МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Часть 1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Составители: Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

МОСКВА 2019

Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Часть 1. Уравнения, допускающие понижение порядка: Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика»/ Ю.Б. Егорова, И.М. Мамонов. М.: МАИ, 2019. – 16 с.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение, содержащее неизвестную (искомую) функцию *y(x)*, независимую переменную *x*, первую и вторую производные y', y'' или дифференциалы $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

Дифференциальное уравнение второго порядка символически можно записать в общем виде следующим образом:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \text{ или } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

Дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно второй производной, имеет вид:

$$y'' = f(x, y, y') \text{ или } y'' = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, которая обращает его в тождество. Дифференциальное уравнение второго порядка имеет бесчисленное множество решений, которые можно представить в виде функции $y = \varphi(x, C_1, C_2)$. Эта совокупность решений называется **общим решением**.

Функция, получающаяся из общего решения при конкретных значениях постоянных C_1 и C_2, называется **частным решением**. Частное решение находится при помощи задания начальных условий: $y(x=x_0)=y_0$ и $y'(x=x_0)=y_0'$, где x_0, y_0, y_0'– конкретные числа.

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию, называется **за-**

дачей Коши. Практически задачу Коши решают следующим образом: находят общее решение, затем в него подставляют начальные условия, получают систему двух уравнений, определяют произвольные постоянные C_1 и C_2 и подставляют их конкретные значения в общее решение.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка, которые позволяют понизить порядок уравнения и привести его к уравнениям первого порядка.

2.1. Дифференциальное уравнение вида $y''=f(x)$

Правая часть уравнения не содержит y и y'. Уравнение решается путем последовательного интегрирования. Найдем сначала первую производную (промежуточное общее решение):

$$y'=\int f(x)dx=\varphi(x)+C_1.$$

Интегрируя еще раз, получим общее решение:

$$y=\int(\varphi(x)+C_1)dx=\psi(x)+C_1x+C_2.$$

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y''=x$ при заданных начальных условиях $y(x=0)=1$ и $y'(x=0)=1$.

Решение. Последовательно интегрируя, найдем сначала первую производную (промежуточное общее решение):

$$y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1. \qquad (2.1)$$

Интегрируя еще раз, получим общее решение:

$$y = \int (\frac{x^2}{2} + C_1) dx = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2. \qquad (2.2)$$

Так как мы интегрировали дважды, то получили две произвольные постоянные C_1 и C_2. Подставляя начальные условия в соотношения (2.1) и (2.2), получим $C_1=1$ и $C_2=1$. Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y = \frac{x^3}{6} + x + 1.$$

2.2. Дифференциальное уравнение вида $y'' = f(x, y')$

Правая часть уравнения не содержит искомой функции *y*. Уравнение решается с помощью подстановки:

$$y' = z, \; y'' = z',$$

где z – функция от x. Тогда исходное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка:

$$z' = f(x, z).$$

Решая это уравнение, найдем общее решение в виде $z = \varphi(x, C_1)$. Делая обратную замену $z = y'$, получим еще одно дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = \varphi(x, C_1) \text{ или } \frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $xy'' = y'$.

Решение. Сделаем подстановку: $y' = z$, $y'' = z'$. Тогда исходное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$xz' = z \text{ или } x\frac{dz}{dx} = z.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}.$$

Получаем промежуточное общее решение:

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 \text{ или } z = C_1 x.$$

Делая обратную замену $z = y'$, получим еще одно дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y' = C_1 x \text{ или } \frac{dy}{dx} = C_1 x.$$

Разделяем переменные: $dy = C_1 x dx$.

Интегрируя, получим общее решение:

$$y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

Решение. Сделаем подстановку: $y' = z,\ y'' = z'$. Тогда исходное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка:

$$xz' = z \ln \frac{z}{x}. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) является однородным и решается с помощью подстановки:

$$\frac{z}{x} = u, z = ux, z' = u'x + u. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$x(u'x + u) = ux \ln u.$$

Сокращаем на x и разделяем переменные:

$$u'x = u \ln u - u,$$

$$\frac{du}{u \ln u - u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}. \tag{2.5}$$

Интеграл в левой части равенства (2.5) вычисляем методом замены переменной:

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \left\{ \ln u - 1 = t; dt = \frac{du}{u} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\ln u - 1|.$$

После интегрирования (2.5) получаем промежуточное общее решение:

$$\ln\left|\ln u - 1\right| = \ln\left|x\right| + \ln C_1;$$

$$\ln u - 1 = C_1 x;$$

$$\ln u = C_1 x + 1;$$

$$u = e^{C_1 x + 1};$$

$$\frac{z}{x} = e^{C_1 x + 1};$$

$$z = xe^{C_1 x + 1}.$$

Делая обратную замену $z = y'$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y' = xe^{C_1 x + 1} \text{ или } \frac{dy}{dx} = xe^{C_1 x + 1}.$$

Разделяем переменные и интегрируем: $\int dy = \int xe^{C_1 x + 1} dx.$ (2.6)

Интеграл, стоящий в правой части, вычисляем с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Тогда

$$\int xe^{C_1 x + 1} dx = e\int xe^{C_1 x} dx = \left\{ u = x; du = dx; dv = e^{C_1 x} dx; v = \int e^{C_1 x} dx = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} \right\} =$$

$$= \frac{e \cdot x}{C_1} e^{C_1 x} - \frac{e}{C_1} \int e^{C_1 x} dx = \frac{e \cdot x}{C_1} e^{C_1 x} - \frac{e}{C_1^2} e^{C_1 x} = \frac{e^{C_1 x + 1}}{C_1} \left(x - \frac{1}{C_1} \right).$$

После интегрирования (2.6) получим общее решение:

$$y = \frac{e^{C_1 x + 1}}{C_1} \left(x - \frac{1}{C_1} \right) + C_2.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{y'}{x} + x\cos x.$

Решение. Сделаем подстановку: $y' = z,\ y'' = z'.$ Тогда исходное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка:

$$z' = \frac{z}{x} + x\cos x \quad \text{или} \quad z' - \frac{z}{x} = x\cos x \qquad (2.7)$$

Уравнение (2.7) является линейным неоднородным и решается с помощью подстановки:

$$z = uv, z' = u'v + v'u. \qquad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.7), получим:

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x\cos x;$$

$$u'v + \left[v'u - \frac{uv}{x}\right] = x\cos x;$$

$$u'v + u\left[v' - \frac{v}{x}\right] = x\cos x. \qquad (2.9)$$

Квадратную скобку приравняем к нулю и решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' = \frac{v}{x};$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}.$$

Получаем: $\ln|v| = \ln|x|$ или $v = x$. Функцию v=x подставляем в соотношение (2.9):

$$u'x = x\cos x.$$

Сокращаем на x, разделяем переменные и интегрируем:

$$u' = \cos x;$$

$$\int du = \int \cos x dx.$$

$$u = \sin x + C_1.$$

Находим z: $z = uv = (\sin x + C_1)x.$

Делая обратную замену $z = y'$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y' = (\sin x + C_1)x \text{ или } \frac{dy}{dx} = x\sin x + C_1 x.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int dy = \int x\sin x dx + C_1 \int x dx. \qquad (2.10)$$

Интеграл, стоящий в правой части (2.10), вычисляем с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Тогда

$$\int x\sin x dx = \left\{u = x; du = dx; dv = \sin x dx; v = \int \sin x dx = -\cos x\right\} =$$
$$= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x.$$

После интегрирования (2.10) получим общее решение:

$$y = \sin x - x\cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2.$$

2.3. Дифференциальное уравнение вида $y'' = f(y, y')$

Правая часть уравнения не содержит независимой переменной x. Уравнение решается с помощью подстановки:

$$y' = z \text{ или } \frac{dy}{dx} = z,$$

где z – функция от y, т.е. $z = z[y(x)]$ – сложная функция от x . Тогда:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z.$$

Исходное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка:

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z),$$

где z – искомая функция, y – независимая переменная.

Решая это уравнение, найдем общее решение в виде $z = \varphi(y, C_1)$. Делая обратную замену $z = y'$, получим еще одно дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = \varphi(y, C_1) \text{ или } \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1).$$

Разделяя переменные

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$$

и интегрируя, получим общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $yy'' + (y')^2 = 0.$

Решение. Сделаем подстановку: $y' = z,\ y'' = \frac{dz}{dy} z.$

Тогда исходное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y\frac{dz}{dy}z + z^2 = 0.$$

Сокращаем на z ($z \neq 0$) и разделяем переменные:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{y}.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dz}{z} = -\int\frac{dy}{y}.$$

Получаем промежуточное общее решение:

$$\ln|z| = -\ln|y| + \ln C_1 \text{ или } z = \frac{C_1}{y}.$$

Делая обратную замену $z = y'$, получим еще одно дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$y' = \frac{C_1}{y} \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y}.$$

Разделяем переменные: $ydy = C_1dx.$

Интегрируя, получим общее решение:

$$\frac{y^2}{2} = C_1x + C_2.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение дифференциального уравнения второго порядка.
2. Дайте определения общего и частного решения дифференциального уравнения второго порядка.
3. Как называется задача нахождения частного решения?
4. Как можно найти частное решение из общего?
5. Перечислите типы дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.
6. Каким методом решаются дифференциальные уравнения второго порядка, которые не содержат искомую функцию и ее производную?
7. Каким методом решаются дифференциальные уравнения второго порядка, которые не содержат искомую функцию?
8. Каким методом решаются дифференциальные уравнения второго порядка, которые не содержат независимую переменную?

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2001. – 592 с.
2. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.А. Дифференциальные уравнения. – М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2000. – 348 с.
3. Мантуров О.В. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1991. – 448 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М.: Высш. шк., 1980. – 365 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2 – М.: Наука, 1972. – 312 с.
6. Берман А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для вузов. – М.: Наука, 1989. – 736 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Часть 1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Редактор Костылева Е.Е.

Уч.-изд.л. – 0,7.