МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра «Моделирование систем и информационные технологии»

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Часть 2. Линейные дифференциальные уравнения

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Составители: Егорова Ю.Б.
Мамонов И.М.

МОСКВА 2019

Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Часть 2. Линейные дифференциальные уравнения: Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Высшая математика»/ Ю.Б. Егорова, И.М. Мамонов: МАИ, 2019. – 20 с.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка имеют вид:

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x),$$

где a_1, a_2, a_3 – или переменные коэффициенты (т.е. функции от x), или постоянные коэффициенты (действительные числа).

Если правая часть уравнения $f(x)$ равна нулю, то уравнение называется **линейным однородным** или линейным уравнением без правой части. Если правая часть нулю не равна, то уравнение называется **линейным неоднородным** или линейным уравнением с правой частью.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка имеют вид:

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0. \qquad (2.1)$$

Общее решение уравнений этого типа находится с помощью следующей теоремы.

Теорема о структуре общего решения. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \qquad (2.2)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, y_1 и y_2 – какие-либо частные решения уравнения (2.1), причем $y_1/\,y_2 \neq \text{const}$ (линейно-независимые решения).

2.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение этого типа имеет вид:

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad (2.3)$$

где a, b, c– постоянные коэффициенты (действительные числа).

В соответствии с теоремой о структуре общего решения линейного однородного уравнения необходимо найти два частных линейно-независимых решения уравнения (2.3).

Для нахождения частных решений y_1 и y_2 следует предварительно составить **характеристическое уравнение**. Для этого в исходном уравнении (2.3) необходимо y заменить единицей, первую производную y' заменить на k, а вторую производную y'' заменить на k^2:

$$ak^2 + bk + c = 0. \qquad (2.4)$$

Характеристическое уравнение (2.4) – это квадратное уравнение, имеющее два корня k_1 и k_2:

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант.

При решении характеристического уравнения возможны три случая: $D>0$, $D=0$, $D<0$. Рассмотрим их более подробно.

<u>1 случай</u>. $D>0$, k_1 и k_2 – действительные числа ($k_1 \neq k_2$). В этом случае частные решения имеют вид:

$$y_1 = e^{k_1 x};\ y_2 = e^{k_2 x}.$$

Тогда в соответствии с (2.2) общее решение уравнения (2.3) имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = 0.$

Решение. Сначала составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Находим его корни: $k_1=-2$ и $k_2=1$. Тогда общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}.$

<u>2 случай</u>. $D=0$, k_1 и k_2 – действительные числа ($k_1=k_2=k$). В этом случае частные решения имеют вид:

$$y_1 = e^{kx};\ y_2 = xe^{kx}.$$

Общее решение уравнения (2.3) в этом случае имеет вид:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Решение. Сначала составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Находим его корни: $k_1=k_2=2$. Тогда общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

3 случай. $D<0$, k_1 и k_2 – комплексные числа ($k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$). В этом случае частные решения имеют вид:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x;\; y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

Общее решение уравнения (2.3) в этом случае имеет вид:

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0.$

Решение. Сначала составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 5 = 0.$$

Находим его корни:

$$k_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{-2\pm 4\cdot\sqrt{-1}}{2} = -1\pm 2i.$$

Следовательно: α=-1, β=2. Тогда общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x.$$

3. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка имеют вид:

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x). \qquad (3.1)$$

Общее решение уравнений этого типа находится с помощью следующих теорем.

Теорема 1. (О структуре общего решения). Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

$$y = \tilde{y} + y^*,\tag{3.2}$$

где $\tilde{y}$ – общее решение линейного однородного уравнения $a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$, соответствующего неоднородному уравнению (3.1); y^* – какое-либо частное решение уравнения (3.1).

Теорема 2. Если правая часть линейного неоднородного уравнения второго порядка равна сумме двух функций $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, то частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

$$y^* = y_1^* + y_2^*,\tag{3.3}$$

где y_1^* – какое-либо частное решение уравнения:

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f_1(x);$$

y_2^* – какое-либо частное решение уравнения:

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f_2(x).$$

3.1. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение этого типа имеет вид:

$$ay'' + by' + cy = f(x),\tag{3.4}$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты (действительные числа).

Для нахождения общего решения уравнения (3.4) необходимо:

1) Составить линейное однородное уравнение, соответствующее заданному неоднородному уравнению (3.4):

$$ay'' + by' + cy = 0\tag{3.5}$$

и найти его общее решение $\tilde{y}$;

2) найти какое-либо частное решения $y*$ линейного неоднородного уравнения (3.4);

3) в соответствии с теоремой 1 найти сумму $y = \tilde{y} + y*$, которая и будет являться общим решением уравнения (3.4).

Методы нахождения общего решения $\tilde{y}$ линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (3.5) указаны выше (см. п. 2.1).

Рассмотрим **метод подбора частного решения** $y*$ линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами. Этот метод применяется только в том случае, если правая часть уравнения содержит показательные функции, синусы, косинусы, многочлены и их целые рациональные комбинации:

$$f(x) = U_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad (3.6)$$

где α и β – постоянные (действительная и мнимая часть комплексного числа $z=\alpha\pm\beta i$); $U_n(x)$ – многочлен n-й степени; $V_m(x)$ – многочлен m-й степени.

Тогда частное решение подбирается по виду правой части и в общем случае будет иметь следующий вид:

$$y* = x^r[P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x], \qquad (3.7)$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $U_n(x)$ и $V_m(x)$. Многочлены второй степени имеют вид: $P_2(x)=Ax^2+Bx+C$; первой степени: $P_1(x)=Ax+B$; нулевой степени: $P_0(x)=A$, где A, B, C – постоянные коэффициенты, которые необходимо определить в ходе решения с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим более подробно некоторые частные случаи.

Частный случай 1. Правая часть уравнения не содержит синусы и косинусы. В этом случае β=0. Тогда $z=\alpha\pm\beta i=\alpha$ – действительное число, и правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x)=U_n(x)e^{\alpha x}. \tag{3.8}$$

В этом случае частное решение подбирают похожим на правую часть уравнения:

$$y^*=x^r P_n(x)e^{\alpha x}, \tag{3.9}$$

где r – показатель кратности корня характеристического уравнения (2.4), который может принимать три значения:

1) r=0, если число $z=\alpha$ не совпадает с каким-либо корнем характеристического уравнения: $z=\alpha\neq k_{1,2}$.
2) r=1, если число $z=\alpha$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения: $z=\alpha=k_1$ или $z=\alpha=k_2$.
3) r=2, если число $z=\alpha$ совпадает с двумя корнями характеристического уравнения: $z=\alpha=k_{1,2}=k$ (когда $D=0$).

Пример 5. Найти общее решение уравнения:

$$2y''+y'-y=2e^x. \tag{3.10}$$

Решение.

1) Составим линейное однородное уравнение, соответствующее заданному неоднородному уравнению:

$$2y''+y'-y=0. \tag{3.11}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$2k^2+k-1=0.$$

Находим его корни: k_1=-1 и k_2=1/2. Тогда общее решение уравнения (3.11) имеет вид: $\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/2}$.

2) Найдем методом подбора какое-либо частное решение y^* заданного линейного неоднородного уравнения (3.10). Для того чтобы правильно подобрать общий вид частного решения, необходимо сначала представить правую часть уравнения в общем виде (3.8):

$$f(x) = 2e^x = 2e^{1\cdot x} = U_0(x)e^{1\cdot x}. \qquad (3.12)$$

Следовательно, правая часть уравнения (3.12) содержит многочлен нулевой степени $U_0(x)$=2, поэтому частное решение y^* также будет содержать многочлен нулевой степени $P_0(x)=A$.

Из (3.12) также следует, что число $z=\alpha=1$ не равно ни одному из корней характеристического уравнения k_1=-1 и k_2=1/2. Поэтому r=0 и частное решение должно иметь вид:

$$y^* = P_0(x)e^{1\cdot x} = Ae^x. \qquad (3.13)$$

Для того, чтобы определить A, необходимо подставить частное решение в виде (3.13) в исходное уравнение (3.10):

$$2(y^*)'' + (y^*)' - y^* = 2e^x$$

или $$2(Ae^x)'' + (Ae^x)' - Ae^x = 2e^x,$$

$$2Ae^x + Ae^x - Ae^x = 2e^x.$$

Из последнего соотношения следует, что A=1. Следовательно, частное решение имеет вид: $y^* = e^x$.

3) В соответствии с теоремой 1 о структуре общего решения находим общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/2} + e^x.$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения:

$$2y'' + y' - y = e^{-x}. \tag{3.14}$$

Решение.

1) Левая часть уравнения такая же, как в примере 5, поэтому общее решение линейного однородного уравнения имеет вид:

$$\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/2}.$$

2) Найдем частное решение y^* заданного линейного неоднородного уравнения (3.14). Правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{-x} = 1 \cdot e^{-1 \cdot x} = U_0(x) e^{-1 \cdot x}. \tag{3.15}$$

Следовательно, правая часть уравнения (3.15) содержит многочлен нулевой степени $U_0(x)$=1, поэтому частное решение также будет содержать многочлен нулевой степени $P_0(x)=A$.

Из (3.15) также следует, что число $z=\alpha$=-1 равно одному из корней характеристического уравнения k_1=-1, поэтому r=1 и частное решение должно иметь вид:

$$y^* = xP_0(x)e^{-1 \cdot x} = Axe^{-x}. \tag{3.16}$$

Для того чтобы определить A, необходимо подставить частное решение в виде (3.16) в исходное уравнение (3.14):

$$2(y^*)'' + (y^*)' - y^* = e^{-x}. \tag{3.17}$$

Отдельно найдем $(y^*)''$ и $(y^*)'$:

$$(y^*)' = (Axe^{-x})' = Ae^{-x} - Axe^{-x},$$

$$(y^*)'' = (Ae^{-x} - Axe^{-x})' = -Ae^{-x} - (Ae^{-x} - Axe^{-x}) = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}.$$

Подставим y^*, $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в (3.17):

$$2(-2Ae^{-x} + Axe^{-x}) + (Ae^{-x} - Axe^{-x}) - Axe^{-x} = e^{-x}.$$

Сокращая на e^{-x} и приводя подобные, получим: $-3A=1$.

Из последнего соотношения следует, что $A= -1/3$. Следовательно,

частное решение имеет вид: $y^*=-\frac{1}{3}xe^{-x}$.

3) В соответствии с теоремой 1 о структуре общего решения находим общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{x/2}-\frac{1}{3}xe^{-x}.$$

Пример 7. Найти общее решение уравнения:

$$2y''+y'-y=2e^{x}+e^{-x}. \tag{3.18}$$

Решение.

1) Левая часть уравнения такая же, как в примере 5, поэтому общее решение линейного однородного уравнения имеет вид:

$$\tilde{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{x/2}.$$

2) Правая часть исходного уравнения равна сумме двух функций $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=2e^{x}+e^{-x}$, поэтому в соответствии с теоремой 2 частное решение уравнения (3.18) имеет вид:

$$y^*=y_1^*+y_2^*,$$

где y_1^* – какое-либо частное решение уравнения:

$$2y''+y'-y=2e^{x}; \tag{3.19}$$

y_2^* – какое-либо частное решение уравнения:

$$2y''+y'-y=e^{-x}. \tag{3.20}$$

Частное решение уравнения (3.19) найдено в примере 5: $y_1^*=e^{x}$.

Частное решение уравнения (3.20) найдено в примере 6:

$$y_2{*} = -\frac{1}{3}xe^{-x}.$$

Поэтому частное решение уравнения (3.18) примет вид:

$$y{*} = y_1{*} + y_2{*} = e^x - \frac{1}{3}xe^{-x}.$$

3) В соответствии с теоремой 1 о структуре общего решения находим общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = \tilde{y} + y{*} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/2} + e^x - \frac{1}{3}xe^{-x}.$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения:

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}. \qquad (3.21)$$

Решение.

1) Составим линейное однородное уравнение, соответствующее заданному неоднородному уравнению:

$$y'' - 4y' + 4y = 0. \qquad (3.22)$$

Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0$.

Находим его корни: $k_1 = k_2 = 2$ ($D=0$). Тогда общее решение уравнения (3.22) имеет вид: $\tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x}$.

2) Найдем частное решение $y{*}$ заданного уравнения (3.21). Правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x) = xe^{2x} = U_1(x)e^{2\cdot x}.$$

Следовательно, правая часть уравнения содержит многочлен первой степени $U_1(x)=x$, поэтому частное решение также будет содержать многочлен первой степени $P_1(x)=Ax+B$.

Число $z=\alpha=2$ равно двум корням характеристического уравнения $k_1=k_2=2$, поэтому $r=2$ и частное решение должно иметь вид:

$$y^* = x^2 P_1(x)e^{2\cdot x} = x^2(Ax+B)e^{2x} = (Ax^3+Bx^2)e^{2x}. \qquad (3.23)$$

Для того чтобы определить A и B, подставим частное решение в виде (3.23) в исходное уравнение (3.21):

$$(y^*)'' - 4(y^*)' + 4y^* = xe^{2x}. \qquad (3.24)$$

Отдельно найдем $(y^*)''$ и $(y^*)'$:

$$(y^*)' = (3Ax^2+2Bx)e^{2x} + (Ax^3+Bx^2)\cdot 2e^{2x} = (3Ax^2+2Bx+2Ax^3+2Bx^2)e^{2x};$$

$$(y^*)'' = (6Ax+2B+6Ax^2+4Bx)e^{2x} + (3Ax^2+2Bx+2Ax^3+2Bx^2)\cdot 2e^{2x} =$$

$$= (6Ax+12Ax^2+4Ax^3+2B+8Bx+4Bx^2)e^{2x}.$$

Подставим $(y^*)''$, $(y^*)'$ и y^* в (3.24). Сокращая на e^{2x} и приводя подобные, получим:

$$6Ax+2B=x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$6Ax^1+2Bx^0 = 1\cdot x^1 + 0\cdot x^0,$$

$$6A=1, \qquad 2B=0$$

Откуда следует, что $A=1/6$, $B=0$. Следовательно, частное решение (3.23) имеет вид: $y^* = \dfrac{1}{6}x^3 e^{2x}$.

3) Находим общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{2x}.$$

<u>Частный случай 2</u>. Правая часть уравнения не содержит показательную функцию $e^{\alpha x}$. В этом случае $\alpha=0$. Тогда $z=\alpha\pm\beta i=\pm\beta i$ – комплексное число, и правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x) = U_n(x)\cos\beta x + V_m(x)\sin\beta x. \tag{3.25}$$

В этом случае частное решение подбирают похожим на правую часть уравнения:

$$y^* = x^r[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x], \tag{3.26}$$

где r – показатель кратности корня характеристического уравнения (3.5), который может принимать два значения:

1) $r=0$, если число $z=\pm\beta i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения: $z==\pm\beta i \neq k_{1,2}=\alpha_x\pm\beta_x i$ (α_x и β_x – действительная и мнимая части корня характеристического уравнения).
2) $r=1$, если число $z=\pm\beta i$ совпадает с мнимыми корнями характеристического уравнения: $z=\pm\beta i = k_{1,2}=\pm\beta_x i$.

Пример 9. Найти общее решение уравнения:

$$y'' + 4y = \cos x. \tag{3.27}$$

Решение.

1) Составим линейное однородное уравнение, соответствующее заданному неоднородному уравнению:

$$y'' + 4y = 0. \tag{3.28}$$

Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 4 = 0.$

Находим его корни:

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i.$$

Следовательно, действительная часть комплексного числа α_x=0, мнимая – β_x=2. Тогда общее решение уравнения (3.28) имеет вид:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

2) Найдем частное решение y^* исходного уравнения (3.27). Правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x) = \cos x = 1 \cdot \cos 1x + 0 \cdot \sin 1x.$$

Следовательно, правая часть уравнения содержит многочлены нулевой степени $U_0(x)$=1 и $V_0(x)$=0, поэтому в соответствии с (3.26) частное решение также будет содержать многочлены нулевой степени $P_0(x)=A$ и $Q_0(x)=B$.

Число $z=\pm\beta i=\pm 1i$ не равно корням характеристического уравнения $k_{1,2}=\pm 2i$, поэтому r=0 и частное решение должно иметь вид:

$$y^* = P_0(x)\cos 1x + Q_0(x)\sin 1x = A\cos x + B\sin x, \quad (3.29)$$

Для того чтобы определить A и B, подставим частное решение в виде (3.29) в исходное уравнение (3.27):

$$(y^*)'' + 4y^* = \cos x. \quad (3.30)$$

Отдельно найдем $(y^*)'$ и $(y^*)''$:

$$(y^*)' = -A\sin x + B\cos x, \quad (y^*)'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставляя $(y^*)''$ и y^* в (3.30), получим:

$$-A\cos x - B\sin x + 4(A\cos x + B\sin x) = \cos x.$$

Приравняем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$:

$$-A\cos x - B\sin x + 4A\cos x + 4B\sin x = 1\cos x + 0\sin x.$$

при $\cos x$: $\quad -A + 4A = 1; \qquad A = 1/3;$

при $\sin x$: $\quad -B+4B=0; \quad B=0.$

Следовательно, частное решение (3.29) имеет вид: $y^* = \frac{1}{3}\cos x.$

3) Находим общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}\cos x.$$

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка?
2. Какое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка?
3. Какое уравнение называется характеристическим? Как оно составляется?
4. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка?
5. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от типа корней характеристического уравнения?
6. Какое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка?
7. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка?

8. Сформулируйте теорему о структуре частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, если его правая часть представлена в виде суммы двух функций?
9. Изложите способ подбора частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2001. – 592 с.
2. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.А. Дифференциальные уравнения. – М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2000. – 348 с.
3. Мантуров О.В. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1991. – 448 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М.: Высш. шк., 1980. – 365 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2 – М.: Наука, 1972. – 312 с.
6. Берман А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для вузов. – М.: Наука, 1989. – 736 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Юлия Борисовна Егорова
Игорь Михайлович Мамонов

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Часть 2. Линейные дифференциальные уравнения

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»

Уч.-изд.л. – 0,7 .