1.**Множества, комбинаторика, графы.**

1. **Множества.**

1.**Основные понятия.** а) Пусть A - некоторое множество (т.е. совокупность некоторых предметов, называемых элементами множества A.) Запись $x \in A$ означает, что x есть элемент множества A.

б) Если A состоит из n элементов (здесь n – натуральное число), то пишут $|A| = n$; если таковыми элементами являются $a_1, a_2, \cdots, a_n$, то пишут $A = \{a_1, \cdots a_n\}$. В рассматриваемом случае множество называется *конечным.* Если число n указанным свойством не существует, то множество называется *бесконечным.*

Если элементы множества можно перенумеровать числами $1, 2, \cdots$ (таким образом, A состоит из элементов $a_1, a_2, \cdots$, то пишут $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$.В этом случае множество A называют *счётным.*

в)Если A состоит из элементов, обладающих некоторым свойством P, то пишут $A = \{x : x \quad \text{обладает свойством} P\}$.

Пример 1: пусть N– множество всех натуральных (т.е. целых неотрицательных) чисел. Таким образом, $N = \{0, 1, \cdots\}$.

Пример 2: пусть A - множество всех натуральных чисел, дающих остаток 3 при делении на 5. В этом случае можем написать $A = \{x : x = 3 + 5k, k = 0, 1, \cdots\}$.

г) Пусть B есть множество, каждый элемент которого принадлежит множеству A. Тогда B называется подмножеством множества A; в этом случае пишут $B \subset A$.

д) Введём операции над множествами. Объединение множеств $A_1, \cdots, A_n$ определяются следующим образом: $A_1 \cup \cdots, \cup A_n$ – это множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств A_i. Пересечение указанных множеств – это совокупность элементов, принадлежащих каждому A_i. Разность множеств A, B определяется как множество таких элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B; обозначается через $A \setminus B$.

ж)В дальнейшем часто встречается сдедующаяя ситуация. Дано множество M, и рассматриваются всевозможные его подмножества. Само множество M называют в этой ситуаии *универсальным.* В этом случае разность $M \setminus A$ называется *дополнением* к множеству A и обозначается (для краткости) через $\overline{A}$.

и)Читатель должен вспомнить известные из школьного курса числовые множества (отрезок, интервал, полуотрезок, полуось). Пустое множество (множество без элементов) обозначается через $\emptyset$.

2. **Соотношения Моргана.** Пусть дано множество X и его подмножества $A_1, \cdots, A_n$. (Таким образом, X- это универсальное множество.) Покажем, что справедливо соотноошение

$$\overline{A_1 \cup \cdots, A_n} = \overline{A}_1 \cdots, \cap \overline{A}_n. \tag{1}$$

Для этого следует проверить, что если элемент x принадлежит левому множеству, то он принадлежит и правому множеству (и обратно). Итак, возьмём элемент $x \in \overline{A_1 \cup \cdots, A_n}$. Последняя запись означает, что не содержится в объединении A_i. Но тогда не входит ни в одно из множеств A_i. Тем самым, x ходит в каждое из множеств, $\overline{A}_1, \cdots, \overline{A}_n$. Итак, мы доказали, что если, $x \in \overline{A_1 \cup \cdots, A_n}$ то $\overline{A}_1 \cdots, \cap \overline{A}_n$. Таким

образом, $\overline{A_1 \cup \cdots, A_n} = \overline{A}_1 \cdots, \cap \overline{A}_n$, что и утверждалось.

Аналогично доказвается, что

$$\overline{A_1 \cap \cdots, A_n} = \overline{A}_1 \cdots, \cup \overline{A}_n. \tag{1}$$

(Читатель должен проделать это рассуждение.) Выведенные сейчас соотношения называются соотношенями Моргана.

Упражнение. Опишите множества $\overline{A} \cup (B \setminus C)$, где $A = [2, 6], B = (3, 4), C = (0, 1) \cup (-1, 1)$.

2. **функции, определённые на множестве.** Пусть дана функция f, определённые на множестве M. Её записывают в виде $y = f(x), x \in M$.

Вот важный пример. Пусть дано множество M. рассмотрим функции, определённые на нём. Во-первых, имеем функцию, тождественно равную 1 на M. Её можно обозначить просто через 1; но лучше писать 1_M. Далее, для любого подмножества $A \subset M$ определим функцию χ_A по правилу: $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A, \chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$. Её называют индикатором подмножества A. Отметим следующие простые факты. $1)\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B; 2)\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$. Выведем также формулу для индикатора объединения множеств . Начнём со случая двух множеств. Имеем $\chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} - \chi_{A_1 \cap A_2}$. Докажите это равенство. Случай нескольких множеств изучите по лекции.

3. Суммирование по множеству. Пусть множество X конечно (таким образом, $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$).Обозначим через $J(f; X)$ величину, равную сумме значений функции во всех точках $x \in X$; её можно также записать в виде $f(x_1) + \cdots f(x_n)$,а также в виде $\sum f(x), x \in X$. Величина $J(f; X)$ напоминает известное определение интеграла функции по некоторому множеству.

Для краткости можно писать $J(f)$ вместо $J(f; X)$; но при этом надо помнить, что мы ведём суммирование именно по множеству X.

Упражнение. Убедитесь, что выполняются привычне свойства линейности $J(af_1 + bf_2, X) = aJ(af_1, X) + bJ(bf_2, X)$ и аддитивности $J(f, A_1 \cup A_2 : X) = J(f, A_1 : X) + J(f, A_2; X$ при условии, что множества A_1, A_2 не пересекаются, а также равенство $J(\chi_A); X) = |A|$. Последнее равенство весьма важно: оно позволяет подсчитать число элементов множества A с применением суммы значений функции.

3.**Важная формула (формула включения- исключения).**

Возьмём, как и в разделе универсалное множество M и его подмножества. Наша цель - получить удобную формулу для величины $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$. Изучим сначала случай $n = 2$. Для этого возьмём равенство $\xi_{A_1 \cup A_2} = \xi_{A_1} + \xi_{A_2} - \xi_{A_1 \cap A_2}$ просуммируем по M функции, входящие в это равенство. При этом применим равенство $J(\chi_A); X) = |A|$, указанное выше. В итоге получаем искомую формулу. Её называют формулой включения- исключения. Для двух множеств она выглядит так: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Изучите по лекции случай нескольких множеств.

Обратимся к заданиям Типового расчёта.

Дано множество M и его подмножества $A_i, i = 1, 2, 3$.

Первое задание. Образуем новое множество X (указаны в таблице.) Требуется записать индикатор этого множества (т.е. выразить их через индикаторы множеств

A_i при помощи операций сложения и умножения).

Второе задание. Для каждого из можеств A_i, а также всевозможных пересечений этих множеств даны числа элементов в них (т.е числа $|A_1|$,$|A_2|$,$|A_3|$, $|A_1 \cap A_2|$, $|A_2 \cap A_3|$, $|A_3 \cap A_1|$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$). Требуется найти число элементов в множестве X.

Третье задание. Возьмём в качестве M, A_1, A_2, A_3 следующие множества: $M = \{1, 2, \cdots, 100\}$, $A_1 = \{1, 2, \cdots, 70\}$,$A_2 = \{81, 82, \cdots, 100\}$, $A_3 = \{40, 41, \cdots, 90\}$. Требуется выписать все элементы множества M.

Рассмотрим пример решения такой задачи. Пример. Дано множество M и его подмножества $A_i, i = 1, 2, 3$. Образуем множество $X = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_2 \cap A_3)$. Кроме того, даны 7 чисел 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1 (вспомним, что эти числа – это величины $|A_1|$,$|A_2|$,$|A_3|$, $|A_1 \cap A_2|$, $|A_2 \cap A_3|$, $|A_3 \cap A_1|$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$) Выполним все три задания, указанные в задаче.

Первое задание. Найдём индикатор множества X. Для этого применяем формулы для индикаторов дополнения, пересечения и объединения множеств. Надо начинать с той из этих трёх операций, которая применяется последней. В нашем примере это есть операция объединения. Поэтому

$\chi_X = \chi_{A_1 \cap A_2} + \chi_{\overline{A}_2 \cap A_3} - \chi_{A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_2 \cap A_3}$ Здесь оказались рядом $A_2 \cap \overline{A}_2$ Ясно, что это пересечение пусто, а пересечение пустого множества с любым множеством также пусто. Поэтому отбрасываем нулевые индикаторы. Получаем $\chi_X = \chi_{A_1 \cap A_2} + \chi_{\overline{A}_2 \cap A_3)} = \chi_{A_1}\chi_{A_2} + \chi_{\overline{A}_2 \cap A_3} = \chi_{A_1}\chi_{A_2} + \chi_{A_3} - \chi_{A_2}\chi_{A_3}$.

В последнем выражении раскрываем скобки (как в школе) и учитываем равенства

$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \chi_A \chi_A = \chi_A$. Если в полученной формуле встречаются стоящие рядом произведения индикаторов, то заменяем их индикатором пересечения(например, заменяем $\chi_A \chi_B$ на $\chi_{A \cap B}$.

Проделав всё это в нашем примере, получаем окончательную формулу $\chi_X = \chi_{A_1 \cap A_2} + \chi_{A_3} - \chi_{A_2 \cap A_3}$

Этим выполнено первое задание задачи.

Выполним второе задание, указанное в задаче 2, т.е.найдём величину $|M|$ (это есть число элементов множества $|M|$). Для этого вспоминаем правило: чтобы найти величину $|M|$ надо просуммировать значения функции χ_M по всем $x \in M$. Другими словами $|M| = \sum_{x \in M} \chi_M(x)$. Применим такое суммирование к обеим частям полученной окончательной формулы. Получаем ответ

$|X| = |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3|$.

По условию задачи нам даны значения $|A_1 \cap A_2|, |A_3|, |A_1 \cap A_3|$. Остаётся подставить их в полученную формулу.

Выполним третье задание, указанное в задаче, т.е. найдём все элементы множества $|M|$. Для этого применим исходную формулу $M = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_2 \cap A_3)$. Имеем $A_1 \cap A_2 = \emptyset$). Далее, $\overline{A}_2 = \{1, 2, \cdots 80\}$, откуда $(\overline{A}_2 \cap A_3) = \{41, 42, \cdots 79\}$. Итак, $M = \{41, 42, \cdots 79\}$

Теперь -варианты типового расчёта. Номер Вашего задания типового расчёта - это Ваш номер в списке группы.

В нижеследующей таблице указано универсальное множество $M = 1{,}2, \cdots 100$ (одно и то же для всех вариантов) и даны 7 чисел – это величины $|A_1|, |A_2|, |A_3|$,$|A_1 \cap$

$A_2|$,$|A_2 \cap A_3||A_3 \cap A_1|$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$). Берём множество X, указанное в Вашем варианте, и для него выполняем задания 1, 2, 3, описанные выше.

1. $X = \overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3; 3, 3, 3, 1, 1, 1, 0$
2. $X = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3; 3, 4, 4, 1, 2, 1, 1$
3. $X = \overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3; 3, 5, 6, 1, 1, 1, 0$
4, $X = \overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3; 3, 6, 6, 1, 1, 1, 0$
5. $X = \overline{A}_1 \cup A_2 \cup A_3; 3, 7, 8, 1, 1, 1, 0$
6. $X = (\overline{A}_1 \cap A_2) \cup A_3; 3, 8, 8, 1, 1, 1, 0$
7. $X = \overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3; , 3, 9, 9, 1, 1, 1, 1$
8. $X = A_1 \cup \overline{A}_2 \cup A_3; 3, 10, 10, 1, 1, 1, 0$
9. $X = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3; 3, 11, 10, 1, 1, 1, 0$
10. $X = (\overline{A}_1 \cup A_2) \cap A_3; 3,12, 11, 1, 1, 1, 0$
11. $X = (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \cap A_3; 3, 13, 11, 1, 1, 1, 0$
12. $X = (\overline{A}_1 \cap A_2) \cup \overline{A}_3; 3, 14, 12, 1, 1, 1, 0$
13. $X = (A_1 \cup A_2) \cap \overline{A}_3; 3, 15, 15, 1, 1, 1, 0$
14. $X = \overline{A}_1 \cap (A_2 \cup \overline{A}_3); 3, 16, 15, 1, 1, 1, 0$
15. $X = (\overline{A}_1 \cup A_2) \cap A_3; 3, 4, 7, 1, 1, 1, 0$
16. $X = (\overline{A}_1 \cup A_2) \cap A_3; 3, 8, 8, 1, 1, 1, 0$
17. $X = (\overline{A}_1 \cap A_2) \cap \overline{A}_3; 3, 4, 9, 1, 1, 1, 0$
18 $X = \overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3; 3, 4, 6, 1, 1, 1, 0$
19. $X = (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \cap A_3; 3, 4, 9, 1, 1, 1, 0$
20. $X = (\overline{A}_1 \cap A_2) \cup \overline{A}_3; 3, 6, 7, 1, 1, 0$
21 $X = (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \cap \overline{A}_3; 3, 4, 6, 1, 1, 1, 0$.
22. $X = \overline{A}_1 \cap (A_2 \cup \overline{A}_3); 3, 16, 15, 1, 1, 1, 0$
23. $X = (A_1 \cup A_2) \cap \overline{A}_3; 3, 15, 15, 1, 1, 1, 0$
24. $X = (\overline{A}_1 \cup A_2) \cap A_3; 3,12, 11, 1, 1, 1, 0$
25. $X = \overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3; , 3, 9, 9, 1, 1, 1, 1$
26. $X = (\overline{A}_1 \cup A_2) \cap A_3; 3, 8, 8, 1, 1, 1, 0$
27. $X = (A_1 \cup A_2) \cap \overline{A}_3; 3, 15, 15, 1, 1, 1, 0$