  $i = \frac{\psi}{L}$ , где  $L = f(i, \psi)$  – функциональный коэффициент, тогда дифференциальное уравнение цепи получит вид:

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{R}{L} \psi = U_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Заменим функциональный коэффициент  $L = f(i, \psi)$  в последнем уравнении некоторым постоянным значением  $L = L_{cm} = const$ , после чего дифференциальное уравнение цепи становится линейным относительно переменной  $\psi$ . Решение этого уравнения может быть получено классическим методом:

$$\psi(t) = \psi_y + \psi_c = \Psi_m \sin(\omega t + \alpha - \varphi) + Ae^{-\frac{R}{L_{cm}}t},$$

где  $\Psi_m = \frac{U_m L_{cm}}{\sqrt{R^2 + (\omega L_{cm})^2}}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{\omega L_{cm}}{R}$ .

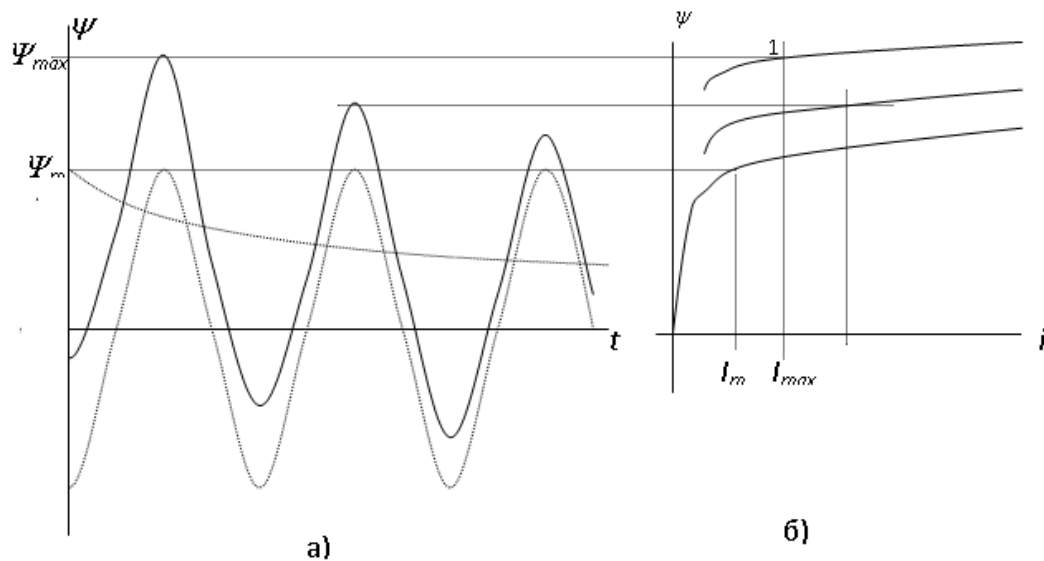


Рисунок 248

В момент включения трансформатора  $\psi(0)=0$ , следовательно, постоянная интегрирования будет равна  $A = -\Psi_m \sin(\alpha - \varphi)$ . Таким образом амплитуда свободной составляющей  $A$  зависит от начальной фазы напряжения источника. При  $\alpha - \varphi = \pm 90^\circ$  она имеет максимальные значения, переходной процесс при этом протекает с максимальной интенсивностью. Пусть  $\alpha - \varphi = -90^\circ$ , тогда  $A = \Psi_m$  и решение для функции  $\psi(t)$  получит вид:

$$\psi(t) = \Psi_m \sin(\omega t - 90^\circ) + \Psi_m e^{-\frac{R}{L_{cm}} t}.$$

Графическая диаграмма расчетной функции  $\psi(t)$  показана на рисунке 248а.

Графическую диаграмму искомой функции  $i(t)$  можно построить методом проекции расчетной функции  $\psi(t)$  на вебер-амперную характеристику  $i(\psi)$  (рисунок 248а, б). Эта диаграмма представлена на рисунке 249:

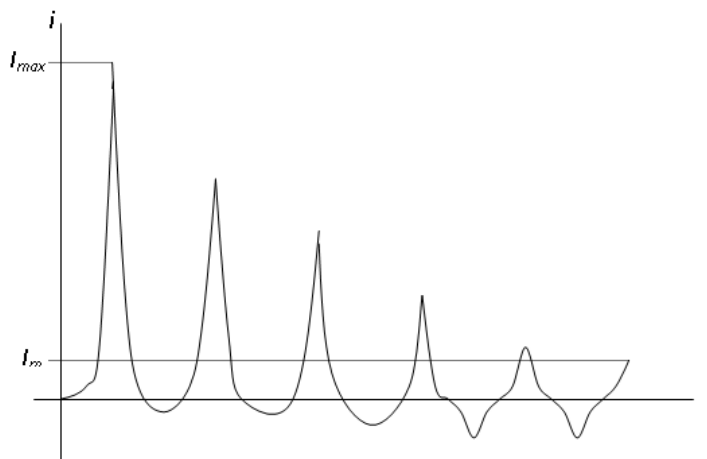


Рисунок 249

Как показывает анализ полученного решения, амплитуда первой волны потокоцепления практически равна удвоенному номинальному значению:  $\Psi_{\max} \approx 2\Psi_m$ . Эта точка 1 на вебер-амперной характеристике  $i(\psi)$  находится далеко в области насыщения и ей соответствует ток  $I_{\max}$ , значительно превышающий амплитуду тока установившегося режима ( $I_{\max} \approx (100 \div 200)I_m$ ), что примерно в 10 раз больше амплитуды номинального тока. Такой импульс пускового тока совершенно не опасен для динамической или термической устойчивости трансформатора, однако он может вызвать ложное срабатывание его релейной защиты. По этой причине мощные силовые трансформаторы запрещается включать в сеть в режиме холостого хода. При включении в сеть нагруженного трансформатора переходной процесс быстро затухает, при этом амплитуда импульса пускового тока незначительна.

### 17.5 Расчет переходного процесса методом численного интегрирования дифференциального уравнения

Режим нелинейной цепи любой сложности может быть описан системой нелинейных дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по законам Кирхгофа. Как известно из математики, система дифференциальных уравнений (как линейных так и нелинейных) может быть решена методом численного интегрирования (методы Эйлера, Рунге-Кутты). Таким образом, режим любой нелинейной цепи может быть рассчитан методом численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Рассмотрим применение этого метода на примере расчета схемы (рисунок 250). Пусть на входе схемы источник постоянной ЭДС  $E_m$ , а веберамперная характеристика нелинейной катушки аппроксимирована уравнением  $i = a \cdot sh(b \cdot \psi)$ .

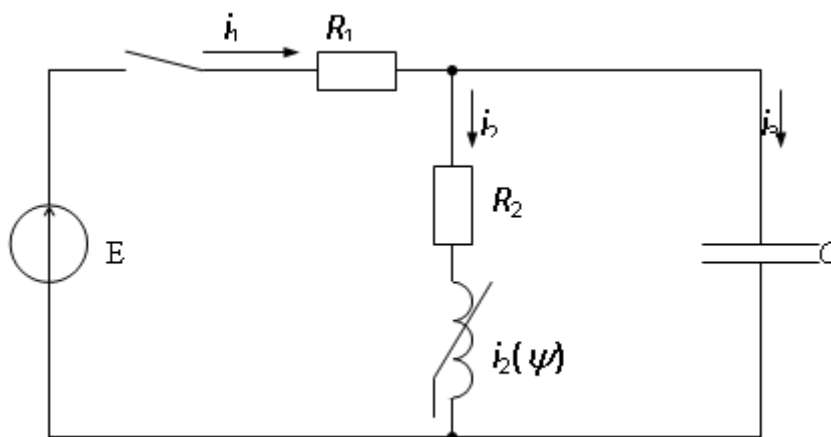


Рисунок 250

Система дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по законам Ома и Кирхгофа и дополненная нелинейным алгебраическим уравнением аппроксимации характеристики нелинейного элемента будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 R_1 + u_C = E \\ i_2 R_2 + d\psi/dt - u_C = 0 \\ i_3 = C \cdot (du_C/dt) \\ i_2 = a \cdot sh(b \cdot \psi) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{array}$$

Решение этой системы уравнений может быть выполнено методами численного интегрирования на ЭВМ (например, методом Эйлера). Суть метода состоит в том, что период переменного тока  $T$  разбивается на большое число шагов интегрирования, например  $N=1000$ , дифференциалы переменных заменяются конечными приращениями ( $d\psi \Rightarrow \Delta\psi$ ,  $du \Rightarrow \Delta u$ ,  $di \Rightarrow \Delta i$ ,  $dt \Rightarrow \Delta t$ ), а производные переменных – отношением приращений ( $d\psi/dt \Rightarrow \Delta\psi/\Delta t$ ,  $du/dt \Rightarrow \Delta u/\Delta t$ ). На каждом шаге производится решение системы уравнений и определяются значения переменных величин (токов, напряжений) и их производных, причем в качестве исходных данных принимают значения некоторых переменных на предыдущем шаге. В качестве таких функций принимают  $u_C(t)$ ,  $i_L(t)$ , которые определяют запасы энергии в электрическом и магнитном поле, вследствие чего они не могут изменяться скачкообразно. Непосредственным результатом расчета будут являться массивы значений переменных величин (токов, напряжений) и их производных в заданном интервале времени (например, в течение времени переходного процесса  $T_n$ ). В результате последующей обработки массивов данных могут быть определены все параметры функций.

Один из вариантов решения полученной системы уравнений методом численного интегрирования представлен ниже.

Исходные данные: параметры элементов схемы ( $E$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C$ ,  $a$ ,  $b$ ); начальные условия  $u_C(0)=0$ ,  $\psi(0)=0$ .

Принимаем:  $N$  – число шагов интегрирования,  $T$  – расчетное время переходного процесса,  $h=\Delta t=T/N$  – шаг интегрирования.

Алгоритм решения системы для произвольного  $k$ -го шага:

$$\begin{aligned} t_k &= h \cdot k; \\ \text{из (5)} \quad i_{2k} &= a \cdot sh(b \cdot \psi_{(k-1)}); \\ \text{из (2)} \quad i_{1k} &= (E - u_{C(k-1)}) / R_1; \\ \text{из (1)} \quad i_{3k} &= i_{1k} - i_{2k}; \\ \text{из (3)} \quad (d\psi/dt)_k &= u_{C(k-1)} - i_{2k} R_2; \\ \text{из (4)} \quad (du_C/dt)_k &= i_{3k} / C; \\ \psi_k &= \psi_{(k-1)} + h \cdot (d\psi/dt)_k; \\ u_{Ck} &= u_{C(k-1)} + h \cdot (du_C/dt)_k. \end{aligned}$$

Метод численного интегрирования (численный метод) обладает высокой точностью, так как в нем непосредственно используются физические характеристики нелинейных элементов. С появлением ЭВМ и расширением области их применения данный метод является основным при

расчете нелинейных цепей как в переходном, так и в установившемся режиме.

## 18 Магнитные цепи переменного потока

### 18.1 Потери в сердечниках из ферромагнитного материала при периодическом перемагничивании.

Магнитные цепи машин переменного тока, трансформаторов работают в режиме периодического перемагничивания, т.е. при переменном магнитном потоке  $\phi(t)$ . При периодическом перемагничивании ферромагнитных сердечников в них происходят потери энергии, которые выделяются в виде тепла. Эти потери условно можно разделить на два вида: а) потери на гистерезис  $p_z$  и б) потери на вихревые токи  $p_v$ .

Потери на гистерезис обусловлены явлением гистерезиса. Они пропорциональны площади статической петли гистерезиса и частоте перемагничивания:

$$p_z = \kappa_z f B_m^n \text{ [Вт/кг] },$$

где  $\kappa_z$  — коэффициент потерь, зависящий от сорта материала,  $B_m$  — амплитуда индукции магнитного поля,  $n = 1,6 \div 2$  — показатель степени, в практических расчетах принимается равным 2.

Для уменьшения потерь на гистерезис сердечники машин и трансформаторов изготавливают из специальных магнитомягких материалов, так называемых электротехнических сталей, которые имеют узкую петлю гистерезиса.

Переменный магнитный поток  $\phi(t)$  наводит ЭДС не только в витках обмоток, расположенных на сердечнике, но и в самом сердечнике. Под действием этой ЭДС внутри сердечника возникают так называемые вихревые токи, которые вызывают дополнительные потери энергии. Так как ЭДС пропорциональна частоте перемагничивания  $f$  и амплитуде индукции  $B_m$ , а мощность потерь пропорциональна квадрату ЭДС, то из этого следует вывод, что потери на вихревые токи пропорциональны  $f^2$  и  $B_m^2$ :

$$p_v = k_v f^2 B_m^2 \text{ [Вт/кг]},$$

где  $k_v$  — коэффициент потерь, зависящий от сорта материала.

С целью уменьшения потерь на вихревые токи ферромагнитные сердечники изготавливают не сплошными, а набирают из тонких стальных листов, изолированных друг от друга. Потери на вихревые токи пропорциональны квадрату толщины листа ( $d^2$ ). Чем тоньше лист, тем меньше потери на вихревые токи в сердечнике, но при этом сам сердечник дороже становится дороже. Оптимальная толщина листа на промышленной частоте  $f = 50$  Гц составляет 0,3—0,4 мм.

В справочной литературе для разных типов ферромагнитных материалов приводятся суммарные удельные потери  $p_o = p_z + p_v$ ,

отнесенные к конкретным параметрам режима. Например,  $p_{10/50} = 2$  Вт/кг означает, что потери соответствуют амплитуде индукции  $B_m = 1,0$  Тл при частоте  $f = 50$  Гц. Учитывая квадратичную зависимость потерь от амплитуды индукции  $B_m^2$ , то их можно определить для любого значения  $B_m$ , например  $B_m = 1,5$  Тл:

$$p_{1,5/50} = p_{1,0/50} \cdot \left( \frac{1,5}{1,0} \right)^2 = 4,5 \text{ [Вт/кг]}.$$

Для определения отдельных составляющих потерь в сердечнике  $p_e$  и  $p_h$  необходимо выполнить измерение или расчет суммарных потерь на двух различных частотах  $f_1$  и  $f_2$  при одинаковой амплитуде индукции  $B_m$ , и с учетом их различной зависимости от частоты ( $p_e \propto f$ ,  $p_h \propto f^2$ ) разделить эти потери на составляющие.

В справочной литературе для разных типов ферромагнитных материалов приводится так же удельная намагничивающая (реактивная) мощность  $q_0 = f(B_m)$ . Эта зависимость носит сложный характер, поэтому приводится в виде графической диаграммы или в виде таблицы координат точек (рисунок 251):

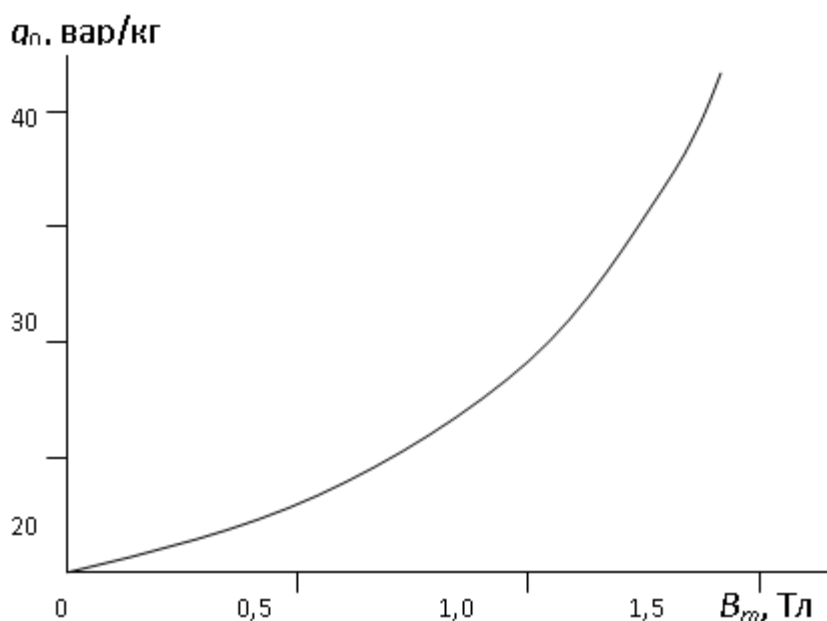


Рисунок 251

## 18.2 Расчет магнитной цепи переменного потока комплексным методом

Машины переменного тока, трансформаторы, в которых ферромагнитные сердечники подвергаются периодическому перемагничиванию, работают в режиме вынужденного синусоидального напряжения на их обмотках. Рассмотрим работу магнитной цепи на примере

сердечника трансформатора (рисунке 252а). К обмотке трансформатора приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , геометрические размеры магнитопровода и характеристики его материала заданы.

Из уравнения электромагнитной индукции  $u = -e = \frac{d\psi}{dt} = w \frac{d\Phi}{dt}$  следует:

$$\Phi(t) = \frac{1}{w} \int u dt = \frac{1}{w} \int U_m \sin \omega t = \frac{U_m}{w\omega} \sin(\omega t - 90^\circ) = \Phi_m \sin(\omega t - 90^\circ)$$

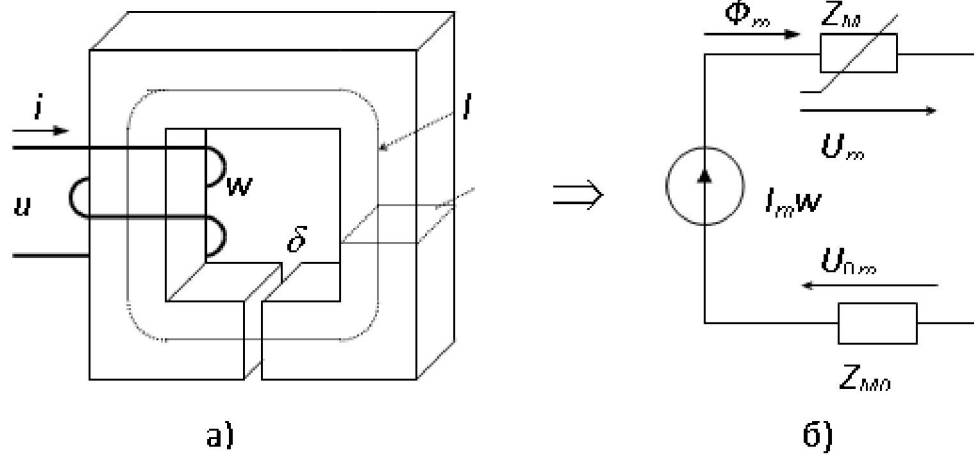


Рисунок 252

Магнитный поток  $\phi(t)$  жестко связан с напряжением  $u(t)$ , изменяется по синусоидальному закону с отставанием от напряжения на  $90^\circ$ . Таким образом, в схеме замещения магнитной цепи источник энергии представляется источником магнитного потока  $\phi(t)$ , где

$$\Phi_m = \frac{U_m}{w\omega} = \frac{U}{4,44wf} [\text{Вб}], \quad B_m = \frac{U}{4,44wfs} [\text{Тл}].$$

Заменим синусоидальные функции их комплексными изображениями:

$$u(t) = U_m \sin \omega t \Rightarrow \underline{U}_m = U_m e^{j0};$$

$$\Phi(t) = \Phi_m \sin(\omega t - 90^\circ) \Rightarrow \underline{\Phi}_m = \Phi_m e^{-j90^\circ}.$$

Вследствие нелинейной зависимости  $B=f(H)$  намагничивающий ток в обмотке будет несинусоидальным. Заменим несинусоидальную функцию тока  $i(t)$  эквивалентной синусоидальной:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - 90^\circ + \delta) \Rightarrow \underline{I}_m = I_m e^{j(-90^\circ + \delta)} = I_m e^{-j\varphi}.$$

Вследствие потерь в сердечнике на премагничивание магнитный поток  $\underline{\Phi}_m$  отстает по фазе на некоторый угол  $\delta$  от вектора тока  $\underline{I}_m$ . Угол отставания  $\delta$  получил в технике название угла потерь. Очевидно из векторной диаграммы, что  $\delta=90^\circ-\varphi$  или  $\varphi=90^\circ-\delta$ .

После замены всех функций времени их комплексными изображениями дальнейшее исследование процессов в магнитной цепи можно проводить в комплексной форме.

Комплексное магнитное сопротивление сердечника:

$$\underline{Z}_M = \frac{\underline{U}_m}{\underline{\Phi}_m} = \frac{\underline{H}_m \cdot \ell}{\underline{B} \cdot s} = \frac{1}{\underline{\mu}} \cdot \frac{\ell}{s} = Z_M e^{j\delta} = R_M + jX_M,$$

где  $\underline{\mu} = \frac{\underline{B}_m}{\underline{H}_m} = \mu \cdot e^{-j\delta} = \mu_a - j\mu_p$  – комплексная магнитная проницаемость.

Из справочной литературы находим для расчетной амплитуды индукции  $B_m$  соответствующие значения мощности удельных потерь  $p_0$  и удельной намагничивающей мощности  $q_0$ . Суммарные значения этих мощностей для всего сердечника составят:

$$P_C = p_0 \cdot M, \quad Q_C = q_0 \cdot M, \text{ где } M - \text{масса сердечника [кг].}$$

Активное и реактивное магнитные сопротивления сердечника выражаются через суммарные мощности:

$$R_M = \frac{2Q_C}{\Phi_m \cdot \omega}, \quad X_M = \frac{2P_C}{\Phi_m \cdot \omega}.$$

Магнитное сопротивление воздушного зазора носит чисто активный характер и определяется через его геометрические размеры:

$$\underline{Z}_{M0} = R_{M0} + j0 = \frac{\delta}{\mu_0 \cdot s} = 8 \cdot 10^8 \frac{\delta}{s}.$$

Эквивалентное магнитное сопротивление всей цепи:

$$\underline{Z}_{MЭ} = \underline{Z}_M + \underline{Z}_{M0} = (R_M + R_{M0}) + jX_M$$

МДС обмотки и магнитный поток в сердечнике связаны между собой законом Ома:

$$\underline{I}_m w = \underline{U}_m + \underline{U}_{0m} = \underline{\Phi}_m \underline{Z}_{MЭ}, \text{ откуда следует:}$$

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{\Phi}_m \underline{Z}_{MЭ}}{w} = \frac{\underline{U}_m + \underline{U}_{0m}}{w}.$$

Векторная диаграмма для всех величин показана на рисунке 253:

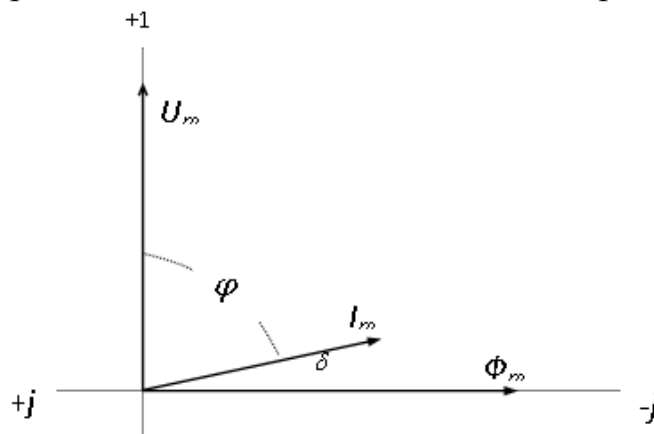


Рисунок 253

## 19 Теория электромагнитного поля. Электростатическое поле

### 19.1 Основные понятия и определения

Электротехника — это отрасль знаний об электромагнитных явлениях и их практическом применении в технике. Физической основой всех электромагнитных явлений является электромагнитное поле.

Электромагнитное поле представляет собой вид материи, характеризующийся воздействием на заряженные частицы. Как вид материи электромагнитное поле обладает массой, энергией, количеством движения, оно может превращаться в вещество и наоборот.

Электромагнитное поле имеет две составляющие или две стороны — электрическую и магнитную. В каждой точке пространства оно определяется двумя векторными величинами: вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}$  [В/м] и вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  [А/м].

Следует помнить, что в природе существует единое электромагнитное поле, а отдельные его стороны — электрическое или магнитное поле — могут проявляться независимо друг от друга только в частных случаях и при определенных условиях.

Электростатическое поле представляет собой частный случай электромагнитного поля. Оно создается системой неподвижных по отношению к наблюдателю (в выбранной системе отсчета) зарядов.

Электрические заряды, создающие электростатическое поле, могут быть распределены в пространстве по тому или иному закону.

Если заряд  $q$  распределен в некотором объеме  $v$ , то он характеризуется объемной плотностью  $\rho = \frac{dq}{dv}$  [Кл/м<sup>3</sup>], откуда следует, что  $q = \int_v \rho dv$ .

Если заряд  $q$  распределен по некоторой поверхности  $s$ , то он характеризуется поверхностной плотностью  $\sigma = \frac{dq}{ds}$  [Кл/м<sup>2</sup>], откуда следует, что  $q = \int_s \sigma ds$ .

Если заряд  $q$  распределен вдоль тонкого провода  $l$  или оси, то он характеризуется линейной плотностью  $\tau = \frac{dq}{dl}$  [Кл/м], откуда следует, что  $q = \int_l \tau dl$ .

И, наконец, если заряд  $q$  сосредоточен в точке, объем которой стремиться к нулю, то такой заряд называется точечным. Понятие точечного заряда является идеализированным, в природе точечных зарядов не существует, однако введение понятия точечного заряда имеет большое теоретическое значение.

Электростатическое поле в произвольной точке пространства характеризуется вектором напряженности  $\vec{E}$  [В/м]. Напряженность поля уединенного точечного заряда  $q$  определяется по формуле:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{r}_0,$$

где  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \approx 8,842 \cdot 10^{-12}$  [Ф/м] – диэлектрическая проницаемость пустоты;  $\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды, показывающая во сколько раз проницаемость данной среды больше проницаемости пустоты;  $\vec{r}_0 = \vec{1}$  – единичный радиус-вектор, направленный по радиусу от заряда, если  $q > 0$ , и к заряду, если  $q < 0$  (рисунок 254а).

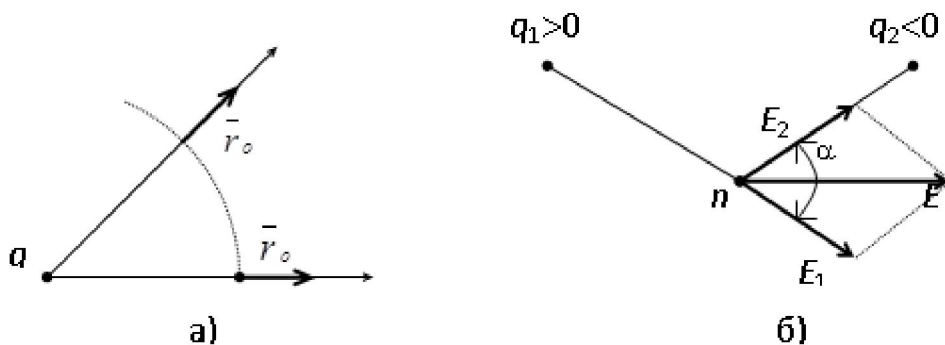


Рисунок 254

Если электростатическое поле создается системой зарядов, то к расчету вектора напряженности  $\vec{E}$  применим принцип наложения, т.е. результирующее значение вектора напряженности поля  $\vec{E}$  в произвольной точке пространства будет равно геометрической сумме составляющих этого вектора от каждого точечного заряда в отдельности, т.е.  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$ . На рисунке 254б электростатическое поле создается системой из двух точечных зарядов ( $q_1 > 0$  и  $q_2 < 0$ ). Модуль результирующего вектора напряженности  $E$  можно определить по формуле, вытекающей из теоремы косинусов:

$$|E| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cdot \cos \alpha}.$$

Если электростатическое поле создается системой распределенных в пространстве зарядов, то эти заряды разбиваются на элементарные точечные заряды  $dq$ , а операция сложения заменяется интегрированием по объему, площади или длине, в зависимости от того, как распределены заряды в пространстве.

Пусть точечный заряд  $q$  перемещается в электростатическом поле  $\vec{E}$  из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории 1а2 (рисунок 255.)

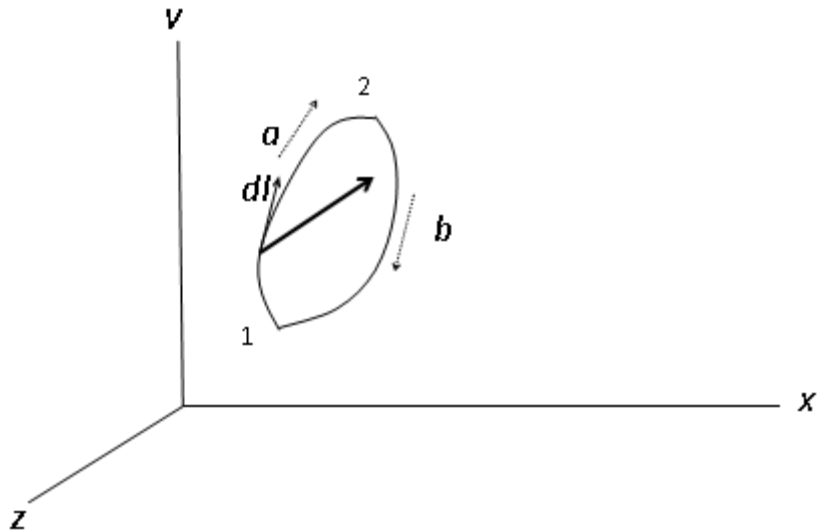


Рисунок 255

При перемещении заряда будет совершаться некоторая работа:

$$A = \int_1^2 \overline{F} d\overline{l} = \int_1^2 q \overline{E} d\overline{l} = q \cdot \int_1^2 \overline{E} d\overline{l} = q \cdot U_{12}.$$

Напряжением между точками 1 и 2 называется отношение работы по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 к величине заряда  $q$ :

$$U_{12} = \frac{A}{q} = \int_1^2 \overline{E} d\overline{l}.$$

Если переместить заряд обратно в точку 1 по некоторой новой траектории  $2b1$ , то согласно закону сохранения энергии суммарная работа по перемещению заряда будет равна нулю:

$$A = q \int_1^2 \overline{E} d\overline{l} + q \int_2^1 \overline{E} d\overline{l} = q \oint \overline{E} d\overline{l} = 0.$$

Из полученного выражения следует два вывода:

1)  $\oint \overline{E} d\overline{l} = 0$  – циркуляция вектора напряженности поля  $\overline{E}$  по замкнутому контуру равна нулю;

2)  $\int_1^2 \overline{E} d\overline{l} = -\int_2^1 \overline{E} d\overline{l}$  или  $U_{12} = -U_{21}$  – напряжение между двумя точками 1 и 2 не зависит от выбора пути интегрирования.

Второй вывод позволяет ввести в расчет некоторую функцию координат  $\varphi(x, y, z)$  под названием потенциала поля, разность значений которой в рассматриваемых точках 1 и 2 численно равна напряжению между этими точками:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} = \int_1^2 \overline{E} d\overline{l}.$$

Пусть потенциал точки 1 известен ( $\varphi_1 = const$ ), а точка 2 перемещается в пространстве и ее потенциал будет функцией координат  $x, y, z$ :

$$\varphi_2 = \varphi(x, y, z) = U_{12} = - \int_1^{x,y,z} \vec{E} d\vec{l} + \varphi_1.$$

В электротехнике за базовую точку с заданным нулевым потенциалом принимают “землю”, а при отсутствии заземления – любую точку цепи или схемы.

Принимая  $\varphi_1 = const$  за постоянную интегрирования, перейдем к неопределенному интегралу:

$$\varphi = - \int \vec{E} d\vec{l} = - \int E dl \cos(\vec{E} d\vec{l}) = - \int E_l dl,$$

откуда  $E_l = - \frac{\partial \varphi}{\partial l}$ , т.е. проекция вектора  $\vec{E}$  на любое направление  $l$  показывает скорость убывания потенциала в этом направлении. Аналогично можно записать составляющие вектора  $\vec{E}$  по координатным осям  $x, y, z$ :

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Просуммируем отдельные составляющие вектора:

$$\vec{E} = -\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z})\varphi = -\nabla \varphi = -grad \varphi,$$

где  $\nabla = (\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z})$  – оператор пространственного дифференцирования (Гамильтона).

Поверхность, на которой потенциал  $\varphi$  имеет постоянное значение, называется эквипотенциальной. Вектор напряженности поля  $\vec{E}$  направлен в сторону наибольшего убывания потенциала и, следовательно, перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности.

## 19.2 Уравнения электростатического поля в интегральной и дифференциальной форме

Интегральная форма уравнений описывает поле в конечных размерах объема, поверхности, линии, расположенных в пространстве. Дифференциальная форма тех же уравнений описывает поле в произвольных точках пространства.

1. Закон Кулона определяет силу взаимодействия между двумя точечными зарядами:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0.$$

Сила взаимодействия двух точечных зарядов направлена по прямой, соединяющих эти заряды, при этом одноименные заряды отталкиваются, а разноименные – притягиваются.

2. Ранее была получена интегральная форма уравнения циркуляции вектора напряженности поля  $\vec{E}$  по замкнутому контуру:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 - \text{интегральная форма.}$$

По теореме Стокса перейдем к дифференциальной форме этого уравнения:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{l}}{\Delta S} = \text{rot}_n \vec{E} = 0.$$

Так как площадка  $\Delta S$  выбиралась произвольно, то очевидно проекция вектора  $\text{rot} \vec{E}$  на любое направление равна нулю, следовательно и сам вектор равен нулю:

$$\text{rot} \vec{E} = 0 - \text{дифференциальная форма.}$$

Ротор вектора  $\vec{E}$  характеризует его вихри в пространстве. Равенство  $\text{rot} \vec{E} = 0$  означает, что электростатическое поле является безвихревым, т.е. потенциальным.

В декартовой системе координат операция  $\text{rot}$  запишется так:

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

3. Теорема Гаусса является одной из фундаментальных теорем в теории поля:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \sum q_{CB} - \text{интегральная форма записи теоремы гласит, что поток}$$

вектора электрического смещения  $\vec{D}$  сквозь замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме свободных зарядов, расположенные внутри поверхности  $S$ .

$$\text{Для однородной среды } \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \text{ тогда } \oint_S \vec{E} d\vec{s} = \sum q_{CB} / \epsilon \epsilon_0.$$

По теореме Остроградского перейдем к дифференциальной форме уравнения теоремы Гаусса:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{D} d\vec{s}}{\Delta V} = \text{div} \vec{D}, \quad \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum q_{CB}}{\Delta V} = \frac{dq_{CB}}{dV} = \rho_{CB}, \text{ следовательно:}$$

$$\text{div} \vec{D} = \nabla \vec{D} = \rho_{CB} - \text{дифференциальная форма.}$$

Дивергенция вектора  $\vec{D}$  характеризует его истоки в пространстве, следовательно, линии вектора  $\vec{D}$  начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

В декартовой системе координат операция  $\text{div}$  запишется так:

$$\operatorname{div} \bar{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

Для однородной среды  $\bar{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \bar{E}$ , тогда  $\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho_{CB}}{\varepsilon \varepsilon_0}$ .

4. Электростатическое поле обладает способностью запасать энергию. Объемная плотность этой энергии выражается уравнением:

$$\frac{dW_э}{dv} = \frac{\bar{D} \cdot \bar{E}}{2} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\bar{D}^2}{2 \varepsilon \varepsilon_0} [\text{Дж/м}^3].$$

Для определения запаса энергии в заданном объеме  $v$  необходимо выполнить интегрирование плотности энергии по заданному объему:

$$W_э = \int_v \frac{\bar{D} \bar{E}}{2} dv = \int_v \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 dv = \int_v \frac{D^2}{2 \varepsilon \varepsilon_0} dv.$$

### 19.3 Граничные условия в электростатическом поле

Выделим произвольную точку  $n$ , расположенную в электростатическом поле на поверхности раздела двух диэлектриков с разными значениями диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (рисунок 256)

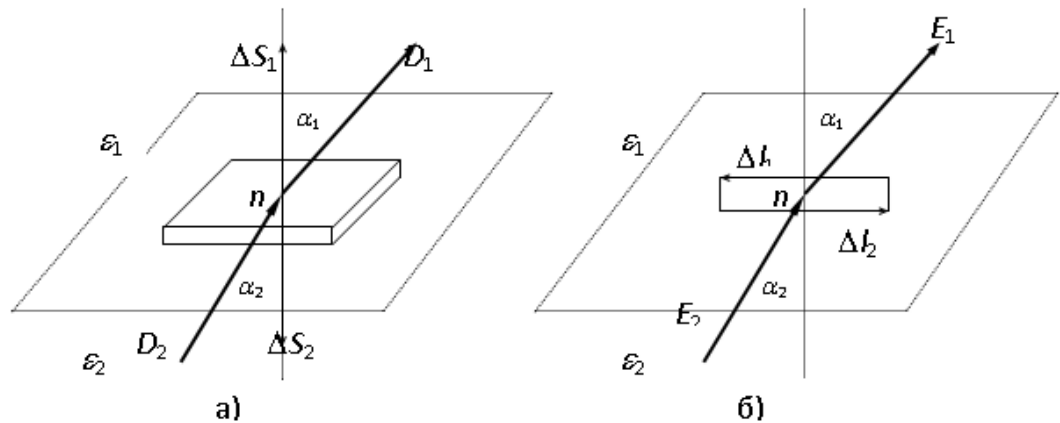


Рисунок 256

Окружим точку  $n$  элементарной призмой, у которой высота бесконечно мала по сравнению с линейными размерами основания. Применим к поверхности призмы теорему Гаусса, при этом пренебрежем потоком вектора  $\bar{D}$  через боковые поверхности ввиду их малости. Тогда получим:

$$\oint_S \bar{D} d\vec{s} = \oint_{\Delta S_1} \bar{D} d\vec{s} + \oint_{\Delta S_2} \bar{D} d\vec{s} = -D_1 \cos \alpha_1 \Delta S_1 + D_2 \cos \alpha_2 \Delta S_2 = -D_{1n} \cdot \Delta S + D_{2n} \cdot \Delta S = 0, \text{ или}$$

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2, \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

На границе раздела двух диэлектриков равны нормальные составляющие вектора электрического смещения  $\bar{D}$ .

Окружим выделенную точку  $n$  элементарным прямоугольником, высота которого бесконечно мала по сравнению с его длиной (рисунок 256б). Найдем значение циркуляции вектора  $\vec{E}$  по периметру прямоугольника:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = \oint_{\Delta_1} \vec{E} d\vec{l} + \oint_{\Delta_2} \vec{E} d\vec{l} = E_1 \sin \alpha_1 \Delta_1 - E_2 \sin \alpha_2 \Delta_2 = E_{1t} \cdot \Delta - E_{2t} \cdot \Delta = 0, \text{ или}$$

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2, \quad E_{1t} = E_{2t}.$$

На границе раздела двух диэлектриков равны тангенциальные составляющие вектора напряженности поля  $\vec{E}$ .

Разделим почленно вторые уравнения на первые и учтем, что  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ , получим

$$\frac{E_{1t}}{D_{1n}} = \frac{E_{2t}}{D_{2n}} \text{ или } \frac{E_1 \sin \alpha_1}{\varepsilon \varepsilon_0 E_1 \cos \alpha_1} = \frac{E_2 \sin \alpha_2}{\varepsilon \varepsilon_0 E_2 \cos \alpha_2}, \text{ откуда следует}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad \text{— условие преломления линий поля на поверхности}$$

раздела двух диэлектриков с различными значениями и диэлектрической проницаемости ( $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ ).

Если линии поля направлены нормально к поверхности раздела ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ), то

$$D_1 = D_2, \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Рассмотрим граничные условия на поверхности раздела диэлектрика с проводником.

Электрическое поле внутри проводника отсутствует ( $\vec{E} = 0$ ), а его поверхность является эквипотенциальной. На поверхности проводника бесконечно тонким слоем будут располагаться свободные разряды с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Линии поля в диэлектрике будут направлены нормально к поверхности проводника как к эквипотенциальной поверхности. Применяя рассуждения, аналогичные предыдущему примеру, получим:

$$D_{1n} = D = \sigma, \quad E_{1t} = 0.$$

#### 19.4 Уравнение Пуассона и Лапласа. Теорема единственности решения

Расчет электростатических полей с использованием уравнений  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  и  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{CB}$  возможен только в простейших случаях. Наиболее общим методом является расчет электростатических полей на основе решения уравнений Пуассона и Лапласа. Выведем эти уравнения.

Ранее было получено  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi$ . Подставим это выражение в уравнение дивергенции:

$$\operatorname{div} \bar{D} = \operatorname{div}(\varepsilon \varepsilon_0 \bar{E}) = \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi) = -\varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \rho_{CB},$$

откуда следует:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho_{CB}}{\varepsilon \varepsilon_0} \quad \text{или} \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{CB}}{\varepsilon \varepsilon_0} \quad \text{— уравнение Пуассона.}$$

Уравнение Пуассона справедливо для тех точек среды, где существуют объемные заряды  $\rho_{CB}$ .

В реальных условиях свободные заряды располагаются на поверхности проводников бесконечно тонким слоем. Объемная плотность таких зарядов равна бесконечности и уравнение Пуассона применительно к ним теряет свой смысл.

В диэлектриках, которыми разделены заряженные проводники, объемные заряды отсутствуют ( $\rho_{CB} = 0$ ), уравнение Пуассона превращается в уравнение Лапласа:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{— уравнение Лапласа.}$$

Таким образом, электростатическое поле в диэлектрике описывается уравнением Лапласа, внутри проводников поле отсутствует вообще, а на границе раздела диэлектрика с проводником вступают в силу граничные условия  $D_{1n} = D = \sigma$ ,  $E_{1t} = 0$ .

В декартовой системе координат операцию двойного дифференцирования  $\nabla^2$  записывают так:

$$\nabla^2 \varphi = \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \left( \bar{i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{j} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \bar{k} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = 0.$$

Уравнение Лапласа в электростатике имеет исключительно важное значение.

Уравнения Пуассона и Лапласа, как уравнения в частных производных, допускают множество линейно независимых частных решений. Однако в реальных условиях каждой конкретной задаче соответствует только одно определенное решение.

Теорема единственности решения гласит, что найденное любым способом решение уравнений Пуассона или Лапласа, является единственно верным решением, если оно удовлетворяет граничным условиям данной задачи.

Предположим, что существует два решения для вектора напряженности поля  $\bar{E}'$  и  $\bar{E}''$ , оба удовлетворяющие граничным условиям задачи. Тогда получим:

$$\operatorname{div}(\bar{E}' - \bar{E}'') = \operatorname{div} \bar{E}' - \operatorname{div} \bar{E}'' = \frac{\rho_{CB}}{\varepsilon \varepsilon_0} - \frac{\rho_{CB}}{\varepsilon \varepsilon_0} = 0$$

$$\operatorname{rot}(\bar{E}' - \bar{E}'') = \operatorname{rot} \bar{E}' - \operatorname{rot} \bar{E}'' = 0 - 0 = 0.$$

Если  $\text{rot}$  и  $\text{div}$  от вектора равны нулю, то сам вектор тождественно равен нулю, следовательно  $\vec{E}' - \vec{E}'' = 0$ , или  $\vec{E}' = \vec{E}'' = \vec{E}$ , что требовалось доказать.

Из теоремы единственности решения вытекают два следствия, имеющее важное практическое значение:

1) электростатическое поле в некотором объеме, ограниченном эквипотенциальной поверхностью, не изменится, если эту поверхность заменить бесконечно тонким проводящим слоем;

2) электростатическое поле по одну сторону некоторой поверхности  $S$  не изменится, если по другую сторону поверхности изменить параметры среды (например, заменить проводящую среду диэлектриком) и изменить расположение свободных зарядов так, чтобы на этой поверхности сохранились прежние граничные условия.

Второе следствие лежит в основе так называемого метода зеркальных отображений, применяемого на практике для расчета электростатических полей.

### 19.5 Электростатическое поле осевых зарядов

Ниже будет рассмотрено несколько примеров электростатических полей, создаваемых осевыми зарядами.

1) Поле уединенной равномерно заряженной оси (рисунок 257а).

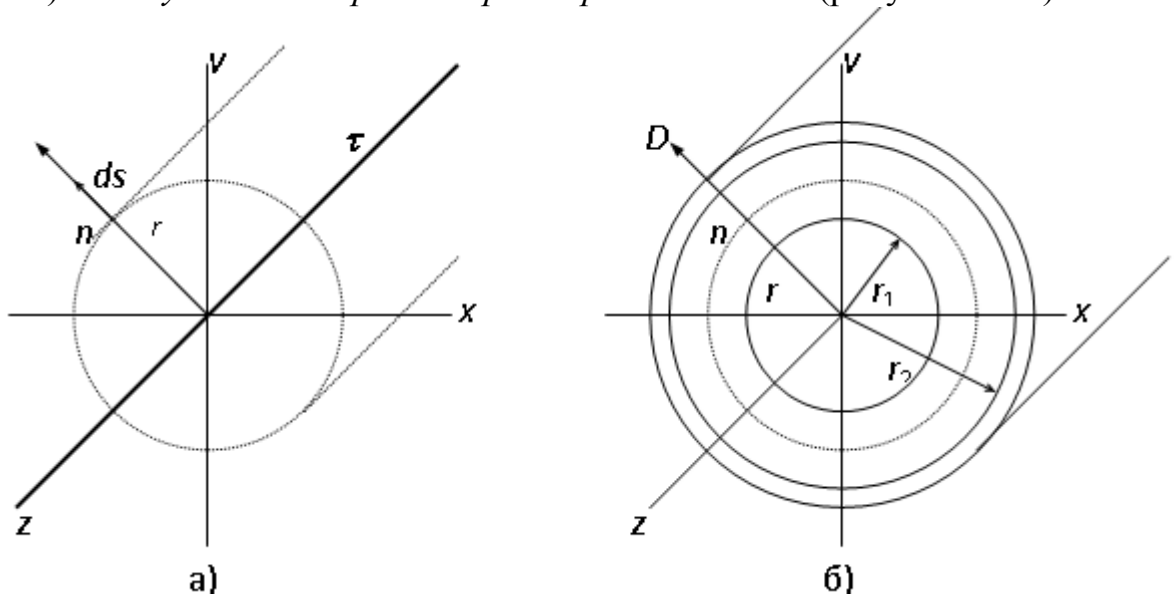


Рисунок 257

Расчет параметров поля в произвольной точке  $n$  выполним с помощью теоремы Гаусса в интегральной форме. Окружим ось цилиндром с произвольным радиусом  $r$  и длиной образующей  $l=1$ . Вектор электрического смещения  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}$  в силу симметрии во всех точках на боковой поверхности цилиндра ( $r=\text{const}$ ) имеет одно и то же значение и направление по радиусу, т.е. нормально к этой поверхности.

По теореме Гаусса получим:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \oint_{\Delta S_{\text{БОК}}} \vec{D} \cdot \vec{ds} + \oint_{\Delta S_{\text{ТОР}}} \vec{D} \cdot \vec{ds} = D \cdot 2\pi r l + 0 = q = \tau \cdot l.$$

Откуда следует, что  $D = \frac{\tau}{2\pi r}$ ;  $E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}$ .

Поток вектора  $\vec{D}$  через торцевые поверхности цилиндра равен нулю, так как линии вектора здесь направлены по касательной к поверхности.

В цилиндрической системе координат потенциал поля  $\varphi$  будет зависеть только от радиуса  $r$ :  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\frac{d\varphi}{dr}$ , откуда

$$\varphi = -\int E dr = -\int \frac{\tau \cdot dr}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln r + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} + C.$$

Если принять на некоторой поверхности радиуса  $r_0$  значение потенциала равным нулю, то  $C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln r_0$  и значение потенциала на поверхности произвольного радиуса будет равна:

$$\varphi_{(r)} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}.$$

## 2). Поле коаксиального кабеля (рисунок 257б).

Конструктивно коаксиальный кабель состоит из внутреннего провода радиуса  $r_1$  (прямой провод) и наружного провода в виде трубы или металлического чехла радиуса  $r_2$  (обратный провод), разделенных между собой диэлектриком с относительной проницаемостью  $\epsilon$ .

Реальные заряды в коаксиальном кабеле расположены равномерно по поверхности внутреннего провода (жиле) и на внутренней поверхности внешней оболочки. В соответствии со вторым следствием из теоремы единственности заменим поверхностные заряды внутреннего провода осевым зарядом с линейной плотностью  $\tau$ , после чего к расчету параметров поля можно применить положения и выводы, полученные ранее для заряженной оси:

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}; \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

Напряжение между внутренней жилой и оболочкой:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{r_2}^{r_1} \vec{E} dr = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{\tau dr}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Емкость кабеля на единицу длины:

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \text{ откуда следует, что } \tau = C_0 \cdot U = \frac{U 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Наибольшее значение напряженности поля имеет местона поверхности внутреннего провода при  $r = r_1$  :

$$E_{\max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1} \cdot 2\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

3). Поле двух разноименно заряженных параллельных осей (рисунок 258). Две двух разноименно заряженные оси ( $\tau_1 = +\tau$ ,  $\tau_2 = -\tau$ ) расположены параллельно на расстоянии  $2a$  в диэлектрическом пространстве.

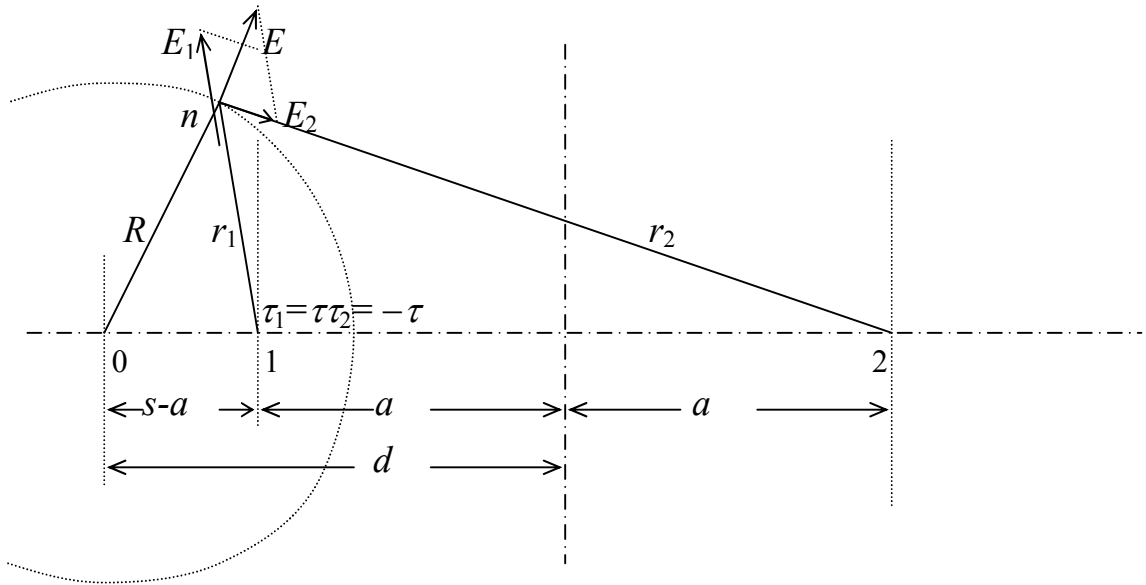


Рисунок 258

Параметры поля в произвольной точке пространства  $n$  могут быть определены по методу наложения. Результирующий вектор напряженности поля равен геометрической сумме составляющих, а результирующий потенциал – алгебраической сумме составляющих от каждого провода:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} \vec{r}_{01} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} \vec{r}_{02}; \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_1} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{1}{r_2} + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + C. \end{aligned}$$

Если принять  $\varphi = 0$  в точках равноудалённых от обеих осей ( $r_1 = r_2$ ), то постоянная интегрирования будет равна нулю ( $C=0$ ), тогда получим:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Эквипотенциальные поверхности  $\varphi = const$  должны удовлетворять условию  $k = \frac{r_2}{r_1} = const$ . В геометрии есть малоизвестная теорема Аполония, которая гласит, что геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до заданной пары точек постоянно, является окружность, центр которой лежит на линии, соединяющей заданную пару точек. Эта окружность должна удовлетворять следующему условию:

$$(s+a)(s-a) = R^2 \text{ или } \frac{s+a}{R} = \frac{R}{s-a}.$$

Анализ геометрии рисунка 258 показывает, что треугольник  $20n$  подобен треугольнику  $n01$  (общий угол с вершиной 0 и прилежащие к углу стороны пропорциональны). Из подобия треугольников следует:

$$\frac{s+a}{R} = \frac{R}{s-a} = \frac{r_2}{r_1} = k.$$

При перемещении точки  $n$  вдоль окружности изменяются расстояния  $r_1$  и  $r_2$  так, что их отношение остается постоянным  $k = \frac{r_2}{r_1} = const$ . При

изменении отношения  $k = \frac{r_2}{r_1}$  центр окружности перемещается вдоль линии, соединяющую заданную пару точек 1 и 2. При  $k > 1$ ,  $r_2 > r_1$  и центр окружности находится в левой полуобласти, при  $k < 1$ ,  $r_1 < r_2$  и центр окружности находится в правой полуобласти, а при  $k = 1$ ,  $r_1 = r_2$ , центр окружности смещается в бесконечность, а сама окружность превращается в прямую линию, совпадающую с вертикальной осью симметрии.

Линии вектора напряженности поля  $\vec{E}$  также являются дугами окружности, но с центрами, расположенными на вертикальной оси симметрии.

Графической диаграммой или сеткой поля называется совокупность следов эквипотенциальных поверхностей с заданными значениями потенциалов, построенная совместно с совокупностью следов линии вектора напряженности поля  $\vec{E}$ . Графическая диаграмма поля двух разноименно заряженных осей имеет вид рисунка 259.

По графической диаграмме поля можно определить его параметры ( $\vec{E}$ ,  $\varphi$ ) в любой точке.

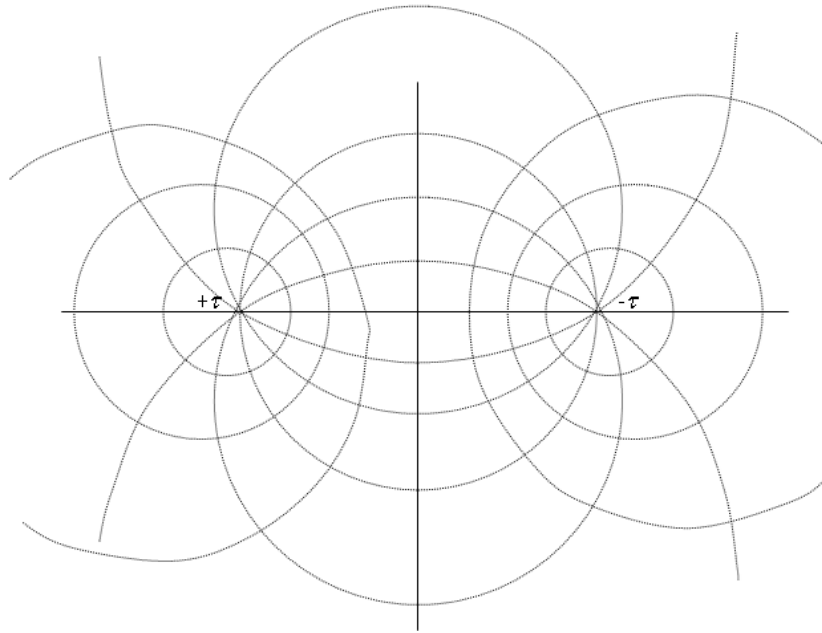


Рисунок 259

### 19. 6 Электростатическое поле и емкость двухпроводной линии

Пусть требуется рассчитать электростатическое поле и емкость двухпроводной линии с заданными геометрическими размерами (радиус проводов  $R$ , межосевое расстояние  $d$ , радиус  $R$  соизмерим с расстоянием  $d$ ). Провода линии не заземлены, к линии приложено постоянное напряжение  $U$  (рисунок 260).

Согласно второму следствию из теоремы единственности заменим поверхностные заряды проводов осевыми  $+\tau$  и  $-\tau$ , проводящую среду – диэлектриком так, чтобы на поверхности проводов сохранились прежние условия, а именно: эти поверхности должны остаться эквипотенциальными с теми же значениями потенциалов  $\varphi_1 = +\varphi$  и  $\varphi_2 = -\varphi$ . Чтобы выполнить эти условия, электрические оси проводов должны быть смещены относительно геометрических осей на некоторое расстояние  $s-a$ .

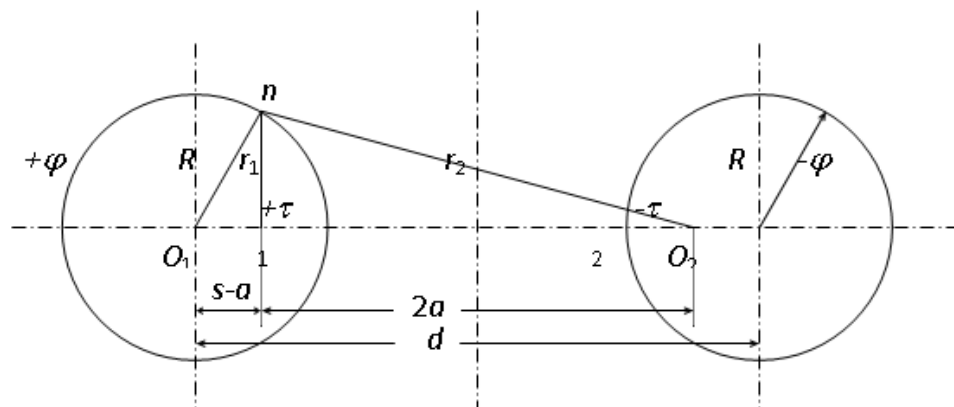


Рисунок 260

Согласно второму следствию из теоремы единственности заменим поверхностные заряды проводов осевыми  $+\tau$  и  $-\tau$ , проводящую среду — диэлектриком так, чтобы на поверхности проводов сохранились прежние условия, а именно: эти поверхности должны остаться эквипотенциальными с теми же значениями потенциалов  $\varphi_1 = +\varphi$  и  $\varphi_2 = -\varphi$ . Чтобы выполнить эти условия, электрические оси проводов должны быть смещены относительно геометрических осей на некоторое расстояние  $s-a$ .

Положение электрических осей определяется из теоремы Аполония:

$$\begin{cases} (s+a)(s-a) = R^2 \\ 2s = d \end{cases}$$

Таким образом, электростатическое поле, создаваемое двумя проводами с поверхностными зарядами  $\sigma$ , будет эквивалентным полю, которое создается двумя разноименно заряженными осями  $+\tau$  и  $-\tau$ , и для его расчета можно применить полученные ранее формулы:

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2; \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Потенциал положительного провода:

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{s+a}{R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{d-(s-a)}{R}.$$

В силу симметрии  $\varphi_2 = -\varphi_1$ , тогда напряжение:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\varphi_1 = \frac{\tau}{\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{d-(s-a)}{R},$$

где  $s-a$  — смещение электрической оси провода относительно геометрической.

Из полученного выражения вытекают расчетные формулы:

$$\tau = \frac{U \cdot \pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d-(s-a)}{R}} [Кл/м]; \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{d-(s-a)}{R}} [\Phi/м].$$

Для воздушных линий ( $\epsilon=1$ ) межосевое расстояние  $d$  многократно больше радиуса проводов  $R$ . В этом случае смещением электрических осей можно пренебречь ( $s-a \approx 0$ ) и считать, что электрические оси проводов совпадают с геометрическими. Для таких линий полученные выше расчетные формулы будут иметь вид:

$$\tau = \frac{U \cdot \pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}} [Кл/м], \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}} [\Phi/м].$$

### 19.7 Электростатическое поле и емкость цилиндрического провода, расположенного над проводящей плоскостью (землей)

Пусть требуется рассчитать электростатическое поле и емкость цилиндрического провода, расположенного над проводящей плоскостью (землей). Заданный радиус провода  $R$ , высота подвески  $h$  (радиус  $R$  соизмерим с высотой  $h$ ). К проводу приложено постоянное напряжение  $U$  (рисунок 261).

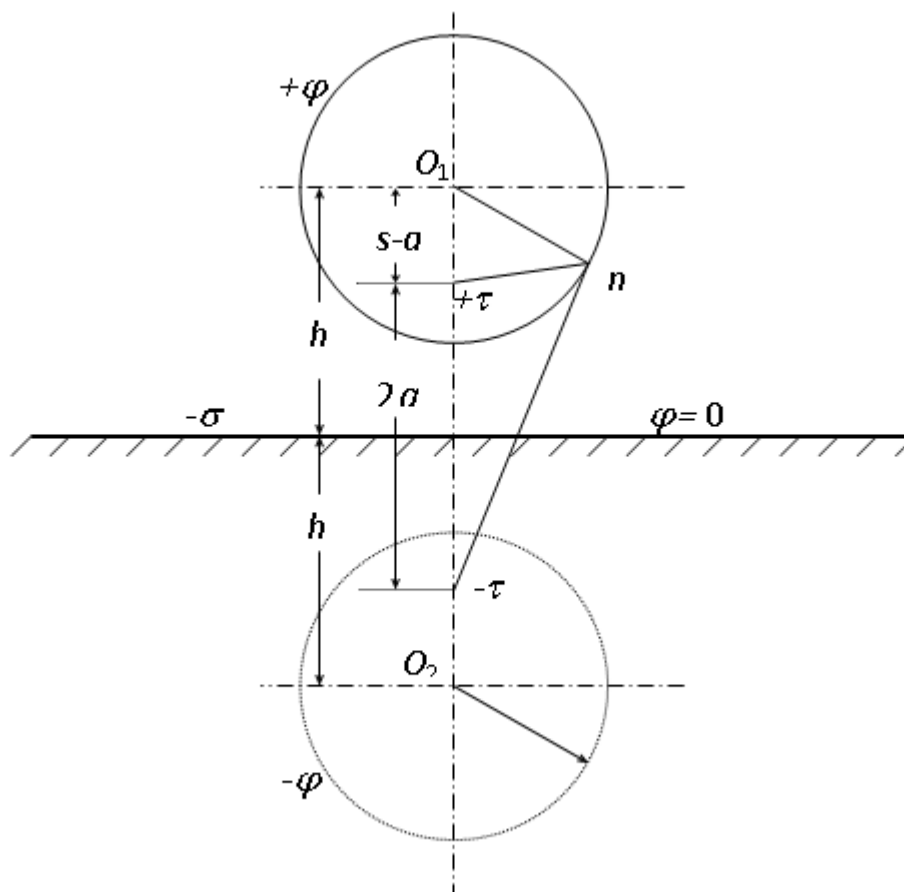


Рисунок 261

Согласно второму следствию из теоремы единственности заменим проводящую среду диэлектриком, а поверхностные заряды провода и земли – двумя разноименно заряженными осями  $+\pi-\tau$  так, чтобы остались неизменными прежние граничные условия: 1) поверхность земли должна быть эквипотенциальной с потенциалом  $\varphi_0 = 0$ , 2) поверхность провода должна быть эквипотенциальной с потенциалом  $\varphi_1 = U$ . Чтобы выполнить эти условия, электрические оси  $+\pi-\tau$  должны быть смещены относительно геометрических осей на некоторое расстояние  $s-a$ .

Положение электрических осей определяется из теоремы Аполония:

$$\begin{cases} (s+a)(s-a) = R^2 \\ s = h \end{cases}$$

Таким образом, электростатическое поле, создаваемое двумя проводниками с поверхностными зарядами  $\sigma$ , будет эквивалентным полю,

которое создается двумя разноименно заряженными осями  $+\tau$ - $\tau$ , и для его расчета можно применить полученные ранее формулы:

$$\overline{E} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2; \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Потенциал провода:

$$\varphi = U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{s+a}{R} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{2h-(s-a)}{R},$$

где  $s-a$  – смещение электрической оси провода относительно геометрической.

Из полученного выражения вытекают расчетные формулы:

$$\tau = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h-(s-a)}{R}} [Кл/м]; \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h-(s-a)}{R}} [\Phi/м].$$

Если высота подвеса провода намного больше его радиуса, то смещением электрических осей можно пренебречь ( $s-a \approx 0$ ) и считать, что электрические оси проводов совпадают с геометрическими. В этом случае расчетные формулы будут иметь вид:

$$\tau = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}} [Кл/м]; \quad C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}} [\Phi/м].$$

## 19. 8 Поле многопроводной линии. Метод зеркальных отображений

Заданы  $n$  длинных проводов, расположенных параллельно проводящей плоскости (над землей). Радиусы проводов  $R_1, R_2, R_3, \dots$ , высоты подвесок  $h_1, h_2, h_3, \dots$ , межосевое расстояние  $d_{12}, d_{13}, d_{23}, \dots$ , при этом  $h \gg R$ ,  $d \gg R$ . Потенциалы проводов  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  известны (рисунок 262).

На основании второго следствия из теоремы единственности заменим проводящую среду (землю) диэлектриком с  $\epsilon = \epsilon_0$ , а поверхностные заряды земли – системой зеркальных зарядов проводов с противоположными знаками. Смещением электрических осей пренебрегаем, так как по условию  $h \gg R$ .

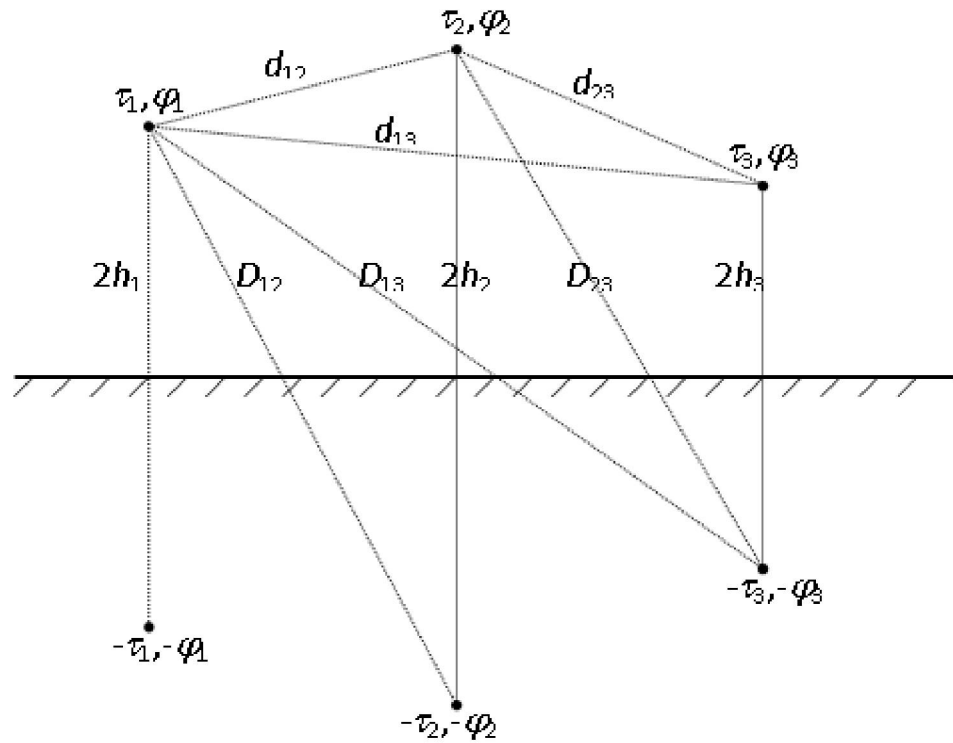


Рисунок 262

Расчет параметров поля в произвольной точке  $n$  может быть выполнен по методу наложения, то есть результирующие параметры поля могут быть найдены как суммы соответствующих составляющих от независимого действия осевых зарядов самих проводов и их зеркальных отображений:

$$\begin{aligned}\bar{E}_n &= \bar{E}_{n1} + \bar{E}_{n2} + \bar{E}_{n3} + \dots \bar{E}'_{n1} + \bar{E}'_{n2} + \bar{E}'_{n3} + \dots \\ \varphi_n &= \varphi_{n1} + \varphi_{n2} + \varphi_{n3} + \dots + \varphi'_{n1} + \varphi'_{n2} + \varphi'_{n3} + \dots\end{aligned}$$

Потенциал на поверхности первого провода:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} + \frac{-\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{2h_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d_{12}} + \frac{-\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{D_{12}} + \frac{\tau_3}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d_{13}} + \frac{-\tau_3}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{D_{13}} + \dots = \\ &= \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{R_1} + \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{12}}{d_{12}} + \frac{\tau_3}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{13}}{d_{13}} + \dots = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3 + \dots\end{aligned}$$

Аналогично для каждого провода:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3 + \dots \\ \varphi_2 &= \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 + \alpha_{23}\tau_3 + \dots \\ \varphi_3 &= \alpha_{31}\tau_1 + \alpha_{32}\tau_2 + \alpha_{33}\tau_3 + \dots \\ &\dots \end{aligned} \right\} \text{ первая группа формул Максвелла.}$$

Здесь обозначены:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{R_1}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_2}{R_2}, \quad \dots - \text{собственные}$$

потенциальные коэффициенты;

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{12}}{d_{12}}, \quad \alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{13}}{d_{13}}, \quad \dots \quad - \quad \text{взаимные}$$

потенциальные коэффициенты.

Потенциальные коэффициенты определяются через геометрические размеры, они всегда положительны, имеют физическую размерность  $[1/\Phi]$ .

Если заданы потенциалы проводов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , то их заряды  $\tau_1, \tau_2, \dots$  могут быть определены из совместного решения системы потенциальных уравнений (первой группы формул Максвелла):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \Delta_1 / \Delta = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 + \dots \\ \tau_2 = \Delta_2 / \Delta = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 + \dots \\ \tau_3 = \Delta_3 / \Delta = \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 + \dots \end{array} \right\} \text{вторая группа формул}$$

Максвелла.

Здесь приняты обозначения:

$\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}, \dots$  - собственные емкостные коэффициенты, всегда положительные,

$\beta_{12} = \beta_{21}, \beta_{13} = \beta_{31}, \dots$  - взаимные емкостные коэффициенты, всегда отрицательны.

На практике более удобно пользоваться формулами Максвелла третьей группы с частичными ёмкостями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = U_{10}C_{11} + U_{12}C_{12} + U_{13}C_{13} + \dots \\ \tau_2 = U_{21}C_{21} + U_{20}C_{22} + U_{23}C_{23} + \dots \\ \tau_3 = U_{31}C_{31} + U_{32}C_{32} + U_{30}C_{33} + \dots \end{array} \right\} \text{третья группа формул Максвелла.}$$

Здесь обозначены:

$U_{10} = \varphi_1 - \varphi_0, U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1, \dots$  - напряжения между соответствующими элементами схемы (рисунок 263).

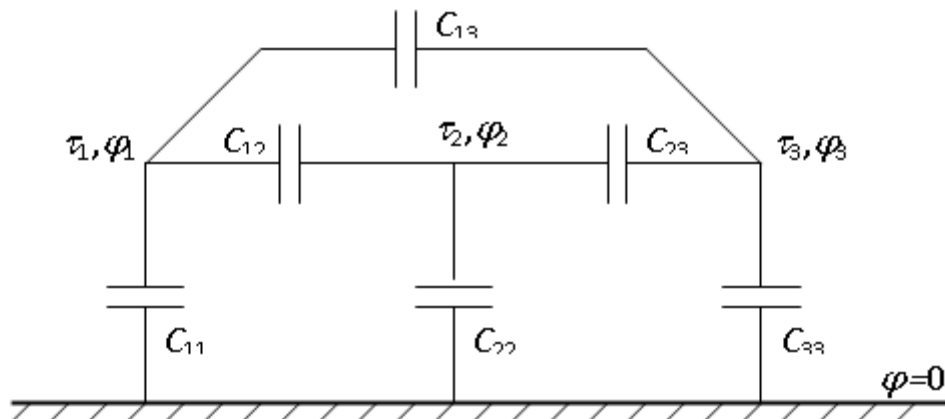


Рисунок 263

Частичные емкости определяются через емкостные коэффициенты второй группы формул.

Метод расчета полей многопроводных линий, основанный на применении второго следствия из теоремы единственности, получил название метода зеркальных отображений.

Рассмотрим применение данного метода к расчету рабочей емкости двухпроводной линии, расположенной над поверхностью земли. Если провода линии питаются от незаземленного источника, то можно принять для первого провода  $q_1 = q$ ,  $\tau_1 = \tau$ , для второго провода  $q_2 = -q$ ,  $\tau_2 = -\tau$ . Тогда получим:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})\tau \\ \varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22})\tau \end{cases}$$

Напряжение между проводами:

$$\begin{aligned} U = \varphi_1 - \varphi_2 &= (\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22})\tau = (\alpha_{11} - 2\alpha_{12} + \alpha_{22})\tau = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{2h_1}{R_1} + \ln \frac{2h_2}{R_2} - 2 \ln \frac{D}{d} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{4h_1h_2d^2}{R_1R_2D^2} \end{aligned}$$

Откуда следует формула рабочей емкости линии с учетом влияния земли:

$$C_{\text{раб}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(4h_1h_2d^2/R_1R_2D^2)} \text{ [Ф/м]}.$$

Если линия расположена достаточно высоко над поверхностью земли ( $h \gg d$ ), то  $D \approx 2h$  и уравнение для рабочей емкости превращается в уравнение

$C_0 \approx \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln d/R}$ , которое было получено ранее для двухпроводной линии без учета влияния земли.

## 19.9 Электрическое поле трехфазной линии электропередачи

Геометрические размеры в поперечном сечении линии электропередачи несравнимо малы по сравнению с длиной электромагнитной волны на частоте 50 Гц ( $\lambda_{50} = 6000 \text{ км}$ ). По этой причине волновые процессы в поперечном сечении линии могут не учитываться, а полученные ранее соотношения для многопроводной линии в статическом режиме с большой степенью точности могут быть применены к расчету поля линий электропередач переменного тока на промышленной частоте  $f = 50$  Гц. Изменяющиеся по синусоидальному закону потенциалы проводов ЛЭП по отношению к параметрам поля можно считать квазистатическими или медленно изменяющимся, и расчет параметров поля для каждого момента времени можно выполнять по полученным ранее уравнениям электростатики.

При синусоидальном законе изменения потенциалов и зарядов проводов формулы Максвелла можно записать в комплексной форме:

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_A = \alpha_{AA}\underline{\tau}_A + \alpha_{AB}\underline{\tau}_B + \alpha_{AC}\underline{\tau}_C = U_{\phi m}e^{j0^\circ} \\ \underline{\varphi}_B = \alpha_{BA}\underline{\tau}_A + \alpha_{BB}\underline{\tau}_B + \alpha_{BC}\underline{\tau}_C = U_{\phi m}e^{-j120^\circ} \\ \underline{\varphi}_C = \alpha_{CA}\underline{\tau}_A + \alpha_{CB}\underline{\tau}_B + \alpha_{CC}\underline{\tau}_C = U_{\phi m}e^{j120^\circ} \end{cases}.$$

Потенциалы проводов ЛЭП равны соответствующим фазным напряжениям и определяются генератором.

Для трехфазных ЛЭП применяются различные варианты расположения проводов в пространстве. На рисунке 264 приведены два из них: а) по вершинам равностороннего треугольника, б) в одной плоскости, параллельной поверхности земли. В первом варианте равны расстояния между проводами ( $d_{AB} = d_{BC} = d_{CA} = d$ ), но не равны их высоты над землей ( $h_A \neq h_B \neq h_C$ ). Во втором варианте не равны расстояния между проводами ( $d_{AB} \neq d_{BC} \neq d_{CA}$ ), но равны их высоты над землей ( $h_A = h_B = h_C$ ). Таким образом, в воздушных трехфазных ЛЭП не может быть достигнута полная симметрия проводов в пространстве. Потенциальные коэффициенты  $\alpha_{AB}, \alpha_{BA}, \dots$ , которые определяются через геометрические расстояния, будут несимметричными в формулах первой группы формул Максвелла. Несимметрия потенциальных коэффициентов вызовет несимметрию зарядов проводов  $\underline{\tau}_A, \underline{\tau}_B, \underline{\tau}_C$  и соответствующую несимметрию зарядных токов линии  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$  в режиме холостого хода. Полная симметрия проводов в пространстве достигается только в кабельных линиях.

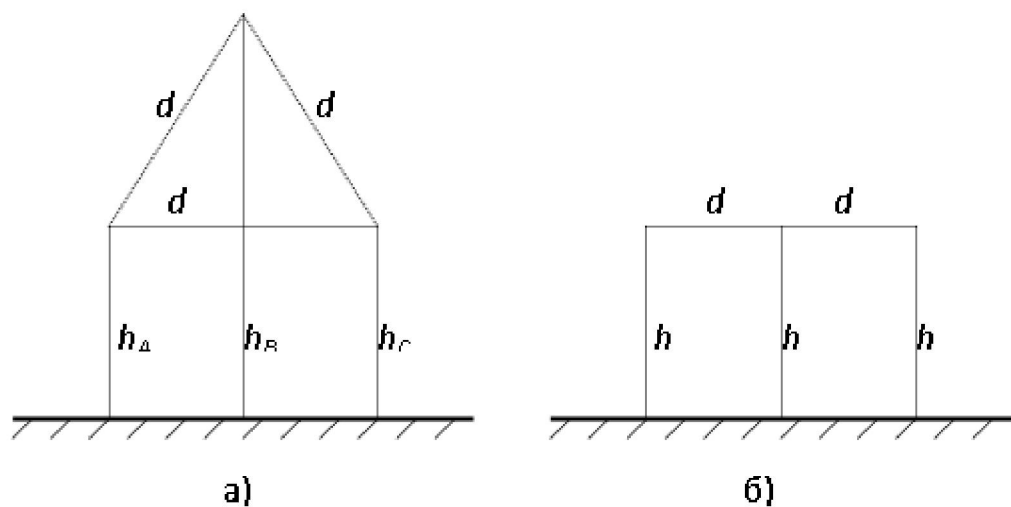


Рисунок 264

Для устранения несимметрии фаз воздушных линий электропередачи через равные расстояния (обычно через  $1/3$  длины) производят круговую перестановку или транспозицию проводов (рисунок 265). При наличии транспозиции усредненные значения параметров линии получаются одинаковыми для всех фаз, при этом несимметрия между началом и концом линии устраняется.

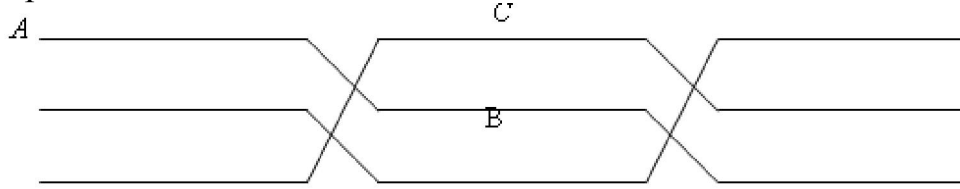


Рисунок 265

Средние значения потенциалов коэффициентов для транспонированной линии:

$$\begin{aligned}\alpha_{cob} &= \frac{1}{3}(\alpha_{AA} + \alpha_{BB} + \alpha_{CC}) = \frac{1}{3 \cdot 2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{2h_A}{R} + \ln \frac{2h_B}{R} + \ln \frac{2h_C}{R} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln 2 \frac{\sqrt[3]{h_A \cdot h_B \cdot h_C}}{R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R} \\ \alpha_{\epsilon_3} &= \frac{1}{3}(\alpha_{AB} + \alpha_{BC} + \alpha_{CA}) = \frac{1}{3 \cdot 2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{D_{AB}}{d_{AB}} + \ln \frac{D_{BC}}{d_{BC}} + \ln \frac{D_{CA}}{d_{CA}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt[3]{D_{AB} \cdot D_{BC} \cdot D_{CA}}}{\sqrt[3]{d_{AB} \cdot d_{BC} \cdot d_{CA}}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d}\end{aligned}$$

где  $h = \sqrt[3]{h_A \cdot h_B \cdot h_C}$ ;  $D = \sqrt[3]{D_{AB} \cdot D_{BC} \cdot D_{CA}}$ ;  $d = \sqrt[3]{d_{AB} \cdot d_{BC} \cdot d_{CA}}$  – среднегеометрические значения расстояний.

Потенциальное уравнение для провода фазы  $A$  транспонированной линии получит вид:

$$\begin{aligned}\underline{U}_A &= \underline{\varphi}_A = \alpha_{cob} \underline{\tau}_A + \alpha_{B3} \underline{\tau}_B + \alpha_{B3} \underline{\tau}_C = \alpha_{cob} \underline{\tau}_A + \alpha_{B3} \underline{\tau}_A e^{-j120^\circ} + \alpha_{B3} \underline{\tau}_A e^{j120^\circ} = \\ &= \left[ \alpha_{cob} + (e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ}) \alpha_{B3} \right] \cdot \underline{\tau}_A = (\alpha_{cob} - \alpha_{B3}) \underline{\tau}_A\end{aligned}$$

Из полученного выражения следует формула для удельной емкости фазы ЛЭП на землю:

$$C_0 = \frac{\underline{\tau}_A}{\underline{U}_A} = \frac{1}{\alpha_{cob} - \alpha_{\epsilon_3}} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R} - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2hd}{RD}} \text{ [Ф/м]}.$$

Если длина линии равна  $l$ , то эквивалентная емкость фазы на землю составит  $C_\Phi = C_0 l$ , а ток холостого хода линии будет равен  $I_0 = U_\Phi / X_C = U_\Phi \omega C$ .

Исследуем, как будет изменяться напряженность электрического поля в произвольной точке  $n$  в поперечном сечении линии (рисунок 266а) в интервале времени одного периода.

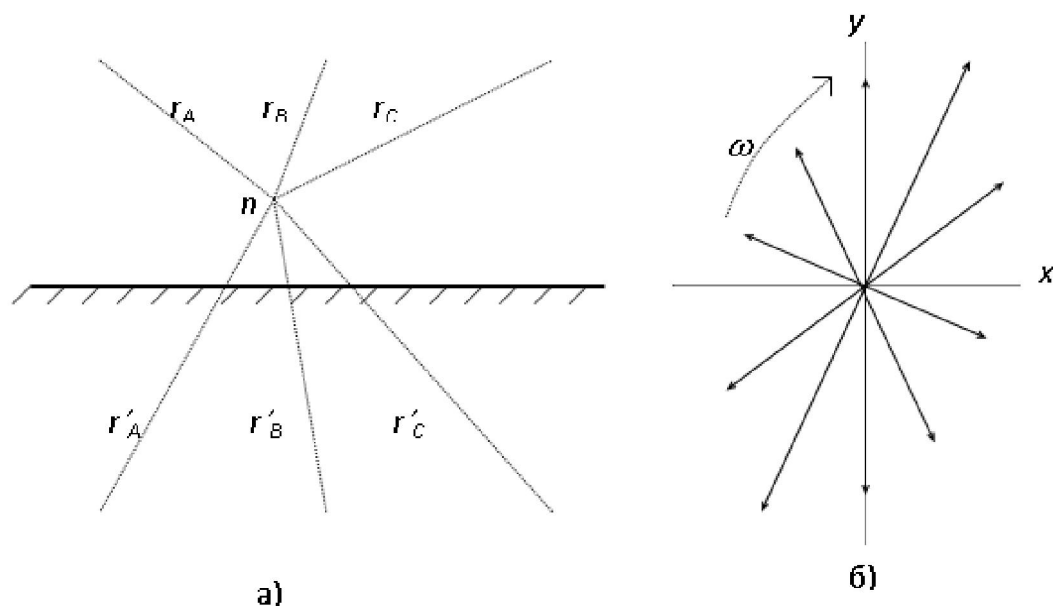


Рисунок 266

Результирующий вектор напряженности поля  $\overline{E}_n$  будет равен геометрической сумме отдельных составляющих:

$$\overline{E}_n = \overline{E}_{nA} + \overline{E}_{nB} + \overline{E}_{nC} + \overline{E}'_{nA} + \overline{E}'_{nB} + \overline{E}'_{nC}.$$

Расчеты показывают, что в интервале времени одного периода вектор  $\overline{E}$  будет изменяться по модулю и по направлению и за один период опишет эллипсовидную фигуру (рисунок 266б). Таким образом, электрическое поле в поперечном сечении ЛЭП является вращающимся, но не круговым, эллиптическим по форме. Максимальное значение этого вектора  $E_{\max}$  соответствует большой полуоси эллипса. На рисунке 267 представлена графическая диаграмма  $E_{\max} = f(x)$  при  $y = 1 \text{ м} = \text{const}$  для ЛЭП с расположением проводов в плоскости, параллельной поверхности земли. Анализ диаграммы показывает, что абсолютный максимум этой функции имеет место с внешней стороны крайних проводов ЛЭП, а под средней фазой напряженность поля меньше, чем под крайними фазами.

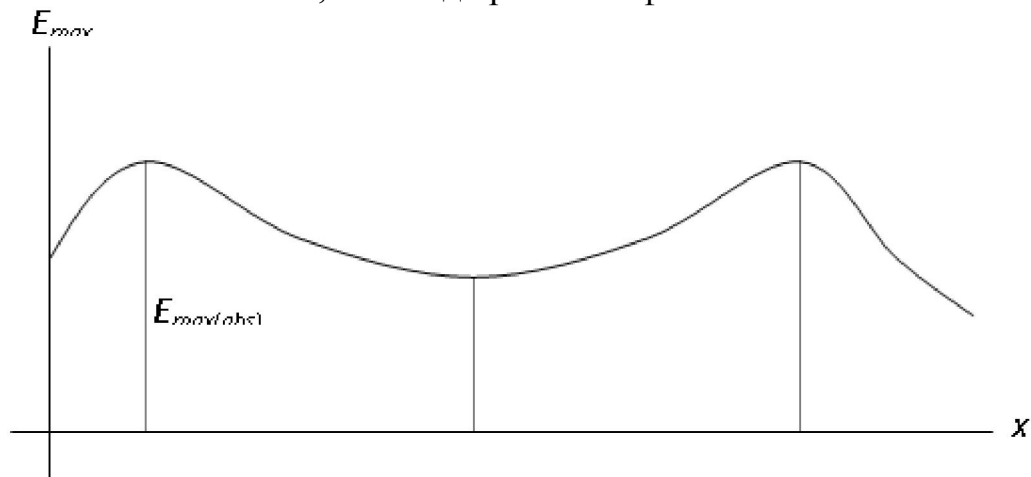


Рисунок 267

диаграмма  $E_{\max} = f(x)$  при  $y = 1 \text{ м} = \text{const}$  для ЛЭП с расположением проводов в плоскости, параллельной поверхности земли. Анализ диаграммы показывает, что абсолютный максимум этой функции имеет место с внешней стороны крайних проводов ЛЭП, а под средней фазой напряженность поля меньше, чем под крайними фазами.

## 20 Электрическое поле постоянного тока

### 20.1 Законы электрического поля в интегральной и дифференциальной формах

Под электрическим током проводимости  $i$  понимается движение свободных зарядов в проводящей среде  $\gamma$  под действием сил электрического поля  $\vec{E}$ . Ток проводимости в каждой точке среды характеризуется вектором плотности:

$$\vec{\delta} = \frac{di}{dS_n} [\text{А/м}^2].$$

Направление вектора  $\vec{\delta}$  совпадает с направлением положительных зарядов. Ток, протекающий через произвольную площадку  $s$ , связан с вектором  $\vec{\delta}$  уравнением:  $i = \int_s \vec{\delta} \cdot d\vec{s}$ .

Выделим мысленно в проводящей среде, где протекает ток, элементарный цилиндр длиной  $dl$  с основанием  $ds$  так, чтобы вектор  $\vec{\delta}$  был направлен вдоль оси цилиндра (рисунок 268).

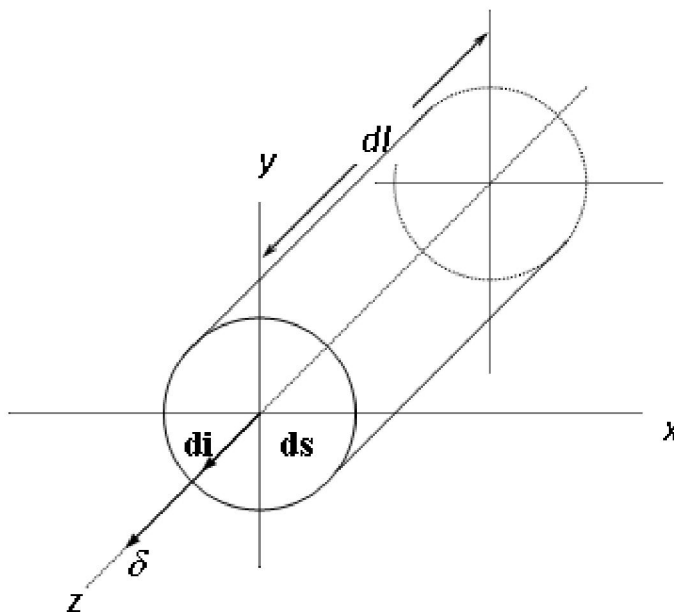


Рисунок 268

Ток, протекающий вдоль цилиндра:

$$di = \int_S \bar{\delta} \cdot \bar{ds} = \delta \cdot ds.$$

Напряжение между концами цилиндра:

$$du = \int \bar{E} d\bar{l} = \bar{E} \cdot \bar{dl},$$

где  $\bar{E}$  – вектор напряженности электрического поля, под действием которого возникает ток.

Сопротивление цилиндра, как проводника:

$$dR = \rho \frac{dl}{ds} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dl}{ds},$$

где  $\gamma$  – удельная проводимость среды [См/м].

Сопротивление цилиндра по закону Ома:

$$dR = \frac{du}{di} = \frac{\bar{E}}{\delta} \frac{dl}{ds}.$$

Приравнявая правые части равенств, получим:

$$\boxed{\bar{\delta} = \gamma \bar{E}} \quad \text{– уравнение закона Ома в дифференциальной}$$

Мощность, выделяемая в цилиндре по закону Джоуля:

$$dP = (di)^2 \cdot dR = \delta^2 ds^2 \cdot \frac{dl}{\gamma ds} = \frac{\delta^2}{\gamma} dv, \text{ откуда}$$

$$p = \frac{dP}{dv} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2 \quad [\text{Вт/м}^3] \text{ – уравнение закона Джоуля в}$$

дифференциальной форме, которое характеризует интенсивность выделения энергии вокруг рассматриваемой точки.

Если внутри цилиндра окажутся источники энергии, создающие дополнительную составляющую напряженности поля  $\bar{E}_{cm}$  (напряженность поля сторонних сил), то  $\bar{E}_s = \bar{E} + \bar{E}_{cm}$  и закон Ома в дифференциальной форме получит вид:

$$\bar{\delta} = \gamma(\bar{E} + \bar{E}_{cm}).$$

Как известно, выражение первого закона Кирхгофа в интегральной форме имеет вид:

$$\sum i = i_1 + i_2 + \dots = 0.$$

Выразим каждый из токов  $i_1, i_2, \dots$  через вектор плотности тока  $\bar{\delta}$ :

$$\sum i = \int_{S_1} \bar{\delta} \cdot \bar{ds} + \int_{S_2} \bar{\delta} \cdot \bar{ds} + \dots = \oint_S \bar{\delta} \cdot \bar{ds} = 0.$$

Преобразуем полученное уравнение по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{\delta} \cdot \vec{ds}}{\Delta v} = \text{div} \vec{\delta}, \text{ следовательно:}$$

$\text{div} \vec{\delta} = 0$  – уравнение первого закона Кирхгофа в дифференциальной форме. Из этого уравнения следует вывод, что линии вектора  $\vec{\delta}$  непрерывны и замкнуты.

Интегральная форма уравнения 2-го закона Кирхгофа для контура, не содержащего источников ЭДС, имеет вид:

$$\sum u = u_1 + u_2 + \dots = 0.$$

Выразим каждое из напряжений через вектор напряженности поля  $\vec{E}$ :  $\sum u = \int_{l_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_{l_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \dots = \oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$ , и преобразуем полученное уравнение по

теореме Стокса:  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\Delta S} = \text{rot}_n \vec{E} = 0$ .

Последнее уравнение справедливо для любого направления, следовательно:

$\text{rot} \vec{E} = 0$  – уравнение второго закона Кирхгофа в дифференциальной форме.

Из этого уравнения следует вывод, что электрическое поле постоянного тока безвихревое, потенциальное и в каждой точке может быть описано потенциальной функцией согласно уравнению:

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi.$$

Преобразуем уравнение первого закона Кирхгофа:

$\text{div} \vec{\delta} = \text{div} \gamma \vec{E} = \text{div}(-\gamma \text{grad} \varphi) = -\gamma \cdot \text{div} \cdot \text{grad} \varphi = 0$ , откуда следует:  $\text{div} \text{grad} \varphi = 0$  или  $\nabla^2 \varphi = 0$  – уравнение Лапласа для электрического поля постоянного тока.

На границе раздела двух сред с различными проводимостями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  выделим точку и окружим ее элементарной призмой, у которой высота бесконечно мала по сравнению с линейными размерами оснований (рисунок 269а).

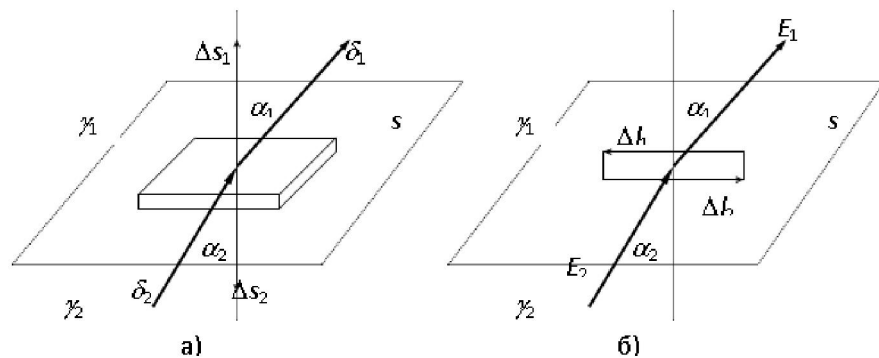


Рисунок 269

Применяя первый закон Кирхгофа, получим:

$$\oint_S \overline{\delta} ds = \int_{S_1} \overline{\delta}_1 ds + \int_{S_2} \overline{\delta}_2 ds = \delta_1 \Delta s_1 \cos \alpha_1 - \delta_2 \Delta s_2 \cos \alpha_2 = 0.$$

Откуда следует, что  $\delta_{1n} = \delta_1 \cos \alpha_1 = \delta_{2n} = \delta_2 \cos \alpha_2$  – на границе раздела двух сред с различными проводимостями равны нормальные составляющие вектора плотности тока  $\overline{\delta}$ .

Окружим точку элементарным прямоугольником (рисунок 269б), у которого высота бесконечно мала по сравнению с длиной. Применяя второй закон Кирхгофа к контуру прямоугольника, получим:

$$\oint_{l_1} \overline{E} dl = \int_{l_1} \overline{E}_1 dl + \int_{l_2} \overline{E}_2 dl = E_1 l_1 \sin \alpha_1 - E_2 l_2 \sin \alpha_2 = 0.$$

Откуда следует, что  $E_{1t} = E_1 \sin \alpha_1 = E_{2t} = E_2 \sin \alpha_2$  – на границе раздела двух сред с различными проводимостями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  равны тангенциальные составляющие вектора напряженности поля  $\overline{E}$ .

Разделим почленно левые и правые части полученных уравнений и учтем, что  $\delta_1 = \gamma_1 E_1$  и  $\delta_2 = \gamma_2 E_2$ , в итоге получим:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

– условие преломления линий поля на границе раздела двух сред с различными проводимостями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

## 20.2 Методы расчета электрических полей постоянного тока

Электрическое поле постоянного тока, с одной стороны, и электростатическое поле вне электрических зарядов ( $\rho_{\text{св}}=0$ ), с другой стороны, описываются одинаковыми по структуре математическими уравнениями. Для сравнения сведем эти уравнения в общую таблицу.

Электрическое поле постоянного тока	Электростатическое поле при отсутствии зарядов ( $\rho_{\text{св}}=0$ )
$\overline{\delta} = \gamma \overline{E}$	$\overline{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \overline{E}$
$\operatorname{div} \overline{\delta} = 0$	$\operatorname{div} \overline{D} = \rho_{\text{я}} = 0$
$\operatorname{rot} \overline{E} = 0$	$\operatorname{rot} \overline{E} = 0$
$\nabla^2 \varphi = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$
$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

Как следует из приведенной таблицы оба поля описываются одинаковыми по структуре уравнениями и к ним применим принцип двойственности. Таким образом для расчета электрических полей постоянного тока можно применять те же расчетные методы, которые были получены ранее для электростатических полей, при условии соответствующих замен в расчетных формулах физических величин и коэффициентов:  $\vec{D} \rightarrow \vec{\delta}, \epsilon\epsilon_0 \rightarrow \gamma, q \rightarrow i, C \rightarrow G$ . С другой стороны, для экспериментального исследования сложных по конфигурации электростатических полей применяется их физическое моделирование с помощью электрических полей постоянного тока.

В электростатике очень важное значение имеет теоретическое понятие точечного заряда  $q$ . По аналогии введем понятие точечного тока  $i$ , который растекается в проводящей среде из одной точки, при этом в этой точке плотность тока  $\vec{\delta} = \infty$ .

Рассмотрим несколько примеров расчета электрических полей постоянного тока.

**Пример1.** Заземлитель шаровой формы с радиусом  $R$  находится на большой глубине  $h (h \gg R)$ . К заземлителю подведено напряжение  $U$  (рисунок 270).

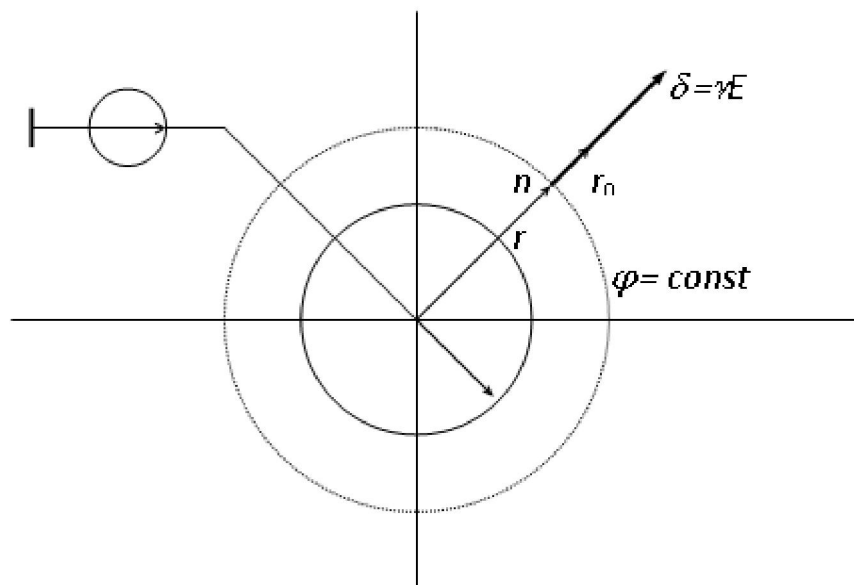


Рисунок 270

Заменим суммарный ток, стекающий с поверхности заземлителя точечным током  $i$ , который растекается из центра заземлителя. Применим расчетные формулы из теории электростатического поля точечного заряда, заменив  $\vec{D} \rightarrow \vec{\delta}, \epsilon\epsilon_0 \rightarrow \gamma, q \rightarrow i, C \rightarrow G$ :

$i = \oint_S \bar{\delta} dS = 4\pi r^2 \bar{\delta} = 4\pi r^2 \gamma E$ , откуда  $\bar{E} = \frac{i}{4\pi \gamma r^2} \cdot \bar{r}$ ,  $\varphi = -\int E dr = \frac{i}{4\pi \gamma r} + C$ , если принять  $\varphi_\infty = 0$ , то постоянная интегрирования  $C=0$ .

Потенциал на поверхности заземлителя при  $r=R$ :

$$\varphi(R) = U = \frac{i}{4\pi \gamma R},$$

откуда получаем формулы для сопротивления заземлителя и его тока:

$$R_3 = \frac{U}{i} = \frac{1}{4\pi \gamma R}, \quad i = \frac{U}{R_3} = U \cdot 4\pi \gamma R.$$

**Пример 2.** Заземлитель в виде шара расположен на сравнительно небольшой глубине  $h$ , соизмеримой с его радиусом  $R$  (рисунок 271).

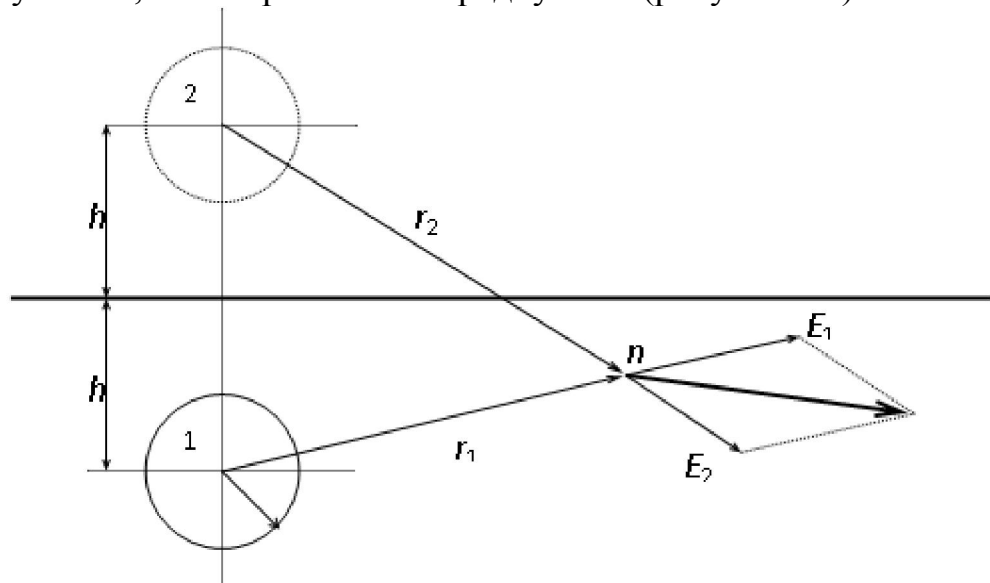


Рисунок 271

Применим к решению задачи метод зеркальных отображений. Заменим в верхней полуплоскости диэлектрик  $\varepsilon$  проводящей средой  $\gamma$  и зеркально расположим там такой же заземлитель той же полярности, при этом граничные условия на поверхности земли не изменятся (линии вектора  $E$  направлены по касательной вдоль поверхности). Заменим токи, стекающие с поверхностей обоих заземлителей, равными по величине точечными токами, растекающимися из электрических центров 1 и 2, которые будут смещены относительно геометрических центров так, чтобы сохранились прежними граничные условия на поверхности шаров (поверхности должны остаться эквипотенциальными с потенциалом  $\varphi=U$ ). После определения положения электрических центров расчет параметров поля в произвольной точке  $n$  производится по методу наложения:

$$\bar{E}_n = \bar{E}_{n1} + \bar{E}_{n2} = \frac{i}{4\pi \gamma r_1^2} \bar{r}_{01} + \frac{i}{4\pi \gamma r_2^2} \bar{r}_{02}$$

$$\varphi_n = \varphi_{n1} + \varphi_{n2} = \frac{i}{4\pi\gamma r_1} + \frac{i}{4\pi\gamma r_2}.$$

При соотношении  $h \gg R$  потенциал на поверхности заземлителя будет равен:

$\varphi = U = \varphi_1 + \varphi_2 \approx \frac{i}{4\pi\gamma R} + \frac{i}{4\pi\gamma 2h} = \frac{i}{4\pi\gamma} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2h} \right)$ , откуда следует формула для определения сопротивления заземлителя:

$$R_3 = \frac{U}{i} = \frac{1}{4\pi\gamma} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2h} \right).$$

**Пример 3.** Определить шаговое напряжение  $U_{ш}$  на заданном расстоянии  $x$  от центра опоры высоковольтной ЛЭП при коротком замыкании одной из фаз линии на опору (рисунок 272).

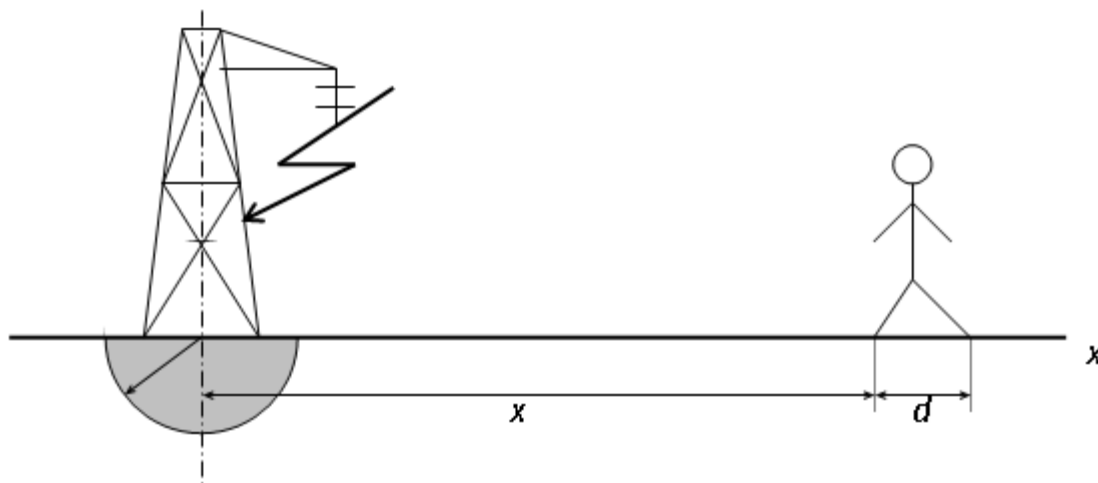


Рисунок 272

Для упрощения расчетов будем считать, что заземлитель опоры имеет форму полушария с радиусом  $R$ . Заменим диэлектрик в верхней части пространства проводящей средой  $\gamma$ , а заземлитель дополним зеркальным отображением до полного шара. После таких преобразований решение задачи сводится к расчету поля шарового заземлителя п.1.:

$$I_3 = U_\phi \cdot 4\pi\gamma R; \quad E(r) = \frac{I_3}{4\pi\gamma r^2} = \frac{U_\phi R}{r^2}; \quad U_{ш} = \int_{x+d}^x E dr = \int_{x+d}^x \frac{U_\phi R}{r^2} dr = U_\phi R \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+d} \right),$$

где  $U_\phi$  – фазное напряжение ЛЭП,  $R$  – радиус заземлителя опоры.

**Пример 4.** Требуется рассчитать электрическое поле вертикального цилиндрического заземлителя диаметром  $D$  и длиной  $h$ . К заземлителю подведено напряжение  $U$  (рисунок 273).

Заменим диэлектрик в верхней части пространства проводящей средой  $\gamma$ , а заземлитель дополним его зеркальным отображением. Будем считать, что электрический ток стекает с оси заземлителя, где  $\tau = f(y)$  – линейная плотность тока стекания [А/м]. Вид функции  $\tau = f(y)$  должен удовлетворять

граничным условиям, а именно, поверхность заземлителя должна быть эквипотенциальной с потенциалом  $\varphi=U$ . Расчеты показывают, что линейная плотность тока  $\tau$  по концам заземлителя значительно больше, чем в его середине. Тогда  $di=\tau dl$ —элемент тока.

Параметры поля получаются в результате интегрирования соответствующих уравнений по всей длине заземлителя:

$$\overline{E} = \int_{-h}^{+h} \frac{\tau dl}{4\pi\gamma r^2} \overline{r_0}; \quad \varphi = \int_{-h}^{+h} \frac{\tau dl}{4\pi\gamma r}.$$

Расчеты полей сложной конфигурации выполняются как правило на ЭВМ методом численного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений.

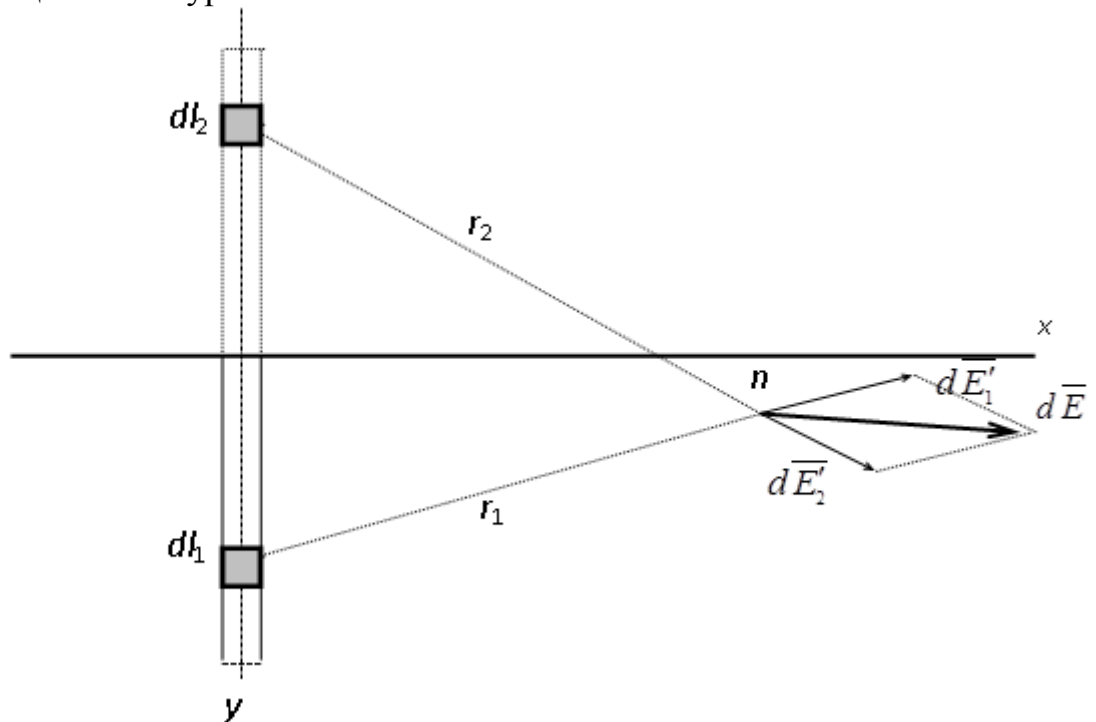


Рисунок 273

## 21 Магнитное поле постоянных токов

### 21.1 Уравнения магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах

Магнитное поле характеризуется двумя векторными величинами:

$\overline{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, создается электрическими токами, является первопричиной магнитного поля [А/м];

$\overline{B}$  — вектор индукции магнитного поля или плотность магнитных силовых линий [Тл].

Между векторами  $\overline{B}$  и  $\overline{H}$  существует связь:

$$\overline{B} = \mu\mu_0 \overline{H},$$

где  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \approx 1,257 \cdot 10^{-6}$  [Гн/м] – магнитная проницаемость пустоты,  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость.

Известный из курса физики закон Био-Савара-Лапласа устанавливает связь между элементарным вектором магнитной индукции  $d\vec{B}$  в произвольной точке пространства и элементом тока  $d\vec{i} = I \cdot d\vec{l}$  (рисунок 274):

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}_0]}{r^2}; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}_0]}{r^2}.$$

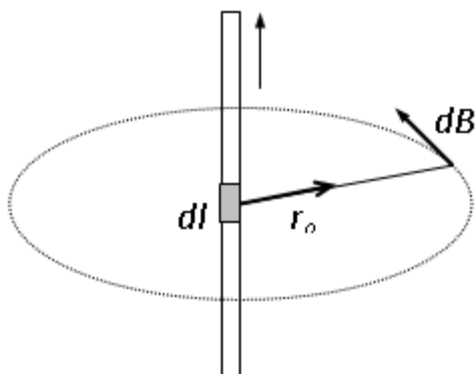


Рисунок 274

На основе закона Био-Савара-Лапласа выполняется расчет магнитного поля сложных систем проводников с токами.

Закон Ампера определяет силу взаимодействия магнитного поля на элемент проводника с током:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}],$$

откуда следует, что сила, действующая на проводник, равна

$$\vec{F} = I \int_l [d\vec{l} \cdot \vec{B}].$$

На прямолинейный проводник с током  $I$  в равномерном магнитном поле действует сила  $F = BIl \sin(B \wedge l)$ , направление которой определяется по правилу левой руки.

1 –й закон Кирхгофа для магнитной цепи, выражающий непрерывность магнитных силовых линий поля, имеет вид:

$$\sum \Phi = \sum_s \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{– интегральная форма уравнения непрерывности магнитных линий.}$$

Преобразуем это уравнение по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s}}{\Delta V} = \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{– дифференциальная форма уравнения непрерывности магнитных линий.}$$

Закон полного тока для магнитного поля имеет вид:

$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i = i_{\text{пол}}$  – интегральная форма закона полного тока.

Преобразуем левую часть этого уравнения по теореме Стокса:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} = \text{rot} \vec{H}, \text{ а в правой части получим: } \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{i_{\text{пол}}}{\Delta S} = \frac{di}{dS_n} = \bar{\delta}_n.$$

Следовательно:

$\text{rot} \vec{H} = \bar{\delta}$  – дифференциальная форма закона полного тока.

Граничные условия в магнитном поле на границе раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  выражаются уравнениями:

$$B_{1n} = B_1 \cos \alpha_1 = B_{2n} = B_2 \cos \alpha_2$$

$$H_{1t} = H_1 \sin \alpha_1 = H_{2t} = H_2 \sin \alpha_2$$

$$\frac{\text{tg} \alpha_1}{\text{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

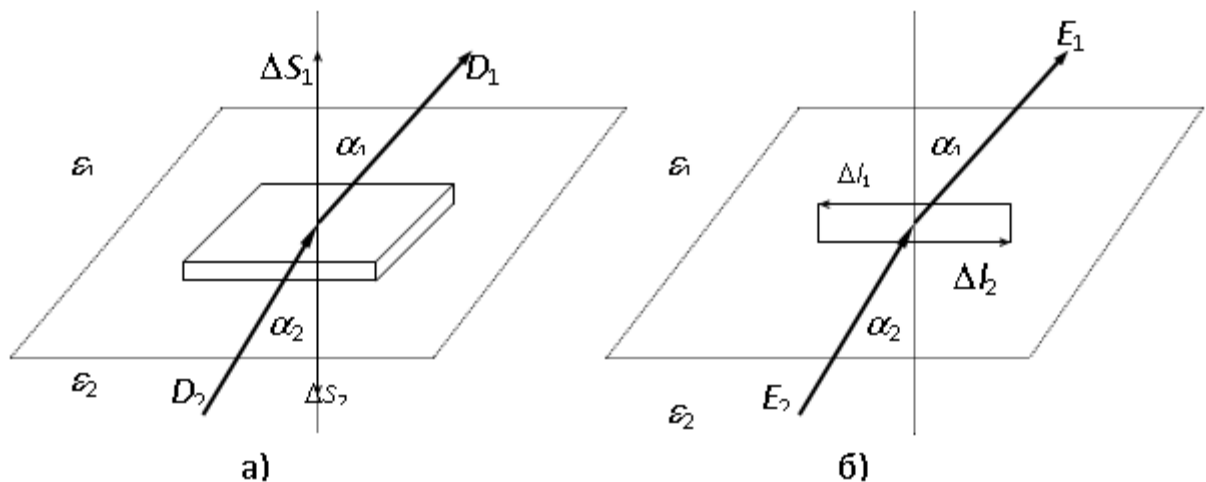


Рисунок 275

На границе раздела двух сред равны нормальные составляющие вектора  $B$  и тангенциальные составляющие вектора  $H$ .

Магнитное поле несет в себе энергию, плотность которой определяется уравнением:

$$w = \frac{dW_m}{dV} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{\mu \mu_0}{2} = \frac{B^2}{2\mu \mu_0} [\text{Дж/м}^3]$$

## 21.2 Векторный потенциал магнитного поля

Пусть требуется рассчитать магнитное поле в однородной среде ( $\mu = \text{const}$ ), в которой протекает электрический ток, плотность которого

задана в виде некоторой функции координат  $\bar{\delta}(x, y, z)$ . Для определения векторов поля  $\bar{B}(x, y, z)$  и  $\bar{H}(x, y, z)$  необходимо решить систему уравнений:

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} \quad (2)$$

$$\bar{B} = \mu\mu_0 \bar{H} \quad (3)$$

Введем новую векторную величину  $\bar{A}$ , позволяющую исключить из системы уравнений неизвестные  $\bar{B}$  и  $\bar{H}$  и получить одно дифференциальное уравнение, решение которого известно в математике.

Пусть вектор  $\bar{A}$ , получивший название вектора потенциала магнитного поля, удовлетворяет условию:  $\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$

Так как  $\operatorname{div} \operatorname{rot}$  любого вектора тождественно равна нулю, то уравнение (1) выполняется тождественно:  $\operatorname{div} \bar{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} = 0$

$$\text{Из уравнения (2) следует: } \operatorname{rot} \bar{H} = \operatorname{rot} \frac{\bar{B}}{\mu\mu_0} = \frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \bar{A} = \bar{\delta}$$

$$\text{Из курса математики известно, что } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} = \mu\mu_0 \bar{\delta}.$$

В полученном уравнении можно принять  $\operatorname{div} \bar{A} = 0$ , не нарушая равенства  $\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$ . Тогда получим:

$\nabla^2 \bar{A} = -\mu\mu_0 \bar{\delta}$  – уравнение Пуассона для векторного потенциала магнитного поля для областей среды, где протекают токи проводимости. Для областей среды, где токи проводимости отсутствуют, уравнение Пуассона превращается в уравнение Лапласа  $\nabla^2 \bar{A} = 0$ . Каждое из этих векторных уравнений в декартовой системе координат распадается на три скалярных в направлении координатных осей:

$$\nabla^2 \bar{A} \begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu\mu_0 \delta_x & \nabla^2 A_x = 0 \\ \nabla^2 A_y = -\mu\mu_0 \delta_y & \nabla^2 A_y = 0 \\ \nabla^2 A_z = -\mu\mu_0 \delta_z & \nabla^2 A_z = 0 \end{cases}$$

Решения уравнений Пуассона для векторного потенциала  $\bar{A}$  имеют вид (без вывода):

$$A_x = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x}{r} dv; \quad A_y = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_y}{r} dv; \quad A_z = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_z}{r} dv$$

$$\bar{A} = \bar{i}A_x + \bar{j}A_y + \bar{k}A_z = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\delta}}{r} dv$$

Если решение для векторного потенциала  $\bar{A}$  найдено, то другие неизвестные величины выражаются через векторный потенциал:

$$\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$$

$$\Phi = \int_S \overline{B} d\overline{S} = \int_S \overline{rot A} d\overline{S} = \dots = \oint_l \overline{A} d\overline{l}$$

$$W_M = \int_V \frac{B^2}{2\mu\mu_0} dv = \dots = \frac{1}{2} \int_V \overline{\delta} \cdot \overline{A} dv$$

Если токи протекают по линейным проводникам, поперечные размеры которых весьма малы по сравнению с их длиной, то то выражение для векторного потенциала  $\overline{A}$  можно упростить следующим образом:

$$\overline{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\overline{\delta}}{r} dv = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_l \int_S \frac{\overline{\delta}}{r} d\overline{S} d\overline{l} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{d\overline{l}}{r} \int_S \overline{\delta} d\overline{S} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{i}{r} d\overline{l}$$

$$\text{где } i = \int_S \overline{\delta} \cdot d\overline{s} - \text{ток в проводнике}$$

В последнем уравнении интегрирование по объему заменяется интегрированием по контурам линейных проводов, что упрощает его решение.

### 21.3 Скалярный потенциал магнитного поля

Ранее для электростатического поля вне зарядов ( $\rho = 0$ ) была получена система уравнений :

$$\overline{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \overline{E}; \quad \text{div} \overline{D} = 0; \quad \text{rot} \overline{E} = 0; \quad \overline{E} = -\text{grad} \varphi; \quad \nabla^2 \varphi = 0.$$

Для магнитного поля вне токов ( $\delta = 0$ ) система уравнений имеет вид:

$$\overline{B} = \mu\mu_0 \overline{H}; \quad \text{div} \overline{B} = 0; \quad \text{rot} \overline{H} = 0.$$

Сравнение этих систем уравнений показывает, что они имеют одинаковую структуру и, следовательно, к их решению применим принцип двойственности. Это значит, что к расчету магнитного поля в областях вне токов могут быть применены методы, заимствованные из электростатики. Введем по аналогии понятие скалярного магнитного потенциала  $\varphi_M(x,y,z)$  из условия:

$$\overline{H} = -\text{grad} \varphi_M, \quad \nabla^2 \varphi_M = 0;$$

Применение понятия скалярного потенциала  $\varphi_M(x,y,z)$  в ряде случаев значительно упрощает решение задач по расчету магнитного поля вне токов. Следует иметь в виду, что для электрического поля напряжение

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \overline{E} \cdot d\overline{l}$$
 не зависит от выбора пути интегрирования, в то же

время магнитное напряжение  $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \overline{H} \cdot d\overline{l} = \sum i$  зависит от выбора этого пути.

## 21.4 Магнитное поле цилиндрического проводника с током

Пусть по бесконечно длинному цилиндрическому проводу радиуса  $R$  протекает постоянный ток  $I$ . Выберем систему координат  $x, y, z$  так, чтобы ось провода совпадала с осью координат  $z$  (рисунок 276).

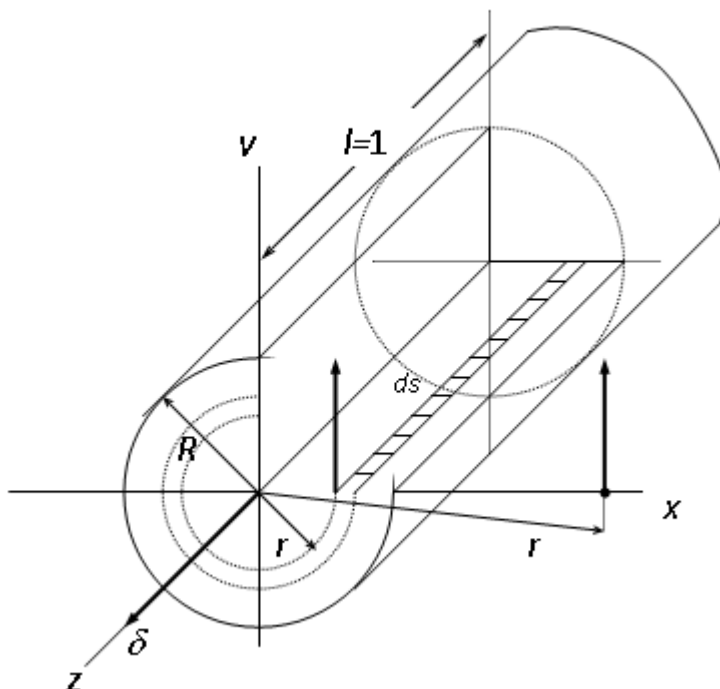


Рисунок 276

Будем считать, что ток равномерно распределяется по сечению провода, тогда его плотность будет равна  $\bar{\delta} = \frac{I}{s} = \frac{I}{\pi R^2}$

Для исследования магнитного поля выделим две неравнозначные области, для каждой из которых выполним расчет параметров магнитного поля:

- 1) область внутри провода при  $0 \leq r \leq R$ ,
- 2) область вне провода при  $R \leq r \leq \infty$ .

Для расчета поля во внутренней области выберем контур интегрирования в виде окружности с текущим радиусом  $r < R$ . Тогда ток внутри контура интегрирования:

$$i(r) = \bar{\delta} \pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}, \text{ откуда } \frac{i(r)}{I} = \frac{r^2}{R^2}$$

Применим к контуру интегрирования закон полного тока в интегральной форме :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r = i_{\text{пол}} = i(r) = I \frac{r^2}{R^2},$$

откуда следует  $H = \frac{I}{2\pi R^2} r$  и  $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R^2} r$ .

Векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  направлены по касательной к окружности, их направление определяется по правилу правоходового винта.

При увеличении радиуса на элементарную величину  $dr$  произойдет приращение магнитного потока на величину  $d\phi$  на единицу длины провода ( $l = 1$ ) и приращение магнитного потокосцепления на величину  $d\psi$ :

$$d\phi = Bds = Bldr = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R^2} r dr$$

$$d\psi = d\phi \frac{i(r)}{I} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi R^2} r dr \frac{r^2}{R^2} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi R^4} r^3 dr$$

Внутренний магнитный поток и внутреннее потокосцепление найдутся в результате интегрирования полученных выше выражений по всему сечению провода:

$$\Phi_{\text{внутр.}} = \int_0^R d\phi = \int_0^R \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R^2} r \cdot dr = \frac{\mu\mu_0}{4\pi},$$

$$\Psi_{\text{внутр.}} = \int_0^R d\psi = \int_0^R \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R^4} r^3 \cdot dr = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}.$$

Из последнего уравнения следует формула для внутренней индуктивности провода на единицу длины :

$$L_{\text{внутр.}} = \frac{\Psi_{\text{внутр.}}}{I} = \frac{\mu\mu_0}{8\pi} [\text{Гн/м}]$$

Внутренняя индуктивность провода зависит от его магнитной проницаемости  $\mu$  (для стальных проводов она значительно больше, чем для медных или алюминиевых) и не зависит от его радиуса.

Для расчета поля во внешней области выберем контур интегрирования в виде окружности с текущим радиусом  $r > R$ . Ток внутри контура интегрирования равен  $I$  и не зависит от текущего значения радиуса  $r$ . Из закона полного тока следует:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H 2\pi r = i_{\text{пол}} = I, \quad \text{откуда} \quad H = \frac{I}{2\pi r} \quad \text{и} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Приращения магнитного потока  $d\phi$  и потокосцепления  $d\psi$  будут равны:

$$d\phi = d\psi = Bds = Bldr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr$$

Внешний магнитный поток  $\Phi_{\text{внеш}}$  и соответственно внешнее потокосцепление  $\Psi_{\text{внеш}}$  найдутся в результате интегрирования полученных выше выражений по сечению вне провода:

$$\Phi_{\text{внешн.}} = \Psi_{\text{внешн.}} = \int_R^{R'} d\psi = \int_R^{R'} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R'}{R},$$

где  $R' < \infty$  - внешний радиус в окружающем провод пространстве, где производится расчет параметров поля.

Внешняя индуктивность провода на единицу длины :

$$L_{\text{внешн.}} = \frac{\Psi_{\text{внешн.}}}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R'}{R} [\text{Гн/м}]$$

## 21.5 Магнитное поле двухпроводной линии

По двухпроводной линии с заданными геометрическими размерами (рисунок 277) ( $R$  – радиус проводов,  $d$  – расстояние между осями проводов) протекает постоянный ток  $I$ .

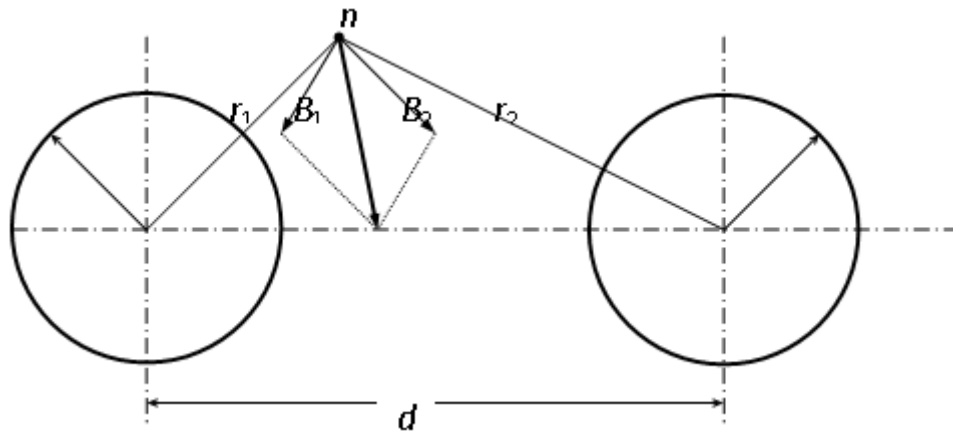


Рисунок 277

Результирующий вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  в произвольной точке  $n$  можно определить по методу наложения как геометрическую сумму составляющих этого вектора  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  от каждого провода в отдельности:  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ . Составляющие вектора  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  определяются по полученным ранее формулам, а их направления – по правилу правоходового винта:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

Результирующую индуктивность линии на единицу длины можно найти как сумму индуктивностей прямого и обратного провода:

$$L = L_1 + L_2 = 2L_{\text{внут}} + 2L_{\text{внеш}} = 2 \cdot \frac{\mu\mu_0}{8\pi} + 2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d}{R} = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{R} + \frac{\mu}{4} \right).$$

При определении внешней индуктивности провода, внешний радиус интегрирования  $R$  следует принять равным расстоянию между проводами  $d$ .

Если провода линии выполнены из неферромагнитного материала (Cu, Al) то  $\mu = 1$  и формула для индуктивности линии получит вид:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{d}{R} + \frac{1}{4} \right) [ \text{Гн} / \text{м} ]$$

В схемах замещения трехфазных линий электропередачи учитывается индуктивность одного провода (фазы), следовательно:

$L = \frac{\mu}{2\pi} \left( \ln \frac{d}{R} + \frac{\mu}{4} \right) [ \text{Гн} / \text{м} ]$  – индуктивность каждого провода (фазы) трехфазной транспонированной ЛЭП на единицу длины, где  $d = \sqrt[3]{d_{AB} \cdot d_{BC} \cdot d_{CA}}$  – среднегеометрическое значение межосевых расстояний проводов.

## 21.6 Взаимная индуктивность двух параллельных линий

Пусть задано геометрическое расположение проводов в пространстве двух параллельных двухпроводных линий (1 и 1' – прямой и обратный провода первой линии, 2 и 2' – прямой и обратный провода второй линии) (рисунок 278).

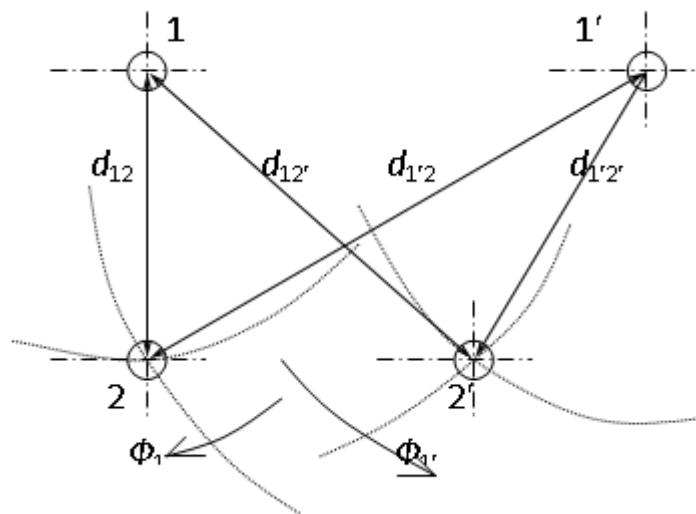


Рисунок 278

Предположим, что по 1-й линии протекает постоянный ток  $I$ . Магнитный поток от провода 1, пересекающий плоскость второй линии, определится по формуле:

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d_{12'}}{d_{12}}$$

Магнитный поток от провода 1', пересекающий плоскость второй линии:

$$\Phi_1' = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d_{1'2}}{d_{1'2'}}$$

Как следует из рисунка, магнитные потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_{1'}$  в плоскости второй линии направлены одинаково, т.е. складываются. Результирующий магнитный поток взаимной индукции будет равен:

$$\Phi_{\text{вз}} = \Phi_1 + \Phi_{1'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d_{12'} \cdot d_{1'2}}{d_{12} \cdot d_{1'2'}}$$

Взаимная индуктивность двух линий на единицу длины будет равна:

$$M = \frac{\Phi_{\text{вз}}}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{12'} d_{1'2}}{d_{12} d_{1'2'}}$$

При использовании данного уравнения для расчетов следует учитывать, что индексы при расстояниях  $d$  зависят, во-первых, от обозначения проводов на чертеже, и во-вторых, от взаимной ориентации магнитных потоков  $\Phi_1$  и  $\Phi_{1'}$ , и в каждом конкретном случае должны устанавливаться индивидуально.

## 21.7 Магнитное поле сложной системы проводов с током

В большинстве реальных случаев электрические токи, создающие магнитное поле, протекают по тонким каналам – электрическим проводам. Для создания сильных магнитных полей, используемых в технике, применяются системы проводов, образующие катушки индуктивности.

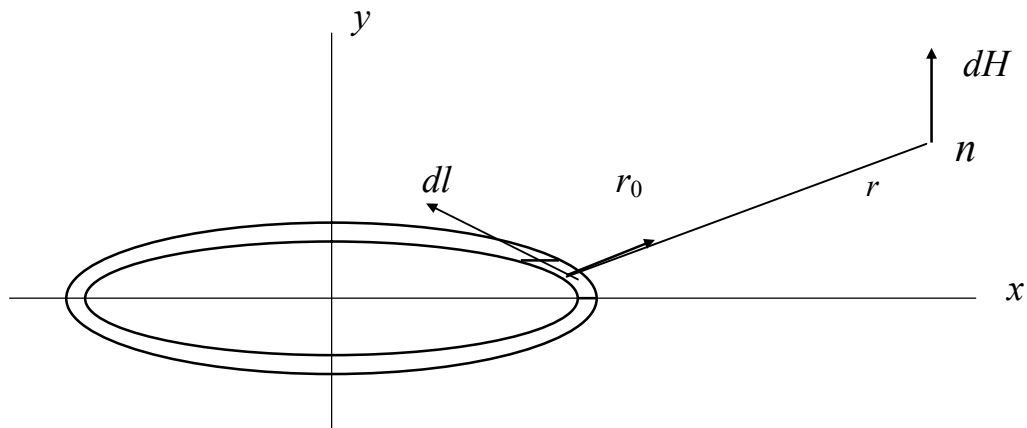


Рисунок 279

Расчет магнитного поля в произвольной точке пространства  $n$ , создаваемого идеальным (бесконечно тонким) проводником с током  $I$  (рисунок 279), может быть выполнен на основе известного из курса физики закона Био-Савара-Лапласа:

$$\vec{H} = \int_{\ell} I \cdot \frac{[\vec{dl} \cdot \vec{r}_0]}{4\pi \cdot r^2}$$

где  $dl$  – векторный элемент длины проводника;  $r$  – расстояние от элемента  $dl$  до рассматриваемой точки  $n$ ;

$\vec{r}_0 = 1$  – единичный радиус-вектор, направленный по радиусу  $r$ .

Резльтирующий вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}_n$ , создаваемый длинным проводом  $l$  или системой проводов, может быть найден путем интегрирования приведенного уравнения Био-Савара-Лапласа по всей длине провода или системы проводов.

В качестве примера рассмотрим расчет магнитного поля цилиндрической катушки длиной  $h$ , с внутренним диаметром  $D_1$  и наружным диаметром  $D_2$ , содержащую  $w$  витков, расположенных в несколько слоев (рисунок 280).

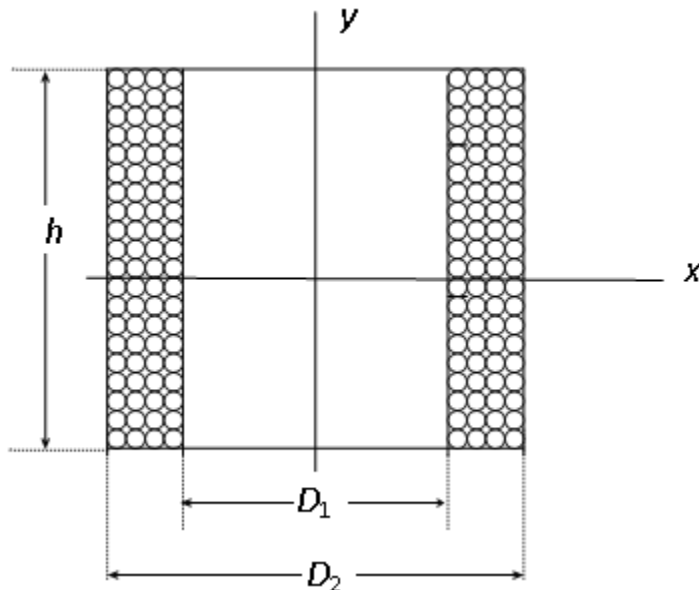


Рисунок 280

Принимаем допущения, что 1) электрический ток протекает строго по оси провода, и 2) отдельные витки имеют кольцевую форму. Такие допущения не вносят существенных погрешностей в результат расчета магнитного поля вне провода, но позволяют упростить процедуру интегрирования уравнения Био-Савара-Лапласа. Результирующий вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}_n$  в произвольной точке  $n$  может быть найден как геометрическая сумма составляющих этого вектора от всех витков  $w$ , расположенных по длине катушки от  $-h/2$  до  $+h/2$  и по толщине катушки от  $D_1$  до  $D_2$ :

$$\vec{H}_n = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{D_1}^{D_2} \int_0^{2\pi} I \cdot \frac{d\vec{l} \cdot \vec{r}_0}{4\pi r^2} \cdot dh \cdot dD \cdot d\alpha .$$

Магнитное поле катушки будет обладать центральной и осевой симметрией, поэтому исследование поля проводится только в одной из четвертей плоскости сечения (в области положительных значений координат  $x$  и  $y$ ).

Анализ характера изменения магнитного поля в пространстве показывает, что магнитное поле имеет наибольшую интенсивность внутри

катушки, и что оно убывает во всех направлениях по мере удаления от витков катушки.

## 21.8 Механические силы в магнитном поле

Пусть существует система из  $n$  магнитносвязанных электрических цепей, в которых протекают постоянные токи. Пусть одна из цепей перемещается в направлении оси  $x$  на величину  $dx$ . При перемещении цепи будет выполнена механическая работа:

$$dW_{\text{мех}} = F_x \cdot dx,$$

где  $F_x$  - сила, действующая на цепь в направлении  $x$ .

Вследствие перемещения цепи произойдет изменение магнитного поля системы:

$$dW_{\text{м}} = d\left(\sum_1^n \frac{L_k I_k}{2}\right) = d\left(\sum_1^n \frac{I_k \Psi_k}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_1^n I_k d\Psi_k$$

Изменение потокосцепления каждой цепи  $\Psi_k$  вызовет появление напряжения на ее зажимах:  $u_k = -e_k = \frac{d\Psi_k}{dt}$ , при этом в системе будет выполнена дополнительная электрическая работа:

$$dW_{\text{эл}} = \sum_1^n I_k u_k dt = \sum_1^n I_k d\Psi_k$$

В соответствии с законом сохранения энергии составим баланс энергий:  $dW_{\text{эл}} = dW_{\text{м}} + dW_{\text{мех}}$ , или  $\sum_1^n I_k d\Psi_k = \frac{1}{2} \sum_1^n I_k d\Psi_k + F_x dx$ ,

откуда следует, что

$$F_x dx = \frac{1}{2} \sum_1^n I_k d\Psi_k = dW_{\text{м}}, \quad \text{или} \quad F_x = \frac{dW_{\text{м}}}{dx}, \quad \text{т. е. составляющая силы,}$$

действующей на электрическую цепь в произвольном направлении равна производной от энергии магнитного поля в этом же направлении.

Составляющие силы, действующей на электрическую цепь в направлении осей координат  $x, y, z$ :

$$F_x = \frac{dW_{\text{м}}}{dx}; \quad F_y = \frac{dW_{\text{м}}}{dy}; \quad F_z = \frac{dW_{\text{м}}}{dz}.$$

Результирующая сила:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) W_{\text{м}} = \text{grad} W_{\text{м}}$$

Результирующая сила направлена в сторону наибольшего возрастания энергии магнитного поля.

Так как по условию токи цепей постоянны, то и энергия собственного магнитного поля, равная  $W_{\text{соб}} = \sum \frac{L_k I_k^2}{2}$  тоже постоянна, а изменяется только взаимная энергия системы  $W_{\text{вз}}$  и, следовательно, сила  $\vec{F} = \text{grad} W_{\text{вз}}$ .

Если система состоит только из двух магнитно связанных цепей, то энергия магнитного поля будет равна:

$$W_{\text{м}} = W_{1\text{соб}} + W_{2\text{соб}} + W_{\text{вз}} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2.$$

Тогда получим:

$$\vec{F} = \text{grad} W_{\text{м}} = \text{grad} W_{\text{вз}} = \text{grad} M I_1 I_2 = I_1 I_2 \text{grad} M$$

В измерительных приборах электродинамической системы вращающий момент, действующий на подвижную систему прибора, будет равен:

$$M_{\text{вп}} = F_{\alpha} \cdot r = r \cdot I_1 \cdot I_2 \text{grad}_{\alpha} M = I_1 I_2 \frac{dM}{d\alpha},$$

т.е. вращающий момент пропорционален скорости изменения взаимной индуктивности  $M$  при повороте подвижной системы прибора.

## 22 Переменное электромагнитное поле

### 22.1 Основные уравнения Максвелла и их физический смысл

Основы теории электромагнитного поля или электродинамики были впервые изложены в 1873 г. английским ученым Максвеллом в труде «Трактат об электричестве и магнетизме». Математические уравнения, описывающие физические процессы в переменном электромагнитном поле, называются уравнениями Максвелла. Наиболее важные из них первые четыре, которые называются основными:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{св}} \quad (4)$$

$$\vec{\delta} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{см}}) \quad (5)$$

$$W = W_{\text{э}} + W_{\text{м}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} \quad (6)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad (7)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (8)$$

Рассмотрим более детально каждое из уравнений Максвелла и вытекающие из них следствия.

Физический смысл 1-го основного уравнения: переменное магнитное поле ( $\text{rot } \vec{H}$ ) возбуждается как токами проводимости ( $\vec{\delta}$ ), так и токами смещения ( $\vec{\delta}_{см}$ ). Максвелл назвал плотностью тока смещения изменение во времени вектора электрического смещения  $\vec{D}$ :

$$\vec{\delta}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ток проводимости ( $\vec{\delta}$ ) и ток смещения ( $\vec{\delta}_{см}$ ) эквиваленты в отношении создания магнитного поля, но представляют собой различные физические явления. Если ток проводимости соответствует движению свободных зарядов, то ток смещения может существовать в пустоте, где заряды отсутствуют вообще.

$$\text{Так как } \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \text{ то } \vec{\delta}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{\delta}_{см0} + \vec{\delta}_{см1}$$

Таким образом, плотность тока смещения в диэлектрике складывается из плотности тока смещения в пустоте ( $\vec{\delta}_{см0}$ ) и члена ( $\vec{\delta}_{см1}$ ), учитывающего поляризацию диэлектрика (перемещение связанных зарядов).

1-е уравнение Максвелла представляет собой дифференциальную форму обобщенного закона полного тока. Для доказательства этого положения проинтегрируем обе части уравнения по некоторой неподвижной поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $l$ :

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\delta} \cdot d\vec{s} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Левая часть уравнения преобразуется по теореме Стокса:

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}, \text{ а в правой части равенства получим: } \int_S \vec{\delta} \cdot d\vec{s} = i_{np},$$

$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\delta}_{см} \cdot d\vec{s} = i_{см}, \text{ следовательно:}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{np} + i_{см} = i_{пол} - \text{закон полного тока в интегральной форме.}$$

Для стационарного поля  $\vec{D} = \text{const}$  и  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ , тогда первое уравнение Максвелла превращается в уравнения магнитного поля постоянного тока:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta}, \quad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i_{np} = \sum i.$$

Из последнего равенства вытекают уравнения 2-го закона Кирхгофа для магнитной цепи:

$$\sum Hl = \sum Iw.$$

Возьмем операцию  $div$  от левой и правой части основного уравнения (1):

$$div(rot \bar{H}) = div\left(\bar{\delta} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right)$$

Из математики известно, что  $div rot = 0$  тождественно, тогда получим:

$div \bar{\delta} = -div \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = -div \bar{\delta}_{cm}$  — уравнение непрерывности линий вектора плотности тока  $\bar{\delta}$ , которое гласит, что линии вектора  $\bar{\delta}$  непрерывны, концами линий плотности тока проводимости  $\bar{\delta}_{np}$  являются начала линий плотности тока смещения  $\bar{\delta}_{cm}$  и наоборот.

Проинтегрируем обе части последнего уравнения по некоторому замкнутому объему  $V$ . В левой части по теореме Остроградского получим:

$$\int_V div \bar{\delta} \cdot dv = \int_S \bar{\delta} \cdot d\bar{s} = i_{np},$$

а в правой части:

$$-\int_V div \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot dv = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V div \bar{D} \cdot dv = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_{cs} \cdot dv = -\frac{\partial q}{\partial t},$$

следовательно:  $i_{np} - \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{dq}{dt}$  — закон сохранения заряда в интегральной форме.

Полученное уравнение показывает, что в переменном электромагнитном поле токи и заряды связаны и не могут задаваться независимо друг от друга.

Физический смысл 2-го основного уравнения: переменное электрическое поле ( $rot \bar{E}$ ) возбуждается не только зарядами  $q$ , но и изменением во времени магнитного поля ( $-\mu\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$ ).

2-е уравнение Максвелла представляет собой дифференциальную форму закона электромагнитной индукции. Для доказательства этого положения проинтегрируем обе части уравнения по некоторой неподвижной поверхности  $S$ , опирающейся на контур  $l$ :

$$\int_S rot \bar{E} \cdot d\bar{s} = \int_S -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}.$$

Левая часть уравнения преобразуется по теореме Стокса:  

$$\int_S \text{rot} \bar{E} \cdot d\bar{s} = \oint_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = e_{\text{инд}},$$
 а в правой части равенства получим:

$$\int_S -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \text{ следовательно:}$$

$$e_{\text{инд}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{— закон электромагнитной индукции в интегральной форме.}$$

В электрических машинах переменного тока (генераторах, двигателях, трансформаторах) магнитное поле изменяется во времени по синусоидальному закону  $B(t) = B_m \sin \omega t$ . В обмотках машин это поле наводит синусоидальную ЭДС:

$$e(t) = -w \frac{d\Phi}{dt} = -w \Phi_m \omega \cdot \cos \omega t = E_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Действующее значение этой ЭДС равно:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot w f B_m s \approx 4,44 w f B_m s \quad \text{— уравнение трансформаторной ЭДС.}$$

Для стационарного поля  $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$ , и 2-е уравнение Максвелла превращается в уравнения электростатического поля:  $\text{rot} \bar{E} = 0$ ,  $\oint_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$ .

Из совместного анализа 1-го и 2-го уравнений Максвелла следует вывод, переменное электрическое и переменное магнитное поля должны рассматриваться как два связанных проявления единого электромагнитного процесса. Каждое из этих полей и их изменения во времени и пространстве являются одновременно и причиной и следствием друг друга. Совокупность этих двух полей называется электромагнитным полем.

3-е уравнение Максвелла ( $\text{div} \bar{B} = 0$ ) устанавливает истоки линий магнитного поля. Оно гласит, что линии вектора магнитной индукции  $\bar{B}$  непрерывны, т.е. замкнуты сами на себя. Проинтегрируем это уравнение по некоторому объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ :

$$\int_V \text{div} \bar{B} \cdot dv = \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = \int_{S_1} \bar{B} \cdot d\bar{s} + \int_{S_2} \bar{B} \cdot d\bar{s} + \dots = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots = \Sigma \Phi = 0 \quad \text{—}$$

есть 1-й закон Кирхгофа для магнитной цепи.

4-е уравнение Максвелла ( $\text{div} \bar{D} = \rho_{\text{св}}$ ) устанавливает истоки линий электрического поля. Оно гласит, что линии вектора электростатической индукции  $\bar{D}$  имеют разрыв, они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Проинтегрируем это уравнение по некоторому объему  $V$ , ограниченному поверхностью  $S$ :

$$\int_V \operatorname{div} \bar{D} \cdot dv = \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_V \rho_{св} \cdot dv = \Sigma q_{св} \quad \text{или} \quad \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \Sigma q_{св} \quad -$$

есть уравнение теоремы Гаусса в интегральной форме.

## 22.2 Теорема Умова-Пойтинга для электромагнитного поля

Теорема Умова-Пойтинга устанавливает баланс мощностей в произвольном объеме электромагнитного поля. Математическая база теоремы разработана русским математиком Умовым в 1874 году, а в 1884 году английский физик Пойтинг применил идеи Умова к электромагнитному полю.

Выделим в переменном электромагнитном поле некоторый объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Внутри выделенного объема могут оказаться частично или полностью источники и приемники электрической энергии в любых сочетаниях. Электромагнитное поле внутри объема описывается системой уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\bar{\delta} = \gamma (\bar{E} + \bar{E}_{стор}) \quad (3)$$

Умножим скалярно уравнение (1) на  $\bar{E}$ , уравнение (2) на  $\bar{H}$ , и вычтем почленно левые и правые части уравнений:

$$\bar{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} - \bar{H} \cdot \operatorname{rot} \bar{E} = \bar{\delta} \cdot \bar{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu \mu_0 \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}.$$

Из курса математики известно, что

$$\bar{E} \cdot \operatorname{rot} \bar{H} - \bar{H} \cdot \operatorname{rot} \bar{E} = \operatorname{div} [\bar{H} \times \bar{E}] = -\operatorname{div} [\bar{E} \times \bar{H}].$$

Преобразуем правые части уравнения. Из закона Ома (3) следует:

$$\bar{E} = \frac{\bar{\delta}}{\gamma} - \bar{E}_{стор} \Rightarrow \bar{\delta} \cdot \bar{E} = \frac{\delta^2}{\gamma} - \bar{\delta} \cdot \bar{E}_{стор};$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \mu \mu_0 \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \bar{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mu_0 \bar{H}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} (w_э + w_м).$$

После преобразования получим:

$$-\operatorname{div} [\bar{E} \times \bar{H}] = \frac{\delta^2}{\gamma} - \bar{\delta} \cdot \bar{E}_{стор} + \frac{\partial}{\partial t} (w_э + w_м)$$

Проинтегрируем все члены полученного уравнения по выделенному объему  $V$ :

$$-\int_V \operatorname{div}[\bar{E} \times \bar{H}] \cdot dv = \int_V \frac{\delta^2}{\gamma} \cdot dv - \int_V \bar{\delta} \bar{E} \cdot dv + \int_V \frac{\partial}{\partial t} (w_э + w_м) \cdot dv$$

Исследуем каждое слагаемое уравнения. По теореме Остроградского-Гаусса:

$$-\operatorname{div}[\bar{E} \times \bar{H}] \cdot dv = -\oint_S [\bar{E} \times \bar{H}] \cdot \bar{ds} = -\oint_S \bar{\Pi} \cdot \bar{ds}, \text{ где } \bar{\Pi} = [\bar{E} \times \bar{H}] - \text{ вектор}$$

Пойтинга [Вт/м<sup>2</sup>], численно равный плотности потока энергии в единицу времени (потока мощности) через единицу поверхности вокруг рассматриваемой точки;

$$\int_V \frac{\delta^2}{\gamma} \cdot dv = P_{\text{тепл}} - \text{ мощность тепловых потерь или потребляемая мощность в заданном объеме, эта мощность всегда положительна;}$$

$$-\int_V \bar{\delta} \bar{E}_{\text{стор}} \cdot dv = P_{\text{ист}} - \text{ мощность источников энергии внутри объема, эта}$$

мощность отрицательна, если векторы  $\bar{\delta}$  и  $\bar{E}_{\text{стор}}$  совпадают, и положительна, если эти векторы не совпадают;

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (w_э + w_м) \cdot dv = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V w_э dv + \int_V w_м dv \right) = \frac{\partial}{\partial t} (W_э + W_м) = \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t} = P_{\text{эм}} -$$

мощность электромагнитного поля, она положительна, если идет процесс накопления энергии в объеме, и отрицательна, если идет процесс возврата энергии.

Таким образом, после принятых обозначений теорема Умова-Пойтинга получит вид:

$$-\oint_S \bar{\Pi} \cdot \bar{ds} = P_{\text{тепл}} + P_{\text{ист}} + P_{\text{эм}}.$$

Формулировка теоремы Умова-Пойтинга: небаланс мощности в заданном объеме  $V$  компенсируется потоком вектора Пойтинга, направленным внутрь объема (знак  $-$ ) через замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую этот объем.

Вектор Пойтинга  $\bar{\Pi} = [\bar{E} \times \bar{H}]$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы поля  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ , характеризует величину и направление энергии, проходящей в единицу времени через единицу площади в направлении вектора.

Теорема Умова-Пойтинга позволяет сделать важный теоретический вывод, что электрическая энергия от генератора к приемнику передается не по проводам линии электропередачи, а электромагнитным полем, окружающим эти провода, а сами провода выполняют две другие функции: 1) создают условия для получения электромагнитного поля, 2) являются направляющими для потока электроэнергии.

### 22.3 Поток вектора Пойтинга в коаксиальном кабеле

Устройство коаксиального кабеля показано на рисунке 281. К кабелю приложено постоянное напряжение  $U$  и протекает постоянный ток  $I$ .

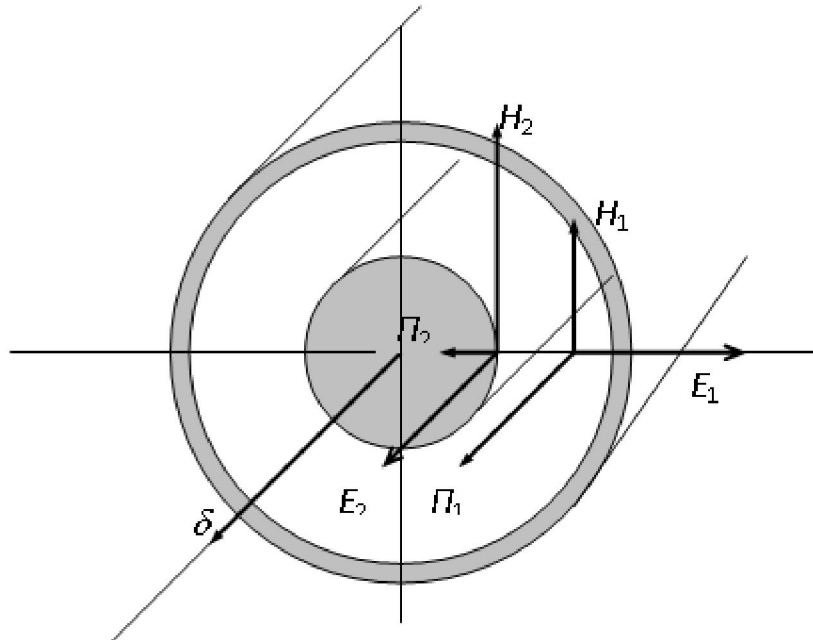


Рисунок 281

Особенностью режима работы коаксиального кабеля является то, что его электрическое и магнитное поле не выходит за пределы наружной оболочки.

Рассмотрим режим точки 1, расположенной в диэлектрике на расстоянии  $r$  от оси кабеля. Линейная плотность заряда:  $\tau = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 \cdot U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ .

Напряженность электрического поля:  $\bar{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}$ .

Напряженность магнитного поля:  $\bar{H} = \frac{I}{2\pi r}$ .

Векторы поля  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  направлены под углом в  $90^\circ$  друг к другу.

Вектор Пойтинга:  $\bar{P} = [\bar{E} \times \bar{H}] = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{I}{2\pi r} = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}$ .

Вектор Пойтинга направлен вдоль оси кабеля по направлению тока  $I$ . Поток вектора Пойтинга через поперечное сечение диэлектрика:

$$\int_S \overline{\Pi} \cdot \overline{ds} = \int_{R_1}^{R_2} \Pi \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{UI}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r \cdot dr = UI = P.$$

Вывод: поток вектора Пойтинга через поперечное сечение диэлектрика равен передаваемой мощности  $P$ , т. е. вся энергия от источника к приемнику передается электромагнитным полем, сосредоточенным в диэлектрике между жилой и оболочкой.

Рассмотрим режим точки 2, расположенной на наружной поверхности жилы.

Плотность тока в жиле кабеля:  $\overline{\delta} = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R_1^2}.$

Напряженность электрического поля:  $\overline{E} = \frac{\overline{\delta}}{\gamma} = \frac{I}{\pi \gamma R_1^2}.$

Напряженность магнитного поля:  $\overline{H} = \frac{I}{2\pi R_1}.$

Векторы поля  $\overline{E}$  и  $\overline{H}$  направлены под углом в  $90^\circ$  друг к другу.

Вектор Пойтинга:  $\overline{\Pi} = [\overline{E} \times \overline{H}] = \frac{I}{\pi \gamma R_1^2} \cdot \frac{I}{2\pi R_1} = \frac{I^2}{2\pi^2 R_1^3}.$

Вектор Пойтинга направлен по радиусу к центру кабеля.

Поток вектора Пойтинга через боковую поверхность внутренней жилы:

$$\int_S \overline{\Pi} \cdot \overline{ds} = \Pi \cdot S = \frac{I^2}{2\pi^2 R_1^3} \cdot 2\pi R_1 l = I^2 \cdot \frac{l}{\gamma \pi R_1^2} = I^2 \cdot R = P_{\text{тепл}}.$$

Вывод: поток вектора Пойтинга через наружную поверхность жилы направлен внутрь провода и равен мощности тепловых потерь  $P_{\text{тепл}}$ .

## 22.4 Уравнения Максвелла в комплексной форме

Если векторы поля  $\overline{E}$  и  $\overline{H}$  изменяются во времени по синусоидальному закону, то синусоидальные функции времени могут быть представлены комплексными числами и, соответственно, сами векторы будут комплексными:

$$\overline{E}(t) = \overline{E}_m \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \underline{\overline{E}}_m = \overline{E}_m e^{j\psi};$$

$$\overline{H}(t) = \overline{H}_m \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \underline{\overline{H}}_m = \overline{H}_m e^{j\psi}.$$

В записанных выражениях черта снизу символа означает «комплекс», а черта сверху – «вектор», соответственно читается «комплекс-вектор».

Учитывая, что операции дифференцирования в комплексной форме соответствует умножение комплексного изображения на множитель  $j\omega$ , то в

уравнениях Максвелла в комплексной форме время, как координата, в явной форме отсутствует.

С учетом принятых обозначений система основных уравнений Максвелла в комплексной форме получит вид:

$$\operatorname{rot} \underline{\underline{H}}_m = \underline{\underline{\delta}}_m + j\omega\epsilon\epsilon_0 \underline{\underline{E}}_m$$

$$\operatorname{rot} \underline{\underline{E}}_m = -j\omega\mu\mu_0 \underline{\underline{H}}_m$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{B}}_m = 0$$

$$\operatorname{div} \underline{\underline{D}}_m = \underline{\underline{\rho}}$$

$$\underline{\underline{\delta}}_m = \gamma \underline{\underline{E}}_m$$

Комплексный вектор Пойтинга можно представить по аналогии с комплексной мощностью:

$$\underline{\underline{\Pi}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{E}}_m \times \underline{\underline{H}}_m].$$

Теорема Умова-Пойтинга в комплексной форме (без вывода):

$$-\int_S \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{\underline{ds}} = -\int_S \frac{1}{2} [\underline{\underline{E}}_m \times \underline{\underline{H}}_m] \cdot \underline{\underline{ds}} = P + jQ.$$

## 22.5 Плоская гармоническая волна в диэлектрике

Плоской называется электромагнитная волна с плоским фронтом, у которой векторы поля  $\underline{\underline{E}}$  и  $\underline{\underline{H}}$  взаимно перпендикулярны и при соответствующем выборе направления осей координат будут зависеть только от одной пространственной координаты  $z$  и времени  $t$ . Волна называется гармонической, если векторы поля  $\underline{\underline{E}}$  и  $\underline{\underline{H}}$  изменяются во времени по синусоидальному закону. Волна распространяется в однородном диэлектрике ( $\epsilon\epsilon_0$ ), проводимость которого равна нулю ( $\gamma = 0$ ).

Выберем направления осей координат  $x, y, z$  так, чтобы вектор  $\underline{\underline{E}}$  совпадал с осью  $x$  ( $\underline{\underline{E}} = E_x$ ), вектор  $\underline{\underline{H}}$  совпадал с осью  $y$  ( $\underline{\underline{H}} = H_y$ ), тогда вектор Пойтинга будет направлен вдоль оси  $z$  (рисунок 282):

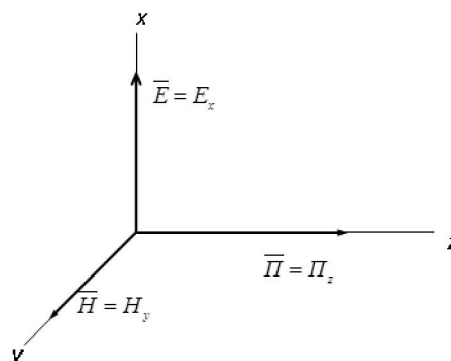


Рисунок 282

Система уравнений Максвелла в комплексной форме:

$$\text{rot} \underline{\bar{H}}_m = j\omega \varepsilon \varepsilon_0 \underline{\bar{E}}_m$$

$$\text{rot} \underline{\bar{E}}_m = j\omega \mu \mu_0 \underline{\bar{H}}_m$$

Раскроем операцию *rot* в декартовой системе координат и учтем, что векторы поля содержат только по одной пространственной составляющей:  $\underline{\bar{E}} = E_x$ ,  $\underline{\bar{H}} = H_y$ :

$$\text{rot} \underline{\bar{H}}_m = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_{xm} & H_{ym} & H_{zm} \end{vmatrix} = -\bar{i} \frac{\partial H_{ym}}{\partial z} = -\frac{dH_{ym}}{dz} \quad (\text{вектор направлен по оси } x),$$

$$\text{rot} \underline{\bar{E}}_m = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_{xm} & E_{ym} & E_{zm} \end{vmatrix} = \bar{j} \frac{\partial E_{xm}}{\partial z} = \frac{dE_{xm}}{dz} \quad (\text{вектор направлен по оси } y)$$

Таким образом, система уравнений Максвелла получит вид:

$$\frac{dH_{ym}}{dz} = -j\omega \varepsilon \varepsilon_0 E_{xm} \quad (1)$$

$$\frac{dE_{xm}}{dz} = -j\omega \mu \mu_0 H_{ym} \quad (2)$$

Решим данную систему дифференциальных уравнений относительно одной из переменных, например,  $E_{xm} = f(z)$ . Для этой цели продифференцируем уравнение (2) по переменной  $z$  и выполним в него подстановку из уравнения (1):

$$\frac{d^2 E_{xm}}{dz^2} = -j\omega \mu \mu_0 \frac{dH_{ym}}{dz} = -j\omega \mu \mu_0 (-j\omega \varepsilon \varepsilon_0 E_{xm}) = -\omega^2 \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 E_{xm} = -\frac{\omega^2}{v^2} E_{xm},$$

где  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$  – фазовая скорость волны.

Таким образом получилось дифференциальное уравнение 2-го порядка с одной переменной  $E_{xm} = f(z)$ :

$$\frac{d^2 E_{xm}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{v^2} E_{xm} = 0.$$

Решение для искомой функции:

$$\underline{E}_{xm}(z) = \underline{C}_1 e^{-j\frac{\omega}{v}z} + \underline{C}_2 e^{j\frac{\omega}{v}z} = \underline{E}_n(z) + \underline{E}_o(z).$$

где  $\alpha_1 = -j\frac{\omega}{v}$ ,  $\alpha_2 = j\frac{\omega}{v}$  – корни характеристического уравнения:

В неограниченной однородной среде отраженные волны отсутствуют, поэтому примем  $C_2=0$ ,  $\underline{C}_1=Ce^{j\psi}$ , тогда решение для искомой функции получит окончательный вид:

$$\underline{E}_{xm}(z) = Ce^{j\psi} \cdot e^{-j\frac{\omega}{v}z} = Ce^{j\psi} \cdot e^{-jkz}, \text{ где } k = \frac{\omega}{v}.$$

Решение для переменной  $\underline{H}_{ym}(z)$  получим из уравнения (2) путем подстановки в него найденного решения для переменной  $\underline{E}_{xm}(z)$ :

$$\underline{H}_{ym}(z) = \frac{1}{-j\omega\mu\mu_0} \cdot \frac{d\underline{E}_{xm}}{dz} = \frac{\underline{C}(-j\frac{\omega}{v})}{-j\omega\mu\mu_0} \cdot e^{-j\frac{\omega}{v}z} = \frac{Ce^{j\psi}}{\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}} \cdot e^{-j\frac{\omega}{v}z} = \frac{Ce^{j\psi}}{Z_B} \cdot e^{-jkz},$$

где  $Z_B = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$  – волновое сопротивление среды; для пустоты

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом.}$$

Перейдем от комплексного изображения функций к их оригиналам:

$$E_x(z,t) = C \cdot \sin(\omega t - kz + \psi).$$

$$H_y(z,t) = \frac{C}{Z_B} \cdot \sin(\omega t - kz + \psi).$$

Таким образом, электромагнитное поле в диэлектрике распространяется в виде незатухающих взаимно перпендикулярных в пространстве волн  $\vec{E}(z,t)$  и  $\vec{H}(z,t)$  со скоростью  $v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$  (рисунок 283).

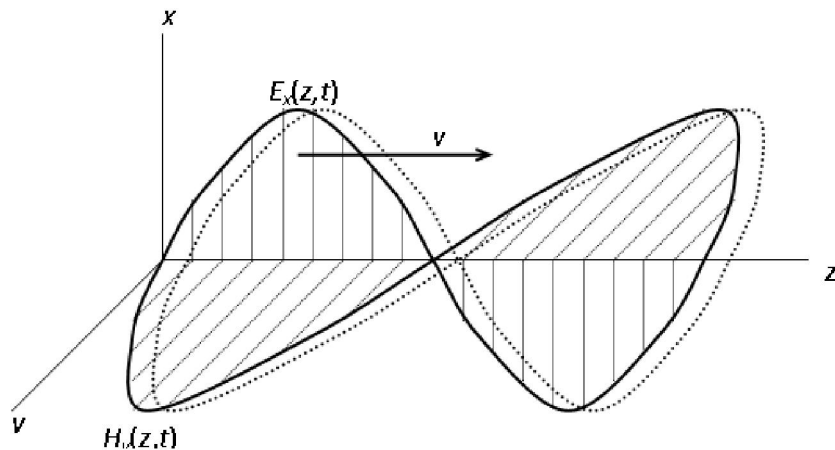


Рисунок 283

Отношение мгновенных значений волн  $(E/H)$  в любой точке пространства и в любой момент времени постоянно и равно волновому

сопротивлению  $Z_B = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$ .

Длиной волны  $\lambda$  называют расстояние, на котором фаза волны изменяется на  $2\pi$ :

$$\frac{\omega}{v} \lambda = 2\pi, \text{ откуда следует, что } \lambda = 2\pi \frac{v}{\omega} = 2\pi \frac{v}{2\pi f} = \frac{v}{f}.$$

Каждая из волн переносит энергию в направлении своего движения, при этом объемные плотности энергий электрического и магнитного полей равны между собой.

## 22.6 Плоская гармоническая волна в проводящей среде

Пусть плоская гармоническая волна проникает в проводящую среду  $(\mu = \text{const}, \gamma = \text{const})$  через плоскость, нормальную и направленную движения волны.

Система уравнений Максвелла в комплексной форме будет иметь вид:

$$\begin{cases} \text{rot } \underline{\underline{H}}_m = \underline{\underline{\delta}}_m & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \underline{\underline{E}}_m = -j\omega\mu\mu_o \underline{\underline{H}}_m & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{\delta}}_m = \gamma \underline{\underline{E}}_m & (3) \end{cases}$$

Плотностью тока смещения  $(j\omega\varepsilon\varepsilon_o \underline{\underline{E}}_m)$  в уравнении (1) пренебрегаем в связи с ее малостью по сравнению с плотностью тока проводимости  $\underline{\underline{\delta}}_m$ .

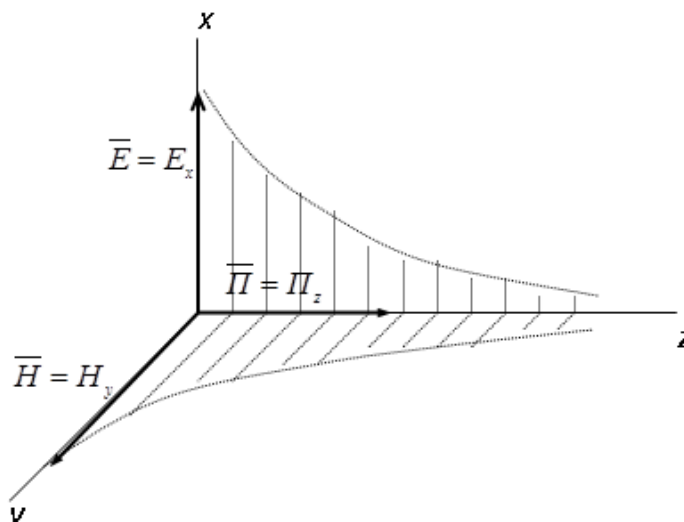


Рисунок 284

Выберем направления осей координат так, чтобы вектор  $\bar{E}$  сопадал с осью  $x$  ( $\bar{E} = E_x$ ), вектор  $\bar{H}$  совпадал с осью  $y$  ( $\bar{H} = H_y$ ), тогда вектор Пойтинга  $\bar{P}$  будет направлен по оси  $z$  ( $\bar{P} = [\bar{E} \times \bar{H}]$ ) (рисунок 284). При таком выборе направлений осей координат  $rot \bar{H}_m = -\frac{dH_{ym}}{dz}$ ,  $rot \bar{E}_m = j \frac{dE_{xm}}{dz}$ ,  $\bar{\delta}_m = \delta_{xm}$  и система уравнений Максвелла получит вид:

$$\frac{dH_{ym}}{dz} = -\delta_{xm} = -\gamma E_{xm} \quad (1)$$

$$\frac{dE_{xm}}{dz} = -j\omega\mu\mu_0 H_{ym} \quad (2)$$

Решим данную систему дифференциальных уравнений относительно одной из переменных, например,  $E_{xm} = f(z)$ . Для этой цели продифференцируем уравнение (2) по переменной  $(z)$  и сделаем в него подстановку из уравнения (1):

$$\frac{d^2 E_{xm}}{dz^2} = -j\omega\mu\mu_0 \frac{dH_{ym}}{dz} = j\omega\mu\mu_0 \gamma E_{xm}$$

Введем обозначения:

$$p = \sqrt{j\omega\mu\mu_0\gamma} = \sqrt{\omega\mu\mu_0\gamma} \cdot e^{j45^\circ} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}} = b + jb, \text{ где}$$

$$b = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}}.$$

С учетом принятых обозначений дифференциальное уравнение получит стандартную форму:

$$\frac{d^2 E_{xm}}{dz^2} - p^2 E_{xm} = 0.$$

Решение дифференциального уравнения:

$$E_{xm}(z) = C_1 e^{-pz} + C_2 e^{pz} = E_{xm1}(z) + E_{xm2}(z),$$

где  $\alpha_1 = -p = -b - jb$ ,  $\alpha_2 = b + jb$  – корни характеристического уравнения.

Если среда распространения волны не ограничена, то отраженная волна отсутствует и второе слагаемое из решения можно исключить, тогда решение в комплексной форме получит вид:

$$E_{xm}(z) = C e^{-pz} = C e^{j\psi} \cdot e^{-bz} \cdot e^{-jbz} = C e^{-bz} \cdot e^{j(-bz+\psi)}.$$

Перейдем от комплексного изображения к функции времени:

$$E_{x(z,t)} = C e^{-bz} \cdot \sin(\omega t - bz + \psi).$$

Решение для волны  $\underline{H}_{ym(z)}$  в комплексной форме получим из уравнения (2) путем подстановки в него найденного решения для  $\underline{E}_{xm(z)}$ :

$$\underline{H}_{ym}(z) = -\frac{1}{j\omega\mu\mu_0} \cdot \frac{d\underline{E}_{xm}}{dz} = \frac{pC}{j\omega\mu\mu_0} e^{-pz} = \frac{C}{Z_c} e^{-bz} \cdot e^{j(-bz+\psi-45^\circ)},$$

где  $\underline{Z}_c = \frac{j\omega\mu\mu_0}{p} = \frac{\omega\mu\mu_0 e^{j90}}{\sqrt{\omega\mu\mu_0\gamma} \cdot e^{j45}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{\gamma}} \cdot e^{j45^\circ} = Z_c e^{j45^\circ}$  – комплексное

волновое сопротивление среды, которое носит активно-индуктивный характер.

Перейдем от комплексного изображения к функции времени:

$$H_{y(z,t)} = \frac{1}{Z_c} C e^{-bz} \cdot \sin(\omega t - bz + \psi - 45^\circ).$$

Таким образом, электромагнитное поле в проводящей среде распространяется в виде затухающих взаимно перпендикулярных волн  $\underline{E}(z,t)$  и  $\underline{H}(z,t)$ . Множитель  $e^{-bz}$  показывает, что амплитуды волн при своем перемещении затухают по экспоненциальному закону. Глубиной проникновения поля называется расстояние, на котором амплитуды волн

затухают в  $e = 2.72$  раза, т.е.  $bz_{np} = 1$ , откуда  $z_{np} = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\mu_0\gamma}}$ .

Фазовая скорость определяется из условия, что  $\omega t - bz + \psi = const$ , откуда следует, что  $v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{b} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\mu_0\gamma}}$ .

Длина волны  $\lambda$  равна расстоянию, на котором фаза волны изменяется на  $2\pi$ , т.е.  $b\lambda = 2\pi$ , откуда  $\lambda = \frac{2\pi}{b} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\mu_0\gamma}}$ . На расстоянии длины волны  $z = \lambda$  затухание волны составит  $e^{b\lambda} = e^{2\pi} = 540$  раз.

## 22.7 Поверхностный эффект в плоском листе

Ранее было показано, что переменное электромагнитное поле быстро затухает по мере проникновения в толщу проводящей среды. Это приводит к неравномерному распределению поля по сечению магнитопровода, и следовательно, к неравномерному распределению магнитного потока по сечению: на оси магнитопровода плотность магнитного потока наименьшая, а у поверхностного – наибольшая.

Для более равномерного распределения магнитного потока по сечению магнитопровода и для уменьшения потерь на вихревые токи, магнитопроводы трансформаторов собираются из отдельных тонких листов

электротехнической стали, изолированных друг от друга. Исследуем распространение переменного поля в таком листе.

Пусть в плоском листе толщиной  $d = 2a$ , высотой  $h$  и длиной  $l$  направление магнитного потока  $\Phi$  и, следовательно, векторов поля  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$  совпадают с осью  $y$  (рисунок 285):

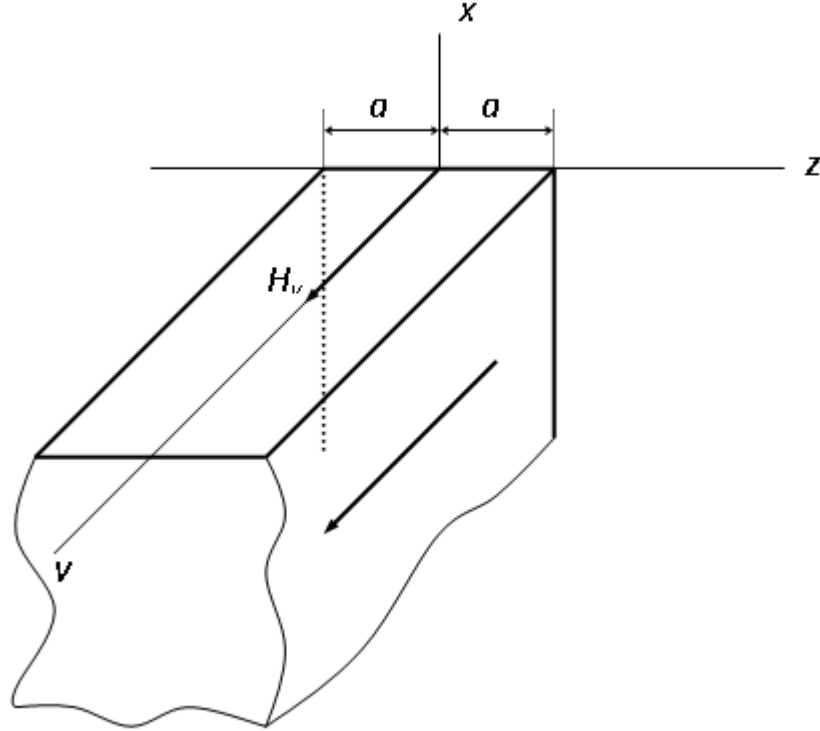


Рисунок 285

На основании предыдущего параграфа решения для вектора  $\underline{H}_{ym} = f(z)$  будет иметь вид:  $\underline{H}_{ym}(z) = \underline{C}_1 e^{-pz} + \underline{C}_2 e^{pz}$ , где  $p = \sqrt{\omega\mu\mu_0\gamma} \cdot e^{j45^\circ} = b + jb$ ,  $b = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}}$ .

Поле проникает в пластину с двух сторон, а на поверхности пластины с обеих сторон при  $z = \pm a$  векторы поля должны быть равны, следовательно:

$$\underline{C} = \underline{C}_1 = \underline{C}_2 = \frac{\underline{H}_{ym(a)}}{e^{-pa} + e^{pa}} = \frac{\underline{H}_{ym(a)}}{2chpa},$$

тогда решение для произвольной точки:

$$\underline{H}_{ym(z)} = \underline{C}(e^{-pz} + e^{pz}) = 2\underline{C} \cdot chpz = \underline{H}_{ym(a)} \cdot \frac{chpz}{chpa}, \quad \underline{B}_{ym(z)} = \underline{B}_{ym(a)} \cdot \frac{chpz}{chpa}.$$

Амплитуда магнитного потока  $\Phi_m$  и среднее значение амплитуды индукции магнитного поля  $B_{mcp}$  определяются согласно уравнению трансформаторной ЭДС.

$$\Phi_m = \frac{U}{4,44\omega f}; \quad B_{mcp} = \frac{\Phi_m}{S}.$$

Выразим  $B_{\text{ср}}$  из уравнения распределения  $B_{\text{ym}(z)}$  по сечению листа:

$$\underline{B}_{\text{ср}} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \underline{B}_{\text{ym}(z)} \cdot dz = \frac{1}{a} \int_0^a \underline{B}_{\text{ym}(z)} \cdot dz = \frac{B_{\text{ym}(a)}}{pa} \cdot thpa,$$

откуда следует, что  $\underline{B}_{\text{ym}(a)} = \underline{B}_{\text{ср}} \cdot \frac{pa}{thpa}$ , т. е. амплитуда индукции у поверхности листа превышает ее среднее значение  $\underline{B}_{\text{ср}}$ .

Распределение магнитного поля по сечению листа в зависимости от его толщины  $d$  при частоте  $f=100$  Гц показано на рисунке 286.

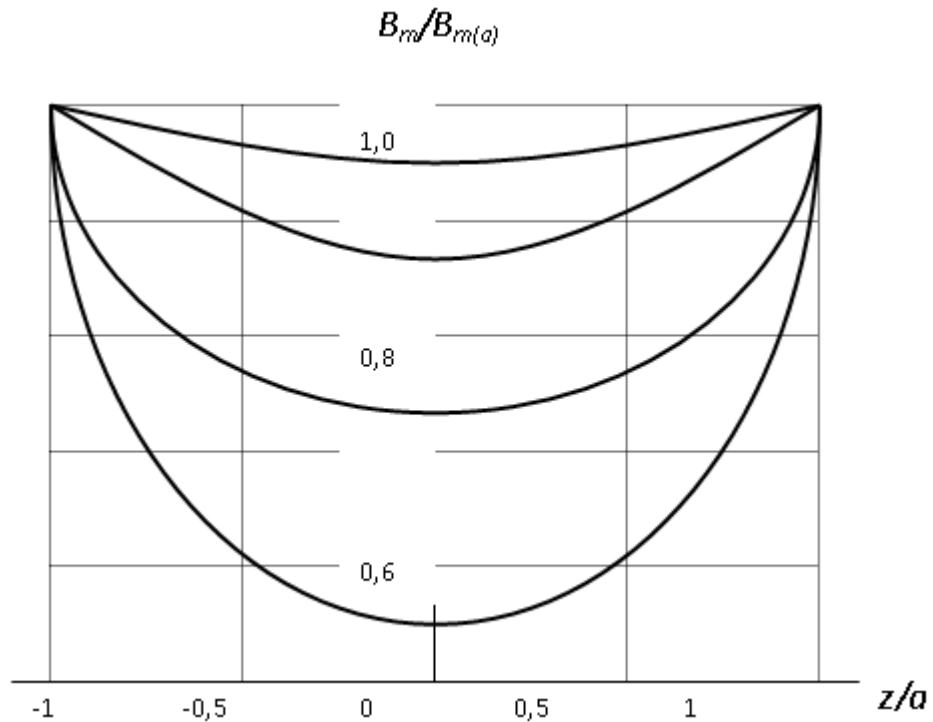


Рисунок 286

## 22.8 Поверхностный эффект в круглом проводе

Электромагнитное поле в проводящей среде в общем случае описывается системой уравнений Максвелла в комплексной форме:

$$\begin{cases} \text{rot} \underline{\underline{H}}_m = \underline{\underline{\delta}}_m \\ \text{rot} \underline{\underline{E}}_m = j\mu\mu_0 \underline{\underline{H}}_m \\ \underline{\underline{\delta}}_m = \gamma \underline{\underline{E}}_m \end{cases}$$

Если оси координат выбрать так, как показано на рисунке 287, т.е. ось  $z$  совместить с осью провода и положительным направлением тока, то вектор напряженности электрического поля  $\underline{\underline{E}}$  будет направлен по оси  $z$  (согласно

закону Ома  $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$ ), а вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  будет направлен нормально к радиусу по правилу правоходового винта.

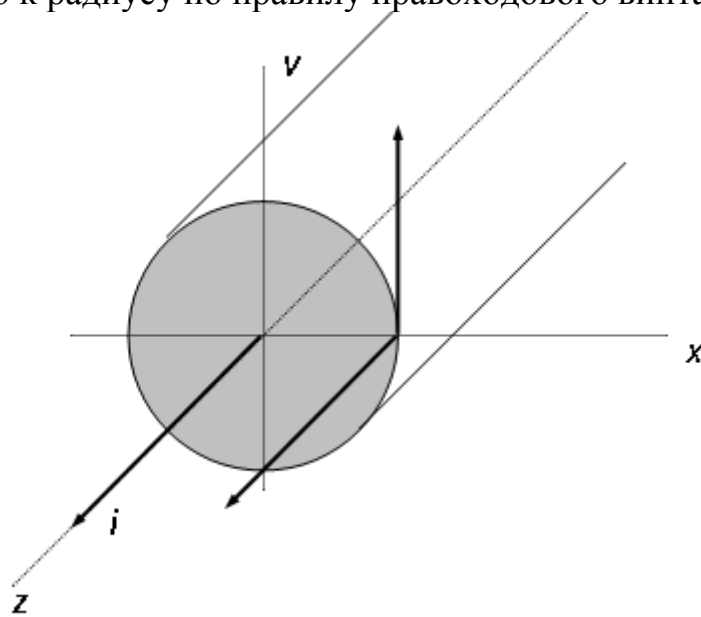


Рисунок 287

В цилиндрической системе координат те же уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \underline{H}_m) = \gamma \underline{E}_m \\ \frac{d \underline{E}_m}{dr} = j \omega \mu \mu_0 \underline{H}_m \end{cases}.$$

Совместное решение этой системы уравнений относительно комплексных переменных  $\underline{E}_m$  и  $\underline{H}_m$  дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \underline{E}_m}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d \underline{E}_m}{d(qr)} + \underline{E}_m &= 0, \\ \frac{d^2 \underline{H}_m}{d(qr)^2} + \frac{1}{qr} \frac{d \underline{H}_m}{d(qr)} + \left(1 + \frac{1}{q^2 r^2}\right) \underline{H}_m &= 0, \end{aligned}$$

где  $q = \sqrt{-j \omega \mu \mu_0 \gamma} = \sqrt{\omega \mu \mu_0 \gamma} \cdot e^{-j45^\circ} = k - jk$ ,  $k = \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \mu_0 \gamma}$

Уравнение для переменной  $\underline{E}_m$  представляет собой уравнение Бесселя нулевого порядка при  $n = 0$ , а уравнение для переменной  $\underline{H}_m$  – уравнение Бесселя первого порядка при  $n = 1$ . Решения этих уравнений известны из математики. Окончательные решения для векторов поля получают вид:

$$\underline{E}_m(r) = \frac{qI_m}{2\pi\gamma r_0} \frac{\tau_0(qr)}{\tau_1(qr_0)},$$

$$\underline{H}_m(r) = \frac{I_m}{2\pi r_0} \frac{\tau_1(qr)}{\tau_1(qr_0)},$$

где  $\tau_0(qr) = B_0 \cdot e^{j\beta_0}$ ,  $\tau_1(qr) = B_1 \cdot e^{j\beta_1}$  – функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядка от комплексного аргумента  $qr$  и сами являются комплексными числами.

Общий вид функции Бесселя  $n$ -го порядка выражается бесконечным рядом

$$\tau_{n(x)} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1 \cdot (n+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2! \cdot (n+2)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+6}}{3! \cdot (n+3)!} + \dots$$

Значения функций Бесселя приводятся в математических справочниках в виде таблиц или диаграмм.

Анализ решения для вектора напряженности электрического поля  $\underline{E}_m$  и соответственно для вектора плотности тока  $\bar{\delta} = \gamma \bar{E}$  показывает, что переменный ток по сечению цилиндрического провода распределяется неравномерно: его плотность  $\delta$  возрастает по направлению от центра к поверхности примерно по экспоненциальному закону. Эта неравномерность выражена тем больше, чем больше число  $k$  и радиус провода  $r_0$  (рисунок 288).

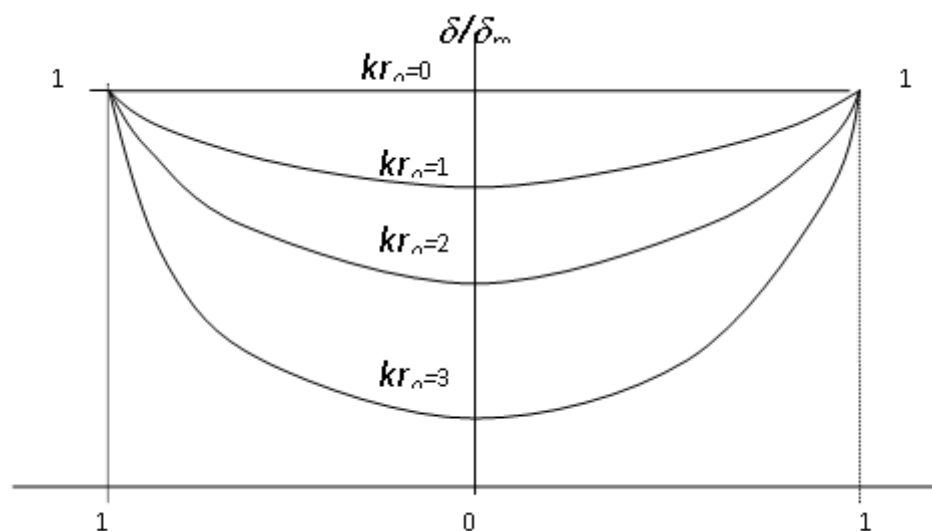


Рисунок 288

Явление возрастания плотности тока от центра к поверхности провода получило название поверхностного эффекта. Поверхностный эффект возрастает с ростом частоты  $f$ , магнитной проницаемости  $\mu$ , удельной проводимости  $\gamma$ . В технике сильных токов (на частоте 50 Гц) это явление

сказывается незначительно в медных и алюминиевых проводах большого сечения, и в сильной степени – в стальных ( $\mu \gg 1$ ) проводах любого сечения.

На расстоянии  $\Delta = 1/k$  от поверхности провода плотность тока убывает в "e" раз, это расстояние называют глубиной проникновения поля:

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \mu_0 \gamma}} \quad .$$

Как известно, сопротивление проводника постоянному току или омическое сопротивление определяется по формуле:

$$R_0 = \frac{1}{\pi r_0^2 \gamma} \text{ [Ом/м]}.$$

Внутреннее комплексное сопротивление того же проводника переменному току с учетом поверхностного эффекта может быть выражено через параметры поля:

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{q}{2\pi r_0 \gamma} \cdot \frac{\tau_0(qr_0)}{\tau_1(qr_0)} \quad .$$

Явление возрастания плотности тока от центра к поверхности провода получило название поверхностного эффекта. Поверхностный эффект возрастает с ростом частоты  $f$ , магнитной проницаемости  $\mu$ , удельной проводимости  $\gamma$ . В технике сильных токов (на частоте 50 Гц) это явление сказывается незначительно в медных и алюминиевых проводах большого сечения, и в сильной степени – в стальных ( $\mu \gg 1$ ) проводах любого сечения.

Практический интерес представляет отношение активного сопротивления провода к омическому  $R/R_0$ , количественно характеризующее поверхностный эффект в проводе. Расчеты показывают, что на промышленной частоте 50 Гц увеличение активного сопротивления  $R/R_0$  незначительно для медных и алюминиевых проводов ( $\mu = 1$ ) и существенно для стальных проводов ( $\mu \gg 1$ ). С ростом частоты  $f$  вследствие усиления поверхностного эффекта происходит увеличение активного сопротивления провода ( $R/R_0 > 1$ ).

## 22.9 Электромагнитное экранирование

Переменное высокочастотное электромагнитное поле при прохождении через металлический лист, либо перпендикулярно, либо под некоторым углом его плоскости наводит в этом листе вихревые токи, после которых ослабляется внешнее поле, в этом случае лист – электромагнитный экран.

Примером таких экранов могут служить корпуса РЭУ (стенки, крышки). Расчет электромагнитных экранов различен для различного диапазона частот внешних полей.

Расчет электромагнитных экранов:

Исходными данными для расчета электромагнитной помехоустойчивости является:

1. Конструкционные параметры изделия, спектр частот  $f_i$ , соответственная напряженность электр. поля  $E(f_i)$  или магнитная индукция  $B(f_i)$ .

2. или их допустимые значения.

Следует отметить, что наибольшее влияние на работоспособность аппаратуры оказывает магнитная составляющая электромагнитного поля.

Если магнитное поле с  $f_i$ , будет пересекать плоскость  $S$ , то получим:  
 $|U| = 2\pi fS|B|$ .

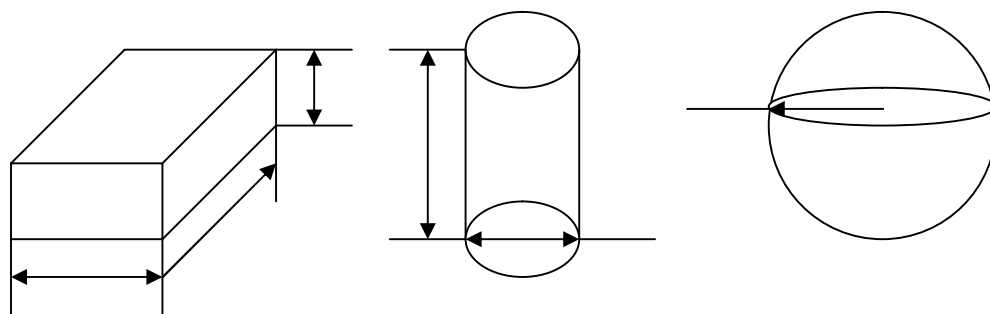
В случае анализа помехоустойчивости печатных узлов, наиболее чувствительными элементами являются микросхемы, тогда  $S$ -наибольшая площадь замкнутого контура:  $|U| \gg |U_{\text{пит}}| \Rightarrow K_{\text{э}} = 20 \lg \left| \frac{U}{U_{\text{пит}}} \right|$  - коэффициент экрана.

Последовательность расчета экрана:

1. Определяем тип поля помехи.

2. Выбираем конструктивную форму экрана, которая может быть выполнена в виде прямоугольной, цилиндрической и сферической. Форма экрана оказывает влияние на характеристическое сопротивление среды экрана.

Формы экранов:



$$R_{\text{э}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} l_1 l_2 l_3$$

$$R_{\text{э}} = \sqrt{\frac{3}{16}} D^2 h$$

$$R_{\text{э}} = r_{\text{э}}$$

Рисунок 229

$$f_{\text{резон.}} = \frac{138}{R_{\text{э}}} \cdot 10^6 \text{ - резонансная частота.}$$

3. Выбор материала и конструкций стенок экрана.

Наибольшее влияние на эффективность экранирования влияет материал. Количественно, величину характеризующую экранированное действие материала рассчитывают следующим образом:

$\delta = 0.52(\pi f \mu_c \sigma)^{-0.5}$  - глубина проникновения (показывает, на какой глубине магнитное поле ослабнет в е-раз;

$f$ -частота поля;

$\mu$  - магнитная проницаемость;

$\sigma$  - удельная проводимость материала экрана.

Если экран работает в магнитном поле ближней зоны, то эффективность магнитных материалов значительно выше немагнитных, так как  $\mu \gg 1$ .

В электромагнитном поле дальней зоны немагнитные материалы, обладающие большей проводимостью, по сравнению с магнитными обеспечивают более высокую эффективность экранирования.

Достоинство сеточных экранов:

Просты в изготовлении, удобны в сборке и эксплуатации, не препятствуют свободным конвективным потокам воздействия, светопроницаемы, позволяют получить высокую эффективность экранирования во всем диапазоне частот.

Недостаток: невысокая механическая прочность.

Экранирующие свойства сеток проявляются в результате отражения электромагнитной волны от ее поверхности.

Основные параметры сетки: Шаг сетки  $S_c$ , радиус проволоки  $r_c$ , удельная проводимость материала  $\sigma$ .

4. Рассчитываем эффективность экранирования выбранного экрана, а при необходимости его величину.

Шунтирование – отвод лишней энергии.

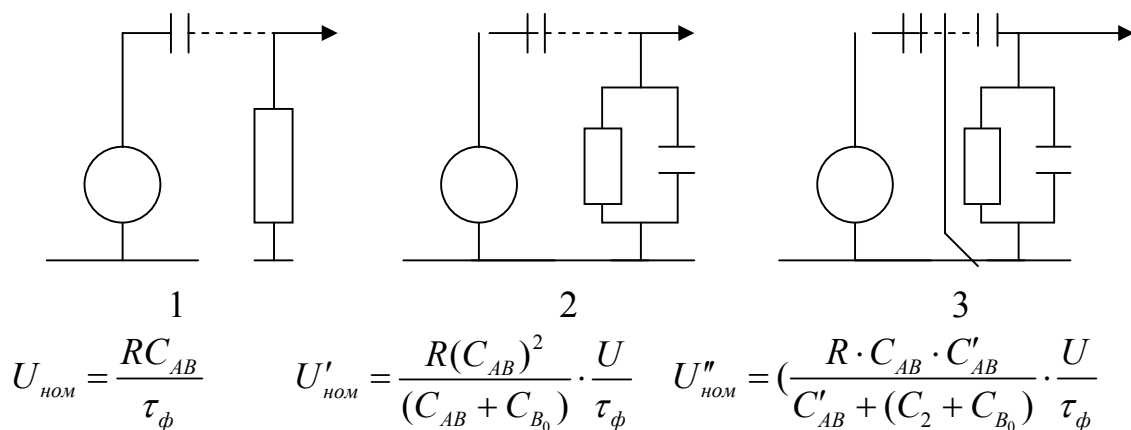


Рисунок 230

$\tau_\phi$  – длина фронта;

Электромагнитное экранирование заключается в шунтировании большей части или всей нарезной емкости на корпус. На Рисунке 230 изображены возможные случаи расположения источника помех А и приемника помех В.

- 1 – корпус удален от приемника помех на значительное расстояние и емкостью  $C_{AB}$  можно пренебречь.
- 2 – Экран, расположен вблизи проводников, паразитная емкость  $C_{AB}$  уменьшается шунтирующей емкостью  $C_{B0}$ .
- 3 – Экран располагают м/у приемником и источником, тем самым уменьшают паразитную емкость до значения  $C'_{AB}$ .

С целью улучшения экранирования, на обеих сторонах ПП, сигнала и заземления экранные проводники чередуют таким образом, чтобы против сигнальной линии, проходящей с одной стороны платы, всегда располагалась заземляющая линия с др. стороны платы, при этом каждая сигнальная линия оказывается окруженной 3-мя заземленными линиями. В результате чего достигается эффективная экранировка от внешних помех.

## 23 Аналитические и численные методы расчета электрических и магнитных полей

### 23.1 Расчёт поля с помощью интегральных соотношений.

**ЗАДАЧА 1** Вывести формулы для определения потока вектора электростатической индукции в функции координат а) от точечного заряда через сферическую поверхность радиуса  $R$ ; б) от линейного заряда через цилиндрическую поверхность радиуса  $r$ .

#### Решение

Для случая а) проведём вокруг точечного заряда  $q$  сферическую поверхность  $S$  радиуса  $R$  (рис. 231) и применим теорему Гаусса в интегральной форме:  $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \Sigma q$ . Из определения напряжённости поля вытекает, что силовые линии направлены радиально, следовательно, перпендикулярно к поверхности  $S$ . Таким образом, векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{ds}$  по направлению совпадают, и их скалярное произведение можно заменить произведением их модулей. Кроме того, значение вектора  $\vec{D}$  во всех равноудалённых от заряда  $q$  точках поверхности  $S$  одинаково в силу симметрии; поэтому его можно вынести за знак интеграла. Таким образом, получаем:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \oint_S D \cdot ds = D \cdot \oint_S ds = D \cdot S = D \cdot 4\pi R^2. \quad (23.1)$$

*Следствие:* индукция и напряженность поля точечного заряда –

$$D = \frac{q}{4\pi R^2}, \quad (23.2)$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_a} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a R^2}, \quad (23.3)$$

то есть зависят только от координаты  $R$ .

Аналогично поступим в случае б): проведём вокруг оси с линейным зарядом  $\tau$  цилиндрическую поверхность  $S$  радиуса  $r$ , длиной  $l$  и применим теорему Гаусса в интегральной форме:  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \Sigma q$ . В качестве иллюстрации

можно опять воспользоваться рисунком 231, но после замены  $q$  на  $\tau$  и  $R$  на  $r$ , причем ось  $z$  направлена перпендикулярно к плоскости рисунка. Предположим, что длина объекта значительно больше его радиуса. Тогда можно пренебречь искажением плоскопараллельного поля вблизи торцов цилиндра  $S$  и считать, что силовые линии направлены везде радиально. В этом случае поток вектора  $\vec{D}$  через торцовые части будет равен нулю, так как здесь угол между  $\vec{D}$  и  $d\vec{s}$  составляет  $90^\circ$ . Во всех же точках боковой части векторы  $\vec{D}$  и  $d\vec{s}$  по направлению совпадают, и их скалярное произведение можно заменить произведением их модулей. Кроме того, значение вектора  $\vec{D}$  во всех равноудалённых от оси  $z$  точках боковой части поверхности  $S$  одинаково силу симметрии; поэтому его можно вынести за знак интеграла. Таким образом, получаем:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{S_{бок}} D \cdot ds = D \cdot S_{бок} = D \cdot 2\pi r \cdot l. \quad (23.4)$$

*Следствие:* индукция и напряженность поля заряженной оси –

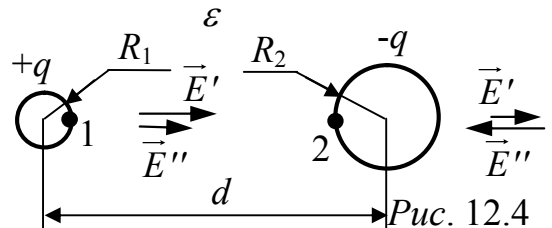
$$D = \frac{q}{2\pi r l} = \frac{\tau}{2\pi r}, \quad E = \frac{D}{\epsilon_a} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_a r}, \quad (23.5)$$

то есть зависят только от координаты  $r$ .

**ЗАДАЧА2.** Два шара радиусами  $R_1 = 0,2 \text{ см}$  и  $R_2 = 0,5 \text{ см}$  находятся на расстоянии  $d = 20 \text{ см}$  друг от друга в диэлектрике с относительной проницаемостью  $\epsilon = 4$  (рис. 12.4). Заряды шаров величиной  $q = 10^{-10} \text{ Кл}$  разного знака. Найти энергию поля и наибольшую напряженность.

**Решение**

Расстояние  $d$  значительно превышает радиусы шаров, поэтому можно считать, что геометрические и электрические центры шаров совпадают.



Между шарами напряжённости  $\vec{E}'$  и  $\vec{E}''$  складываются, а снаружи – вычитаются (рис. 12.4). Поэтому значение напряженности результирующего поля больше между шарами. С удалением от центра шара напряженность поля уменьшается, следовательно, максимальное значение напряженности нужно ожидать в точке на поверхности шара. Первый шар имеет меньший радиус (меньшее удаление от центра точек его поверхности), поэтому наибольшая напряженность поля будет в точке 1. Для расчёта поля в этой точке применим принцип наложения. На основании формулы (12.3)

$$E_1 = E_1' + E_1'' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon d^2} = \frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} 4} \left( \frac{1}{(2 \cdot 10^{-3})^2} + \frac{1}{0,2^2} \right) = 56141 \text{ В/м.}$$

Потенциал поля уединенного шара (аналогично задаче 12.5, формула 12.8):  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_a R} + A$ .

Если принять  $\varphi = 0$  при  $R = \infty$ , то  $A = 0$ . Таким образом, потенциалы шаров равны

$$\varphi_1 = \varphi_1' + \varphi_1'' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0\epsilon d} = \frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} 4} \left( \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} + \frac{-1}{0,2} \right) = 111,1 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = \varphi_2' + \varphi_2'' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon d} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2} = \frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} 4} \left( \frac{1}{0,2} + \frac{-1}{0,005} \right) = -43,8 \text{ В.}$$

Напряжение между шарами  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 111,1 + 43,8 = 154,9 \text{ В}$ .

Ёмкость устройства  $C = q/U_{12} = 10^{-10}/154,9 = 0,645 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$ .

Энергия поля  $W_{\text{э}} = \frac{1}{2} C U_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,645 \cdot 10^{-12} \cdot 154,9^2 = 7,75 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}$ .

**ЗАДАЧА 3.** Вывести формулы для расчёта поля и ёмкости плоского конденсатора, у которого  $S$  – площадь пластин,  $d$  – расстояние между ними (рис. 12.5).

### Решение

Площадь пластин  $S$  значительно больше квадрата расстояния  $d^2$  между ними. Поэтому поле между пластинами может считаться равномерным. Пусть заряд левой обкладки конденсатора имеет заряд  $q$ . Величина вектора электростатической индукции на основании граничного условия  $D = \sigma = q/S$ . Напряжённость электрического поля  $E = D/\epsilon_a = q/(S \cdot \epsilon_a)$ . Приложенное напряжение  $U = E \cdot d = q \cdot d/(S \cdot \epsilon_a)$ . Ёмкость конденсатора

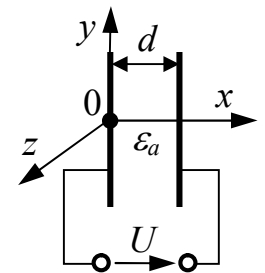


Рис. 12.5

$$C = q/U = \epsilon_a \cdot S/d. \quad (12.6)$$

Расположим оси декартовой системы координат, как показано на рис. 12.5. Пусть начало координат совмещено с левой пластиной. Получим формулу для потенциала  $\varphi(x)$  на основании соотношения (12.1)  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ . В декартовой системе координат  $\text{grad}\varphi$  представляется как

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{см. табл. 11.1}).$$

Очевидно, что потенциал  $\varphi$  зависит только от одной координаты, то есть  $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ ; вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль оси  $x$ , поэтому для его величины

имеем:  $E = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ . Отсюда

$$\varphi = -\int E dx = -E \cdot x + \text{const.} \quad (12.7)$$

Если конденсатор имеет несколько слоёв, то ёмкость каждого слоя –  $C_k = \varepsilon_{ak} \cdot S/d_k$ , ёмкость всего конденсатора ввиду последовательного соединения ёмкостей слоёв  $C = (\sum (C_k)^{-1})^{-1}$ ; напряжение на каждом слое –  $U_k = q/C_k$ ; напряжённость поля в каждом слое –  $E_k = U_k/d_k = q/(S \cdot \varepsilon_{ak})$ .

**ЗАДАЧА 4.** Получить формулы для расчёта поля и ёмкости шарового конденсатора, у которого внутренний и наружный радиусы диэлектрического слоя –  $r_1$  и  $R_1$ , диэлектрическая проницаемость –  $\varepsilon_a$  (рис. 12.6).

#### Решение

Пусть внутренний шар имеет заряд  $q$ . На основании формулы (12.3) электрическое смещение и напряжённость поля в диэлектрике

$$D = q/(4\pi R^2); E = q/(4\pi \varepsilon_a \cdot R^2).$$

Формулу для потенциала  $\varphi(R)$  получим на основании соотношения (12.1). В сферической системе координат  $\text{grad} \varphi$  определяется как

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \vec{R}_0 + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{\theta}_0 + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \vec{\alpha}_0 \quad (\text{см. табл. 11.1}).$$

Очевидно, что в данном случае потенциал  $\varphi$  зависит только от одной координаты  $R$ , то есть  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$ ; вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль оси  $R$ ,

поэтому для его величины имеем:  $E = -\frac{\partial \varphi}{\partial R}$ . Отсюда

$$\varphi = - \int E dR = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a R} + A. \quad (12.8)$$

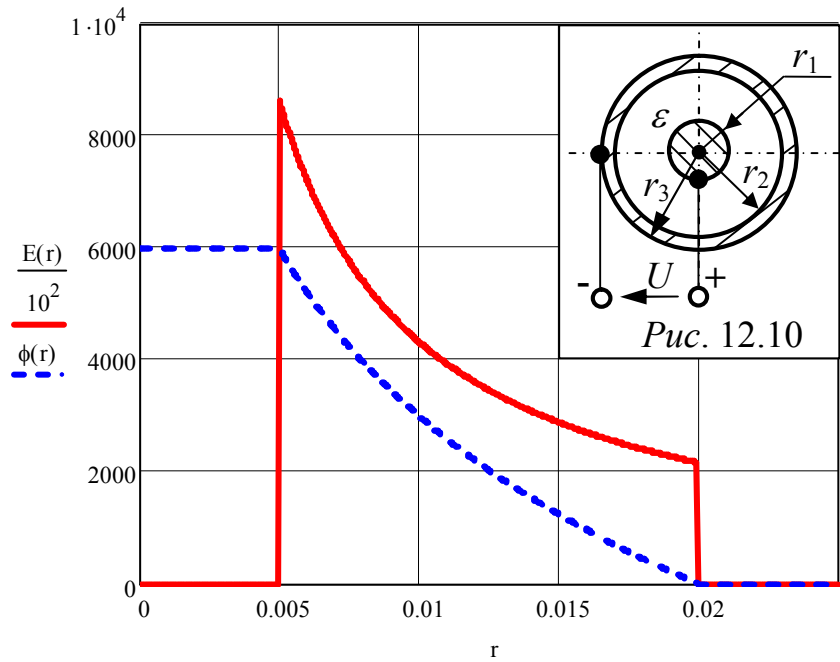
Пусть потенциал наружного шара равен нулю –  $\varphi = 0$  при  $R = R_1$ . Тогда  $A = -\frac{q}{4\pi \varepsilon_a R_1}$ . Формула для потенциала  $\varphi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a} \cdot \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right)$ .

Напряжение, приложенное к конденсатору,

$$U = \varphi(R=r_1) - \varphi(R=R_1) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_1} \right).$$

$$\text{Ёмкость однослойного конденсатора} \quad C = q/U = \frac{4\pi \varepsilon_a}{1/r_1 - 1/R_1}. \quad (12.9)$$

Если конденсатор имеет несколько слоёв, то ёмкость каждого слоя –  $C_k = \frac{4\pi \varepsilon_{ak}}{1/r_k - 1/R_k}$ , ёмкость всего конденсатора  $C = (\sum (C_k)^{-1})^{-1}$ ; напряжение на каждом слое –  $U_k = q/C_k$ ; напряжённость поля в каждом слое –  $E_k = q/(4\pi \varepsilon_{ak} \cdot R^2)$ .



Объёмная плотность энергии в диэлектрике  $w_{\mathcal{D}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\tau^2}{8\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 r^2}$ .

Энергия поля, запасённая в кабеле

$$W_{\mathcal{D}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau^2 l \cdot 2\pi r}{8\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\tau^2 l}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{CU^2}{2} = 57,73 \cdot 10^{-9} \text{ Дж.}$$

**ЗАДАЧА 12.10.** Рассчитать поле цилиндрического луча электронов  $-\rho = -10^{-10} \text{ Кл/см}^3$ ,  $\varepsilon = 2$ ,  $d = 2 \text{ мм}$ . Задачу решить с помощью теоремы Гаусса в интегральной форме.

### Решение

Теорема Гаусса в интегральной форме –  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Sigma q$ . В цилиндрической системе координат

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 2\pi r l \quad (\text{см. (12.4)}); \quad E = \frac{D}{\varepsilon \varepsilon_0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \varphi(r) = -\int E dr \quad (\text{см. задачу 12.8}).$$

В области  $r < d/2$

$$\Sigma q = \rho \cdot \pi r^2 l; \quad D_1 = \frac{1}{2} \rho r, \quad E_1(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon \varepsilon_0} \cdot r; \quad \varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon \varepsilon_0} \cdot r^2 + A_1.$$

Пусть  $\varphi_1 = 0$  при  $r = 0$ . Тогда  $A_1 = 0$ . После подстановки числовых значений имеем:  $E_1(r) = -2,825 \cdot 10^6 \cdot r \text{ В/м}$ ;  $\varphi_1(r) = 1,412 \cdot 10^6 \cdot r^2 \text{ В}$ .

В области  $r > d/2$   $\Sigma q = \rho \cdot \pi (d/2)^2 l$ ;

$$D_2 = \frac{\rho \cdot (d/2)^2}{2r}; \quad E_2(r) = \frac{\rho (d/2)^2}{2\varepsilon_0 r}; \quad \varphi_2(r) = -\frac{\rho (d/2)^2}{2\varepsilon_0} \cdot \ln(r) + A_2.$$

При  $r = \frac{1}{2}d$   $\varphi_2(d/2) = \varphi_1(d/2) = 1,412 \cdot 10^6 \cdot (10^{-3})^2 = 1,41 \text{ В}$ , отсюда

$$A_2 = \varphi_2(d/2) + \frac{\rho(d/2)^2}{2\varepsilon_0} \ln(d/2) = 1,41 - 5,65 \cdot \ln(0,001) = 40,44.$$

$$\text{Таким образом, } E_2(r) = -\frac{5,65}{r} \text{ В/м; } \varphi_2(r) = 5,65 \cdot \ln(r) + 40,44 \text{ В.}$$

**ЗАДАЧА 12.11.** Внутри заземлённого полого металлического шара с внутренним и наружным радиусами  $R_3 = 3,2 \text{ см}$  и  $R_4 = 3,6 \text{ см}$ , соответственно, (рис. 12.11) расположен ещё один металлический шар радиуса  $R_1 = 0,8 \text{ см}$ , причём последний несёт на себе заряд  $q = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ . В устройстве имеется область, заряженная равномерно с объёмной плотностью  $\rho = -10^{-10} \text{ Кл/см}^3$ , обладающая относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1 = 2$ , и область, не содержащая свободных зарядов с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2 = 1,5$ . Размер  $R_2 = 1,6 \text{ см}$ .

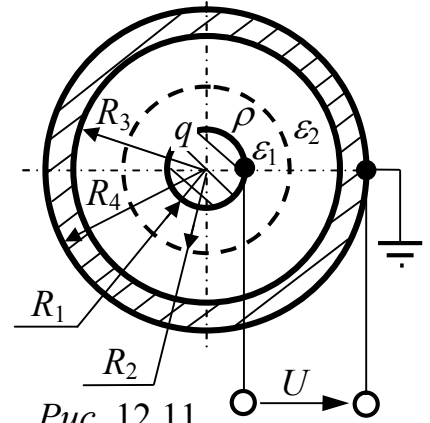


Рис. 12.11

Рассчитать и построить графики зависимости напряжённости электростатического поля и потенциала от расстояния до центра шара.

### Решение

В областях  $0 < R < R_1$ ,  $R_3 < R < R_4$  находится проводящий материал, поэтому электростатическое поле в этих областях отсутствует —  $E=0, D=0$ ,  $\varphi = \text{const}$ . Поле отсутствует также за пределами шара, поскольку оболочка шара заземлена.

В областях  $R_1 < R < R_2$  и  $R_2 < R < R_3$  расчёт поля выполним с помощью теоремы Гаусса в интегральной форме:  $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \Sigma q$ . На основании (12.2)

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = D \cdot 4\pi R^2.$$

В области  $R_1 < R < R_2$   $\Sigma q = q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi (R^3 - R_1^3)$ . Тогда

$$D_1 = \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R^3 - R_1^3)}{4\pi R^2}; \quad E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} = \frac{q - \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\pi \varepsilon_1 \varepsilon_0 R^2} + \frac{\rho R}{3\varepsilon_1 \varepsilon_0}.$$

$$\text{На основании (12.8), } \varphi_1 = -\int E_1 dR = \frac{q - \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\pi \varepsilon_1 \varepsilon_0 R} - \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_1 \varepsilon_0} + A_1.$$

В области  $R_2 < R < R_3$   $\Sigma q = q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)$ . Тогда

$$D_2 = \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi R^2}; \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi \varepsilon_2 \varepsilon_0 R^2};$$

$$\varphi_2 = -\int E_2 dR = \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi \varepsilon_2 \varepsilon_0 R} + A_2.$$

Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  определим, зная, что  $\varphi_2(R_3) = 0$ , и учтя, что потенциал – функция непрерывная.

$$\varphi_2(R_3) = \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0 R_3} + A_2 = 0, \text{ отсюда}$$

$$A_2 = -\frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0 R_3} = -4402.$$

Таким образом, после подстановки числовых значений получим:

$$\varphi_2(R) = \frac{140,86}{R} - 4402 \text{ В}, \quad E_2(R) = \frac{140,86}{R^2} \text{ В/м, где } R [\text{м}].$$

$$\text{При } R = R_2 \quad \varphi_1(R_2) = \varphi_2(R_2) = \frac{140,86}{0,016} - 4402 = 4402 \text{ В}.$$

$$\text{То есть } \frac{q - \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0 R_2} - \frac{\rho R_2^2}{6\epsilon_1\epsilon_0} + A_1 = 4402 \quad \text{и} \quad A_1 = -2804.$$

Таким образом, после подстановки числовых значений получим:

$$\varphi_1(R) = \frac{111,43}{R} + 9,42 \cdot 10^5 \cdot R^2 - 2804 \text{ В}, \quad E_1(R) = \frac{111,43}{R^2} - 18,83 \cdot 10^5 \cdot R \text{ В/м}.$$

Графики  $\varphi(R)$  и  $E(R)$  представлены на рис. 12.12.

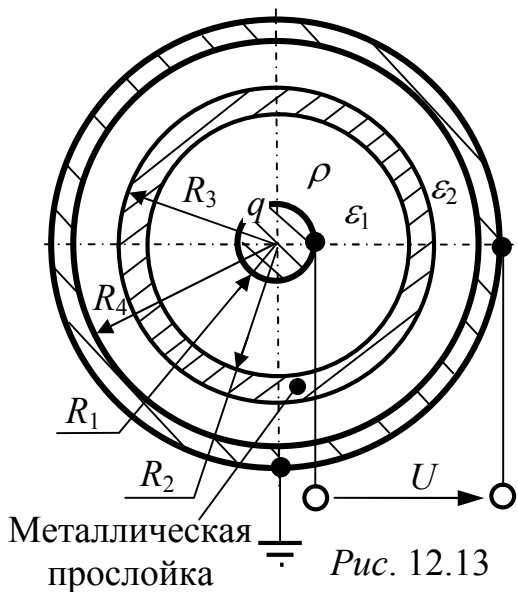
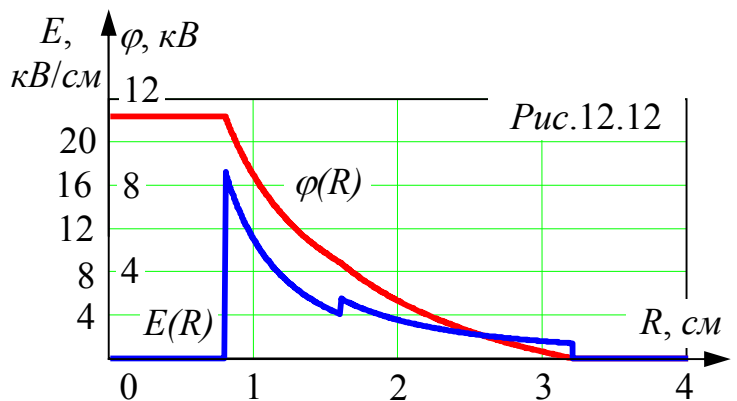


Рис. 12.13



**ЗАДАЧА 12.12.** Два проводящих шара (рис. 12.13) разделены двумя слоями диэлектрика с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1 = 2$  и  $\epsilon_2 = 1$  с металлической прослойкой между ними. Радиусы зон:  $R_1 = 1 \text{ см}$ ,  $R_2 = 3 \text{ см}$ ,  $R_3 = 4 \text{ см}$  и  $R_4 = 5 \text{ см}$ . Шары подключены к источнику постоянного напряжения  $U = 1000 \text{ В}$ . Область первого диэлектрика заполнена свободным зарядом с равномерной объемной плотностью  $\rho = 10^{-10} \text{ Кл/см}^3$ .

Построить графики изменения напряженности электростатического поля и потенциала в зависимости от координат пространства, считая наружную оболочку заземленной. Рассчитать также ёмкость слоя, в котором  $\rho = 0$ .

Задачу решить с помощью теоремы Гаусса в интегральной форме.

### Решение

Допустим, что внутренний шар несёт на себе заряд  $q$ . Далее поле в диэлектрических областях ( $R_1 < R < R_2$  и  $R_3 < R < R_4$ ) можно рассчитать аналогично тому, как это сделано в задаче 12.11.

В области  $R_1 < R < R_2$

$$E_1 = \frac{q - \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0 R^2} + \frac{\rho R}{3\epsilon_1\epsilon_0}; \quad \varphi_1 = -\int E_1 dR = \frac{q - \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0 R} - \frac{\rho R^2}{6\epsilon_1\epsilon_0} + A_1.$$

В области  $R_2 < R < R_3$

$$E_2 = \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0 R^2}; \quad \varphi_2 = -\int E_2 dR = \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0 R} + A_2.$$

Пусть  $\varphi_2(R_4) = 0$ , тогда

$$A_2 = -\frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0 R_4}; \quad \varphi_2(R) = \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_4} \right).$$

Потенциал металлической прослойки  $\varphi_1(R_2) = \varphi_2(R_3)$ . Отсюда

$$A_1 = \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) - \frac{q - \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0 R_2} + \frac{\rho R_2^2}{6\epsilon_1\epsilon_0};$$

$$\varphi_1(R) = \frac{q - \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) - \frac{\rho}{6\epsilon_1\epsilon_0} (R^2 - R_2^2).$$

Напряжение, приложенное к устройству,

$$U = \varphi_1(R_1) = \frac{q - \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) -$$

$$- \frac{\rho}{6\epsilon_1\epsilon_0} (R_1^2 - R_2^2) = q \cdot \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) \right) -$$

$$- \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\rho}{6\epsilon_1\epsilon_0} (R_1^2 - R_2^2) + \frac{\rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) =$$

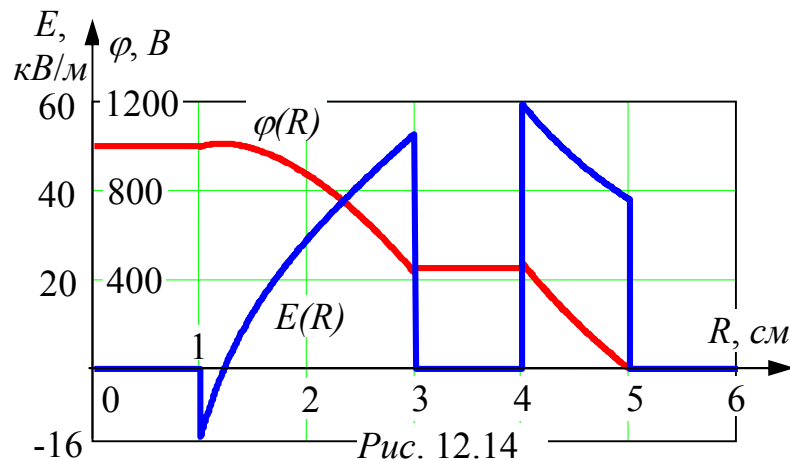
$$= 3,447 \cdot 10^{11} \cdot q + 1117.$$

$$\text{Отсюда } q = \frac{U - 1117}{3,447 \cdot 10^{11}} = -3,406 \cdot 10^{-10} \text{ Кл.}$$

С учетом значения заряда  $q$  получаем окончательные формулы потенциала и напряженности поля, на основании которых строим требуемые графики (рис. 12.14):

$$\varphi(R) = \begin{cases} \varphi_1 = \frac{-3,414}{R} - 0,942 \cdot 10^6 \cdot R^2 + 1436 \text{ В} & \text{при } 0,01 \leq R \leq 0,03 \text{ м,} \\ \varphi_2 = \frac{94,87}{R} - 1897 \text{ В} & \text{при } 0,04 \leq R \leq 0,05 \text{ м.} \end{cases}$$

$$E(R) = \begin{cases} E_1 = -\frac{3,414}{R^2} + 1,883 \cdot 10^6 \cdot R \text{ В/м при } 0,01 \leq R \leq 0,03 \text{ м,} \\ E_2 = \frac{94,87}{R^2} \text{ В/м при } 0,04 \leq R \leq 0,05 \text{ м.} \end{cases}$$



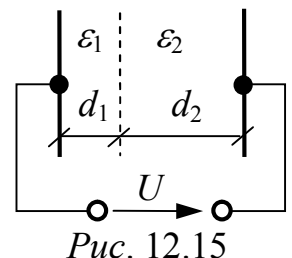
*Примечание.* С помощью ПЭВМ в системе MathCAD задача может быть решена без столь громоздких выкладок, а путём составления и решения системы уравнений, как это показано в задаче 12.46.

**ЗАДАЧА 12.13.** Какое максимальное напряжение можно подвести к двухслойному плоскому конденсатору рис. 12.15, если:  $\varepsilon_1 = 2, \varepsilon_2 = 4, d_1 = 2,5 \text{ мм}, d_2 = 5 \text{ мм}$ . Пробивная напряжённость изоляции:  $E_{\text{проб}} = 30 \text{ кВ/см}$ . Запас электрической прочности принять равным  $n = 2,5$ .

При найденном напряжении рассчитать объёмную плотность энергии второго диэлектрика.

#### Решение

Исходя из принятого запаса электрической плотности, допустимая напряжённость поля в диэлектриках



$$E_{1\text{max}} \leq \frac{E_{\text{проб}}}{n} = \frac{30}{2,5} = 12 \text{ кВ/см}, \quad E_{2\text{max}} \leq \frac{E_{\text{проб}}}{n} = 12 \text{ кВ/см}.$$

Если пренебречь краевым эффектом, то у плоского конденсатора напряжённость поля в каждой области постоянна —  $E_1$  и  $E_2$ , соответственно. На границе раздела сред имеет место условие  $D_{1n} = D_{2n}$ , которое в данном случае приводит к выражению  $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$  или  $E_1 = 2E_2$ .

Так как  $E_1 > E_2$ , принимаем  $E_1 = E_{1\text{max}} = 12 \text{ кВ/см}$ .

Тогда  $E_2 = \frac{1}{2} E_1 = 6 \text{ кВ/см}$ .

Максимально допустимое напряжение на зажимах конденсатора

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = 12 \cdot 0,25 + 6 \cdot 0,5 = 6 \text{ кВ}.$$

Объёмная плотность энергии второго диэлектрика

$$w_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2^2 = 0,5 \cdot 4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 6000^2 = 6,37 \cdot 10^{-6} \text{ Дж/см}^3.$$

**ЗАДАЧА 12.14.** Какое максимальное напряжение можно подвести к двухслойному коаксиальному кабелю (рис. 12.16, а), если:  $r_1 = 2,5 \text{ мм}$ ,  $r_2 = 7,5 \text{ мм}$ ,  $r_3 = 12 \text{ мм}$ ,  $r_4 = 14 \text{ мм}$ ,  $\epsilon_1 = 5$ ,  $\epsilon_2 = 2$ . Пробивная напряженность изоляции:  $E_{1\text{проб}} = E_{2\text{проб}} = 30 \text{ кВ/см}$ . Запас электрической прочности принять равным 3.

Вычислить ёмкость кабеля.

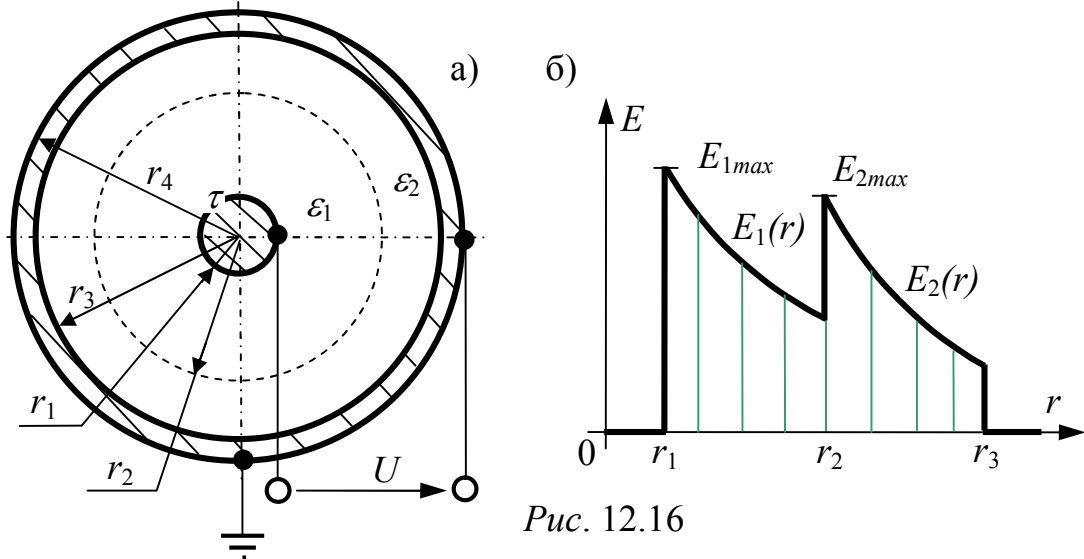


Рис. 12.16

### Решение

При подключении кабеля к источнику постоянного напряжения  $U$  жила кабеля будет нести на себе заряд  $\tau$  на единицу длины. Напряженность поля определим по (12.5).

$$\text{Для первого слоя изоляции: } E_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r}.$$

$$\text{Для второго слоя: } E_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2\epsilon_0 r}.$$

Качественная картина распределения напряженности приведена на рис. 12.16, б.

Наибольшая напряженность поля в слоях изоляции

$$E_{1\text{max}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r_1}, \quad E_{2\text{max}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2\epsilon_0 r_2}.$$

Чтобы не произошло пробоя изоляции:

$$E_{1\text{max}} \leq \frac{E_{1\text{проб}}}{n} = 10 \text{ кВ}, \quad E_{2\text{max}} \leq \frac{E_{2\text{проб}}}{n} = 10 \text{ кВ}.$$

Произведения  $\epsilon_1 r_1 = 5 \cdot 2,5 = 12,5$ ;  $\epsilon_2 r_2 = 2 \cdot 7,5 = 15$ ;  $\epsilon_1 r_1 < \epsilon_2 r_2$ .

Поэтому  $E_{1\text{max}} > E_{2\text{max}}$ . Принимаем  $E_{1\text{max}} = 10 \text{ кВ}$ . Тогда

$$\tau = E_{1\text{max}} \cdot 2\pi\epsilon_1\epsilon_0 r_1; \quad E_1 = \frac{E_{1\text{max}} r_1}{r}; \quad E_2 = \frac{E_{1\text{max}} r_1 \epsilon_1}{\epsilon_2 r}.$$

Напряжение первого слоя изоляции:

$$U_1 = \int_{r_1}^{r_2} E_1 dr = E_{1\text{max}} r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} = 10^4 \cdot 0,25 \ln 3 = 2747 \text{ В};$$

а второго слоя:  $U_2 = \int_{r_2}^{r_3} E_2 dr = \frac{E_{1max} r_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2} = \frac{10^4 \cdot 0,25 \cdot 5}{2} \ln \frac{12}{7,5} = 2937 \text{ В.}$

Максимальное рабочее напряжение кабеля:

$$U = U_1 + U_2 = 2747 + 2937 = 5684 \text{ В.}$$

Заметим, что при изготовлении двухслойного коаксиального кабеля относительную диэлектрическую проницаемость изоляции внешнего слоя, как правило, нужно принимать меньшей, чем внутреннего слоя ( $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ). В противном случае (при  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ) большая часть напряжения сети будет приложена к первому слою изоляции.

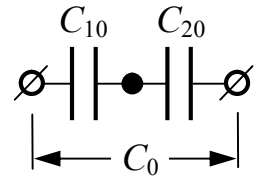


Рис.12.17

Ёмкость двухслойного кабеля (конденсатора) можно рассчитать, представив его последовательным соединением двух ёмкостей (рис. 12.17). В соответствии с (12.11) ёмкости слоёв всего кабеля:

$$C_{10} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, C_{20} = \frac{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}{\ln \frac{r_3}{r_2}}, C_0 = \frac{C_{10} \cdot C_{20}}{C_{10} + C_{20}} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0}{\varepsilon_2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \varepsilon_1 \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

Или по определению ёмкости  $C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2}} = 0,367 \text{ нФ/м.}$

**ЗАДАЧА 12.15.** Максимальная напряжённость электростатического поля в изоляции двухслойного цилиндрического конденсатора (рис.12.13,  $\rho=0$ ) составляет  $E_{max} = 30 \text{ кВ/см.}$  Требуется определить напряжение, приложенное к конденсатору, и его ёмкость, если

$$l = 5 \text{ м, } \varepsilon_1 = 2, \varepsilon_2 = 1, r_1 = 1 \text{ см, } r_2 = 3 \text{ см, } r_3 = 4 \text{ см и } r_4 = 5 \text{ см.}$$

### Решение

Пусть заряд внутренней жилы –  $\tau$ . Тогда напряжённости и потенциалы зон в соответствии с (12.5) и (12.8):  $E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r}; \quad \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \ln(r) + A_1;$

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r}; \quad \varphi_2 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} \ln(r) + A_2.$$

Максимальные напряжённости в областях:

$$E_{1max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r_1}; \quad E_{2max} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r_3}.$$

Так как  $\varepsilon_1 \cdot r_1 = 2 < \varepsilon_2 \cdot r_3 = 4$ , то  $E_{2max} < E_{1max} = E_{max}, \quad \tau = 2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r_1 E_{max},$

$$\varphi_1 = -r_1 E_{max} \cdot \ln(r) + A_1; \quad \varphi_2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} r_1 E_{max} \cdot \ln(r) + A_2.$$

Пусть  $\varphi_1(r_2) = \varphi_2(r_3) = 0$ , тогда  $A_1 = r_1 E_{max} \cdot \ln(r_2), \quad A_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} r_1 E_{max} \cdot \ln(r_3),$

$$\varphi_1(r) = r_1 E_{max} \cdot \ln(r_2/r), \quad \varphi_2(r) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} r_1 E_{max} \cdot \ln(r_3/r).$$

Приложенное напряжение и ёмкость конденсатора

$$U = \varphi_1(r_1) - \varphi_2(r_4) = r_1 E_{max} \cdot \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \cdot \left( \frac{r_4}{r_3} \right)^{\varepsilon_1/\varepsilon_2} \right) = 46,37 \text{ кВ},$$

$$C = \frac{\tau \cdot l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0}{\ln \left( \frac{r_2}{r_1} \cdot \left( \frac{r_4}{r_3} \right)^{\varepsilon_1/\varepsilon_2} \right)} = 71,99 \text{ нФ}.$$

### 23.2 Расчёт поля интегрированием уравнения Лапласа

**ЗАДАЧА 12.16.** Две проводящие пластины разделены тремя слоями диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 2$  и  $\varepsilon_3 = 3$ . Толщина слоёв диэлектрика:  $d_1 = 1 \text{ см}$ ,  $d_2 = 2 \text{ см}$  и  $d_3 = 3 \text{ см}$  (рис. 12.18). Устройство подключено к источнику постоянного напряжения  $U = 1000 \text{ В}$ . Область первого диэлектрика заполнена свободным зарядом с равномерной плотностью  $\rho = 10^{-10} \text{ Кл/см}^3$ .

Построить графики изменения напряжённости электростатического поля и потенциала в зависимости от координат пространства, считая заземлённой правую пластину.

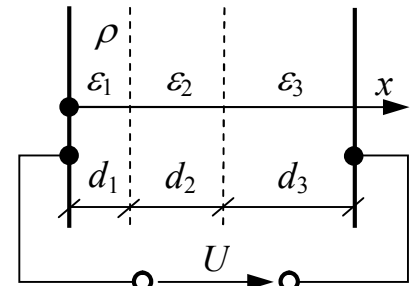


Рис.12.18

#### Решение

Задачу решим с помощью уравнений Пуассона и Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \text{ или } 0.$$

Скалярный лапласиан в декартовой системе координат (рис. 12.18) расписывается в соответствии с табл. 11.1 следующим образом:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Но в данной задаче потенциал зависит только от одной координаты  $x$ , то есть  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ . Таким образом, для трёх различных областей получаем:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} & \text{при } 0 \leq x \leq d_1, \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = 0 & \text{при } d_1 \leq x \leq d_1 + d_2, \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} = 0 & \text{при } d_1 + d_2 \leq x \leq d_1 + d_2 + d_3. \end{cases}$$

Двукратное интегрирование даёт:  $\varphi_1(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_1\varepsilon_0}x^2 + A_1x + A_2$ ;

$$\varphi_2(x) = A_3x + A_4;$$

$$\varphi_3(x) = A_5x + A_6.$$

Этих выражений недостаточно для определения постоянных интегрирования  $A_1 \div A_6$ , поэтому используем ещё формулы для напряженности поля из соотношения (12.1) с учётом табл. 11.1:

$$E_1(x) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} x - A_1; \quad E_2(x) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -A_3; \quad E_3(x) = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = -A_5.$$

Постоянные интегрирования находим, используя граничные условия.

Пусть при  $x = d_1 + d_2 + d_3$   $\varphi_3 = 0$  (потенциал правой пластины), тогда

$$A_5 \cdot (d_1 + d_2 + d_3) + A_6 = 0. \quad (*)$$

При  $x = 0$   $\varphi_1 = U$  (потенциал левой пластины), тогда  $A_2 = U$ . (\*)

При  $x = d_1$   $\varphi_1 = \varphi_2$ , то есть  $-\frac{\rho}{2\varepsilon_1 \varepsilon_0} d_1^2 + A_1 d_1 + A_2 = A_3 d_1 + A_4$ . (\*)

На границе двух диэлектриков равны нормальные составляющие векторов электростатической индукции  $-D_{1n} = D_{2n}$ . В данной задаче векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  направлены по оси  $x$ , то есть имеют только нормальные составляющие. Поэтому при  $x = d_1$   $\varepsilon_1 \cdot E_1 = \varepsilon_2 \cdot E_2$ ; то есть  $\frac{\rho}{\varepsilon_0} d_1 - \varepsilon_1 \cdot A_1 = -\varepsilon_2 \cdot A_3$ . (\*)

При  $x = d_1 + d_2$   $\varphi_2 = \varphi_3$  и  $\varepsilon_2 \cdot E_2 = \varepsilon_3 \cdot E_3$ , то есть

$$A_3(d_1 + d_2) + A_4 = A_5(d_1 + d_2) + A_6; \quad (*)$$

$$-\varepsilon_2 \cdot A_3 = -\varepsilon_3 \cdot A_5. \quad (*)$$

Шесть уравнений (\*) образуют систему, решая которую, находим постоянные интегрирования.

Результат решения системы:

$$A_1 = 6,083 \cdot 10^4; \quad A_2 = 1000;$$

$$A_3 = -2,608 \cdot 10^4; \quad A_4 = 1304; \quad A_5 = -1,739 \cdot 10^4; \quad A_6 = 1043.$$

Окончательно получаем

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1 = -5,65 \cdot 10^6 x^2 + 60830x + 1000 \text{ В} & \text{при } 0 \leq x \leq d_1, \\ \varphi_2 = -26080x + 1304 \text{ В} & \text{при } d_1 \leq x \leq d_1 + d_2, \\ \varphi_3 = -17390x + 1043 \text{ В} & \text{при } d_1 + d_2 \leq x \leq d_1 + d_2 + d_3. \end{cases}$$

$$E(x) = \begin{cases} E_1 = 11,3 \cdot 10^6 x - 60830 \text{ В/м} & \text{при } 0 \leq x \leq d_1, \\ E_2 = 26080 \text{ В/м} & \text{при } d_1 \leq x \leq d_1 + d_2, \\ E_3 = 17390 \text{ В/м} & \text{при } d_1 + d_2 \leq x \leq d_1 + d_2 + d_3. \end{cases}$$

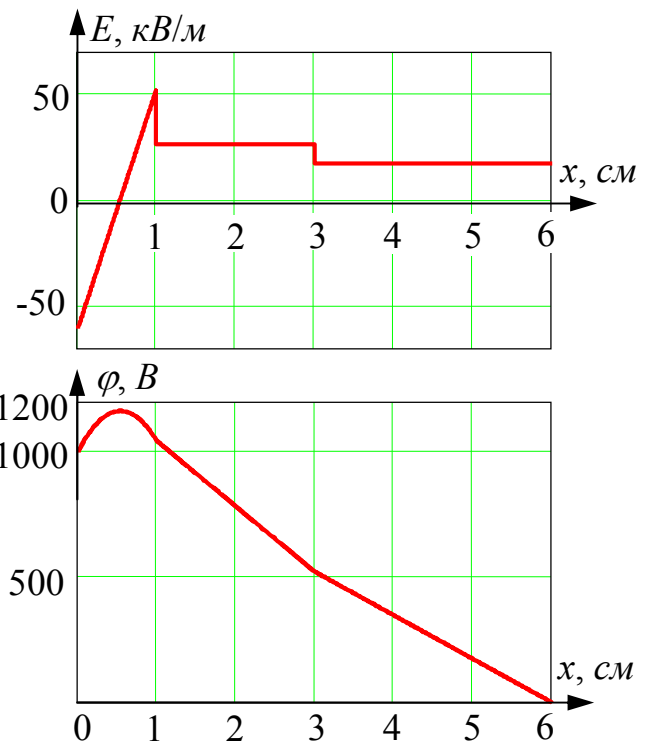


Рис. 12.19

Построенные по этим формулам графики приведены на рис. 12.19<sup>1)</sup>.

**ЗАДАЧА 12.17.** Между двумя плоскими электродами (рис. 12.20) напряжённость поля изменяется по закону  $E = E_x = E_0 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2d^2}\right)$ ,  $E_y = 0$ ,  $E_z = 0$ .

Расстояние между электродами  $d = 5$  мм, меньше размеров пластин, причём  $a = 25$  см,  $b = 1$  м,  $E_0 = 12$  кВ/см, диэлектрическая проницаемость диэлектрика  $\varepsilon = 4$ .

Найти разность потенциалов между электродами, объёмную плотность свободного заряда и весь свободный заряд, заключённый между электродами.

**Решение**

Состояние поля определяется уравнением Пуассона  $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}$ . Поскольку  $d \ll a$  и  $d \ll b$ , то

можно пренебречь краевым эффектом. Тогда при расположении осей декартовой системы координат, как показано на рис. 12.20,  $\varphi$  зависит

только от  $x$  и  $\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$ ;

напряжённость поля

$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx} = E_0 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2d^2}\right),$$

откуда  $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{dE}{dx} = \frac{E_0 x}{d^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}$  и

$$\rho = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E_0}{d^2} \cdot x = -\frac{4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 12 \cdot 10^3}{0,5^2} \cdot x = -1,7 \cdot 10^{-8} \cdot x \text{ Кл/см}^3, \text{ где } x[\text{см}].$$

Напряжение между электродами

$$U = \int_0^d E(x) dx = E_0 \cdot \left(d - \frac{x^3}{6d^2}\right) \Big|_0^d = E_0 \cdot (d - d/6) = \frac{E_0 5d}{6} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 0,5}{6} = 5 \text{ кВ}.$$

Суммарный заряд между электродами

$$Q = \int_V \rho dV = \int_0^d \rho(x) ab dx = a \cdot b \cdot \int_0^d \rho(x) dx = 25 \cdot 100 \cdot \int_0^{0,5} -1,7 \cdot 10^{-8} x dx =$$

$$= -2500 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5^2 = -5,31 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

**Примечание.** Решение этой задачи с помощью системы MathCAD – см. задачу 12.42.

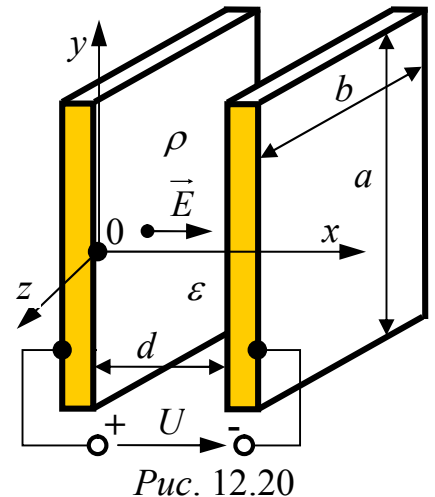


Рис. 12.20

<sup>1)</sup> Для записи ответа в одну строку при построения графиков в системе MathCAD можно использовать функцию Хэвисайда (функцию включения, единичную ступенчатую функцию), которая в системе MathCAD обозначается  $\Phi$ . Например, для данной задачи:

$$\varphi(x) = \varphi_1 \cdot [\Phi(x) - \Phi(x-d_1)] + \varphi_2 \cdot [\Phi(x-d_1) - \Phi(x-d_1-d_2)] + \varphi_3 \cdot [\Phi(x-d_1-d_2) - \Phi(x-d_1-d_2-d_3)].$$

**ЗАДАЧА 12.18.** Решить задачу 12.10 с помощью уравнений Пуассона и Лапласа.

**Решение**

Общий вид уравнения  $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$  или 0. Совместим ось цилиндрической системы координат с осью луча, тогда скалярный лапласиан запишется как  $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$  (см. табл. 11.1).

Но в данной задаче потенциал зависит только от одной координаты, то есть  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ . Таким образом, для двух различных областей получаем:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0} & \text{при } 0 \leq r \leq \frac{d}{2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) = 0 & \text{при } r \geq \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Двукратное интегрирование даёт:  $\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0} r^2 + A_1 \ln(r) + A_2$ ;

$$\varphi_2(r) = A_3 \ln(r) + A_4.$$

Чтобы функция  $\varphi_1(r)$  существовала при  $r=0$ , слагаемое  $A_1 \ln(r)$  должно отсутствовать, то есть постоянная интегрирования  $A_1=0$ . Примем, что  $\varphi_1=0$  при  $r=0$ . Тогда  $A_2=0$  и  $\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0} r^2 = 1,412 \cdot 10^6 \cdot r^2$ .

Для напряженности  $\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{r}_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \vec{\alpha}_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{z}_0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{r}_0$ .

Таким образом,  $E_1(r) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0} r = 2,825 \cdot 10^6 \cdot r$ ;  $E_2(r) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{A_3}{r}$ .

Граничное условие  $-D_{1n} = D_{2n}$  или  $\varepsilon E_1 = E_2$  при  $r = d/2$ :

$$\varepsilon \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{d}{2} = -\frac{A_3}{d/2}; \quad A_3 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left( \frac{d}{2} \right)^2 = -\frac{10^{-4} \cdot (10^{-3})^2}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 5,65.$$

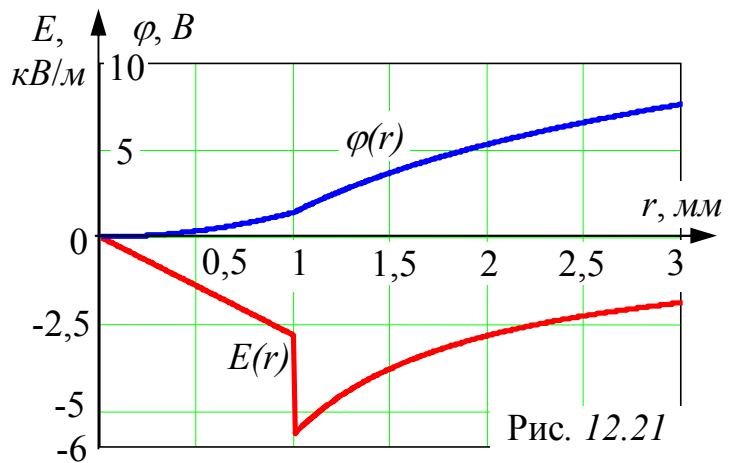
При  $r = d/2$   $\varphi_2(d/2) = \varphi_1(d/2) = 1,412 \cdot 10^6 \cdot (10^{-3})^2 = 1,41$  В, отсюда  $A_4 = \varphi_1(d/2) - A_3 \ln(d/2) = 1,41 - 5,65 \cdot \ln(0,001) = 40,44$ .

Окончательно получаем

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi_1 = 1,412 \cdot 10^6 \cdot r^2 \text{ В} & \text{при } 0 \leq r \leq 0,001 \text{ м}, \\ \varphi_2 = 5,65 \cdot \ln(r) + 40,44 \text{ В} & \text{при } r \geq 0,001 \text{ м}. \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} E_1 = -2,825 \cdot 10^6 \cdot r \text{ В/м} & \text{при } 0 \leq r \leq 0,001 \text{ м}, \\ E_2 = -\frac{5,65}{r} \text{ В/м} & \text{при } r \geq 0,001 \text{ м}. \end{cases}$$

Построенные по этим формулам графики приведены на рис. 12.21.



**ЗАДАЧА 12.19.** В диэлектрике плоского конденсатора ( $\epsilon_1 = 4$ ) появилось длинное цилиндрическое воздушное включение диаметром  $2a = 1 \text{ мм}$ . Расстояние между пластинами  $d = 20 \text{ мм}$  (рис. 12.22, а). Пробивные напряженности: для диэлектрика  $E_{1\text{проб}} = 120 \text{ кВ/см}$  для воздуха  $E_{2\text{проб}} = 30 \text{ кВ/см}$ . Определить максимальные и рабочие напряжения, на которые может быть включен конденсатор, если:

а) в изоляции отсутствует воздушное включение;

б) в изоляции есть воздушное включение.

Принять в обоих случаях отношение пробивного напряжения к рабочему равным 3 (запас электрической прочности  $n=3$ ).

#### Решение

а) Воздушное включение в изоляции отсутствует.

Поле конденсатора равномерное:  $E_0 = \frac{U_{\text{max}}}{d} = E_{1\text{проб}}$ , тогда

$$U_{\text{max}} = d E_{1\text{проб}} = 2 \cdot 120 = 240 \text{ кВ}.$$

Рабочее напряжение  $U = \frac{U_{\text{max}}}{n} = \frac{240}{3} = 80 \text{ кВ}.$

б) В изоляции есть воздушное включение (рис. 12.22, б).

Ниже приведены полученные методом разделения переменных решения уравнения Лапласа для незаряженного цилиндра [3] ( $\varphi(r, \alpha)$ ) и полученные дифференцированием этих решений формулы для напряженности электрического поля ( $E(r, \alpha)$ ).

Для изоляции (область 1):  $\varphi_1 = A_1 + (A_2 r + \frac{A_3}{r}) \cos \alpha,$

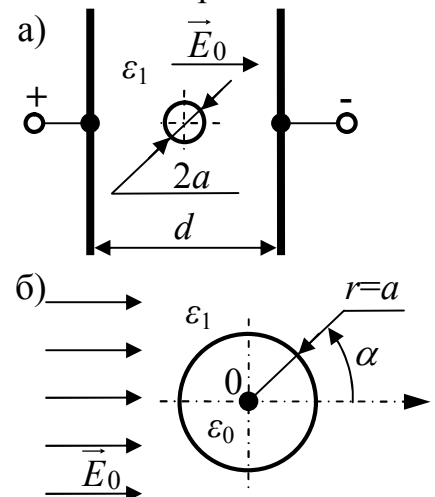


Рис. 12.22

$$E_{1r} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -(A_2 - \frac{A_3}{r^2}) \cos \alpha, E_{1\alpha} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} = (A_2 + \frac{A_3}{r^2}) \sin \alpha,$$

для внутренней воздушной области (область 2) аналогично:

$$\varphi_2 = A_4 + (A_5 r + \frac{A_6}{r}) \cos \alpha, \quad E_{2r} = -(A_5 - \frac{A_6}{r^2}) \cos \alpha, \quad E_{2\alpha} = (A_5 + \frac{A_6}{r^2}) \sin \alpha.$$

Заметим, что искажение равномерного поля цилиндром приводит к появлению слагаемых  $\frac{A}{r^2}$  в выражении для напряжённостей и слагаемых  $\frac{A}{r}$  для потенциалов. Допуская 5% погрешности, можно заключить, что при  $r > 20a$  искажения картины распределения потенциала уже нет, а в напряжённости уже при  $r > 5a$  погрешность будет менее 4%. В нашей задаче  $a = 0,5 \text{ мм}$ ,  $\frac{1}{2}d = 10 \text{ мм}$ , соотношение между ними 20. Вывод: поле будет искажено только вблизи цилиндра. Поэтому при наличии цилиндрического неоднородного включения по-прежнему  $E_0 = U/d$ .

Однако вблизи цилиндрического включения напряженность поля как в изоляции, так и в воздушном включении будет отличаться от  $E_0$ , что может привести к пробое одной из сред, что недопустимо.

Постоянные интегрирования  $A_1 \div A_6$  находим из граничных условий при  $r=a$ , а также исследованием решений при  $r=0$  и  $r=\infty$ .

Из условия непрерывности потенциала на границе цилиндра следует

$$A_1 = A_4. \quad (*)$$

Первое граничное условие  $E_{1r} = E_{2r}$  приводит к равенству  $E_{1\alpha} = E_{2\alpha}$  при  $r=a$ :  $A_2 + \frac{A_3}{a^2} = A_5 + \frac{A_6}{a^2}$ . (\*)

Второе граничное условие  $D_{1n} = D_{2n}$  при  $r=a$  приводит к равенству  $\varepsilon_1 E_{1r} = \varepsilon_2 E_{2r}$ :  $\varepsilon_1 (A_2 - \frac{A_3}{a^2}) = \varepsilon_2 (A_5 - \frac{A_6}{a^2})$ . (\*)

При  $r \rightarrow 0$  решение должно давать конечные значения  $\varphi_2$  и  $E_2$ , что приводит к нулевому значению постоянной интегрирования  $A_6 = 0$ . (\*)

При  $r \rightarrow \infty$  решение должно привести наблюдателя в невозмущенное цилиндром поле, когда при  $\alpha = 0$   $E_{1r} = E_0 = U/d$ :  $A_2 = -E_0$ . (\*)

Поскольку потенциал определяется с точностью до постоянной, то примем  $A_1 = 0$ . (\*)

Тогда из шести уравнений (\*), образующих систему, находим:

$$\begin{aligned} & A_1 = A_4 = 0; \quad A_6 = 0; \quad A_2 = -E_0; \\ & \begin{cases} -E_0 + \frac{A_3}{a^2} = A_5, \\ -E_0 - \frac{A_3}{a^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} A_5, \end{cases} \Rightarrow -2E_0 = A_5 (1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}); \quad A_5 = -E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}; \\ & A_3 = a^2 (A_5 + E_0) = a^2 E_0 (1 - \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}) = a^2 E_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E_{1r} = E_0 \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \cos \alpha, \quad E_{1\alpha} = -E_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \sin \alpha,$$

$$E_{2r} = E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cos \alpha, E_{2\alpha} = -E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \sin \alpha.$$

Модуль напряжённости поля в цилиндре

$$E_2 = \sqrt{E_{2r}^2 + E_{2\alpha}^2} = E_0 \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = E_0 \cdot \frac{2 \cdot 4}{4 + 1} = 1,6E_0.$$

откуда следует, что поле внутри внесённого цилиндра равномерное.

Модуль напряжённости поля в первой среде на поверхности цилиндра при  $r = a$

$$E_1 = \sqrt{E_{1r}^2 + E_{1\alpha}^2} = \frac{2E_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \sqrt{(\varepsilon_2 \cos \alpha)^2 + (\varepsilon_1 \sin \alpha)^2},$$

$$\text{где } E_{1r}(r=a) = E_0 \left( 1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \cos \alpha = E_0 \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cos \alpha,$$

$$E_{1\alpha} = -E_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) \sin \alpha = E_0 \frac{-2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \sin \alpha.$$

Наибольшие и наименьшие значения (экстремумы) напряжённости в изоляции определяются условием  $\frac{d}{d\alpha} [(\varepsilon_2 \cos \alpha)^2 + (\varepsilon_1 \sin \alpha)^2] = 0$ .

$$\varepsilon_2^2 \cdot 2 \cos \alpha (-\sin \alpha) + \varepsilon_1^2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0; \quad \sin 2\alpha (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) = 0; \quad 2\alpha = k\pi,$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \pi k, \quad \text{где } k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

$$\text{При } k=0 \quad \alpha = 0, \quad E_{1\min} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 = 0,4E_0;$$

$$k=1 \quad \alpha = 90^\circ, \quad E_{1\max} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 = 1,6E_0.$$

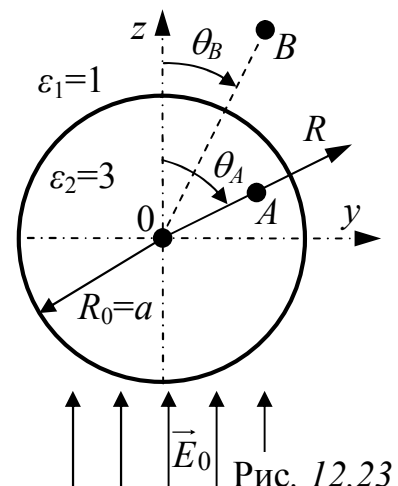
Таким образом, требуется принять  $E_0' = E_{1\text{проб}}/1,6 = 240/1,6 = 150 \text{ кВ/см}$ , а чтобы не было ионизации воздуха –  $E_0'' = E_{2\text{проб}}/1,6 = 30/1,6 = 18,75 \text{ кВ/см}$ .

Так как  $E_0'' < E_0'$ , то при наличии воздушного цилиндра

$$U_{\max} = E_0'' d = 18,75 \cdot 2 = 37,5 \text{ кВ},$$

$$\text{рабочее напряжение } U_{\text{раб}} = \frac{U_{\max}}{n} = \frac{37,5}{3} = 12,5 \text{ кВ}.$$

**ЗАДАЧА 12.20.** Диэлектрический шар радиусом  $a = 2 \text{ см}$  находится в равномерном внешнем электрическом поле (рис. 12.23). Разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$   $\varphi_A - \varphi_B = 5 \text{ В}$ . Сферические координаты точек:  $A(1 \text{ см}, 60^\circ, 90^\circ)$ ;  $B(4 \text{ см}, 30^\circ, 90^\circ)$ . Средой, окружающей шар, является воздух ( $\varepsilon_1 = 1$ ). Относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика шара



$\varepsilon_2 = 3$ . Определить модули вектора смещения в точках  $A$  и  $B$ .

### Решение

Общее решение уравнения Лапласа в сферической системе координат получено методом разделения переменных [3]. Представим его здесь для случая, когда шар не заряжен.

$$\text{Для первой области } R > a \quad \varphi_1 = A_1 + \left(A_2 R + \frac{A_3}{R^2}\right) \cos \theta,$$

$$\text{тогда составляющие напряженности} \quad E_{1R} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = -\left(A_2 - \frac{2A_3}{R^3}\right) \cos \theta,$$

$$E_{1\theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = \left(A_2 + \frac{A_3}{R^3}\right) \sin \theta.$$

Для второй области  $R < a$ :

$$\varphi_2 = A_4 + \left(A_5 R + \frac{A_6}{R^2}\right) \cos \theta, \quad E_{2R} = -\left(A_5 - \frac{2A_6}{R^3}\right) \cos \theta, \quad E_{2\theta} = \left(A_5 + \frac{A_6}{R^3}\right) \sin \theta.$$

Для определения постоянных интегрирования  $A_1 \div A_6$  воспользуемся граничными условиями. Из условия непрерывности потенциала на поверхности шара следует

$$A_1 = A_4. \quad (*)$$

Условие  $E_{1r} = E_{2r}$  приводит к равенству  $E_{1\theta} = E_{2\theta}$  при  $R = a$ :

$$A_2 + \frac{A_3}{a^3} = A_5 + \frac{A_6}{a^3}. \quad (*)$$

Условие  $D_{1n} = D_{2n}$  при  $R = a$  приводит к равенству  $\varepsilon_1 E_{1R} = \varepsilon_2 E_{2R}$ :

$$\varepsilon_1 \left(A_2 - \frac{2A_3}{a^3}\right) = \varepsilon_2 \left(A_5 - \frac{2A_6}{a^3}\right). \quad (*)$$

Условия в нуле ( $R \rightarrow 0$ ) приводят к тому, что  $A_6 = 0$ , (\*)

так как ни потенциал, ни напряжённость в центре сферы не могут быть бесконечными.

Условия в бесконечности ( $R \rightarrow \infty$ ) позволяют определить  $A_2$ , поскольку там, где уже нет возмущения поля внесённой сферой,  $E_{1R} = E_0 \cos \theta = -A_2 \cos \theta$ .

Отсюда  $A_2 = -E_0$ . (\*)

Поскольку потенциал определяется с точностью до постоянной, то примем  $A_1 = 0$ . (\*)

Тогда из шести уравнений (\*), образующих систему, находим:

$$A_1 = A_4 = 0; \quad A_6 = 0; \quad A_2 = -E_0;$$

$$\begin{cases} -E_0 + \frac{A_3}{a^3} = A_5, \\ -E_0 - \frac{2A_3}{a^3} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} A_5, \end{cases} \Rightarrow -3E_0 = A_5 \left(2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right); \quad A_5 = -E_0 \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2};$$

$$A_3 = a^3 (A_5 + E_0) = a^3 E_0 \left(1 - \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) = a^3 E_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Заданная условием задачи разность потенциалов:  $\varphi_A - \varphi_B = 5B$ .

На основании приведенного решения:

$$-E_0(-R_B + \frac{a^3}{R_B^2} \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}) \cos \theta_B + (-E_0) \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} R_A \cos \theta_A = 5.$$

Подставим расстояния в см получим:

$$-E_0(-4 + \frac{2^3}{4^2} \cdot \frac{3-1}{2+3}) \frac{\sqrt{3}}{2} - E_0 \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 5, \text{ откуда } E_0 = 1,672 \text{ В/см и}$$

$$A_2 = -1,672 \text{ В/см}; \quad A_3 = 2^3 \cdot 1,672 \cdot \frac{3-1}{2+3} = 5,35 \text{ В} \cdot \text{см}^2; \quad A_5 = -1,672 \cdot \frac{3}{5} = -1 \text{ В/см}.$$

Для точки А (область 2):

$$E_{RA} = E_{2R} \Big|_{R=R_A} = -A_5 \cos \theta_A = 1 \cdot \cos 60^\circ = 0,5 \text{ В/см},$$

$$E_{\theta A} = A_5 \sin \theta_A = -1 \cdot \sin 60^\circ = -0,866 \text{ В/см},$$

$$E_A = \sqrt{E_{RA}^2 + E_{\theta A}^2} = 1 \text{ В/см}; \quad D_A = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_A = 3 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 1 = 26,55 \cdot 10^{-14} \text{ Кл/см}^2.$$

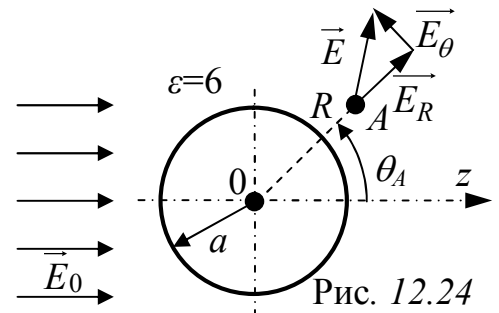
Для точки В (область 1):

$$E_{RB} = -(-1,672 - \frac{2 \cdot 5,35}{4^3}) \cdot 0,866 = 1,594 \text{ В/см},$$

$$E_{\theta B} = (-1,672 + \frac{5,35}{4^3}) \cdot 0,5 = -0,7942 \text{ В/см},$$

$$E_B = \sqrt{E_{RB}^2 + E_{\theta B}^2} = 1,781 \text{ В/см}; \quad D_B = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_B = 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 1,781 = 15,76 \cdot 10^{-14} \text{ Кл/см}^2.$$

**ЗАДАЧА 12.21.** Проводящий заряженный шар радиусом  $a = 5 \text{ мм}$  помещен в равномерное электрическое поле с напряженностью  $E_0 = 4 \text{ кВ/см}$  (рис. 12.24). Окружающая среда имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon = 6$ . Найти значения напряженности поля и вектора поляризации диэлектрика в точке А (7 мм;  $40^\circ$ ;  $0^\circ$ ), если заряд шара  $Q = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$ .



### Решение

Решение произведём с помощью уравнения Лапласа в сферической системе координат. При выбранном расположении осей (рис. 12.24) потенциал не зависит от координаты  $\alpha$  ( $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$ ), поэтому данное поле будет

описываться уравнением  $\varphi = \frac{A_1}{R} + (A_2 R + \frac{A_3}{R^2}) \cos \theta + A_4$ ,

где слагаемое  $\frac{A_1}{R}$  определяется зарядом шара  $Q$ .

Для поля точечного заряда  $Q$ :

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} = \frac{A_1}{R}, \text{ откуда } A_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{4 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14}} = 600 \text{ В} \cdot \text{см}.$$

Для определения остальных постоянных интегрирования используем напряжённость поля. Так как  $\varphi$  зависит только  $R$  от и  $\theta$ , напряжённость имеет только две составляющие:

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{A_1}{R^2} + \left(-A_2 + \frac{2A_3}{R^3}\right) \cos \theta,$$

$$E_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left(A_2 + \frac{A_3}{R^3}\right) \sin \theta.$$

Из условий в бесконечности  $R \rightarrow \infty$  получаем:

$$E_R = -A_2 \cos \theta = E_0 \cos \theta, \text{ откуда } A_2 = -E_0 = -4000 \text{ В/см.}$$

На границе раздела диэлектрик-проводящее тело нет тангенциальной составляющей напряженности поля. Поэтому:  $E_\theta|_{R=a} = 0$ , откуда

$$A_2 + \frac{A_3}{a^3} = 0 \text{ и } A_3 = -A_2 \cdot a^3 = 4000 \cdot 5^3 \cdot 10^{-3} = 500 \text{ В} \cdot \text{см}^2.$$

$$\text{Таким образом: } E_R = \frac{600}{R^2} + \left(4000 + \frac{1000}{R^3}\right) \cos \theta, \quad E_\theta = \left(-4000 + \frac{500}{R^3}\right) \sin \theta.$$

В точке  $A(0,7; 40^\circ; 0^\circ)$   $E_R = 4735 \text{ В/см}$ ,  $E_\theta = -2596 \text{ В/см}$ ,

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2} = \sqrt{4735^2 + 2596^2} = 5400 \text{ В/см}.$$

Определим вектор поляризации из соотношений  $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ .

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot (6 - 1) \cdot 5400 = 2,39 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/см}^2.$$

**ЗАДАЧА 12.22.** Решить задачу 12.12 с помощью уравнений Пуассона и Лапласа.

### Решение

В силу центральной симметрии устройства характеристики поля зависят только от одной координаты –  $R$ , то есть  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$ . С учётом этого уравнение в сферической системе координат (см. табл. 11.1) для потенциала в зонах, занятых диэлектриком, принимает вид:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{R^2} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) \right] = \begin{cases} -\frac{\rho}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} & \text{при } R_1 < R < R_2, \\ 0 & \text{при } R_3 < R < R_4. \end{cases}$$

В результате двукратного интегрирования получаем:

$$\varphi_1(R) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_1\varepsilon_0} R^2 - \frac{A_1}{R} + A_2; \quad \varphi_2(R) = -\frac{A_3}{R} + A_4.$$

Этих уравнений недостаточно для определения постоянных интегрирования  $A_1 \div A_4$ , поэтому используем ещё напряжённость поля:

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} \vec{R}_0 - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{\theta}_0 - \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \vec{\alpha}_0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} \vec{R}_0,$$

$$\text{откуда} \quad E_1(R) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \frac{\rho}{3\varepsilon_1\varepsilon_0} R - \frac{A_1}{R^2}; \quad E_2(r) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial R} = -\frac{A_3}{R^2}.$$

Для нахождения постоянных интегрирования на основании граничных условий для границы диэлектрик-проводник ( $D = \sigma$ ,  $\varphi_{M1} = \text{const}$ ) составим систему уравнений. Учтём, что векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  направлены по радиальным линиям и, следовательно, имеют только нормальную составляющую. Примем, что за счет явления электростатической индукции на внутренней стороне металлической прослойки появится заряд  $-q_{np}$ , а на внешней —  $+q_{np}$ .

При  $R = R_1 \varphi_1(R_1) = U$ , при  $R = R_4 \varphi_2(R_4) = 0$ ,  
при  $R = R_2 \varphi_1(R_2) = \varphi_{\text{прослойки}}$ ; при  $R = R_3 \varphi_2(R_3) = \varphi_{\text{прослойки}}$ ;  
или  $\varphi_1(R_2) = \varphi_2(R_3)$ ;

$$D_1(R_2) = -\sigma(R_2) = -\frac{q_{np}}{4\pi R_2^2} = \frac{q_{np}}{4\pi R_2^2}, \quad E_1(R_2) = \frac{D_1(R_2)}{\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{q_{np}}{\varepsilon_1\varepsilon_0 4\pi R_2^2};$$

$$D_2(R_3) = \sigma(R_3) = \frac{q_{np}}{4\pi R_3^2}, \quad E_2(R_3) = \frac{q_{np}}{\varepsilon_2\varepsilon_0 4\pi R_3^2};$$

$$\text{или } R_2^2 \varepsilon_1 E_1(R_2) = R_3^2 \varepsilon_2 E_2(R_3).$$

Следовательно, получается система уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{\rho}{6\varepsilon_1\varepsilon_0} R_1^2 - \frac{A_1}{R_1} + A_2 = U, & \varepsilon_1 \cdot R_2^2 \cdot \left( \frac{\rho}{3\varepsilon_1\varepsilon_0} R_2 - \frac{A_1}{R_2^2} \right) = \varepsilon_2 \cdot R_3^2 \cdot \left( -\frac{A_3}{R_3^2} \right), \\ -\frac{\rho}{6\varepsilon_1\varepsilon_0} R_2^2 - \frac{A_1}{R_2} + A_2 = -\frac{A_3}{R_3} + A_4, & -\frac{A_3}{R_4} + A_4 = 0. \end{cases}$$

Подставляя в эти уравнения числовые значения и решая систему, получаем:  $A_1 = 3,414$ ;  $A_2 = 1436$ ;  $A_3 = -94,87$ ;  $A_4 = -1897$ .

Записываем окончательные формулы потенциала и напряженности поля, по которым строим требуемые графики (рис. 12.14):

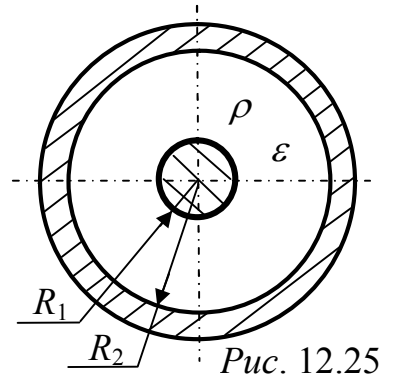
$$\varphi(R) = \begin{cases} \varphi_1 = \frac{-3,414}{R} - 0,942 \cdot 10^6 \cdot R^2 + 1436 \text{ В} & \text{при } 0,01 \leq R \leq 0,03 \text{ м}, \\ \varphi_2 = \frac{94,87}{R} - 1897 \text{ В} & \text{при } 0,04 \leq R \leq 0,05 \text{ м}. \end{cases}$$

$$E(R) = \begin{cases} E_1 = -\frac{3,414}{R^2} + 1,883 \cdot 10^6 \cdot R \text{ В/м} & \text{при } 0,01 \leq R \leq 0,03 \text{ м}, \\ E_2 = \frac{94,87}{R^2} \text{ В/м} & \text{при } 0,04 \leq R \leq 0,05 \text{ м}. \end{cases}$$

Ёмкость второго слоя диэлектрика на основании (12.9), задача 12.5:

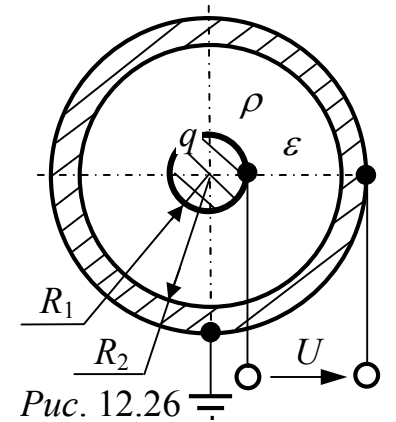
$$C = \frac{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0}{\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}} = \frac{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{\frac{1}{0,04} - \frac{1}{0,05}} = 22,24 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 22,24 \text{ нФ}.$$

**ЗАДАЧА 12.23.** Симметричная сферическая система из двух металлических шаров находится в воздухе, удалена от земли и других тел на значительное расстояние (рис. 12.25). Пространство между шарами заполнено диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon=4$ , в котором распределен свободный заряд с равномерной плотностью  $\rho = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^3$ . Радиус внутреннего шара  $R_1 = 20 \text{ см}$ , внутренний радиус сферической оболочки  $R_2 = 40 \text{ см}$ . Рассчитать зависимости  $E(R), \varphi(R)$  для области  $R_1 < R < R_2$ .



*Ответ.*  $E(R) = 47,08R - \frac{0,3766}{R} \text{ кВ/м}$ ,  $\varphi(R) = -23,54R - \frac{0,3766}{R^2} + 4,708 \text{ кВ}$ , где  $R[\text{м}]$ .

**ЗАДАЧА 12.24.** Объёмный заряд с равномерной объёмной плотностью  $\rho = 10^{-4} \text{ Кл/м}^3$  распределён в диэлектрике ( $\epsilon=4$ ) между двумя шарами с размерами  $R_1 = 4 \text{ см}$ ,  $R_2 = 10 \text{ см}$  (рис. 12.26). Шары подключены к источнику постоянного напряжения  $U = 40 \text{ кВ}$ . Оболочка заземлена. Определить заряд  $q$ .



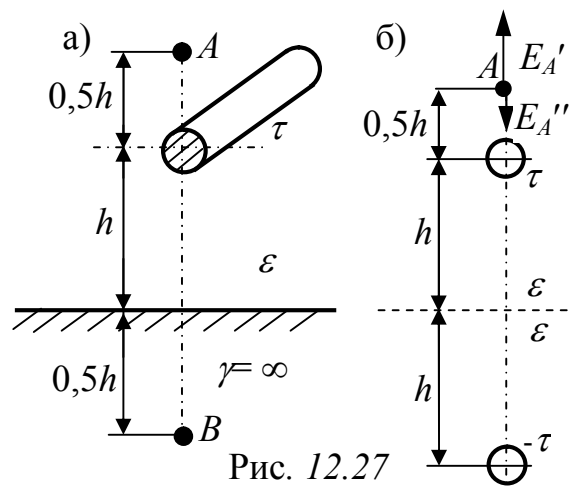
*Ответ.*  $q = 1,096 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ .

### 23.3 Расчёт поля методом зеркальных изображений

**ЗАДАЧА 12.25.** Проводник с зарядом  $\tau = 10^{-8} \text{ Кл/м}$  создаёт электростатическое поле вблизи металлической поверхности. Определить потенциал проводника, а также напряжённость и потенциал поля в точках A и B (рис. 12.27, а), если  $r_0 = 2 \text{ см}$ ;  $h = 4 \text{ м}$ ;  $\epsilon = 1$ .

#### Решение

Электростатическое поле в точке B (внутри металла) отсутствует, поэтому  $E_B = 0, \varphi_B = 0$ . Для расчёта поля в верхней полуплоскости рисунка применим метод зеркальных изображений. Коэффициент неполного отражения от идеального проводника равен -1. Расчетный рисунок принимает вид рис. 12.27, б, где два проводника с зарядами  $\tau$  и  $-\tau$  расположены в однородной среде с проницаемостью  $\epsilon$ . Далее применяем принцип наложения.



Напряжённость и потенциал от одной заряженной оси в однородной среде определяются в соответствии с формулами (12.5) и (12.10, а):

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad \varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{r}.$$

Как видно из рис. 12.27,б, результирующая напряженность в точке  $A$  равна разности напряженностей от двух проводников. Таким образом, искомая напряженность в точке  $A$ :

$$E_A = E_A' - E_A'' = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 0,5h} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 2,5h} = \frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \left( \frac{1}{0,5 \cdot 4} - \frac{1}{2,5 \cdot 4} \right) = 71,93 \text{ В/м}.$$

Потенциалы точки  $A$  и точки на поверхности проводника (потенциал проводника) определяются выражениями:

$$\varphi_A = \varphi_A' + \varphi_A'' = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{h}{0,5h} - \ln \frac{h}{2,5h} \right) = \frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln 5 = 290 \text{ В};$$

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{h}{r_0} - \ln \frac{h}{2h} \right) = \frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{2 \cdot 4}{0,02} = 1078 \text{ В}.$$

**ЗАДАЧА 12.26.** Между проводником радиусом  $r_0 = 1 \text{ см}$ , расположенным в воздухе параллельно земле на высоте  $h = 1 \text{ м}$ , и землёй действует напряжение  $U = 1000 \text{ В}$  (рис. 12.28,а).

Определить ёмкость  $C_0$ , энергию поля  $W_0$  и силу  $F_0$ , действующую на единицу длины проводника.

### Решение

В соответствии с методом зеркальных изображений составляем расчётный рис. 12.28,б. Тогда потенциал проводника (см. задачу 12.25)

$$\varphi = U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{r_0}.$$

Отсюда заряд провода

$$\tau = \frac{U \cdot 2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{r_0}} = \frac{1000 \cdot 2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{\ln \frac{2}{0,01}} = 10,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}.$$

Ёмкость единицы длины линии  $C_0 = \frac{\tau}{U} = 10,5 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} = 10,5 \text{ пФ/м}$ .

Напряжённость поля, созданного зарядом  $-\tau$  в месте расположения заряда  $\tau$  в соответствии с (12.5)

$$E' = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \cdot 2h} = \frac{10,5 \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2} = 94,4 \text{ В/м}.$$

Сила, с которой провод притягивается к земле

$$F_0 = \tau E' = 10,5 \cdot 10^{-9} \cdot 94,4 = 0,991 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}.$$

Энергия единицы длины линии

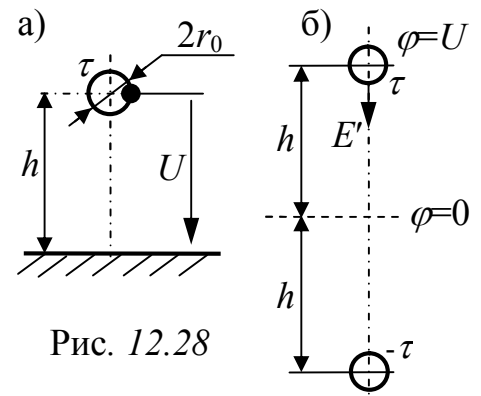


Рис. 12.28

$$W_0 = \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{1}{2} 10,5 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6 = 5,25 \cdot 10^{-6} \text{ Дж/м.}$$

**ЗАДАЧА 12.27.** Между металлическим шаром радиуса  $r_0 = 10 \text{ см}$  проводящей поверхностью (рис. 12.29) действует напряжение  $U = 500 \text{ кВ}$ . Определить поверхностную плотность индуцированного заряда в точках  $A$  и  $B$ , если  $h = 4 \text{ м}$ .

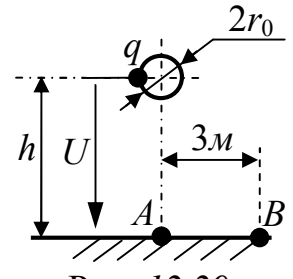
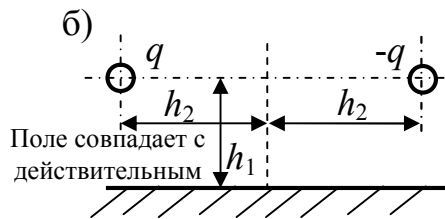
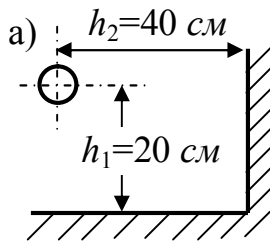


Рис. 12.29

$$\text{Ответы. } q = \frac{4\pi\epsilon_0 U}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h}}; E_A = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h^2}; \sigma_A = D_A = \epsilon_0 E_A = 5,6 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2;$$

$$\sigma_B = D_B = \epsilon_0 E_B = \frac{q}{2\pi(h^2 + 3^2)} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + 3^2}} = 2,87 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2.$$

**ЗАДАЧА 12.28.** В прямом углу, образованном двумя плоскостями проводящей поверхности в воздухе находится шар радиусом  $R_0 = 1 \text{ см}$  с зарядом  $q = 10^{-10} \text{ Кл}$  (рис. 12.30, а). Определить потенциал шара по отношению к проводящей поверхности, ёмкость между шаром и проводящей средой, направление и величину силы, действующей на шар.



Поле совпадает с действительным

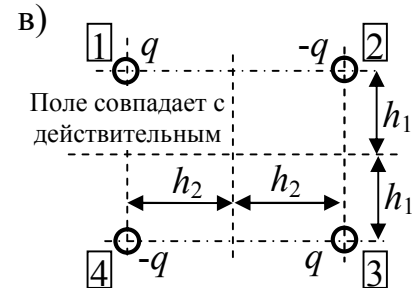


Рис. 12.30

### Решение

В соответствии с методом зеркальных изображений после зеркального отражения относительно правой границы получим рис. 12.30, б. После вторичного отражения относительно нижней границы получим поле четырёх шаров в однородной среде (рис. 12.30, в). Применяя принцип наложения (см. задачи 12.2 и 12.3), получаем

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (R_0^{-1} - (2h_2)^{-1} + (\sqrt{(2h_1)^2 + (2h_2)^2})^{-1} - (2h_1)^{-1}) = 87,55 \text{ В,}$$

$$C = q / \varphi_1 = 1,14 \text{ нФ.}$$

Силу, действующую на шар, можно определить через напряжённость, создаваемую в месте расположения шара тремя остальными зарядами. Но принцип наложения здесь нужно применять в векторной форме (рис. 12.31). Для удобства разложим векторы напряжённостей на горизонтальную ( $x$ ) и вертикальную ( $y$ ) составляющие.

$$E_{2y} = 0, \quad E_{2x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2h_2)^2},$$

$$E_{3x} = \frac{-q \cdot \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 [(2h_1)^2 + (2h_2)^2]}, \quad E_{3y} = \frac{q \cdot \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 [(2h_1)^2 + (2h_2)^2]},$$

где  $\cos \alpha = \frac{2h_2}{\sqrt{(2h_1)^2 + (2h_2)^2}} = 0,8944; \quad \sin \alpha = 0,4473.$

$$E_{4x} = 0, \quad E_{4y} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2h_1)^2},$$

$$E_x = E_{2x} + E_{3x} + E_{4x} = 0,40 \text{ В/м}; \quad E_y = E_{2y} + E_{3y} + E_{4y} = -5,12 \text{ В/м};$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 5,13 \text{ В/м}; \quad F = q \cdot E = 10^{-10} \cdot 5,13 = 5,13 \cdot 10^{-10} \text{ Н}.$$

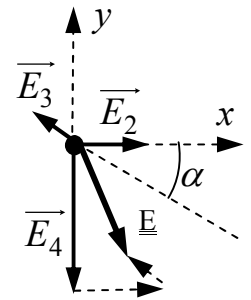


Рис. 12.31

**Примечание.** Если бы вместо шара находился заряженный проводник (цилиндр), параллельный углу, то можно было бы ограничиться лишь первым зеркальным отображением, а затем воспользоваться группами формул Максвелла для двухпроводной линии.

**ЗАДАЧА 12.29.** Провода двухпроводной линии  $U = 500 \text{ В}$  находятся в разных диэлектриках, как показано на рис. 12.32. Рассчитать заряд на проводе линии и её ёмкость. Геометрические размеры и свойства сред:

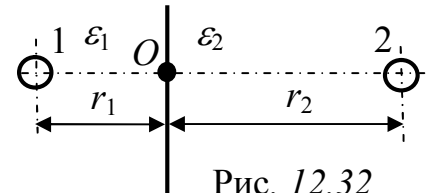


Рис. 12.32

$$r_0 = 0,2 \text{ см}, \quad r_1 = 20 \text{ см}, \quad r_2 = 40 \text{ см}, \quad \epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_2 = 2.$$

### Решение

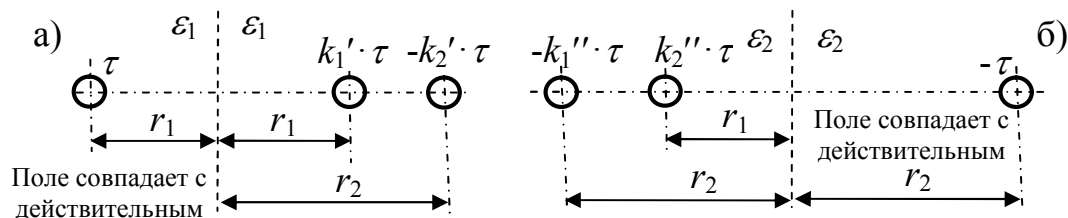


Рис.12.33

Пусть левый провод имеет заряд  $\tau$ , тогда правый –  $-\tau$ . Поскольку расчет поля нужно выполнить в обеих средах, расчет выполним, используя два рисунка (для каждой среды) – рис. 12.33,а и б. Коэффициенты неполного отражения:

$$k_1' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = -0,333; \quad k_2' = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = 0,667;$$

$$k_1'' = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = 0,333; \quad k_2'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} = 1,333.$$

Потенциал точки  $O$  (рис. 12.32) будем считать равным нулю. Потенциал первого провода вычислим по рис. 12.33,а в соответствии с принципом наложения с учётом (12.10,а):

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1\epsilon_0} \left( \ln \frac{r_1}{r_0} + k_1' \cdot \ln \frac{r_1}{2r_1} - k_2' \cdot \ln \frac{r_2}{r_1 + r_2} \right);$$

аналогично потенциал второго провода – по рис. 12.33,б:

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2\epsilon_0} \left( -\ln \frac{r_2}{r_0} - k_1'' \cdot \ln \frac{r_2}{2r_2} + k_2'' \cdot \ln \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right).$$

Напряжение между проводами

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[ \epsilon_1^{-1} \cdot \left( \ln \frac{r_1}{r_0} + k_1' \cdot \ln \frac{r_1}{2r_1} - k_2' \cdot \ln \frac{r_2}{r_1 + r_2} \right) - \right. \\ \left. - \epsilon_2^{-1} \cdot \left( -\ln \frac{r_2}{r_0} - k_1'' \cdot \ln \frac{r_2}{2r_2} + k_2'' \cdot \ln \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right) \right] = \tau 15,06 \cdot 10^{10}.$$

Отсюда  $\tau = U / 15,06 \cdot 10^{10} = 0,332 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}.$

Ёмкость линии  $C_0 = \tau / U = 6,64 \text{ нФ/м}.$

### 23.4 Численные методы расчета поля

**ЗАДАЧА** 12.30. Линия передачи (рис. 12.34) состоит из трёх проводов радиуса  $r_0 = 0,6 \text{ см}.$  Высота подвеса проводов  $h_1 = h_3 = 6 \text{ м}, h_2 = 5,2 \text{ м}.$  Расстояния между проводами по горизонтали  $d_{12} = 2 \text{ м}, d_{23} = 1,6 \text{ м}.$  Напряжения между проводами  $U_{12} = 60 \text{ кВ}, U_{23} = 40 \text{ кВ}.$  Определить потенциал и заряд каждого из проводов.

#### Решение

Определяем расстояния между проводами, а также между проводами и их зеркальными изображениями (рис. 12.34):

$$a_{12} = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + d_{12}^2} = \sqrt{(6 - 5,2)^2 + 2^2} = 2,13 \text{ м},$$

$$a_{13} = \sqrt{(h_1 - h_3)^2 + d_{13}^2} = \sqrt{(6 - 6)^2 + 3,6^2} = 3,6 \text{ м},$$

$$a_{23} = \sqrt{(h_2 - h_3)^2 + d_{23}^2} = \sqrt{(5,2 - 6)^2 + 1,6^2} = 1,79 \text{ м},$$

$$b_{12} = \sqrt{(h_1 + h_2)^2 + d_{12}^2} = \sqrt{(6 + 5,2)^2 + 2^2} = 11,4 \text{ м},$$

$$b_{13} = \sqrt{(h_1 + h_3)^2 + d_{13}^2} = \sqrt{(6 + 6)^2 + 3,6^2} = 12,5 \text{ м},$$

$$b_{23} = \sqrt{(h_2 + h_3)^2 + d_{23}^2} = \sqrt{(5,2 + 6)^2 + 1,6^2} = 11,3 \text{ м}.$$

Вычисляем потенциальные коэффициенты (на единицу длины):

$$\alpha_{11} = \alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{r_0} = \frac{1}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{2 \cdot 6}{0,006} = 13,66 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф},$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_2}{r_0} = \frac{1}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{2 \cdot 5,2}{0,006} = 13,41 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф},$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{1}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{11,4}{2,13} = 3,02 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф},$$

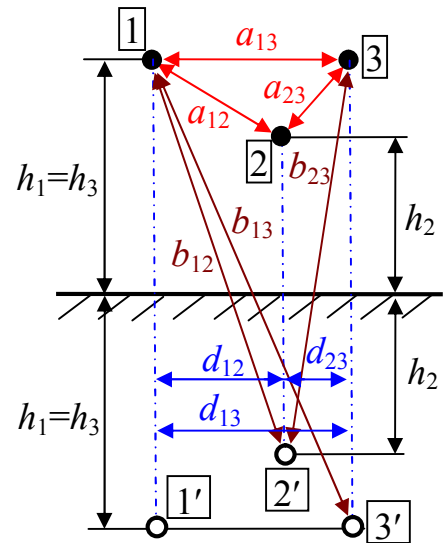


Рис. 12.34

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{13}}{a_{13}} = \frac{1}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{12,5}{3,6} = 2,24 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф},$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b_{23}}{a_{23}} = \frac{1}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{11,3}{1,79} = 3,32 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}.$$

Для определения зарядов проводов используем первую группу формул Максвелла: 
$$\begin{cases} \varphi_1 = \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12} + \tau_3 \alpha_{13}, \\ \varphi_2 = \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22} + \tau_3 \alpha_{23}, \\ \varphi_3 = \tau_1 \alpha_{31} + \tau_2 \alpha_{32} + \tau_3 \alpha_{33}. \end{cases}$$

Недостающие для определения шести неизвестных величин уравнения записываем, используя дополнительные условия задачи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12}, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = U_{23},$$

и так как провода образуют изолированную, не связанную с землёй систему, то  $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$ .

Решая полученную систему из шести уравнений, находим искомое:

$$\tau_1 = 0,466 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}, \quad \tau_2 = -0,058 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}, \quad \tau_3 = -0,408 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м},$$

$$\varphi_1 = 52,8 \text{ кВ}, \quad \varphi_2 = -7,2 \text{ кВ}, \quad \varphi_3 = -47,2 \text{ кВ}.$$

**ЗАДАЧА 12.31.** Решить задачу 12.26, используя группы формул Максвелла.

*Ответы.*  $\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{r_0} = 9,522 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}; \quad \varphi_1 = U = 1000 \text{ В};$

$$\tau_1 = \varphi_1 / \alpha_{11} = 1,05 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}; \quad C_0 = C_{11} = 10,5 \text{ нФ/м}.$$

**ЗАДАЧА 12.32.** Определить частичные и рабочую ( $C_0$ ) ёмкости одного метра двухпроводной воздушной линии электропередачи (рис. 12.35), если  $h=d=2 \text{ м}$ ,  $r_0=1 \text{ см}$ .

*Ответы.*  $a_{12} = d = 2 \text{ м},$

$$b_{12} = \sqrt{d^2 + (2h)^2} = 2\sqrt{5} \text{ м};$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 10,77 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф},$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\beta_{11} = \beta_{22} = 9,46 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м},$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = -1,27 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$C_{11} = C_{22} = 8,19 \text{ нФ/м}, \quad C_{12} = C_{21} = 1,27 \text{ нФ/м};$$

$$C_0 = 5,37 \text{ нФ/м}.$$

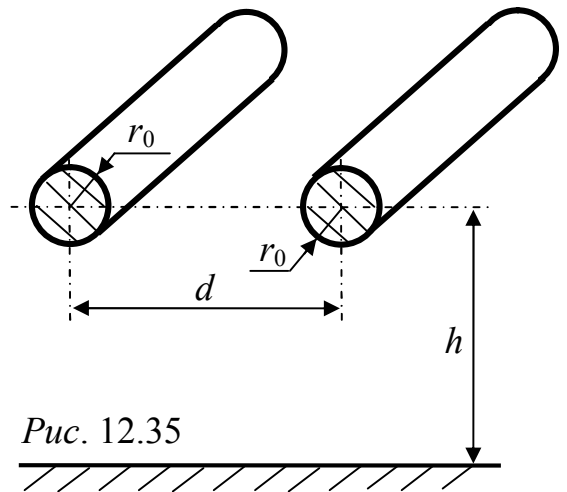


Рис. 12.35

**ЗАДАЧА 12.33.** Определить частичные ёмкости трёхпроводной воздушной линии электропередачи (рис. 12.36), если  $r_0=1 \text{ см}$ ,  $h=6 \text{ м}$ ,  $d=2 \text{ м}$ .

*Ответы.*  $a_{12} = a_{13} = a_{23} = d = 2 \text{ м},$

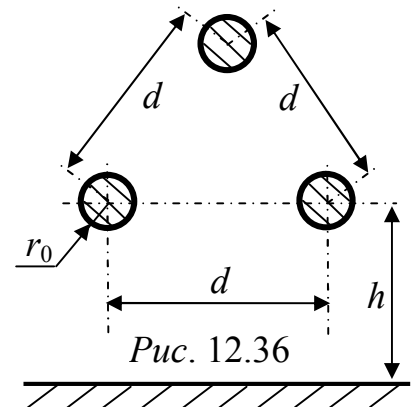


Рис. 12.36

$$b_{12}=b_{23}=\sqrt{(0,5d)^2+(2h+0,5d\sqrt{3})^2}=13,77\text{ м},$$

$$b_{13}=\sqrt{d^2+(2h)^2}=12,17\text{ м},$$

$$\alpha_{11}=\alpha_{33}=12,76\cdot 10^{10}\text{ м/Ф}, \alpha_{22}=13,21\cdot 10^{10}\text{ м/Ф},$$

$$\alpha_{12}=\alpha_{23}=3,47\cdot 10^{10}\text{ м/Ф}, \alpha_{13}=3,25\cdot 10^{10}\text{ м/Ф},$$

$$\beta_{11}=\beta_{33}=8,783\cdot 10^{-12}\text{ Ф/м}, \beta_{22}=8,54\cdot 10^{-12}\text{ Ф/м},$$

$$\beta_{12}=\beta_{23}=-1,852\cdot 10^{-12}\text{ Ф/м}, \beta_{13}=-1,732\cdot 10^{-12}\text{ Ф/м}, C_{11}=C_{33}=5,2\text{ нФ/м},$$

$$C_{22}=4,836\text{ нФ/м}, C_{12}=C_{23}=1,852\text{ нФ/м}, C_{13}=1,732\text{ нФ/м}.$$

**ЗАДАЧА 12.34.** Собственные и частичные ёмкости трёхжильного кабеля, соответственно, равны:  $C_{11}=C_{22}=C_{33}=0,064\text{ мкФ/км}$ ,  $C_{12}=C_{23}=C_{13}=0,076\text{ мкФ/км}$ . При испытании кабеля в лаборатории одна из жил кабеля была заземлена, вторая имела потенциал  $\varphi_2=2\text{ кВ}$ , третья —  $\varphi_3=-3\text{ кВ}$ . Оболочка кабеля не заземлена.

Найти потенциал оболочки и заряды жил.

### Решение

В соответствии с условием задачи составим схему рис. 12.37, для которой на основании III группы формул Максвелла

$$\begin{cases} \tau_1 = \varphi_1' C_{11} + U_{12} C_{12} + U_{13} C_{13}, \\ \tau_2 = U_{21} C_{21} + \varphi_2' C_{22} + U_{23} C_{23}, \\ \tau_3 = U_{31} C_{31} + U_{32} C_{32} + \varphi_3' C_{33}, \end{cases}$$

где потенциалы жил определяются по отношению к оболочке.

Если оболочку рассматривать в виде четвёртого проводника, то можно составить уравнение и для неё с учётом того, что она не соединена с землей а, значит, не несёт заряда:  $\tau_4 = (\varphi_4 - \varphi_1) C_{11} + (\varphi_4 - \varphi_2) C_{22} + (\varphi_4 - \varphi_3) C_{33} = 0$ .

Здесь потенциалы определяются по отношению к земле.

Так как  $C_{11}=C_{22}=C_{33}$  и  $\varphi_1=0$ ,  $\varphi_2=2\text{ кВ}$ ,  $\varphi_3=-3\text{ кВ}$ , то

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{3} = \frac{2000 - 3000}{3} = -333\text{ В}.$$

Возвращаемся к системе уравнений и, зная, что

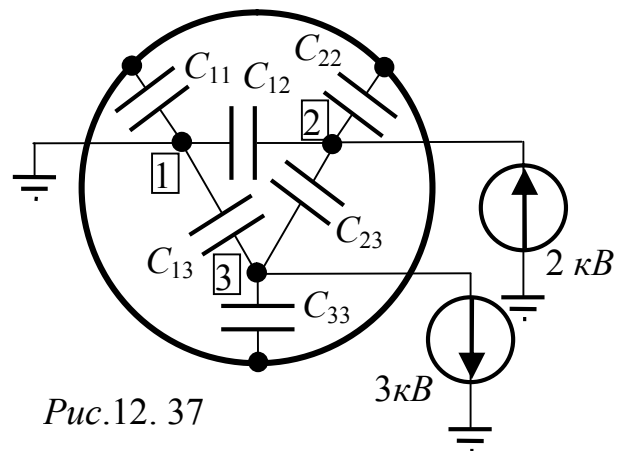
$$\varphi_1' = \varphi_1 - \varphi_4 = 333\text{ В}, U_{21} = -U_{12} = 2000\text{ В}, U_{13} = -U_{31} = 3000\text{ В},$$

$$U_{23} = -U_{32} = 5000\text{ В}, \varphi_2' = \varphi_2 - \varphi_4 = 2333\text{ В}, \varphi_3' = \varphi_3 - \varphi_4 = -2667\text{ В},$$

$$\text{получаем } \tau_1 = (333 \cdot 0,064 - 2000 \cdot 0,076 + 3000 \cdot 0,076) \cdot 10^{-6} = 97 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/км},$$

$$\tau_2 = (2000 \cdot 0,076 + 2333 \cdot 0,064 + 5000 \cdot 0,076) \cdot 10^{-6} = 681 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/км},$$

$$\tau_3 = (-3000 \cdot 0,076 - 5000 \cdot 0,076 - 2667 \cdot 0,064) \cdot 10^{-6} = -779 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/км}.$$



**ЗАДАЧА 12.35.** Рассчитать частичную и рабочую емкости двухпроводной экранированной линии (рис. 12.38), если:

$$r_0 = 2 \text{ мм}, a = 4 \text{ см}, r_1 = 10 \text{ см}, \varepsilon = 4.$$

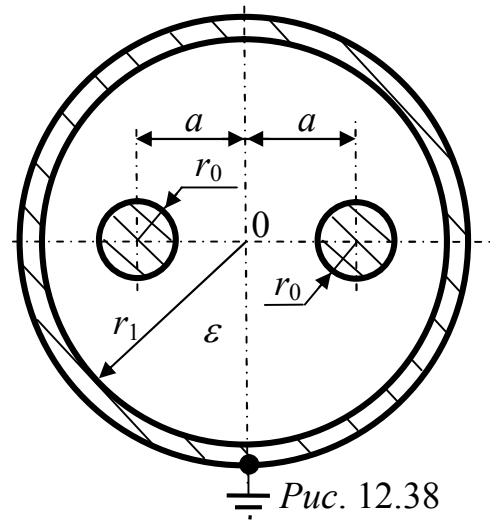
При расчете принять, что оболочка (экран) заземлена.

### Решение

Примем, что под действием источника напряжения  $U$ , подключенного к проводам, произошло разделение зарядов между первым (левым) проводом и вторым (правым). Тогда первый провод несет заряд  $\tau_1 = \tau$  на единицу длины линии, а второй  $-\tau_2 = -\tau$ .

Для дальнейшего расчета воспользуемся методом зеркальных изображений для оси, расположенной внутри цилиндра.

Расчетная схема для поля внутри цилиндра имеет вид рис. 12.39, причём  $a \cdot b = r_1^2$ .



$$\text{В нашем примере } b = \frac{r_1^2}{a} = \frac{10^2}{4} = 25 \text{ см.}$$

Первая группа формул Максвелла для системы заряженных тел, расположенных вблизи цилиндрической проводящей поверхности:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12}, \\ \varphi_2 = \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22}, \end{cases}$$

$$\text{где } \alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{b-a}{r_0} = \frac{10^{12}}{2\pi \cdot 4 \cdot 8,85} \ln \frac{25-4}{0,2} = 2,091 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф},$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{b+a}{2a} = \frac{10^{12}}{2\pi \cdot 4 \cdot 8,85} \ln \frac{25+4}{2 \cdot 4} = 0,579 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}.$$

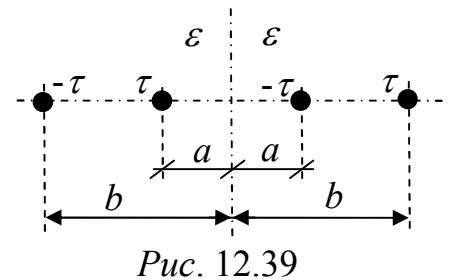
$$\text{Вторая группа формул Максвелла: } \begin{cases} \tau_1 = \beta_{11} \varphi_1 + \beta_{12} \varphi_2, \\ \tau_2 = \beta_{21} \varphi_1 + \beta_{22} \varphi_2, \end{cases}$$

$$\text{где } \beta_{11} = \beta_{22} = \frac{\alpha_{22}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} = \frac{2,091 \cdot 10^{-10}}{2,091^2 - 0,579^2} = 0,518 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м},$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{-\alpha_{21}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-0,579 \cdot 10^{-10}}{2,091^2 - 0,579^2} = -0,143 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м}.$$

$$\text{Третья группа формул Максвелла: } \begin{cases} \tau_1 = U_{10} C_{11} + U_{12} C_{12}, \\ \tau_2 = U_{21} C_{21} + U_{20} C_{22}, \end{cases}$$

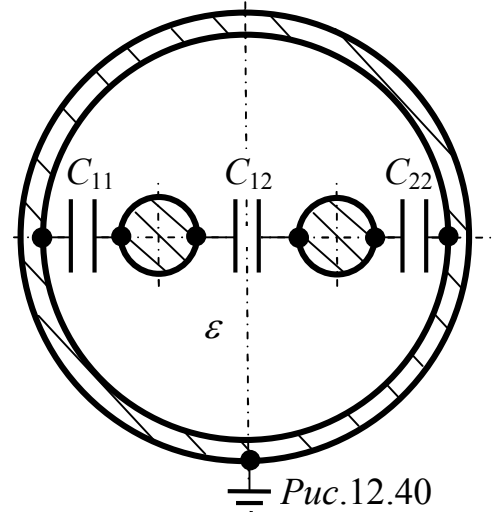
$$\text{где } C_{11} = C_{22} = \beta_{11} + \beta_{12} = 0,375 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м}, \quad C_{12} = C_{21} = -\beta_{12} = 0,143 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м}.$$



Частичные емкости линии показаны на рис. 12.40.

Рабочая емкость двухпроводной экранированной линии на единицу длины:

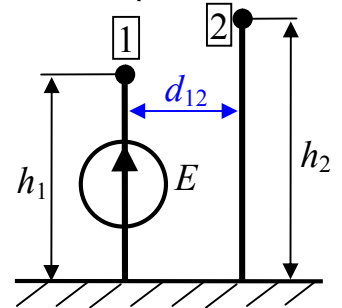
$$C_0 = C_{12} + \frac{C_{11} \cdot C_{22}}{C_{11} + C_{22}} = (0,143 + \frac{0,375}{2}) \cdot 10^{-10} = 0,331 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м.}$$



**ЗАДАЧА 12.36.** В системе из двух проводников (рис. 12.41), расположенных в воздухе вблизи проводящей поверхности, действует источник ЭДС  $E = 127 \text{ В}$ , причём второй проводник соединён с землёй. Геометрические размеры:  $r_0 = 6 \text{ мм}$ ,  $d_{12} = 1 \text{ м}$ ,  $h_1 = 3 \text{ м}$ ,  $h_2 = 4 \text{ м}$ .

Определить заряды проводов.

*Ответы.*  $a_{12} = \sqrt{2} \text{ м}$ ,  $b_{12} = 5\sqrt{2} \text{ м}$ ,  
 $\alpha_{11} = 12,4 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}$ ,  $\alpha_{22} = 12,9 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}$ ,  
 $\alpha_{12} = 2,9 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}$ ,  $\varphi_1 = 127 \text{ В}$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  
 $\tau_1 = 0,852 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}$ ,  $\tau_2 = -0,191 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}$ .



**ЗАДАЧА 12.37.** Определить потенциалы и заряды системы проводов, изображённой на рис. 12.42, где рубильники 1 и 2 замкнуты, а 3 – разомкнут,  $U = 10 \text{ кВ}$ , радиус проводов  $r_0 = 5 \text{ мм}$ .

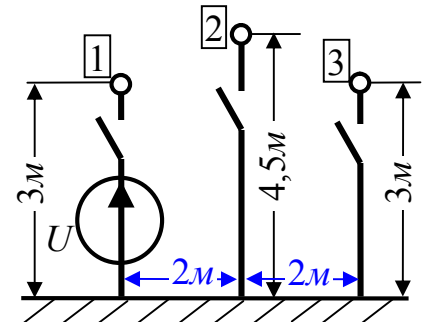
Как изменится решение, если сначала провод 2 отключается от земли, затем провод 1 отключается от источника и, наконец, провод 3 соединяется с землёй.

*Ответы.* До переключений  $\varphi_1 = 10 \text{ кВ}$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\varphi_3 = 0,605 \text{ кВ}$ ,

$\tau_1 = 80 \text{ мкКл/км}$ ,  $\tau_2 = -12 \text{ мкКл/км}$ ,  $\tau_3 = 0$ ,  $\alpha_{11} = \alpha_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}$ ,  
 $\alpha_{22} = 12,3 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}$ ,  $\alpha_{12} = \alpha_{23} = 0,2 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}$ ,  $\alpha_{13} = 0,106 \cdot 10^{10} \text{ м/Ф}$ .

После переключений  $\tau_1' = \tau_1$ ,  $\tau_2' = \tau_2$ ,  $\tau_3' = 0$ . Далее из первой группы формул Максвелла с теми же потенциальными коэффициентами определяем:

$\varphi_1' = 9950 \text{ В}$ ,  $\varphi_2' = -88 \text{ В}$ ,  $\tau_3' = -4,76 \text{ мкКл/км}$ .



Дополнительно на тему подраздела 12.5 см. задачу 12.48, решенную с помощью ПЭВМ в системе MathCAD.

## СИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛЯ В СРЕДАХ С НЕОДНОРОДНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ ( $\epsilon \neq \text{const}$ )

В этих средах относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  зависит от координат пространства, например,  $\epsilon = \epsilon(x)$ . Так как

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \text{ то } \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} (\epsilon - 1), \text{ причём } \rho_{\text{св}} = -\text{div } \vec{P}.$$

Часто диэлектрическая проницаемость задаётся с помощью зависимости  $D(E)$  или  $P(E)$ , представленной графически или аналитически.

**ЗАДАЧА 12.38.** Диэлектрик плоского конденсатора неоднородный,  $\varepsilon = \varepsilon(x)$ , зависимость для вектора поляризации  $P = P_x = (a + bx^2)P_0$ , где  $a = 1, b = 0,05 \text{ см}^{-2}$ ,  $P_0 = 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/см}^2$ .

Определить плотность связанного заряда.

**Решение**

$$\rho_{св} = -\text{div } \vec{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} = -2bxP_0 = -2 \cdot 0,05 \cdot x \cdot 3,5 \cdot 10^{-10} = -0,35 \cdot 10^{-10} x \text{ Кл/см}^3, \text{ где } x [\text{см}].$$

**ЗАДАЧА 12.39.** Плоский конденсатор заполнен неоднородным диэлектриком  $\varepsilon(x) = 4d/(d+x)$ . Пластины конденсатора подключены к источнику постоянного напряжения  $U = 1 \text{ кВ}$ .

Определить зависимости от координаты  $x$  напряжённости поля и значения вектора поляризации. Найти ёмкость и заряд конденсатора при заданном напряжении. Расстояние между пластинами  $d = 0,2 \text{ см}$ , их площадь  $S = 4 \text{ см}^2$ .

**Решение**

$$\text{Из граничного условия получаем } D = \sigma = \frac{q}{S} = \varepsilon \varepsilon_0 E,$$

$$\text{откуда } E(x) = \frac{D}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0 S} = \frac{q(d+x)}{\varepsilon_0 S \cdot 4d}.$$

$$\text{Напряжение } U = \int_0^d E dx = \frac{q}{\varepsilon_0 S \cdot 4d} \left( dx + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^d = \frac{3qd}{8\varepsilon_0 S}.$$

Ёмкость конденсатора

$$C = \frac{q}{U} = \frac{8\varepsilon_0 S}{3d} = \frac{8 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 4}{3 \cdot 0,2} = 4,75 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 4,75 \text{ пФ}.$$

Заряд и напряжённость поля

$$q = \frac{8\varepsilon_0 S U}{3d} = C U = 4,75 \cdot 10^{-12} \cdot 1000 = 4,75 \cdot 10^{-9} \text{ Кл},$$

$$E(x) = \frac{8\varepsilon_0 S U (d+x)}{3d\varepsilon_0 S 4d} = \frac{2U(d+x)}{3d^2} = 16,7 \cdot (0,2 + x) \text{ кВ/см}, \text{ где } x [\text{см}].$$

Вектор поляризации

$$P(x) = \varepsilon_0 E(\varepsilon - 1) = \frac{2U\varepsilon_0(d+x)}{3d^2} \left( \frac{4d}{d+x} - 1 \right) = \frac{2U\varepsilon_0}{3d^2} (3d - x) = 14,75 \cdot 10^{-10} \cdot (0,6 - x) \text{ Кл/см}^2.$$

Плотность связанного заряда

$$\rho_{св} = -\text{div } \vec{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} = 14,75 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/см}^3.$$

**ЗАДАЧА 12.40.** Между жилой коаксиального кабеля радиусом  $r_1 = 1 \text{ см}$  оболочкой с внутренним радиусом  $r_2 = 4 \text{ см}$  находится диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = \frac{A}{r^2}$ , где  $A = 16 \text{ см}^2, r[\text{см}]$ . При постоянном напряжении  $U = 1 \text{ кВ}$  определить напряженность поля, смещение, поляризацию и связанный объемный заряд, а также ёмкость на единицу длины кабеля.

### Решение

В соответствии с (12.5)  $D = \frac{\tau}{2\pi r}$ , тогда напряженность поля

$$E(r) = \frac{D}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 r \frac{A}{r^2}} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 A} r. \quad (*)$$

$$\text{Напряжение } U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{4\pi \varepsilon_0 A} (r_2^2 - r_1^2), \text{ откуда } \tau = \frac{U \cdot 4\pi \varepsilon_0 A}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (**)$$

$$\text{ёмкость } C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{4\pi \varepsilon_0 A}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 16}{4^2 - 1^2} = 1,19 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/см} = 0,119 \text{ нФ/м}.$$

Подставляя (\*\*) в (\*), находим напряженность поля

$$E(r) = \frac{2U}{r_2^2 - r_1^2} r = 133,3r \text{ В/см, где } r[\text{см}].$$

Электрическое смещение

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E = \frac{16}{r^2} \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 133,3r = \frac{188,8}{r} \cdot 10^{-12} \text{ Кл/см}^2.$$

Поляризация

$$P = \varepsilon_0 E (\varepsilon - 1) = 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 133,3r \left( \frac{16}{r^2} - 1 \right) = \left( \frac{188,8}{r} - 11,8r \right) \cdot 10^{-12} \text{ Кл/см}^2.$$

Объёмная плотность связанного заряда

$$\rho_{св} = -\text{div } \vec{P} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(188,8 - 11,8r^2) \cdot 10^{-12}] = 23,6 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/см}^3.$$

**ЗАДАЧА 12.41.** У цилиндрического конденсатора радиус жилы  $r_1 = 1 \text{ см}$ , внутренний радиус оболочки  $r_2 = 5 \text{ см}$ . Пространство между жилой и оболочкой заполнено сегнетоэлектриком, для которого зависимость модуля напряженности от модуля электрического смещения определяется выражением  $E = 10^{15} (0,45 D^2 + 0,2 \cdot 10^{-6} D)$ , где  $E[\text{В/см}]$ ,  $D[\text{Кл/см}^2]$ .

Конденсатор включен на постоянное напряжение  $U = 200 \text{ В}$ .

Пренебрегая краевым эффектом и приняв потенциал жилы нулевым, найти зависимости  $E(r)$  и  $\varphi(r)$ . Вычислить ёмкость единицы длины конденсатора.

### Решение

По (12.5)  $D = \frac{\tau}{2\pi r}$ , тогда

$$E(r) = 10^{15} (0,45D^2 + 0,2 \cdot 10^{-6} D) = 10^{15} \left( 0,45 \cdot \frac{\tau^2}{4\pi^2 r^2} + 0,2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\tau}{2\pi r} \right). \quad (*)$$

Приложенное напряжение

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = 10^{15} \left[ \frac{0,45\tau^2}{4\pi^2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + 0,2 \cdot 10^{-6} \frac{\tau}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \right],$$

$$2 \cdot 10^{-13} = \tau^2 \cdot 9,12 \cdot 10^{-3} + \tau \cdot 0,0512 \cdot 10^{-6}.$$

Из этого уравнения  $\tau = 0,2653 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/см}$ .

Подставив в (\*) значение  $\tau$ , находим

$$E(r) = \frac{80,23}{r^2} + \frac{84,45}{r} \text{ В/см}, \quad \varphi(r) = - \int E(r) dr = \frac{80,23}{r} - 84,45 \ln(r) + A.$$

Примем, что  $\varphi = 0$  при  $r = r_1 = 1 \text{ см}$ , тогда  $0 = 80,23 - 84,45 \ln(r_1) + A$ ;

$$A = 84,45 \ln(r_1) - 80,23; \quad \varphi(r) = \frac{80,23}{r} + 84,45 \ln \frac{1}{r} - 80,23 \text{ В}.$$

Емкость конденсатора  $C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{0,2653 \cdot 10^{-5}}{200} = 1,327 \cdot 10^{-8} \text{ Ф/см}$ .

## ПРИМЕНЕНИЕ ПЭВМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

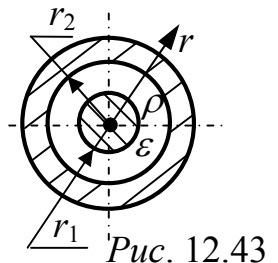
Применять ПЭВМ целесообразно для решения задач, требующих большого объема вычислительной работы. Ниже приведены решения некоторых подобных задач.

**ЗАДАЧА 12.42.** Решить задачу 12.17 с помощью ПЭВМ. Распечатку программы см. в Приложении к разделу 12.

**ЗАДАЧА 12.43.** Решить задачу 12.23 с помощью ПЭВМ. Распечатку программы см. в Приложении к разделу 12.

**ЗАДАЧА 12.44.** Решить задачу 12.24 с помощью ПЭВМ. Распечатку программы см. в Приложении к разделу 12.

**ЗАДАЧА 12.45.** В изоляции коаксиального кабеля (рис. 12.43) имеется равномерно распределенный заряд с объемной плотностью  $\rho = 10^{-10} \text{ Кл/м}^3$ . Внутренний и наружный радиусы диэлектрического слоя —  $r_1 = 1 \text{ см}$  и  $r_2 = 10 \text{ см}$ , длина  $l = 100 \text{ м}$ , относительная диэлектрическая проницаемость —  $\varepsilon = 4$ . определить запасенную в электрическом поле энергию.



### Решение

Задачу решаем, интегрируя уравнение Лапласа для области  $r_1 < r < r_2$ . Аналогично задаче 12.18 записываем:

$$\varphi(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0} r^2 + A_1 \ln(r) + A_2; \quad E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0} r - \frac{A_1}{r}.$$

Граничные условия:  $\varphi(r=r_2) = 0$ ,  $E(r=r_1) = 0$ . Решая полученную систему уравнений, находим постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ .

Запасённую в электрическом поле энергию можно найти двумя способами.

В первом способе воспользуемся формулой для энергии заряда  $dq$  слоя толщиной  $dr$ , расположенного на расстоянии  $r$  от оси:

$$dW = 0,5 dq \cdot \varphi = 0,5 \rho \cdot 2\pi r l \cdot dr \cdot \varphi,$$

$$W = \int_V dW = \int_{r_1}^{r_2} \rho \pi l \cdot \varphi(r) dr = 0,533 \text{ Дж.}$$

Во втором способе используем формулу для объёмной плотности энергии электростатического поля:  $w = 0,5 \varepsilon \varepsilon_0 E^2$ .

$$wdV = 0,5 \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \cdot 2\pi r l \cdot dr = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \cdot \pi r l \cdot dr,$$

$$W = \int_V wdV = \int_{r_1}^{r_2} \varepsilon \varepsilon_0 \pi r l \cdot (E(r))^2 dr = 0,533 \text{ Дж.}$$

MathCAD-программа и ответы приведены в Приложении к разделу 12.

*Примечание.* Ответы для потенциала и энергии в буквенном виде следующие:

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0} \left( -\frac{r^2}{2} + r_1^2 \ln \frac{r}{r_2} + \frac{r_2^2}{2} \right); \quad W = \frac{\rho^2 \pi l}{2\varepsilon\varepsilon_0} \left( \frac{3r_1^4 + r_2^4}{8} - 0,5r_1^2 r_2^2 - 0,5r_1^4 \ln \frac{r_1}{r_2} \right).$$

**ЗАДАЧА 12.46.** Решить задачу 12.12 с помощью ПЭВМ. Распечатку программы см. в приложении к разделу 12.

**ЗАДАЧА 12.47.** Между проводами двухпроводной линии электропередачи (рис. 12.44) действует напряжение  $U = 220 \text{ кВ}$ . Построить график зависимости от координаты  $x$  напряжённости поля на оси, соединяющей провода. Определить максимальную напряжённость поля, если  $d = 2 \text{ м}$ ,  $r_0 = 1 \text{ см}$ . Смещением электрических и геометрических осей пренебречь.

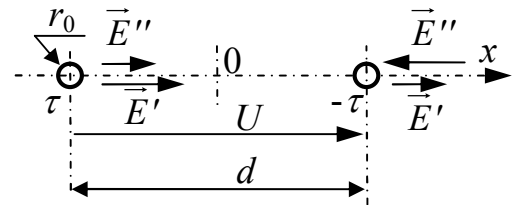


Рис. 12.44

### Решение

Напряжённость электростатического поля, создаваемого левым и правым проводами линии отдельно на оси  $x$ , в соответствии с (12.5):

$$E' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 |0,5d + x|}, \quad E'' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 |0,5d - x|}.$$

Формулы для потенциала любой точки в пространстве между проводами в соответствии с (12.10):

$$\varphi' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{0,5d + x}, \quad \varphi'' = \frac{-\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{0,5d - x}, \quad \varphi = \varphi' + \varphi'' = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{0,5d - x}{0,5d + x}.$$

Тогда напряжение между проводами

$$U = \varphi(x = -0,5d + r_0) - \varphi(x = 0,5d - r_0) =$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{0,5d - (-0,5d + r_0)}{0,5d + (-0,5d + r_0)} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{0,5d - (0,5d - r_0)}{0,5d + (0,5d - r_0)} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{d - r_0}{r_0} \right)^2 =$$

$$= \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{d - r_0}{r_0} \right).$$

Отсюда заряд провода линии  $\tau = \frac{\pi\epsilon_0 U}{\ln \frac{d - r_0}{r_0}}.$

Формула емкости двухпроводной линии на единицу длины

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d - r_0}{r_0}}.$$

В пространстве между проводами, как видно из рис. 12.44, напряжённости от действия отдельных проводов складываются, а снаружи – вычитаются, внутри проводов поле отсутствует:

при  $-0,5d + r_0 < x < 0,5d - r_0$   $E = E' + E''$ ,

при  $|x| > 0,5d + r_0$   $E = E' - E''$ .

Как видно из графика, приведенного в MathCAD-программе, максимальное значение напряжённости наблюдается в точке с координатой  $x = 0,5d - r_0$  (на поверхности провода):  $E_{\max} = E(x = 0,5d - r_0) = 21 \text{ кВ/см}$ .

MathCAD-программа и ответы приведены в Приложении к разделу 12.

**ЗАДАЧА 12.48.** В системе проводников, расположенных в воздухе вблизи проводящей поверхности, действуют два источника ЭДС, как показано на рис. 12.45:  $E_1 = 5 \text{ кВ}$ ,  $E_2 = 2 \text{ кВ}$ . Радиусы всех проводов одинаковы и равны  $r_0 = 10 \text{ мм}$ . Высота подвеса проводников  $h_1 = 5 \text{ м}$ ,  $h_2 = 7 \text{ м}$ ,  $h_3 = 6 \text{ м}$ . Расстояния между проводниками по горизонтали  $d_{12} = 3 \text{ м}$ ,  $d_{23} = 2 \text{ м}$ .

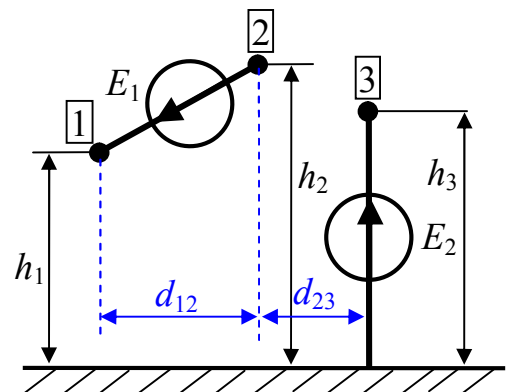


Рис. 12.45

Определить потенциал и заряд на единицу длины каждого проводника. Дополнительно вычислить частичные ёмкости системы проводников.