

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Сопротивление материалов»

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
И ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА  
(Часть II)**

Методическая разработка  
по выполнению контрольной работы № 2  
студентами заочной формы обучения,  
изучающих полный курс дисциплин  
«Сопротивление материалов»  
и «Техническая механика»

Ростов-на-Дону  
ДГТУ  
2018

УДК 539.3/.6

Составители: В.Д. Еремин, Г.П. Стрельников

**Сопротивление материалов и техническая механика (Часть 2):**  
методическая разработка по выполнению контрольной работы № 2  
студентами заочной формы обучения, изучающих полный курс дисциплин  
«Сопротивление материалов» и «Техническая механика». – Ростов-на-Дону:  
Донской гос. тех. ун-т, 2018. – 96 с.

Методическая разработка содержит индивидуальные данные, расчетные  
схемы и вопросы для самопроверки к задачам, входящим в контрольную работу  
№ 2, примеры решения задач контрольной работы с основными  
теоретическими положениями, список рекомендуемой литературы при  
подготовке к выполнению работы.

Методическая разработка предназначена для студентов-заочников,  
обучающихся по направлению 08.03.01 – «Строительство», изучающих полный  
курс дисциплин «Сопротивление материалов» и «Техническая механика».

Может быть использована студентами других технических направлений  
подготовки (специальностей).

УДК 539.3/.6

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Донского государственного технического университета

Научный редактор канд. техн. наук, доцент С.В. Литвинов  
Ответственный за выпуск профессор кафедры «Сопротивление материалов»  
канд. техн. наук, доцент В.Д. Еремин

---

В печать 15.06. 2018г.

Формат 60×84/16. Объем 6,00 усл. п. л.

Тираж 50 экз. Заказ № 306

---

Издательский центр ДГТУ  
Адрес университета и полиграфического предприятия:  
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

© Донской государственный  
технический университет, 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие.....</b>	<b>5</b>
<b>Раздел 1. Контрольная работа.....</b>	<b>7</b>
Общие методические указания по выполнению контрольной работы.....	7
<b>Раздел 2. Индивидуальные исходные данные и расчетные схемы задач.....</b>	<b>9</b>
2.1. Задача №1. Определение перемещений в статически определимой балке.....	9
2.2. Задача №2. Внецентренное сжатие короткого стержня .....	12
2.3. Задача №3. Устойчивость центрально сжатого стержня.....	14
2.4. Задача №4. Изгибающий (поперечный) удар .....	17
<b>Раздел 3. Основные теоретические положения и примеры решения задач контрольной работы .....</b>	<b>19</b>
3.1. Тема 1. Расчет балок на жесткость.....	19
3.1.1. Основные теоретические положения.....	19
3.1.2. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Расчет балок на жесткость».....	24
3.1.3. Пример решения задачи № 1. Определение перемещений в статически определимой балке.....	26
3.2. Тема 2. Сложное сопротивление.....	31
3.2.1. Основные теоретические положения.....	31
3.2.2. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Сложное сопротивление».....	43
3.2.3. Пример решения задачи № 2. Внецентренное сжатие короткого стержня.....	45
3.3. Тема 3. Устойчивость центрально сжатых стержней.....	51
3.3.1. Основные теоретические положения.....	51
3.3.2. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Устойчивость центрально сжатых стержней».....	54
3.3.3. Пример решения задачи № 3. Устойчивость центрально сжатого стержня.....	55

3.4. Тема 4. Динамическое действие нагрузки.....	60
3.4.1. Основные теоретические положения.....	60
3.4.2. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Динамическое действие нагрузки».....	67
3.4.3. Пример решения задачи № 4. Изгибающий (поперечный) удар.....	69
<b>Рекомендуемая литература.....</b>	<b>73</b>
<b>Приложение 1.....</b>	<b>74</b>
<b>Приложение 2.....</b>	<b>75</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сопротивление материалов (Техническая механика) – наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов конструкций.

Инженеру любой специальности часто приходится производить расчеты на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций. Самая незначительная, на первый взгляд, ошибка в расчетах может повлечь за собой очень тяжелые последствия – привести конструкцию к разрушению. При проведении этих расчетов необходимо стремиться к сочетанию наибольшей надежности работы конструкции с наименьшим расходом материала.

Сопротивление материалов – одна из сложных учебных дисциплин, изучаемых студентами технических направлений подготовки (специальностей).

Большое значение в закреплении как теоретических, так и практических знаний по курсам «Сопротивление материалов» и «Техническая механика» имеет самостоятельная работа студентов–заочников, в том числе и выполнение ими контрольных работ. В течение каждого семестра студент–заочник выполняет одну контрольную работу, предусмотренную учебным планом направления подготовки.

В отличие от домашних задач, для решения каждой из которых обычно достаточно знаний в объеме одной темы, выполнение контрольной работы требует знания нескольких разделов курса.

Если при решении задач и ответах на вопросы для самопроверки возникнут затруднения, следует воспользоваться имеющимися в учебниках и учебных пособиях указаниями и решениями.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на изучение этих дисциплин, и в то же время необходимости формирования у будущих инженеров базового объема знаний о прочности, жесткости и надежности проектируемых и находящихся в эксплуатации зданий и сооружений, важно обеспечить обучающихся методическими разработками, небольшими по объему, но охватывающими основные разделы знаний в соответствии с задачами формирования у обучающихся необходимых навыков

расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций.

Настоящая методическая разработка предназначена для студентов-заочников, изучающих полный курс учебных дисциплин «Сопротивление материалов» и «Техническая механика», в частности, для студентов, обучающихся по направлению 08.03.01 – «Строительство».

Методическая разработка представляет собой краткое изложение теоретического материала с систематизированной подборкой задач и их решениями по основным разделам полного курса учебных дисциплин «Сопротивление материалов» и «Техническая механика».

Методическая разработка состоит из двух частей. Первая часть содержит индивидуальные данные и расчетные схемы задач, входящих в контрольную работу № 1, примеры решения задач контрольной работы с основными теоретическими положениями.

Во второй части содержатся индивидуальные данные, расчетные схемы и вопросы для самопроверки к задачам, входящим в контрольную работу № 2, примеры решения задач контрольной работы с основными теоретическими положениями, список рекомендуемой литературы при подготовке к выполнению работы.

Все задачи контрольных работ имеют большое число равных по трудоемкости вариантов, что позволяет каждому студенту-заочнику получать индивидуальные исходные данные.

## РАЗДЕЛ 1. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

### Общие методические указания по выполнению контрольной работы

- Содержание контрольной работы сообщается преподавателем в начале учебного года (семестра).
- Исходные данные для решения задач выбираются студентом из таблиц вариантов в соответствии с его личным шифром (номером зачетной книжки).

Шифром считаются *три последние цифры*, например, если номер зачетной книжки – **27306**, то учебным шифром будет **306**.

Каждая таблица вариантов разделена на три части. Для получения исходных данных необходимо выписать из таблицы три строки:

- первая строка отвечает первой цифре шифра;
- вторая строка отвечает второй (средней) цифре;
- третья строка – последней (третьей) цифре шифра.

Например, для номера зачетной книжки **27306** при решении первой задачи, согласно **табл. 1**, получим следующие исходные данные:

$F = 16 \text{ кН}; q = 8 \text{ кН/м}; \ell = 1,5 \text{ м}; \frac{b}{\ell} = 0,7; \text{ № расчетной схемы балки} - 6;$

$m = 10 \text{ кНм}; \frac{c}{\ell} = 0,2; \text{ № сечения} - 1; \text{ вид перемещения} - \text{прогиб}.$

- Нельзя приступать к решению задач, досконально не разобравшись по учебникам в теории, связанной с выполнением контрольной работы. После изучения каждой темы надо обязательно ответить на вопросы для самопроверки – это способствует лучшему усвоению пройденного материала.

- Перед решением каждой задачи необходимо выписать полностью ее условие с числовыми данными, составить аккуратный эскиз в масштабе и указать на нем в числах все величины, необходимые для расчета.

- Все расчеты необходимо вести очень четко и аккуратно, с предельной внимательностью, сначала в общем виде, затем в числах.

- Необходимо использовать все средства для самоконтроля правильности выполненной части работы. Такие возможности, как правило, имеются на каждом этапе расчета.

- Расчет на всех его этапах надо сопровождать необходимыми схемами, рисунками и графиками (построением эпюр), выполненными с обязательным соблюдением масштабов.

Графическое оформление помогает не только произвести расчет, но и облегчает его просмотр с целью ознакомления с ним или для контроля правильности выполненного этапа работы.

- Все вычисления, как правило, достаточно производить с точностью до третьей значащей цифры.

- Чистовой вариант контрольной работы предъявляется к защите в виде аккуратно оформленной и сброшюрованной пояснительной записки на листах формата А 4 с титульным листом, исходными данными, всеми необходимыми расчетами, схемами и чертежами.

- На титульном листе контрольной работы должны быть четко написаны: название дисциплины, фамилия, имя и отчество студента, наименование направления (специальности) и профиль подготовки, учебный шифр и точный почтовый адрес.

- После проверки преподавателем контрольной работы студент должен исправить в ней отмеченные ошибки и выполнить все сделанные ему замечания и указания.

Исправления должны быть вложены в соответствующие места рецензированной работы.

- После защиты контрольная работа сканируется и ее электронный вариант вместе с оригиналом сдается на кафедру.



## РАЗДЕЛ 2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ ЗАДАЧ

### 2.1. ЗАДАЧА №1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКЕ

Для заданной расчетной схемы балки (табл. 2) требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Определить перемещение (прогиб или угол поворота) в заданном

сечении балки с помощью метода начальных параметров, считая, что жесткость поперечного сечения балки  $EJ_y = \text{const}$ .

Исходные данные для решения задачи взять из **табл. 1** в соответствии с личным шифром.

Таблица 1

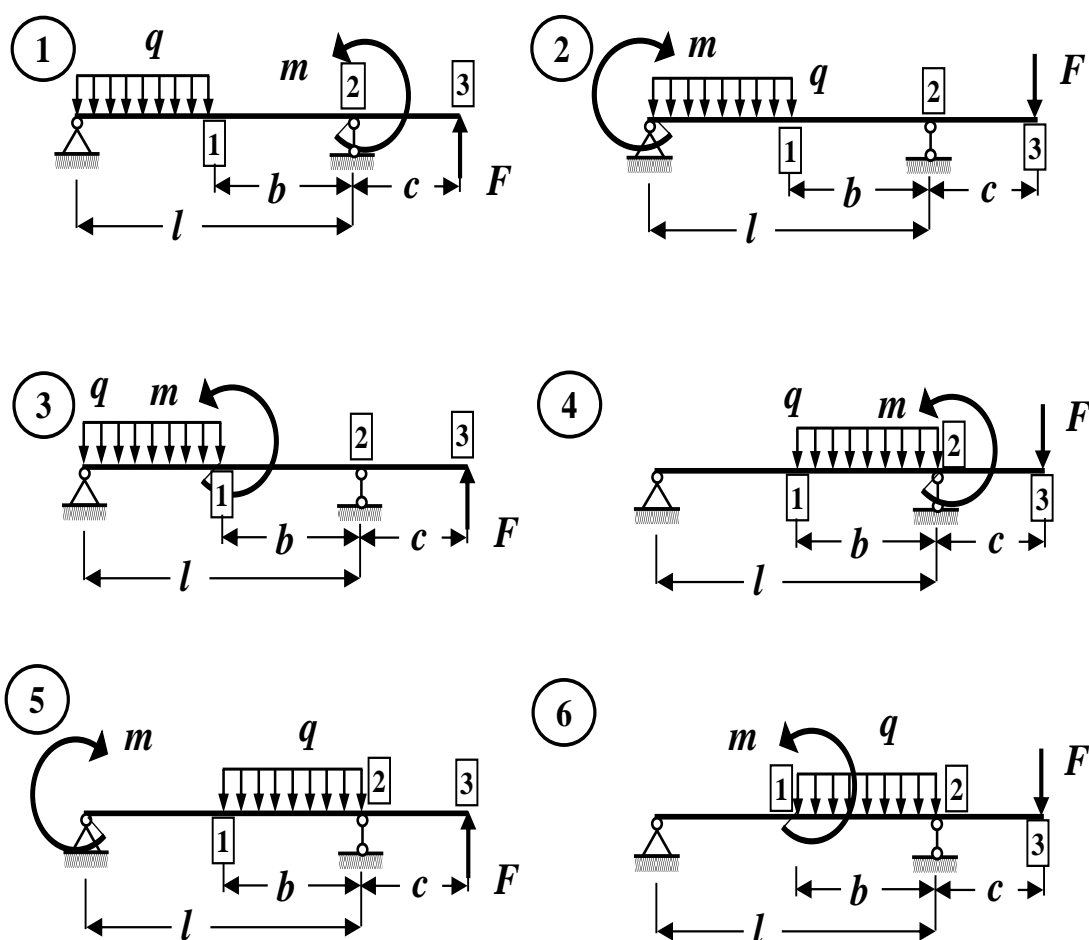
**Исходные данные**

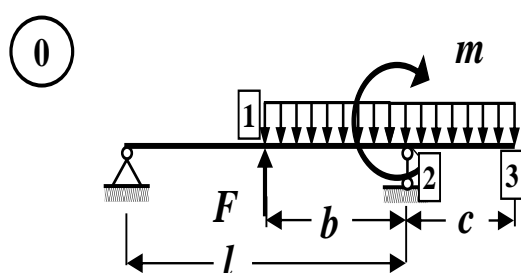
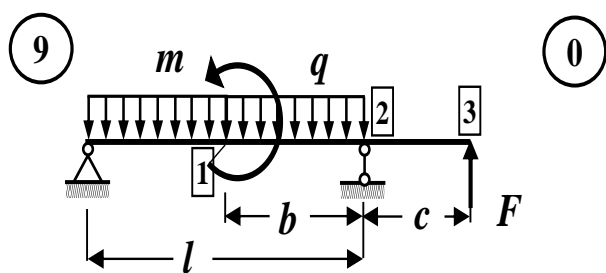
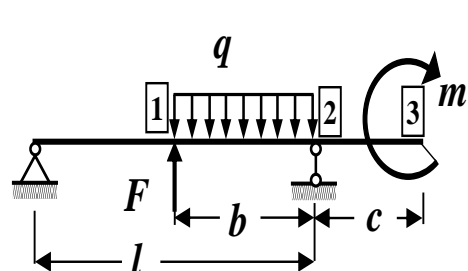
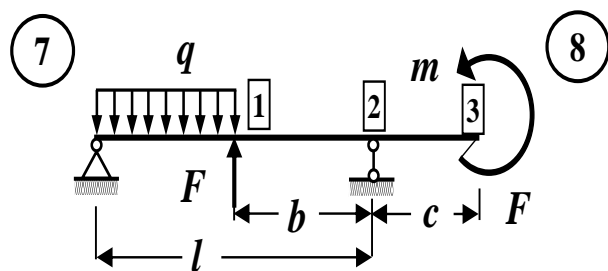
Первая цифра шифра	$F$ , кН	Вторая цифра шифра	$q$ , кН/м	$l$ , м	$\frac{b}{l}$	Третья цифра шифра (№ схемы)	$m$ , кНм	$\frac{c}{l}$	№ сечения	Вид перемещения
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
1	20	1	2	3,5	0,3	1	2	0,2	1	Угол поворота
2	18	2	4	3	0,4	2	18	0,3	2	Угол поворота
3	16	3	5	2,5	0,5	3	16	0,2	3	Угол поворота
4	14	4	6	2	0,6	4	14	0,3	1	Угол поворота
5	12	5	8	1,5	0,7	5	12	0,2	2	Угол поворота
6	10	6	2	3,5	0,3	6	10	0,2	1	Прогиб

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7	8	7	4	3	0,4	7	8	0,3	3	Прогиб
8	6	8	5	2,5	0,5	8	6	0,2	1	Прогиб
9	4	9	6	2	0,6	9	8	0,3	3	Прогиб
0	2	0	8	1,5	0,7	0	10	0,2	1	Прогиб

Таблица 2

## Расчетная схема балки





## 2.2. ЗАДАЧА №2. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ КОРОТКОГО СТЕРЖНЯ

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого приведено в таблице 2, сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $K$ .

Требуется:

1. Вычислить величины наибольших растягивающих и сжимающих напряжений в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через  $F$ .
2. Из условий прочности найти допускаемую нагрузку  $[F]$  при заданных значениях допускаемых нормальных напряжений для чугуна на сжатие  $[\sigma_c]$  и на растяжение  $[\sigma_p]$ .

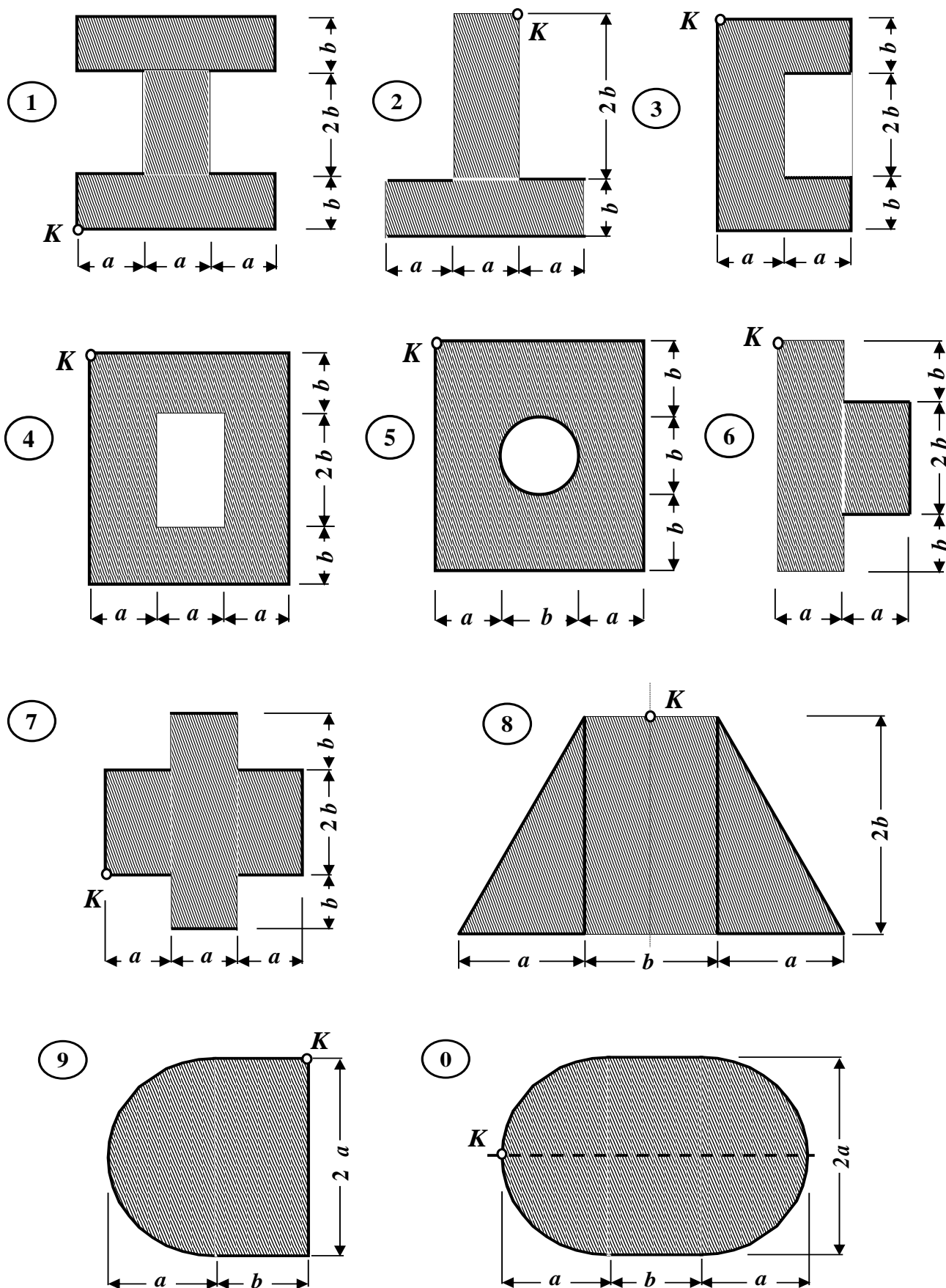
Исходные данные для решения задачи выбрать из табл. 1 в соответствии с личным шифром.

Таблица 1

Исходные данные

Первая цифра шифра	$a$ , см	Вторая цифра шифра	$[\sigma_c]$ , МПа	Третья цифра шифра (№ схемы)	$b$ , см	$[\sigma_p]$ , МПа
1	2	3	4	5	6	7
1	2,1	1	110	1	2,1	21
2	2,2	2	120	2	2,2	22
3	2,3	3	130	3	2,3	23
4	2,4	4	140	4	2,4	24
5	2,5	5	150	5	2,5	25
6	2,6	6	60	6	2,6	26
7	2,7	7	70	7	2,7	27
8	2,8	8	80	8	2,8	28
9	2,9	9	90	9	2,9	29
0	3,0	0	100	0	3,0	30

## Схема поперечного сечения стержня



### 2.3. ЗАДАЧА № 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Стальной стержень длиной  $l$  сжимается силой  $F$  (табл.2, 3).

**Требуется:**

1. Из условия устойчивости подобрать размеры поперечного сечения стержня при допуске нормальном напряжении  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Расчет проводить с помощью метода последовательных приближений, предварительно задавшись величиной коэффициента  $\varphi = 0,5$ .

Если гибкость стойки в первом приближении окажется меньше 50, необходимо проектную длину стойки увеличить в 2 раза, а при гибкости более 150 – уменьшить в 2 раза.

2. Проверить выполнение условия устойчивости.

3. Определить величину критической силы. Принять модуль упругости для стального стержня  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

4. Найти значения допускаемой нагрузки и коэффициента запаса устойчивости.

Исходные данные для решения задачи выбрать из табл. 1 в соответствии с личным шифром.

Таблица 1

**Исходные данные**

Первая цифра шифра	$F$ , кН	Вторая цифра шифра	$l$ , м	№ схемы закрепления концов стержня (по табл.2)	Третья цифра шифра	Форма сечения стержня (по табл. 3)
1	2	3	4	5	6	7
1	100	1	2,1	1	1	1
2	200	2	2,2	2	2	2
3	300	3	2,3	3	3	3
4	400	4	2,4	4	4	4

1	2	3	4	5	6	7
5	500	5	2,5	5	5	5
6	600	6	2,6	6	6	6
7	700	7	2,7	1	7	7
8	800	8	2,8	2	8	8
9	900	9	2,9	3	9	9
0	1000	0	3,0	4	0	0

Таблица 2

## Расчетная схема закрепления концов стержня

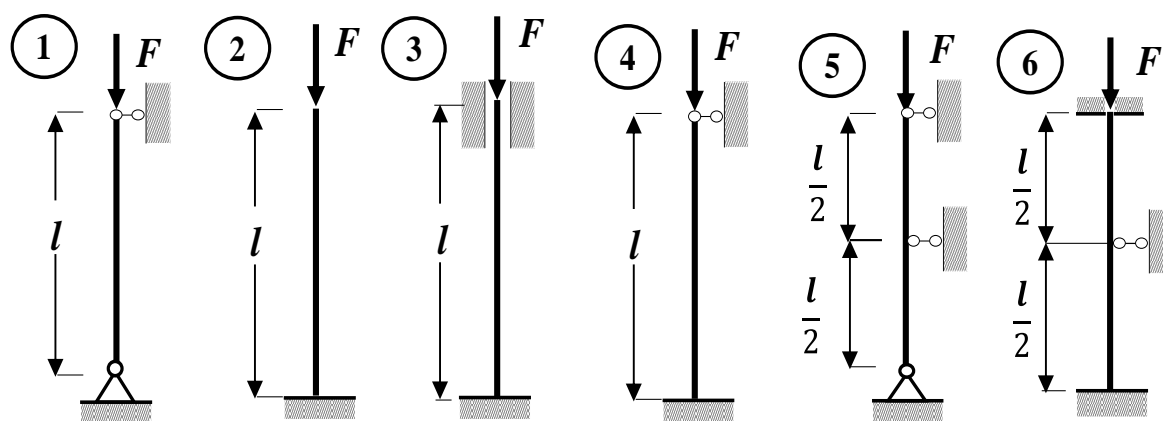
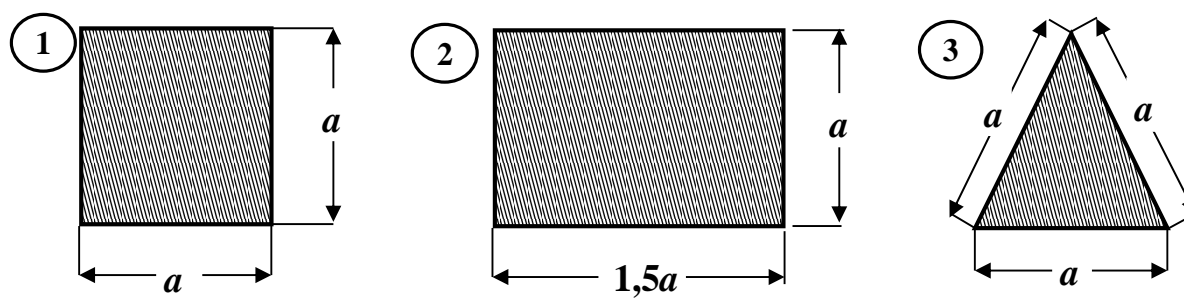
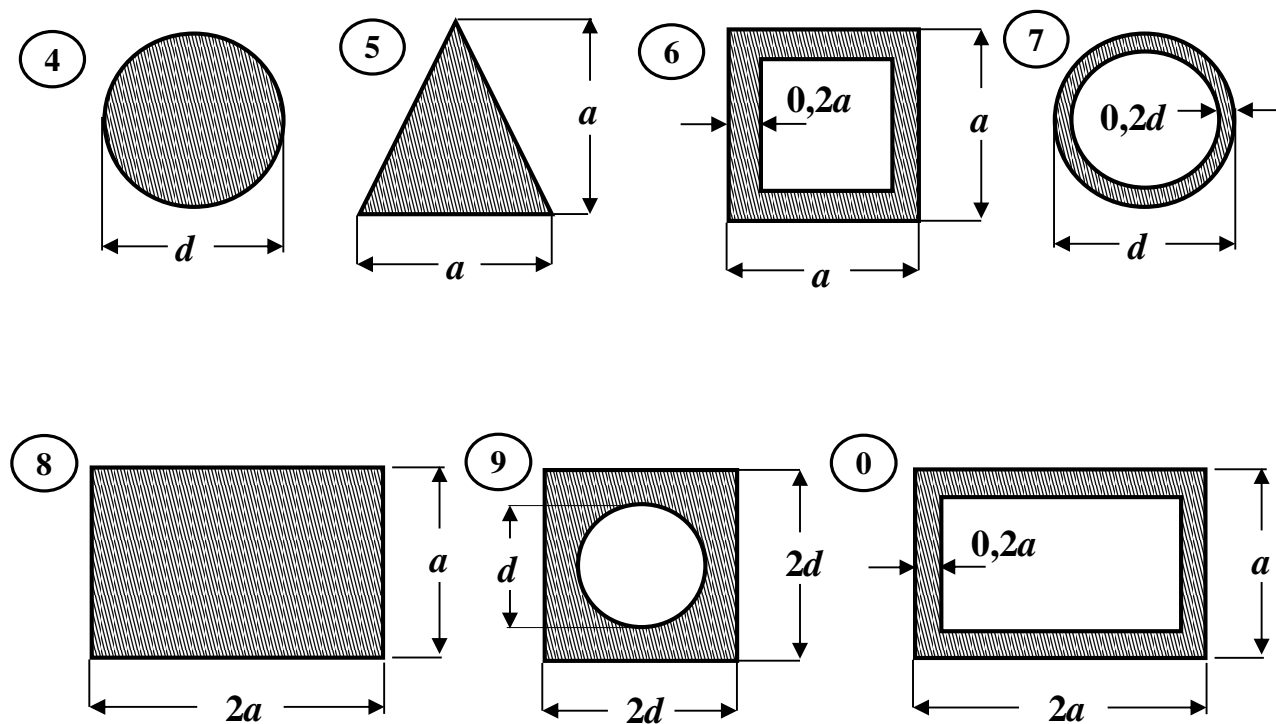


Таблица 3

## Форма поперечного сечения







#### 2.4. ЗАДАЧА № 4. ИЗГИБАЮЩИЙ (ПОПЕРЕЧНЫЙ) УДАР

На двутавровую балку, свободно лежащую на двух опорах (табл. 2), с высоты  $h$  падает груз  $Q$ .

Требуется:

1. Найти наибольшие напряжения в балке.

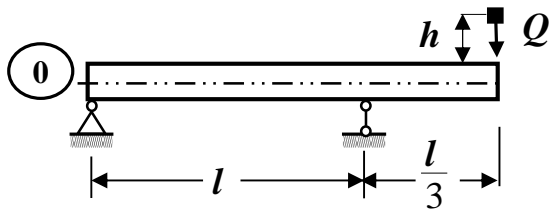
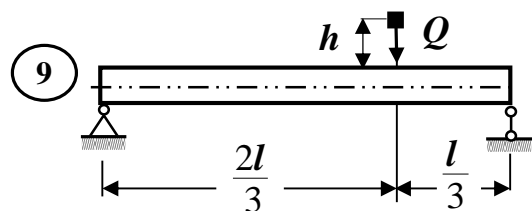
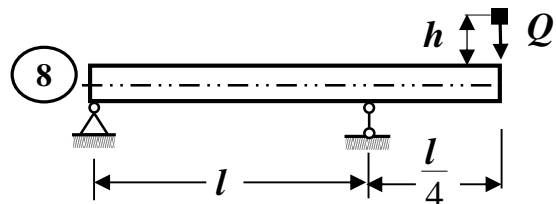
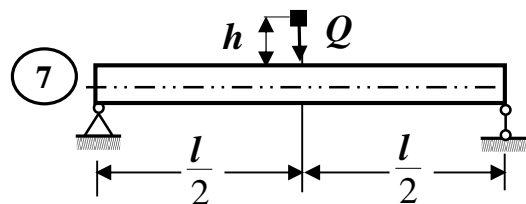
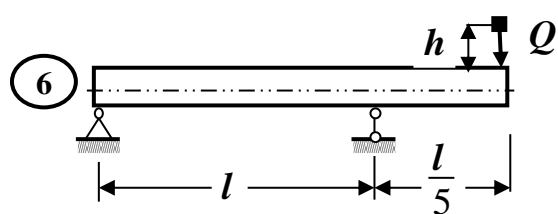
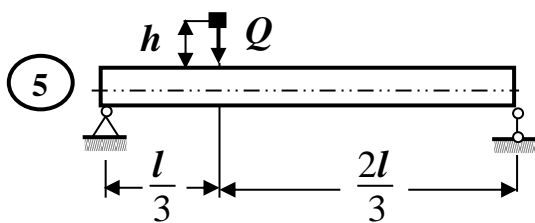
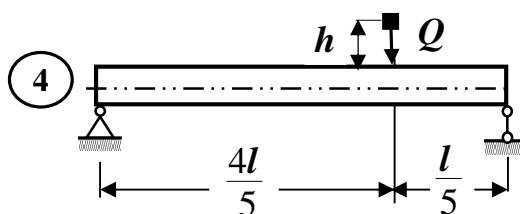
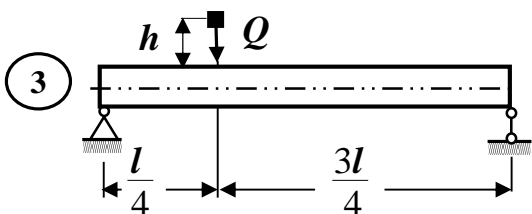
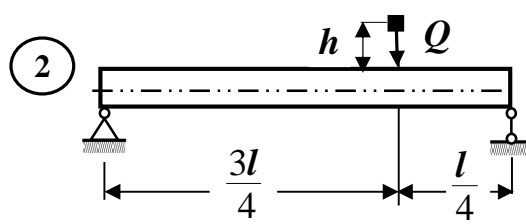
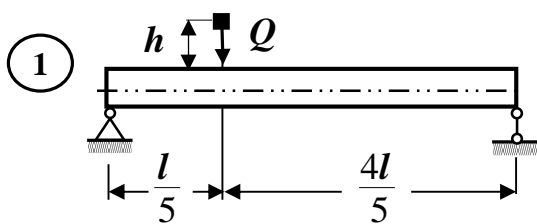
Исходные данные для решения задачи выбрать из **табл. 1** в соответствии с личным шифром.

Таблица 1

Исходные данные

Первая цифра шифра	$Q$ , Н	Вторая цифра шифра	$h$ , см	№ двутавра	Третья цифра шифра	$l$ , м
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
1	1100	1	11	20	1	2,1
2	1200	2	12	20a	2	2,2
3	300	3	3	24	3	2,3
4	400	4	4	24a	4	2,4
5	500	5	5	27	5	2,5
6	600	6	6	27a	6	2,1
7	700	7	7	30	7	2,2
8	800	8	8	30a	8	2,3
9	900	9	9	33	9	2,4
0	1000	0	10	36	0	2,5

## Расчетная схема балки



## РАЗДЕЛ 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

### 3.1. ТЕМА 1. РАСЧЕТ БАЛОК НА ЖЕСТКОСТЬ

#### 3.1.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

##### Перемещения при плоском изгибе. Основные понятия и определения

Ранее были рассмотрены вопросы, относящиеся к расчету балок на прочность. Однако в большом количестве случаев практического расчета стержневых и рамных систем, работающих на изгиб, необходимо также производить их расчет на жесткость.

Под расчетом на жесткость понимается оценка упругой податливости плоских стержневых систем под действием нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут превышать допускаемых величин.

Для выполнения таких расчетов необходимо научиться вычислять перемещения поперечных сечений плоских стержневых систем под действием любой внешней нагрузки. Кроме этого, перемещения приходится определять и при расчете статически неопределимых конструкций.

Под действием внешних нагрузок балка деформируется и ее ось искривляется (рис. 3.1).

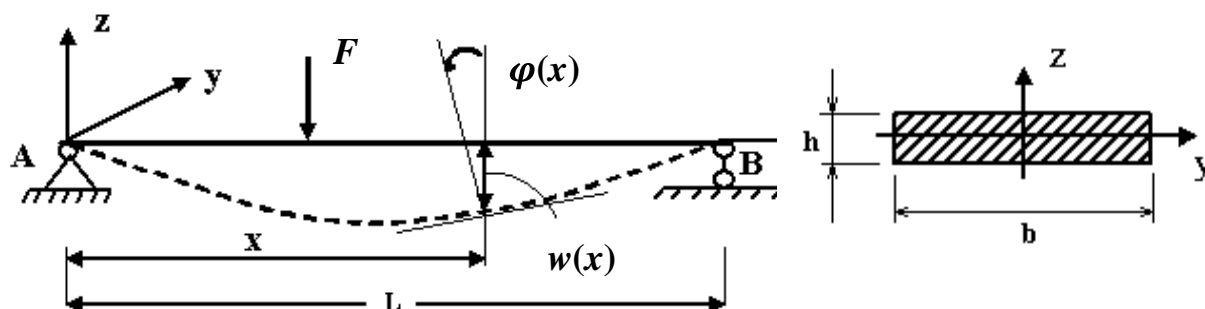


Рис. 3.1. Деформация балки при изгибе

Определение. Плоская кривая, форму которой принимает ось балки при изгибе, называется *изогнутой осью*, или *упругой линией*.

При деформации балки центры тяжести ее поперечных сечений получают линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются вокруг своих нейтральных осей. Допущение о малости перемещения позволяет считать, что направления линейных перемещений перпендикулярны продольной

(геометрической) оси недеформируемого бруса.

Определение. Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному геометрической оси балки, называется прогибом балки в данном сечении и обозначается буквой  $w$ .

Наибольший прогиб называется *стрелой прогиба* и обозначается буквой  $f$ .

Определение. Угол  $\varphi$ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения.

Таким образом, при изгибе балок точки ее геометрической оси ( $x$ ) получают поперечные перемещения или прогибы ( $w$ ), а поперечные сечения поворачиваются относительно своих нейтральных осей ( $y$ ) на угол  $\varphi$  (рис. 3.1).

*Прогибы ( $w$ ) и углы поворота ( $\varphi$ ) часто называют линейными и угловыми перемещениями соответственно.*

Правила знаков. Прогиб ( $w$ ) считается положительным, если он происходит вверх – в сторону положительной оси ординат  $z$ .

Угол поворота ( $\varphi$ ) считается положительным, если поперечное сечение поворачивается против хода часовой стрелки, если ось абсцисс  $x$  направлена слева направо.

Так, например, на рис. 3.1:

$$w(x) < 0, \text{ а } \varphi(x) > 0.$$

Прогибы балок измеряются в единицах длины (метрах, сантиметрах или миллиметрах), а углы поворота – в градусах или радианах.

Здесь и далее начало отсчета для координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  выбирается на левом конце балки.

Теория деформации балок, изучаемая в курсе сопротивления материалов, основывается на следующих предположениях (гипотезах):

1. Материал балки подчиняется закону Гука ( $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ), то есть напряжения в балке не выходят за предел пропорциональности.
2. Размеры поперечных сечений балки невелики по сравнению с ее длиной.
3. Прогибы балки ( $w$ ) малы по сравнению с ее длиной  $L$  /расстоянием между опорами балки/, то есть отношение наибольшего прогиба  $f$  к длине пролета  $L$  балки устанавливается в следующих пределах

$$\frac{f}{L} = \frac{1}{100} \div \frac{1}{1000},$$

где

$L$  – длина пролета балки (для консолей пролет  $L$  равен удвоенному вылету консоли).

4. Углы поворота поперечных сечений ( $\varphi$ ) не превышают  $1^\circ$

$$|\varphi_{max}| \leq 1^\circ = 0,0175 \text{ рад.}$$

В этом случае для определения прогибов  $w$  можно использовать приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$w''(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_y}, \quad (3.1)$$

где

$M(x)$  – выражение изгибающего момента, действующего в поперечном сечении балки на расстоянии  $x$  (на рассматриваемом участке балки);

$E$  – модуль упругости первого рода /модуль Юнга/;

$I_y$  – главный момент инерции поперечного сечения балки.

Определение. Величина  $EI_y$ , характеризующая сопротивляемость балки изменению ее первоначальной формы, называется *жесткостью балки* при изгибе.

Углы поворота поперечных сечений  $\varphi$  можно принимать равными первой производной от прогиба  $w$ .

Известно, что

$$w'(x) = \operatorname{tg} \varphi(x),$$

поэтому, в связи с малостью деформаций балок, можно считать, что  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ , то есть можно записать

$$w'(x) = \operatorname{tg} \varphi(x) \approx \varphi(x). \quad (3.2)$$

Для расчета балок на жесткость (определение перемещений в плоских стержневых системах) в курсе сопротивления материалов обычно изучают метод начальных параметров и метод Мора (интеграл Мора) с использованием правила Верещагина (правила «перемножения» эпюр).

Метод начальных параметров удобно применять в том случае, когда необходимо определить перемещения в нескольких сечениях балки. Основным недостатком этого метода является то, что его можно применять только для расчета балок.

Метод Мора, в отличие от метода начальных параметров, является универсальным. Его можно применять для определения перемещений любых объектов – балок, плоских и пространственных рам, арок и др.

#### **Определение перемещений в балках методом начальных параметров**

При определении перемещений балки методом начальных параметров (МНП), записывается универсальное уравнение прогибов, которое дает возможность определять прогиб в произвольном сечении балки при любой внешней нагрузке.

Универсальное уравнение прогибов имеет следующий вид

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI_y} \left[ \frac{M_0 x^2}{2} + \frac{F_0 x^3}{6} + \sum \frac{M_i (x-a_i)^2}{2} + \sum \frac{F_j (x-b_j)^3}{6} + \sum \frac{q_k (x-c_k)^4}{24} \right] \quad (3.3)$$

где

$w(x)$  – величина прогиба в произвольном сечении балки на расстоянии  $x$  от начала отсчета;

$w_0, \varphi_0$  – прогиб и угол поворота поперечного сечения в начале системы координат (кинематические начальные параметры);

$M_0, F_0$  – сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале системы координат (статические начальные параметры);

$M_i$  – сосредоточенный момент на расстоянии  $a_i > 0$  от начала координат;

$F_j$  – сосредоточенная сила на расстоянии  $b_j > 0$  от начала координат;

$q_k$  – интенсивность распределенной нагрузки, которая начинается на расстоянии  $c_k \geq 0$  от начала координат;

$EI_y$  – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

Соответственно, формула для вычисления углов поворота произвольных поперечных сечений балки определяется простым дифференцированием уравнения (3.3), так как  $\varphi(x) \approx w'(x)$ .

Статические начальные параметры  $M_0$  и  $F_0$  (сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале системы координат) могут быть известны (внешняя нагрузка) или должны быть определены из условий статики (опорные реакции).

Неизвестные кинематические начальные параметры  $w_0$  и  $\varphi_0$  определяются из условий закрепления балки (кинематические граничные условия).

Кинематические граничные условия отражают характер закрепления (опирания) балки и составляют относительно прогибов и углов поворота.

Для шарнирно опертой балки (рис. 3.2) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов на опорах

$$w_B = 0 \text{ и } w_D = 0.$$

Для жестко защемленной балки (рис. 3.3) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов и углов поворота в заделке

$$w_A = 0 \text{ и } \varphi_A = 0.$$

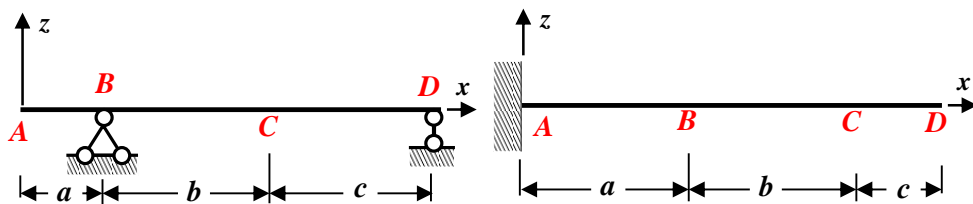


Рис. 3.2. Шарнирно опертая балка

Рис. 3.3. Жестко защемленная балка

Таким образом, для определения прогибов и углов поворота в произвольных поперечных сечениях балок методом начальных параметров достаточно лишь знаний величин прогиба  $w_0$  и угла поворота  $\varphi_0$  в начале системы координат, то есть так называемых кинематических начальных параметров. Поэтому данный метод называется *методом начальных параметров*.

Применение метода начальных параметров требует неперменного выполнения следующих требований Клебша:

1. Начало координат фиксируют на левом конце балки и в процессе решения задачи никуда не переносят, положительное направление оси  $z$  ( $w$ ) – вверх (рис. 3.4).

2. При действии распределенной нагрузки, не доходящей до правого конца балки, ее необходимо продолжить до правого концевое сечения, одновременно уравнивая ее противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности, как это показано пунктиром на рис. 3.4.

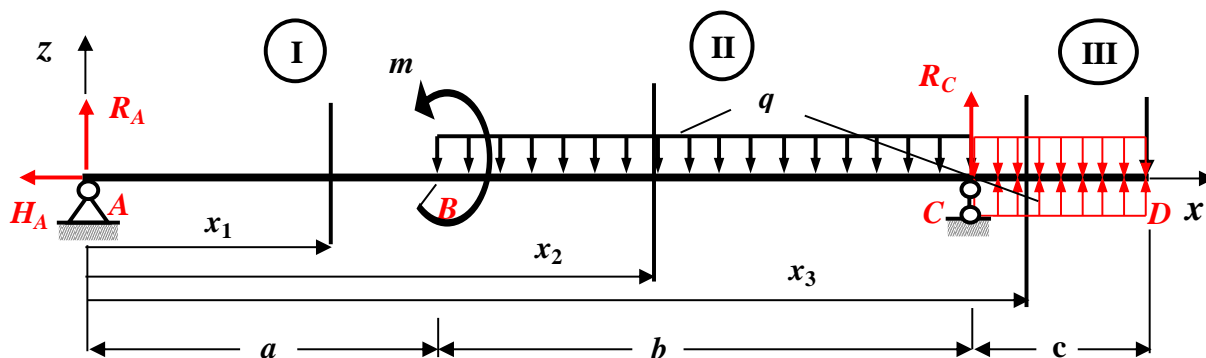


Рис. 3.4. Требования Клебша

Правила знаков. Нагрузки ( $M_0$ ,  $F_0$ ,  $M_b$ ,  $F_b$ ,  $q_k$ ) считаются положительными, если они направлены так, как показано на рис. 3.5, и отрицательными – в противном случае.

### Расчет балок на жесткость

#### Проверка выполнения условия жесткости балки

Определение. Сечение, в котором перемещение (прогиб балки) принимает

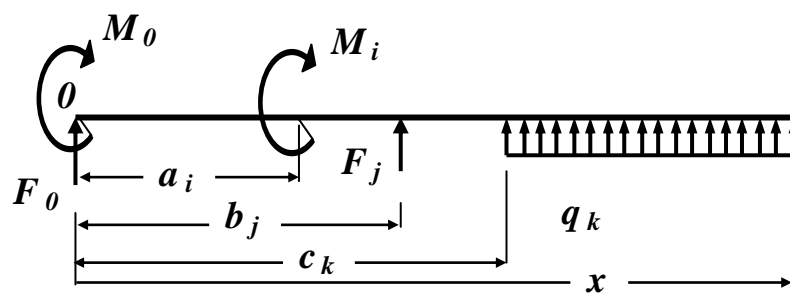


Рис. 3.5. Правила знаков метода начальных параметров

максимальное по абсолютной величине значение, называется опасным сечением балки из условия жесткости.

Условие жесткости при изгибе имеет вид

$$f \leq [f]. \quad (3.4)$$

Здесь

$f$  – стрела прогиба (максимальное по абсолютной величине значение прогиба);

$[f]$  – величина допускаемого прогиба.

Для проверки выполнения условия жесткости балки из эпюры прогибов определяется в опасном сечении балки максимальное по абсолютной величине значение прогиба  $|w_{max}| = f$ , которое подставляется в условие (3.4).

Величина допускаемого прогиба  $[f]$  для реальных сооружений приведена в СН и П и может изменяться в довольно широком диапазоне

$$[f] = \frac{L}{100} \div \frac{L}{1000},$$

где

$L$  – длина пролета (для консолей пролет  $L$  равен удвоенному вылету консоли).

Обычно условие жесткости балки (3.4) выполняется.

В противном случае, из условия жесткости  $f \leq [f]$  необходимо определить величину  $I_y^{треб}$  и подобрать новые размеры поперечного сечения балки.

Чтобы одновременно выполнялись условие прочности и условие жесткости, необходимо окончательно выбрать большее сечение.

### 3.1.2. Контрольные вопросы для самопроверки по теме

#### «Расчет балок на жесткость»

1. Какой вид деформации называется чистым изгибом?
2. Какой вид деформации называется плоским поперечным изгибом?



3. Какие перемещения получают поперечные сечения балок при плоском изгибе?

4. Что называется упругой линией (изогнутой осью) балки?

5. Что называется прогибом балки?

6. Что называется углом поворота поперечного сечения балки?

7. Запишите дифференциальную зависимость между прогибом и углом поворота сечений балки.

8. Напишите приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

9. Что называется жесткостью балки?

10. Напишите общий вид универсального уравнения для вычисления прогибов по методу начальных параметров.

11. Напишите общий вид универсального уравнения для вычисления углов поворота сечений по методу начальных параметров.

12. Из каких условий определяются неизвестные начальные параметры балки?

***После изучения этой темы можно приступить к решению задачи № 1, включенной в контрольную работу.***

### 3.1.3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 1

#### «Определение перемещений в статически определимой балке»

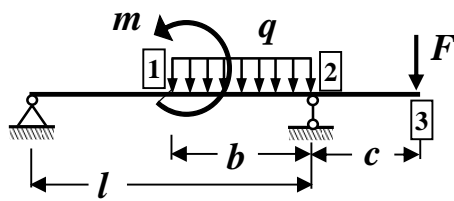


Рис. 3.6. Схема балки

Исходные данные:

$$l = 5 \text{ м}; \quad \frac{b}{l} = 0,6; \quad \frac{c}{l} = 0,2;$$

$$q = 15 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; \quad m = 20 \text{ кНм};$$

$$F = 30 \text{ кН}.$$

Для заданной схемы балки (рис. 3.6) требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. С помощью метода начальных параметров определить перемещения (прогиб и угол поворота) в сечениях балки 1, 2 и 3, считая, что жесткость поперечного сечения балки  $EJ_y = \text{const}$ .

#### Решение

##### 1. Определение опорных реакций

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Обозначим опоры буквами А и С и заменим их действие опорными реакциями  $R_A$ ,  $H_A$  и  $R_C$  (рис. 3.7)

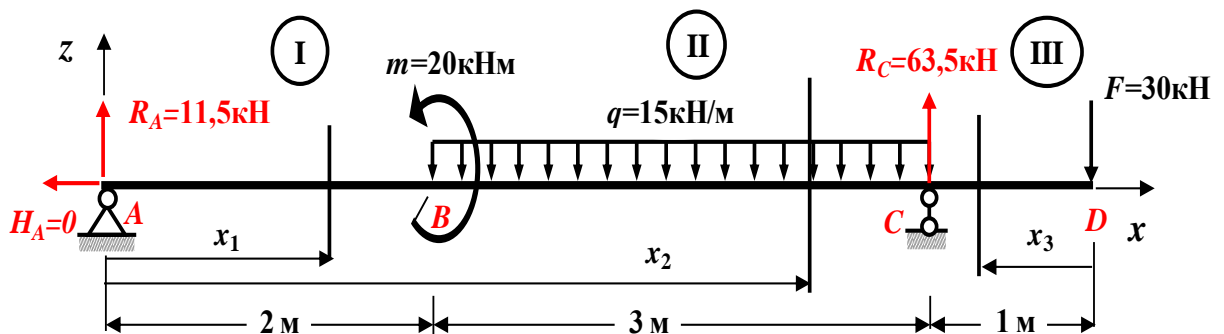


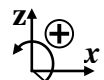
Рис. 3.7. Расчетная схема балки

Для определения опорных реакций составляем три уравнения статики (равновесия), с учетом правила знаков:

1. Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю

$$\sum F_x = 0: \quad -H_A = 0, \quad \rightarrow \quad H_A = 0.$$

2. Сумма моментов всех сил относительно опоры А равна нулю



$$\sum M_A = 0: m - q \cdot 3(2+1,5) + R_C \cdot 5 - F \cdot 6 = 0;$$

$$20 - 15 \cdot 3 \cdot 3,5 + R_C \cdot 5 - 30 \cdot 6 = 0;$$

$$20 - 157,5 + R_C \cdot 5 - 180 = 0;$$

$$-317,5 + R_C \cdot 5 = 0; \quad R_C = \frac{317,5}{5} = + 63,5 \text{ кН}; \rightarrow R_C = + 63,5 \text{ кН}.$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры C равна нулю

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot 5 + m + q \cdot 3 \cdot 1,5 - F \cdot 1 = 0;$$

$$-R_A \cdot 5 + 20 + 15 \cdot 4,5 - 30 = 0;$$

$$-R_A \cdot 5 + 20 + 67,5 - 30 = 0;$$

$$-R_A \cdot 5 + 57,5 = 0; \quad R_A = \frac{57,5}{5} = + 11,5 \text{ кН}; \rightarrow R_A = + 11,5 \text{ кН}.$$

*Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось z должна быть равна 0)*

$$\sum F_z = + R_A - q \cdot 3 + R_C - F = 11,5 - 15 \cdot 3 + 63,5 - 30 = 75 - 75 = 0 (\pm 5 \%).$$

**Вычисление методом начальных параметров численных значений углов поворота поперечных сечений и прогибов оси в сечениях балки**

*Считаем, что жесткость поперечного сечения балки  $EJ_y = \text{const}$ .*

Для определения перемещений балки используем универсальное уравнение метода начальных параметров (МНП), которое имеет следующий вид

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI_y} \left[ \frac{M_0 x^2}{2} + \frac{F_0 x^3}{6} + \sum \frac{M_i (x-a_i)^2}{2} + \sum \frac{F_j (x-b_j)^3}{6} + \sum \frac{q_k (x-c_k)^4}{24} \right],$$

где

$w(x)$  – величина прогиба в произвольном сечении балки на расстоянии  $x$  от начала отсчета;

$w_0, \varphi_0$  – прогиб и угол поворота поперечного сечения в начале координат (кинематические начальные параметры);

$M_0, F_0$  – сосредоточенный момент и сосредоточенная сила, действующие в начале координат (статические начальные параметры);

$M_i$  – сосредоточенный момент на расстоянии  $a_i > 0$  от начала координат;

$F_j$  – сосредоточенная сила на расстоянии  $b_j > 0$  от начала координат;

$q_k$  – интенсивность распределенной нагрузки, которая начинается на расстоянии  $c_k \geq 0$  от начала координат;

$EI_y$  – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

### Определение неизвестных начальных параметров

Неизвестные кинематические начальные параметры  $w_0$  и  $\varphi_0$  определяются из граничных условий (условий закрепления балки).

В нашей задаче балка закреплена на шарнирных опорах  $A$  и  $C$  (рис. 3.8), то есть граничные условия принимают вид

$$w_A = w(0) = 0 \text{ и } w_C = w(5) = 0.$$

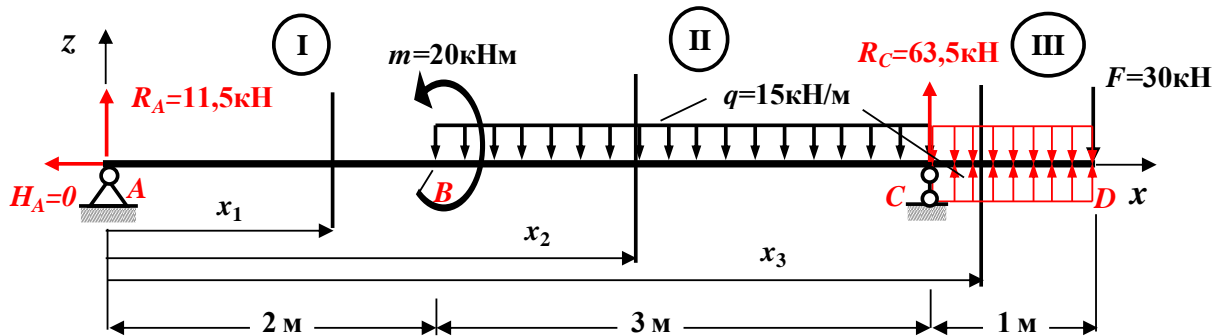


Рис. 3.8. Выполнение требования Клебша

Начальные параметры (начало отсчета на опоре  $A$ ) будут равны

$$w_0 = w_A = 0; \quad \varphi_0 = \varphi_A = ?; \quad M_0 = M_A = 0 \text{ кНм}; \quad F_0 = +R_A = +11,5 \text{ кН}.$$

Так как распределенная нагрузка не доходит до правого конца балки, то ее необходимо продолжить до правого концевого сечения, одновременно уравнивая ее противоположно направленной нагрузкой той же интенсивности, как это показано пунктиром на рис.3.8 (требование Клебша).

Расчетная схема балки имеет три участка ( $AB$ ,  $BC$  и  $CD$ ), которые пронумеруем слева направо (рис. 3.8)

**I участок  $AB$ :**  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$ ; **II участок  $BC$ :**  $2\text{м} \leq x_2 \leq 5\text{м}$ ;

**III участок  $CD$ :**  $5\text{м} \leq x_3 \leq 6\text{м}$

Уравнение метода начальных параметров для определения прогибов для нашей задачи имеет следующий вид

$$w(x) = \varphi_0 \cdot x + \frac{1}{EI_y} \left[ \left. \frac{R_A x^3}{6} \right|_I - \left. \frac{m(x-2)^2}{2} - \frac{q(x-2)^4}{24} \right|_{II} + \left. \frac{R_B(x-5)^3}{6} + \frac{q(x-5)^4}{24} \right|_{III} \right].$$

Смысл разделения этого уравнения вертикальными линиями заключается в следующем: для определения прогибов на **I** участке используются слагаемые до первой вертикальной линии (в нашем примере их два), на **II** участке – до второй вертикальной линии (в нашем примере их четыре), а на **III** участке – все слагаемые.

Для получения уравнения метода начальных параметров для определения

углов поворота поперечных сечений необходимо продифференцировать полученное выражение для определения прогибов, причем дифференцирование производится без раскрытия скобок. В результате получаем

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EJ_y} \left[ \left. \frac{R_A x^2}{2} \right|_I - m(x-2) - \frac{q(x-2)^3}{6} \right]_{II} + \frac{R_B (x-5)^2}{2} + \frac{q(x-5)^3}{6} \Big|_{III}$$

*Определяем неизвестный начальный параметр - угол поворота  $\varphi_0$ .*

Используя граничное условие  $w_c = w(5) = 0$ , то есть равенство нулю прогиба на опоре **C**, и выражение для определения прогибов для второго или третьего участков (так как сечение **C** принадлежит этим участкам), получаем уравнение для определения начального угла поворота

$$w_c = w(5m) = \varphi_0 \cdot 5m + \frac{1}{EJ_y} \left[ \frac{R_A (5m)^3}{6} - \frac{m(5m-2m)^2}{2} - \frac{q(5m-2m)^4}{24} \right] = 0;$$

$$\varphi_0 \cdot 5m + \frac{1}{EJ_y} \left[ \frac{11,5 \text{ кН} \cdot (5m)^3}{6} - \frac{20 \text{ кНм} (3m)^2}{2} - \frac{15 \text{ кН/м} (3m)^4}{24} \right] = 0;$$

$$\varphi_0 \cdot 5m + \frac{1}{EJ_y} [98,958 \text{ кНм}^3] = 0; \rightarrow \varphi_0 = - \frac{1}{EJ_y} \frac{98,958 \text{ кНм}^3}{5m} = - \frac{19,8 \text{ кНм}^2}{EJ_y}.$$

После определения численного значения  $\varphi_0$  необходимо сделать проверку, подставив полученное значение начального угла поворота  $\varphi_0$  в исходное уравнение для определения начального угла поворота и убедиться, что прогиб на опоре **C** равен нулю  $w_c = w(5m) = 0 (\pm 5 \%)$

$$w(5) = \frac{1 \text{ кНм}^3}{EJ_y} \left[ -19,8 \cdot 5 + \frac{11,5 \cdot 5^3}{6} - \frac{20 \cdot 3^2}{2} - \frac{15 \cdot 3^4}{24} \right] = \frac{[239,6 - 239,6] \text{ кНм}^3}{EJ_y} = 0$$

В нашей задаче эта проверка выполняется, следовательно, численное значение угла поворота  $\varphi_0$  определено правильно.

### **Вычисление численных значений углов поворота поперечных сечений и прогибов оси балки в сечениях 1, 2 и 3**

Подставляя численные значения  $\varphi_0$ ,  $R_A$ ,  $q$ ,  $m$  и  $R_B$  в уравнения метода начальных параметров для определения прогибов и углов поворота поперечных сечений для нашей задачи, получаем окончательные выражения для углов поворота поперечных сечений и прогибов для заданной балки

**I участок АВ:**  $0 \leq x_1 \leq 2m$ ;    **II участок ВС:**  $2m \leq x_2 \leq 5m$ ;

**III участок CD:**  $5m \leq x_3 \leq 6m$

$$\varphi(x) = \frac{1 \text{ кНм}^2}{EJ_y} \left[ -19,8 + \frac{11,5 x^2}{2} \right]_{I} - 20(x-2) - \frac{15(x-2)^3}{6} \Big|_{II} +$$

$$+ \frac{63,5(x-5)^2}{2} + \frac{15(x-5)^3}{6} \Big|_{\text{III}} \Big];$$

$$w(x) = \frac{1 \text{ кНм}^3}{EJ_y} \left[ -19,8x + \frac{11,5x^3}{6} \Big|_{\text{I}} - \frac{20(x-2)^2}{2} - \frac{15(x-2)^4}{24} \Big|_{\text{II}} + \right.$$

$$\left. + \frac{63,5(x-5)^3}{6} + \frac{15(x-5)^4}{24} \Big|_{\text{III}} \right].$$

**а). Определение численных значений углов поворота поперечных сечений 1, 2 и 3 балки**

Сечение 1:  $x = 2\text{м}$ ; I участок AB:  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$ ;

$$\varphi_1 = \varphi(2\text{м}) =$$

$$= \frac{1 \text{ кНм}^2}{EJ_y} \left( -19,8 + \frac{11,5 \cdot 2^2}{2} \right) = \frac{3,2 \text{ кНм}^2}{EJ_y}.$$

Сечение 2:  $x = 5\text{м}$ ; II участок BC:  $2\text{м} \leq x_2 \leq 5\text{м}$ ;

$$\varphi_2 = \varphi(5) = \frac{1 \text{ кНм}^2}{EJ_y} \left( -19,8 + \frac{11,5 \cdot 5^2}{2} - 20(5-2) - \frac{15(5-2)^3}{6} \right) = -\frac{3,55 \text{ кНм}^2}{EJ_y}.$$

Сечение 3:  $x = 6\text{м}$  III участок CD:  $5\text{м} \leq x_3 \leq 6\text{м}$

$$\varphi_3 =$$

$$\varphi(6) = \frac{1 \text{ кНм}^2}{EJ_y} \left( -19,8 + \frac{11,5 \cdot 6^2}{2} - 20(6-2) - \frac{15(6-2)^3}{6} + \frac{63,5(6-5)^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{15(6-5)^3}{6} \right) = \frac{-18,55 \text{ кНм}^2}{EJ_y}.$$

**б). Определение численных значений прогибов оси балки в сечениях 1, 2 и 3**

Сечение 1:  $x = 2\text{м}$ ; I участок AB:  $0 \leq x_1 \leq 2\text{м}$ ;

$$w_1 = w(2\text{м}) = \frac{1 \text{ кНм}^3}{EJ_y} \left( -19,8 \cdot 2 + \frac{11,5 \cdot 2^3}{6} \right) = -\frac{24,27 \text{ кНм}^3}{EJ_y}.$$

Сечение 2:  $x = 5\text{м}$ ; II участок BC:  $2\text{м} \leq x_2 \leq 5\text{м}$ ;

$$w_2 = w(5\text{м}) = 0; \text{ (Опора C)}.$$

Сечение 3:  $x = 6\text{м}$  III участок CD:  $5\text{м} \leq x_3 \leq 6\text{м}$

$$w_3 = w(6\text{м}) = \frac{1 \text{ кНм}^3}{EJ_y} \left( -19,8 \cdot 6 + \frac{11,5 \cdot 6^3}{6} - \frac{20(6-2)^2}{2} - \frac{15(6-2)^4}{24} + \right.$$

$$\left. + \frac{63,5(6-5)^3}{6} + \frac{15(6-5)^4}{24} \right) = \frac{-13,59 \text{ кНм}^3}{EJ_y}.$$

## 3.2. ТЕМА 2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 3.2.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

#### Общие понятия. Группы сложного сопротивления

На практике часто встречаются случаи, когда в результате действия внешней нагрузки в поперечных сечениях бруса одновременно возникает несколько компонентов внутренних сил. В этих случаях создаются комбинации простых деформаций: кривой изгиб (плоский изгиб в двух плоскостях одновременно), внецентренное растяжение или сжатие (центральное растяжение или сжатие с плоским изгибом), одновременное действие кручения и плоского изгиба и т. д.

*При расчетах на сложное сопротивление обычно исходят из принципа независимости действия сил, который справедлив при малых деформациях.*

Поэтому в расчетах на сложное сопротивление бруса принцип независимости действия сил применяют тогда, когда влиянием деформаций, вызванных одним видом нагрузки, на результаты действия других видов нагрузок можно пренебречь (кривой изгиб, внецентренное растяжение или сжатие и т. д.). В противном случае этот принцип применять нельзя (одновременное действие кручения и плоского изгиба, сжатия (или растяжения) и кручения и т. д.).

Принцип независимости действия сил позволяет применить способ сложения действия сил, то есть, найдя напряжения, соответствующие отдельным простым видам деформаций, их суммируют.

Для применения указанного метода необходимо условиться относительно правила знаков.

Правила знаков для внутренних усилий. Продольную силу, как и прежде, будем считать положительной, если она в рассматриваемом сечении вызывает растягивающие напряжения.

Изгибающие моменты будем считать положительными, если они в точках первой четверти принятой системы координат (совпадающих с главными осями) вызывают растягивающие напряжения.

#### **Кривой изгиб**

Определение. Кривой изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента проходит через геометрическую ось балки, но не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения (рис. 3.9).

Различают два вида кривого изгиба: *плоский и пространственный.*

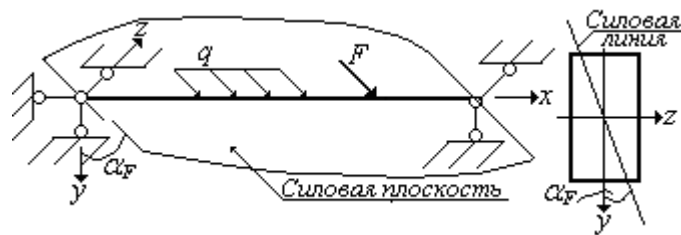


Рис. 3.9

При плоском косом изгибе внешние силы действуют в одной плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции.

Эта плоскость называется *силовой плоскостью*, а линия ее пересечения с плоскостью поперечного сечения балки – *силовой линией*.

При пространственном косом изгибе внешние силы действуют в разных плоскостях.

Обозначим через  $\alpha_F$  угол между силовой линией и вертикальной главной осью  $y$ .

Правило знаков. Угол  $\alpha_F$  будем считать положительным при повороте силовой линии от вертикальной главной оси  $y$  против хода часовой стрелки.

Как в случае пространственного, так и в случае плоского косоуго изгиба, наиболее целесообразно их приводить к двум прямым плоским изгибам.

Таким образом, косоуго изгиб можно рассматривать как сочетание двух прямых плоских изгибов, вызванных изгибающими моментами относительно главных центральных осей инерции поперечного сечения, то есть суммарный изгибающий момент  $M$ , действующий в сечении балки, можно разложить на два изгибающих момента  $M_y$  и  $M_z$ , действующих в главных плоскостях инерции

$$M_y = M \cdot \sin \alpha_F; \quad M_z = M \cdot \cos \alpha_F ,$$

где

$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$  – суммарный изгибающий момент в рассматриваемом сечении.

Отсюда, угол  $\alpha_F$  можно выразить через отношение изгибающих моментов

$$\operatorname{tg} \alpha_F = \frac{M_y}{M_z} \quad (3.5)$$

Если изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  имеют одинаковые знаки, то угол  $\alpha_F$  положителен. В этом случае силовая линия проходит через первую и третью четверти принятой системы координат.

### Определение напряжений при косом изгибе

В соответствии с принципом независимости действия сил, нормальные напряжения при косом изгибе в произвольной точке сечения с координатами  $y$



и  $z$ , вызванные изгибающими моментами  $M_z$  и  $M_y$ , определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (3.6)$$

или

$$\sigma = M \cdot \left( \frac{y \cdot \cos \alpha_F}{I_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha_F}{I_y} \right), \quad (3.7)$$

где

$J_y$  – момент инерции сечения относительно главной оси  $y$ ;

$J_z$  – момент инерции сечения относительно главной оси  $z$ ;

$\alpha_F$  – угол между силовой линией и вертикальной главной осью  $y$ .

### **Положение нейтральной (нулевой) линии при косом изгибе**

Для определения опасных точек в поперечном сечении балки при косом изгибе целесообразно предварительно построить нейтральную (нулевую) линию сечения. Опасными в сечении будут точки, наиболее удаленные от нейтральной линии.

Определение. Нейтральной осью (нулевой линией) называется геометрическое место точек поперечного сечения балки, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Следовательно, положение нейтральной линии при косом изгибе можно установить, если приравнять нулю напряжения в точках, принадлежащих этой линии.

При косом изгибе напряжения  $\sigma$  изменяются по линейному закону. Положив  $\sigma = 0$ , получим уравнение нейтральной линии.

После преобразований получим формулу нейтральной линии (оси) при косом изгибе

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha_F \quad (3.8)$$

В этой формуле

$\alpha_0$  – угол между нейтральной линией и горизонтальной главной осью  $z$ ;

$\alpha_F$  – угол между силовой линией и вертикальной главной осью  $y$ .

Нейтральная (нулевая) линия при косом изгибе по отношению к силовой линии проходит через две другие четверти осей координат.

Отсюда следует, что угол  $\alpha_0$  откладывается от горизонтальной главной оси  $z$  в ту же сторону, что и угол  $\alpha_F$  от вертикальной главной оси  $y$  (рис. 3.10).

Анализируя формулу (3.8)

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha_F,$$

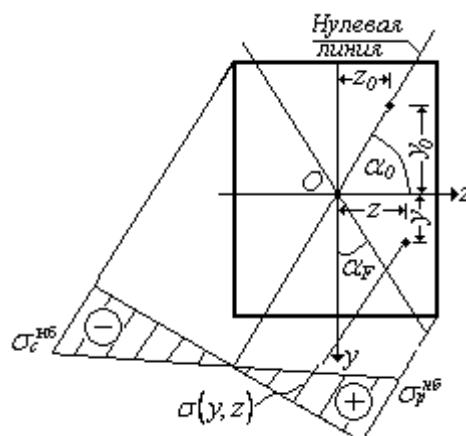


Рис. 3.10

находим, что в отличие от прямого плоского изгиба при косом изгибе нулевая и силовая линии в общем случае (когда  $I_y \neq I_z$ ) не будут взаимно перпендикулярны (рис. 3.10).

Таким образом, нейтральная ось при косом изгибе проходит через центр тяжести поперечного сечения не перпендикулярно к силовой линии.

Нулевая линия будет перпендикулярна силовой только при  $I_y = I_z$ , то есть, когда главные центральные моменты инерции поперечного сечения балки одинаковы. Но в этом случае, как известно, любые центральные оси сечения являются главными и, следовательно, косой изгиб *невозможен*.

Из формулы (3.8) также следует, что положение нейтральной (нулевой) линии при косом изгибе не зависит от величины изгибающего момента.

### Условие прочности при косом изгибе

Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нулевой линии (нейтральной оси). Для сечений типа прямоугольника и двутавра, имеющих две оси симметрии, наибольшие по абсолютной величине напряжения целесообразно вычислять по формуле

$$\sigma_{nb} = \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \quad (3.9)$$

На рисунке 3.10 показан вид эпюры нормальных напряжений для прямоугольного сечения при положительных значениях  $M_y$  и  $M_z$ . В этом случае наибольшие растягивающие  $\sigma_r^{nb}$  и сжимающие  $\sigma_c^{nb}$  напряжения возникают в двух угловых точках сечения.

Условие прочности при косом изгибе для балок с рассмотренным типом поперечных сечений имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma], \quad (3.10)$$

а в случае произвольного сечения

$$\sigma_{max} = \left| \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max} \right| \leq [\sigma]. \quad (3.11)$$

Подбор размеров поперечного сечения балки при косом изгибе является задачей более сложной, чем при плоском поперечном изгибе.

Условие прочности принимает вид

$$\sigma_{max} = \frac{|M \cdot \sin \alpha_F|}{W_y} + \frac{|M \cdot \cos \alpha_F|}{W_z} \leq [\sigma],$$

или

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_z} \cdot \left( \frac{W_z}{W_y} \cdot |\sin \alpha_F| + \cos \alpha_F \right) \leq [\sigma]. \quad (3.12)$$

Подбор размеров поперечного сечения балки производят по формуле

$$W_z \geq \frac{|M|}{[\sigma]} \cdot \left( \frac{W_z}{W_y} \cdot |\sin \alpha_F| + \cos \alpha_F \right). \quad (3.13)$$

Сначала необходимо задаться отношением  $\frac{W_z}{W_y}$ , а затем находить размеры поперечного сечения балки методом подбора.

*Для хрупкого материала в качестве  $[\sigma]$  необходимо принимать допускаемое напряжение на растяжение.*

### Определение деформаций при косом изгибе

Для определения прогибов в балке, работающей на косоу изгиб, снова воспользуемся принципом независимости действия сил.

Так как косоу изгиб представляет собой сочетание двух плоских изгибов, то перемещения в балках при косоу изгибе могут определяться теми же методами, что и при плоском изгибе. Для этого необходимо нагрузки, действующие на балку, разложить на составляющие, параллельные главным центральным осям  $y$  и  $z$ , и определить по отдельности прогибы  $v$  и  $w$  по направлениям этих осей (рис. 3.11).

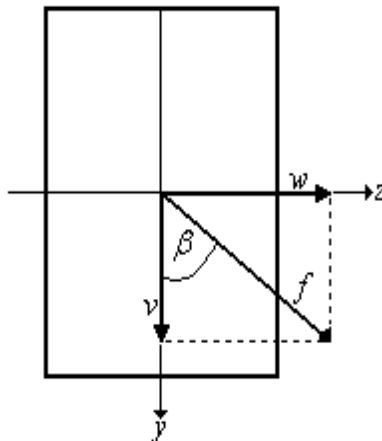


Рис. 3.11

Полный прогиб в произвольном сечении балки определяются по формуле

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}. \quad (3.14)$$

Направление полного прогиба в произвольном сечении балки определяется по формулам

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w}{v}$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha_F. \quad (3.15)$$

В этих формулах

$\beta$  – угол между направлением суммарного прогиба и вертикальной главной центральной осью  $y$ .

$\alpha_F$  – угол между силовой линией и вертикальной главной осью  $y$ .

Аналогично могут быть найдены углы поворота произвольных сечений балки.

При плоском косом изгибе балки ее изогнутая ось, представляет собой плоскую кривую.

Формула (3.15) идентична с формулой (3.8). Следовательно, угол  $\alpha_0 = \beta$ , то есть *направление полного прогиба перпендикулярно нейтральной (нулевой) линии.*

*Таким образом, при косом изгибе направление полного прогиба (плоскость деформации) не совпадает с плоскостью нагрузки (силовой плоскостью), а значительно отклоняется от нее в сторону плоскости наименьшей жесткости балки.*

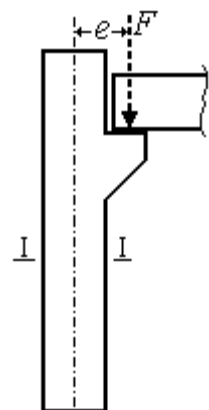
Это обстоятельство объясняет, почему такой изгиб называется косым.

Когда  $I_y = I_z$  (круглое сечение, правильный многоугольник и т.д.) плоскость деформации (полный прогиб) совпадает с силовой плоскостью. В этих случаях косой изгиб невозможен.

### **Внецентренное растяжение или сжатие брусев большой жесткости**

Многие элементы строительных конструкций (колонны, стойки и др.) находятся под воздействием сжимающих сил, приложенных вне центра тяжести сечения. Например, балка перекрытия, опирающаяся на колонну, передает нагрузку с эксцентриситетом  $e$  и, следовательно, в произвольном сечении  $I - I$  колонны возникает продольная сила  $N = F$  и изгибающий момент, равный  $F \cdot e$ .

Определение. Если на брус действуют продольные



сжимающие или растягивающие силы, параллельной оси бруса, но приложенные не в центре тяжести сечения, то такое сопротивление бруса называют внецентренным сжатием или растяжением.

В поперечном сечении стержня при этом одновременно действуют продольная (растягивающая или сжимающая) сила и изгибающий момент, плоскость действия которого, в общем случае, не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции сечения. В этом сечении может действовать также и поперечная сила.

Внецентренно растянутый или сжатый стержень, при расчете которого можно не учитывать дополнительные изгибающие моменты, равные произведениям продольных внешних сил  $F$  на прогибы  $v$ , называются жесткими, а стержень, при расчете которого их необходимо учитывать – гибкими.

### Формула нормальных напряжений

Пусть на стержень произвольного сечения действует одна сила  $F$ , параллельная его продольной оси и приложенная не в центре тяжести сечения.

Координаты точки приложения силы относительно главных центральных осей обозначим через  $y_f$  и  $z_f$ , а расстояние этой точки до центра тяжести сечения, называемое эксцентриситетом, – через  $e$  (рис. 3.12, а).

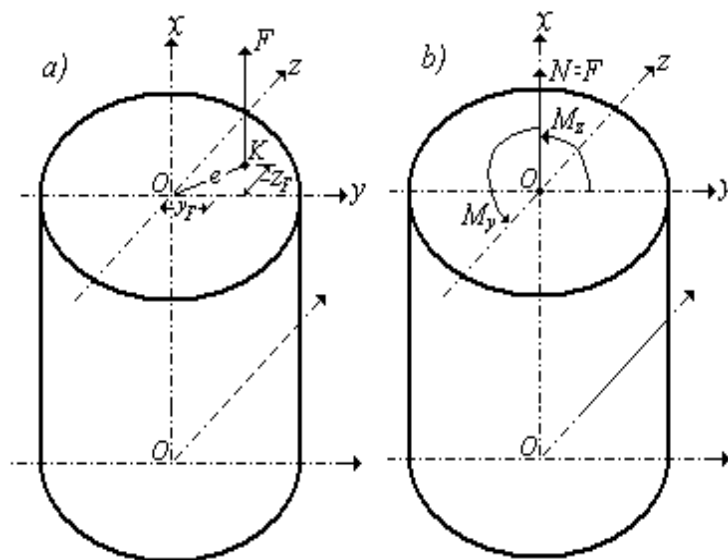


Рис. 3.12

Для любого поперечного сечения действие внецентренно приложенной силы  $F$  можно заменить действием нормальной силы  $N = F$ , приложенной в центре тяжести сечения, и действием двух изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$  (рис. 3.12, б).

Таким образом, в соответствии с принципом независимости действия сил,

нормальные напряжения при внецентренном растяжении (сжатии) в произвольной точке сечения будут складываться из напряжений центрального растяжения (сжатия), вызванных продольной силой  $N = \pm F$ , и напряжений от изгиба, вызванных изгибающими моментами  $M_y$  и  $M_z$ ,

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (3.16)$$

При этом

$$M_z = F \cdot y_F; \quad M_y = F \cdot z_F; \quad N = \pm F; \quad I_y = A \cdot i_y^2; \quad I_z = A \cdot i_z^2.$$

После преобразований формула для определения напряжений в произвольной точке сечения с координатами  $y$  и  $z$  при внецентренном растяжении (сжатии) принимает вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right) \quad (3.17)$$

В этих формулах

$\sigma$  – величина нормального напряжения в любой точке сечения с координатами  $y$  и  $z$ ;

$N$  – величина продольной силы;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$y_F, z_F$  – координаты точки приложения внешней силы  $F$ , взятые относительно главных центральных осей сечения стержня;

$i_y^2 = \frac{J_y}{A}$ ,  $i_z^2 = \frac{J_z}{A}$  – квадраты радиусов инерции сечения относительно главных центральных осей.

#### **Положение нейтральной (нулевой) линии при внецентренном растяжении (сжатии)**

Для определения опасных точек в поперечном сечении бруса при внецентренном растяжении (сжатии) целесообразно предварительно построить нейтральную (нулевую) линию сечения. Опасными в сечении будут точки **1** и **2**, наиболее удаленные от нейтральной (нулевой) линии (рис. 3.13).

Определение. Нейтральной осью (нулевой линией) называется геометрическое место точек поперечного сечения бруса, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Следовательно, положение нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии) можно установить, если приравнять нулю напряжения в точках, принадлежащих этой линии.

После преобразований получим уравнение нейтральной линии в виде отрезков  $a_y$  и  $a_z$  (рис. 3.13), отсекаемых этой линией на главных центральных осях  $y$  и  $z$ ,

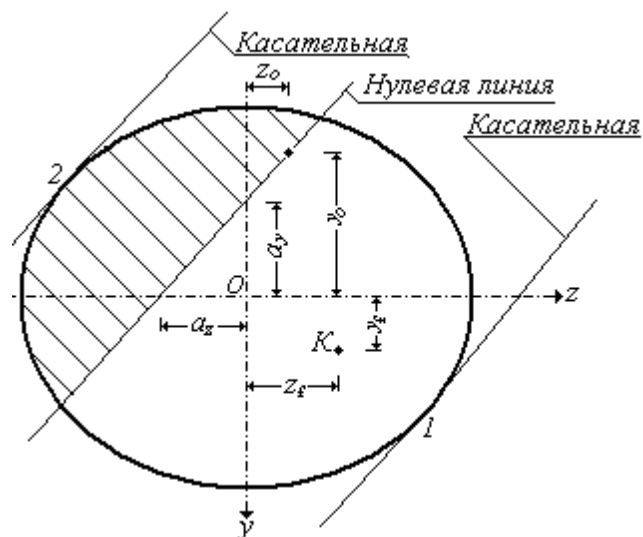


Рис. 3.13

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}. \quad (3.18)$$

### Свойства нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии)

- Точка приложения  $K$  внецентренно действующей силы и соответствующая ей нейтральная линия находятся по разные стороны от центра тяжести сечения, то есть нейтральная линия пересекает координатные оси в точках, принадлежащих квадранту, противоположному тому, в котором находится точка приложения силы.
- При приближении точки приложения  $K$  внецентренно действующей силы к центру тяжести сечения, нейтральная линия удаляется от него.
- При удалении точки приложения  $K$  внецентренно действующей силы от центра тяжести сечения, нейтральная линия приближается к нему.
- Если точка приложения  $K$  внецентренно действующей силы располагается на одной из главных центральных осей сечения, то нейтральная линия будет перпендикулярна этой оси.
- Если точка приложения  $K$  внецентренно действующей силы перемещается вдоль некоторой прямой  $a - b$  (рис. 3.14), то соответствующая ей нейтральная линия вращается вокруг вполне определенной точки  $C$ . /Прямая теорема/.
- Если нейтральная линия вращается вокруг некоторой точки  $C$  (рис. 3.14), то соответствующая точка приложения  $K$  внецентренно действующей силы перемещается вдоль некоторой вполне определенной прямой  $a - b$ . /Обратная теорема/.



Рис. 3.14

- Положение нейтральной линии не зависит от величины внецентренно действующей силы.

### Условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии)

Наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси (нулевой линии).

Проведем параллельно нейтральной линии касательные к контуру сечения и найдем опасные точки **1** и **2** в растянутой и сжатой зонах (рис. 3.13).

Условия прочности для этих точек при внецентренном растяжении (сжатии) имеют вид

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right) \leq [\sigma] \quad (3.19)$$

Эта формула справедлива и в случае действия сжимающей силы **F**, если нет опасности возникновения продольного изгиба.

Расчет на прочность бруса, сжатого или растянутого внецентренно приложенной продольной внешней силой (т. е. при отсутствии поперечных сил), проводится наиболее просто, так как в этом случае внутренние усилия одинаковые во всех поперечных сечениях стержня. Для стержня с постоянными размерами сечения в пределах каждого участка все сечения являются равно опасными. Для стержня с переменными поперечными размерами сечения опасным в пределах каждого участка является сечение наименьшего размера.

При пластичном материале для проверки прочности достаточно определить напряжение в точке с наибольшим по абсолютной величине нормальным напряжением. При хрупком материале необходимо определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения.

### Ядро сечения. Построение ядра сечения

При внецентренном растяжении (сжатии) нейтральная линия в общем случае может проходить и вне сечения. Действительно, если внешняя сила **F**



приложена в центре тяжести сечения, то нейтральная линия находится в бесконечности, так как напряжения в этом случае распределены по сечению *равномерно*.

По мере удаления точки приложения силы  $F$  от центра тяжести сечения, нейтральная линия будет приближаться к сечению и при некотором положении точки приложения внешней силы  $F$  впервые коснется контура сечения. При дальнейшем увеличении эксцентриситета нейтральная линия пересечет сечение. При этом нормальные напряжения в сечении будут растягивающие и сжимающие.

Представляет интерес найти такую область расположения точек приложения внешней силы  $F$ , при которых в поперечном сечении стержня напряжения будут только одного знака. Это важно для стержней плохо сопротивляющихся растяжению (бетон, кирпичная кладка, чугун). Для конструкций из таких материалов предпочтительно, чтобы в сечении напряжения  $\sigma \leq 0$ , то есть, чтобы нейтральная линия не пересекала контур поперечного сечения.

Такая область называется ядром сечения.

Определение. Ядром сечения называется выпуклая область, расположенная вокруг центра тяжести сечения, обладающая свойством, что внешняя продольная сила, приложенная в любой ее точке, вызывает по всему сечению напряжения одного знака.

При расчете внецентренно сжатых элементов, изготавливаемых из материала, плохо воспринимающего растягивающие напряжения, важно знать форму и размеры ядра сечения. Это позволяет, не вычисляя величину напряжений, по эксцентриситету сжимающей силы устанавливать, возникнут в поперечном сечении растягивающие напряжения или нет.

### **План построения ядра сечения**

1. Проводят нейтральные линии, соответствующие их предельному положению. Это будут касательные к поперечному сечению стержня.
2. Нумеруют их в последовательном порядке.
3. Для каждой из этих нейтральных линий находят соответствующую ей точку приложения силы.
4. Полученные точки соединяют одну с другой в том же порядке, в каком были пронумерованы касательные нейтральные линии.
5. Полученный контур является ядром сечения.

### Совместное действие изгиба с центральным растяжением (сжатием)

На практике часто встречаются случаи, когда на стержень действуют одновременно поперечные и продольные нагрузки. При этом продольные нагрузки могут быть приложены и внецентренно.

Если на балку действуют продольные и поперечные нагрузки, пересекающие ее ось, то в общем случае в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$ , действующие в двух плоскостях, поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , а также продольная сила  $N$  (рис. 3.15).

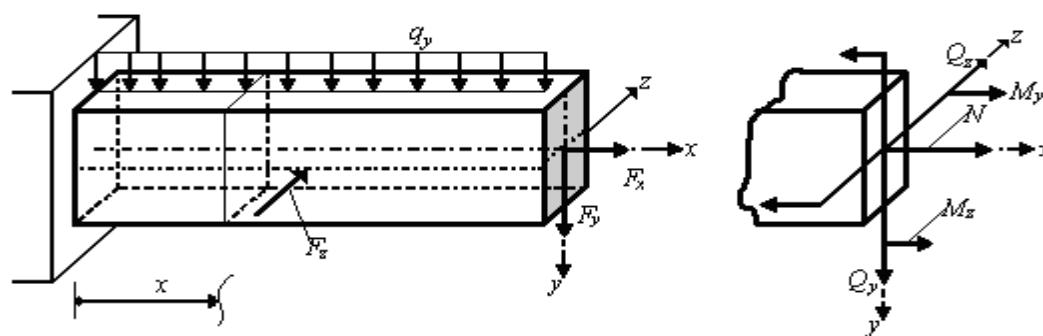


Рис. 3.15

Таким образом, в этом случае будет сложный (косой) изгиб с центральным растяжением или сжатием. Нормальное напряжение в произвольной точке сечения стержня в этом случае определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (3.20)$$

Изгибающие моменты, продольную силу и координаты точки, в которой вычисляют напряжения, подставляют в эту формулу со своими знаками.

Правила знаков. Продольная сила считается положительной, если она в рассматриваемом сечении балки вызывает растягивающие напряжения.

Изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  считаются положительными, если они вызывают растяжение в точках первой четверти рассматриваемого поперечного сечения балки.

### Расчет на прочность при совместном действии изгиба и центрального растяжения (сжатия)

Пренебрегая касательными напряжениями от поперечных сил, можно считать, что условие прочности в этом случае имеет вид

$$\sigma_{max} \leq [\sigma].$$

Наибольшие нормальные напряжения возникают в опасных точках

поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси (нулевой линии).

В случае расчета стержней произвольной формы поперечного сечения для определения опасных точек сечения необходимо предварительно установить положение нейтральной (нулевой) линии. Способ определения положения нейтральной линии был показан при рассмотрении внецентренного растяжения (сжатия).

Условие прочности для этих точек при совместном действии косоугольного изгиба и центрального растяжения (сжатия) имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \leq [\sigma] \quad (3.21)$$

В случае совместного действия плоского изгиба в главной плоскости *Oyx* и центрального растяжения (сжатия) трехчленная формула превращается в двухчленную

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y \leq [\sigma].$$

Эти формулы применяют и при расчете на прочность плоских рам и арок малой кривизны. Опасными в этом случае являются те сечения, где действует наибольший изгибающий момент.

При совместном действии изгиба и центрального сжатия применять полученные формулы можно лишь к коротким стержням большой жесткости, так как в случае тонкого длинного стержня возможна потеря устойчивости.

### **3.2.2. Контрольные вопросы для самопроверки по теме**

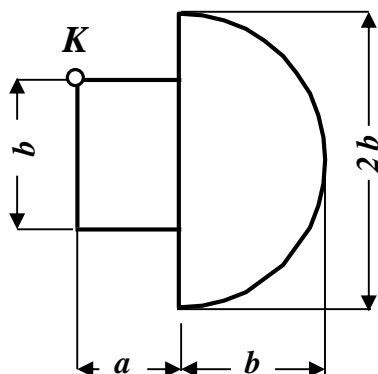
#### **«Сложное сопротивление»**

1. Какие случаи сопротивления стержней называются сложным сопротивлением?
2. В чем суть принципа независимости действия сил?
3. Какой вид деформации стержня называется косым изгибом?
4. К каким простейшим видам деформации можно свести косой изгиб?
5. Формула для определения нормальных напряжений в случае косоугольного изгиба?
6. Приведите уравнение нейтральной линии в случае косоугольного изгиба.
7. Какие точки поперечного сечения называются опасными? Как эти точки определяются в случае косоугольного изгиба?

8. Как определяется деформация балки в случае косого изгиба?
9. Какой вид деформации называется внецентренным растяжением или сжатием?
10. К каким простейшим видам деформации можно свести внецентренное растяжение (сжатие)?
11. Какой принцип используется для вывода формулы нормального напряжения в случае внецентренного действия силы?
12. Формула для определения нормальных напряжений в случае внецентренного действия силы.
13. Дайте определение нейтральной линии. Приведите уравнение нейтральной линии в случае внецентренного действия силы.
14. Перечислите свойства нейтральной линии в случае внецентренного действия силы.
15. Как определяется положение опасных точек в случае внецентренного действия силы.
16. Напишите условие прочности для хрупкого материала в случае внецентренного действия силы.
17. Какой вид имеет условие прочности для пластичного материала?
18. Дайте определение ядра сечения. План построения ядра сечения.
19. Формула для определения нормальных напряжений в случае одновременного действия изгиба и центрального растяжения (сжатия)?

***После изучения этой темы можно приступить к решению задачи № 2, включенной в контрольную работу.***

### 3.2.3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 2 «Внецентрированное сжатие короткого стержня»



Исходные данные:

$$a = 4 \text{ см}; \quad b = 6 \text{ см};$$

$$[\sigma_c] = 160 \text{ МПа} = 16 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right);$$

$$[\sigma_p] = 40 \text{ МПа} = 4 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right).$$

Рис. 3.16. Поперечное сечение

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 3.16, сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $K$ .

Требуется:

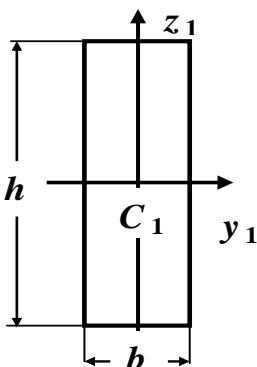
1. Вычислить величины наибольших растягивающих и сжимающих напряжений в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через  $F$ .

2. Из условий прочности найти допускаемую нагрузку  $[F]$  при заданных значениях допускаемых нормальных напряжений для чугуна на сжатие  $[\sigma_c]$  и на растяжение  $[\sigma_p]$ .

**Решение**

Используя справочные таблицы, вычислим геометрические характеристики отдельных элементов, входящих в состав сложного поперечного сечения.

Заданное сложное поперечное сечение чугунного короткого стержня состоит из прямоугольника и полукруга. Будем считать, что прямоугольник – фигура  $I$ , а полукруг – фигура  $II$ .

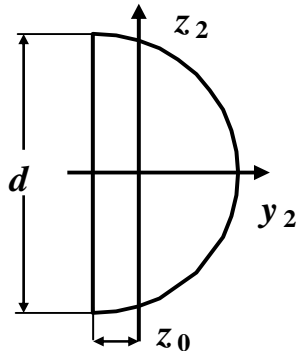


**Фигура I – прямоугольник  $b \times h = 4 \times 6 \text{ см}$**

$$b = 4 \text{ см}; \quad h = 6 \text{ см}; \quad A_I = b \cdot h = 4 \cdot 6 \text{ см}^2 = 24 \text{ см}^2;$$

$$J_{y_1}^I = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \text{ см} \cdot (6 \text{ см})^3}{12} = 72 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_1}^I = \frac{b^3h}{12} = \frac{(4 \text{ см})^3 \cdot 6 \text{ см}}{12} = 32 \text{ см}^4.$$



Фигура II – полукруг, диаметром  $d = 2b = 12$  см

$$z_0 = 0, 212 \cdot d = 0, 212 \cdot 12 \text{ см} = 2, 544 = 2, 54 \text{ см};$$

$$A_2 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{3,14 \cdot (12 \text{ см})^2}{8} = 56,52 \text{ см}^2 = 56,5 \text{ см}^2;$$

$$J_{y_2}^{II} = 0,0245 d^4 = 0,0245 \cdot (12 \text{ см})^4 = 508,032 \text{ см}^4 = 508 \text{ см}^4;$$

$$J_{z_2}^{II} = 0,00687 d^4 = 0,00687 \cdot (12 \text{ см})^4 = 142,456 \text{ см}^4 = 142 \text{ см}^4$$

Используя приведенные выше исходные справочные данные, вычерчиваем сечение в масштабе с указанием всех осей и необходимых размеров в сантиметрах (рис. 3.17).

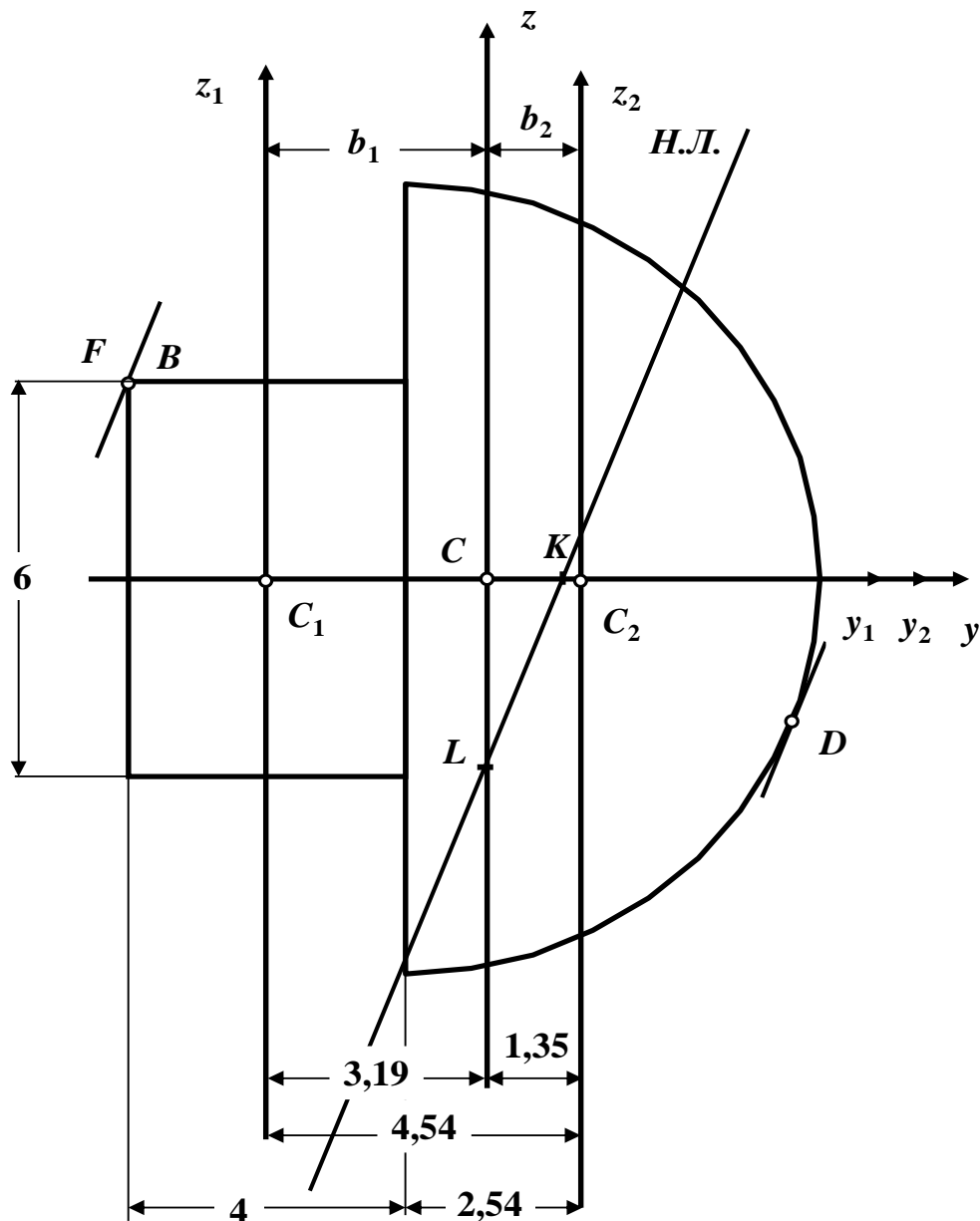


Рис. 3.17. Поперечное сечение стержня

Здесь и в дальнейшем численные значения, полученные в ходе расчета, округляем до 3 значащих цифр.

Нормальные напряжения в случае *внецентренного сжатия* находятся по формуле (3.17)

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} \right)$$

В этой формуле

$\sigma$  – величина нормального напряжения в любой точке сечения с координатами  $y$  и  $z$ ;

$N = -F$  – величина сжимающей продольной силы;

$A$  – площадь поперечного сечения;

$y_F, z_F$  – координаты точки ***K*** приложения внецентренной силы ***F***, взятые относительно главных центральных осей заданного сечения;

$i_y^2$  и  $i_z^2$  – квадраты радиусов инерции заданного сечения относительно главных центральных осей, которые определяются по формулам

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A}, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{A}.$$

### **Вычисление величин наибольших растягивающих и сжимающих напряжений в поперечном сечении**

#### **а). Определение положения центра тяжести сечения**

Заданное сложное поперечное сечение чугунного короткого стержня имеет ось симметрии  $y$  (рис. 3.17), которая является главной центральной осью.

Вторую главную центральную ось проведем после определения положения центра тяжести этой составной фигуры, который находится на оси симметрии  $y$ .

Определяем координаты центров тяжести первой и второй фигур (точек  $C_1$  и  $C_2$ ) относительно произвольной координатной системы  $z_I C_I y_I$ .

**Точка  $C_1$ :**  $y_{C_1} = 0$ .      **Точка  $C_2$ :**  $y_{C_2} = \left( \frac{4}{2} + 2,54 \right) = 4,54$  см.

Общая площадь заданного сложного поперечного сечения

$$A = A_1 + A_2 = 24 + 56,5 = 80,5 \text{ см}^2 = 80,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Координата центра тяжести заданного сложного поперечного сечения по оси  $y$  будет равна

$$y_C = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2}}{A} = \frac{(24 \cdot 0 + 56,5 \cdot 4,54) \text{ см}^3}{80,5 \text{ см}^2} = \frac{256,51 \text{ см}^3}{80,5 \text{ см}^2} = 3,1864 \text{ см} \approx 3,19 \text{ см}.$$

По полученному значению координаты  $y_c$  находим положение центра тяжести (точка ***C***) заданного сложного поперечного сечения (рис. 3.17).

#### **б). Построение главных центральных осей**

Ось симметрии  $y$  (рис. 3.17) является главной центральной осью.

Проводим через точку  $C$  вторую главную центральную ось  $z$ , перпендикулярную главной центральной оси  $y$ .

Теперь главные центральные оси  $y$  и  $z$  являются основной системой координат при решении задачи (рис. 3.17).

**в). Определение моментов инерции и квадратов радиусов инерции поперечного сечения стержня относительно главных центральных осей**

Для определения главных моментов инерции заданного сложного поперечного сечения воспользуемся формулами параллельного переноса осей.

Осевой момент инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главной центральной оси  $y$  равен сумме моментов инерции первой и второй фигур относительно этой оси

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} = J_{y_1}^I + J_{y_2}^{II} = 72 + 508 = 580 \text{ см}^4.$$

Аналогично, момент инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главной центральной оси  $z$  равен сумме моментов инерции первой и второй фигур относительно этой оси

$$J_z = J_z^I + J_z^{II}.$$

В соответствии с формулами параллельного переноса осей момент инерции первой фигуры относительно главной центральной оси  $z$  равен моменту инерции относительно собственной оси  $z_I$  плюс площадь этой фигуры, умноженной на квадрат расстояния между осями  $z_I$  и  $z$  (рис. 3.17)

$$J_z^I = J_{z_I}^I + A_1 b_1^2 = 32 + 24 \cdot 3,19^2 = 276,226 \text{ см}^4 = 276 \text{ см}^4;$$

$$b_1 = y_{C_1} - y_C = 0 - 3,19 \text{ см} = -3,19 \text{ см} \text{ (рис. 3.17).}$$

Аналогично, момент инерции второй фигуры относительно главной центральной оси  $z$  будет равен

$$J_z^{II} = J_{z_2}^{II} + A_2 b_2^2 = 142 + 56,5 \cdot 1,35^2 = 244,971 \text{ см}^4 = 245 \text{ см}^4;$$

$$b_2 = y_{C_2} - y_C = 4,54 \text{ см} - 3,19 \text{ см} = 1,35 \text{ см} \text{ (рис. 3.17);}$$

Следовательно, момент инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главной центральной оси  $z$  равен

$$J_z = 276 + 245 = 521 \text{ см}^4.$$

Вычисляем квадрат радиуса инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главной центральной оси  $y$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{580 \text{ см}^4}{80,5 \text{ см}^2} = 7,20497 \text{ см}^2 = 7,20 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = 7,20 \text{ см}^2.$$



Вычисляем квадрат радиуса инерции заданного сложного поперечного сечения относительно главной центральной оси  $z$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{521 \text{ см}^4}{80,5 \text{ см}^2} = 6,47205 \text{ см}^2 = 6,47 \text{ см}^2; \quad i_z^2 = 6,47 \text{ см}^2.$$

г). **Определение координат точки  $K$ , в которой приложена сила  $F$**

$$y_K = -\left(\frac{4}{2} + 3,19\right) = -5,19 \text{ см}; \quad z_K = +\left(\frac{6}{2}\right) = 3 \text{ см} \quad (\text{см. рис. 3.17}).$$

д). **Нахождение положения нейтральной линии**

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на главных центральных осях, определяются по следующим формулам (3.18)

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_K}; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_K}.$$

Следовательно,

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_K} = -\frac{6,47 \text{ см}^2}{-5,19 \text{ см}} = 1,2466 \text{ см} = 1,25 \text{ см} \quad (\text{на рис. 3.17 – отрезок } CM);$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_K} = -\frac{7,2 \text{ см}^2}{3 \text{ см}} = -2,4 \text{ см} \quad (\text{на рис. 3.17 – отрезок } CL).$$

Проводя через точки  $M$  и  $L$  прямую, получаем положение нейтральной линии ( $H.L.$ ) (рис. 3.17).

е). **Определение координат опасных точек**

Определение. Опасными точками поперечного сечения являются точки, в которых возникают наибольшие напряжения.

Опасные – это точки, наиболее удаленные от нейтральной линии.

На рис. 3.17 – это точки  $K$  (точка приложения силы  $F$ ) и  $D$ . Определяем их координаты

**Точка  $K$  :**  $y_K = -5,19 \text{ см}; \quad z_K = 3 \text{ см}$  (рис. 3.17).

**Точка  $D$  :**  $y_D = 4,3 \text{ см}; \quad z_D = -2,5 \text{ см}$  (рис. 3.17).

Координаты точки  $D$  найдены графически, то есть измерены расстояния от точки  $C$  до точки  $D$  по оси  $y$  и оси  $z$ .

*Полученный результат умножили на масштабный коэффициент (чертеж поперечного сечения должен быть выполнен в масштабе).*

**ж). Определение наибольших растягивающих и сжимающих напряжений**

Нормальные напряжения в опасной точке  $K$

$$\sigma_K = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_K y_K}{i_z^2} + \frac{z_K z_K}{i_y^2} \right) = -\frac{F}{80,5 \text{ см}^2} \left[ 1 + \frac{(-5,19 \text{ см})(-5,19 \text{ см})}{6,47 \text{ см}^2} + \frac{(3 \text{ см})(3 \text{ см})}{7,2 \text{ см}^2} \right] = -\frac{6,41 F}{80,5 \text{ см}^2} = -\frac{7,96 \cdot 10^{-2} F}{1 \text{ см}^2} \text{ (сжатие)}.$$

Нормальные напряжения в опасной точке  $D$

$$\sigma_D = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_K y_D}{i_z^2} + \frac{z_K z_D}{i_y^2} \right) = -\frac{F}{80,5 \text{ см}^2} \left[ 1 + \frac{(-5,19 \text{ см})(4,3 \text{ см})}{6,47 \text{ см}^2} + \frac{(3 \text{ см})(-2,5 \text{ см})}{7,2 \text{ см}^2} \right] = -\frac{(-3,49) F}{80,5 \text{ см}^2} = \frac{4,34 \cdot 10^{-2} F}{1 \text{ см}^2} \text{ (растяжение)}.$$

**Определение допускаемой нагрузки  $[F]$  из условий прочности на растяжение и сжатие**

Условие прочности на сжатие имеет следующий вид

$$|\sigma_K| \leq [\sigma_c]$$

Следовательно,

$$|\sigma_K| = \frac{7,96 \cdot 10^{-2} F}{1 \text{ см}^2} \leq 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \rightarrow F \leq \frac{16 \text{ кН}}{7,96 \cdot 10^{-2}} = 201 \text{ кН}.$$

Условие прочности на растяжение имеет следующий вид

$$|\sigma_D| \leq [\sigma_p]$$

Следовательно,

$$\sigma_D = \frac{4,34 \cdot 10^{-2} F}{1 \text{ см}^2} \leq 4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \rightarrow F \leq \frac{4 \text{ кН}}{4,34 \cdot 10^{-2}} = 92,2 \text{ кН}.$$

Из двух неравенств  $F \leq 201 \text{ кН}$  и  $F \leq 92,2 \text{ кН}$  выбираем меньшее значение силы, то есть допускаемая нагрузка для чугунного короткого стержня будет равна

$$[F] = 92,2 \text{ кН}.$$

### 3.3. ТЕМА 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

#### 3.3.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Во многих случаях проектирования инженерных сооружений обычных расчетов на прочность и жесткость бывает недостаточно для того, чтобы получить полное представление о работе сооружения. Выяснение того, что напряжения не превосходят допустимого (предельного) значения, еще не позволяет сделать вывод о безопасности эксплуатации сооружения. Это вызвано тем, что наряду с проблемой прочности существует проблема *устойчивости* сооружения или его элементов.

Определение. Устойчивость есть свойство сооружения оказывать сопротивление посторонним случайным воздействиям и самостоятельно восстанавливать свое положение и форму равновесия в деформированном состоянии, когда случайные воздействия исчезают.

Определение. Переход сооружения из устойчивого состояния в неустойчивое называется потерей устойчивости.

Границу этого перехода называют *критическим состоянием* сооружения, а соответствующие нагрузки и напряжения – *критическими*.

Определение. Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия центрально сжатого прямого стержня называется продольным изгибом.

Определение. Наименьшее значение центрально приложенной сжимающей силы  $F$ , при которой первоначальная прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, называется критической силой.

Появление продольного изгиба опасно тем, что при нем происходит очень сильное нарастание прогибов при малом нарастании сжимающей силы. Прогибы и нагрузки связаны между собой нелинейной зависимостью.

Условие устойчивости центрально сжатого стержня по методу допускаемых напряжений имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma] \quad (3.22)$$

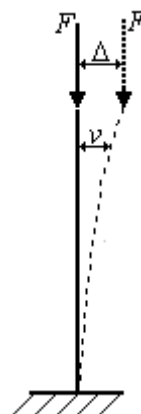
В этой формуле

$\sigma_{\max}$  – максимальное нормальное напряжение в стержне;

$N$  – продольная сила, возникающая в стержне ( $N = F$ );

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$\varphi$  – коэффициент продольного изгиба центрально – сжатых стержней



(коэффициент понижения основного допускаемого напряжения);

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Применяя условие устойчивости, можно выполнять три вида расчета:

1. Проектный расчет. По заданной нагрузке  $F$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]$  находят величину требуемой площади поперечного сечения методом последовательных приближений, начиная со значения  $\varphi = 0,5$ , так как  $(0 < \varphi \leq 1)$

$$A_{\text{треб}} \geq \frac{N}{\varphi \cdot [\sigma]} \quad (3.23)$$

2. Определение допускаемой нагрузки. По известной площади  $A$  и допускаемому напряжению  $[\sigma]$  определяют величину допускаемой нагрузки

$$[N] = [F] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot A \quad (3.24)$$

3. Проверочный расчет. По известным значениям  $F$ ,  $A$ ,  $[\sigma]$  и  $\varphi$  проверяют выполнение условия устойчивости (3.22)

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma]$$

Определение. Величина внешней силы, при превышении которой теряется устойчивость данного вида деформации элемента конструкции, называется критической силой.

Величина критической силы ( $F_{\text{кр}}$ ) определяется по следующим формулам:

– если закон Гука выполняется, то есть  $\lambda_{\text{факт.}} \geq \lambda_{\text{пред.}}$ , то величина критической силы ( $F_{\text{кр}}$ ) определяется по формуле Эйлера

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}. \quad (3.25)$$

– если закон Гука не выполняется, то есть  $\lambda_{\text{факт.}} < \lambda_{\text{пред.}}$ , то величина критической силы ( $F_{\text{кр}}$ ) определяется по формуле Тетмайера – Ясинского

$$F_{\text{кр}} = A \cdot (a - b \cdot \lambda). \quad (3.26)$$

В этих формулах

$E$  – модуль упругости при растяжении-сжатии (справочная величина);

$J_{\min}$  – минимальный главный момент инерции сечения стержня;

$L$  – длина стержня;

$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$  – гибкость стержня;

$i_{\min}$  – минимальный радиус инерции  $\left( i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} \right)$ ;

$\mu$  – коэффициент приведенной длины, зависящий от способа закрепления концов стержня. Его значения приведены на рис. 3.18

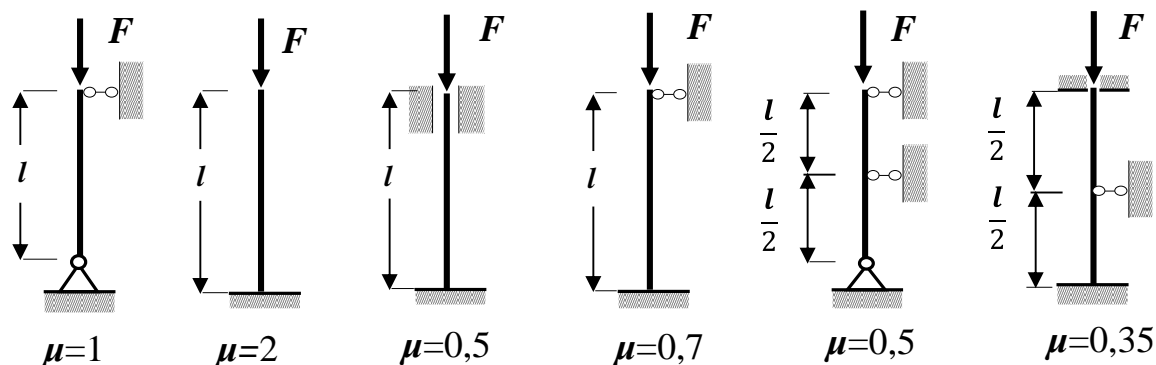


Рис. 3.18. Коэффициенты приведенной длины

$\lambda_{пред}$  – предельная гибкость стержня ( $\lambda_{пред} = 100$  для стали Ст. 3 и  $\lambda_{пред} = 70$  для дерева);

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$a, b$  – коэффициенты, используемые в формуле Тетмайера – Ясинского, ( $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа – для стали Ст. 3).

Коэффициент запаса устойчивости определяется по формуле

$$k_y = \frac{F_{кр}}{[F]}. \quad (3.27)$$

Из приведенных выше выражений видно, что коэффициент  $\varphi$  – коэффициент продольного изгиба центрально – сжатых стержней в конечном итоге зависит от площади подбираемого сечения, поэтому подбор размеров поперечного сечения стержня осуществляется методом последовательных приближений.

Суть этого метода заключается в том, что в первом приближении задается значение  $\varphi_1$  (удобно принимать  $\varphi_1 = 0,5$ , в середине диапазона, так как он изменяется в пределах  $0 < \varphi \leq 1$ ).

После этого по формуле (3.23) определяют  $A_1^{треб}$ , по найденному значению  $A_1^{треб}$  затем вычисляют  $J_{min}$ ,  $i_{min}$ ,  $\lambda_1$  и по таблице устанавливают фактическое значение  $\varphi'_1$ . При несовпадении  $\varphi_1$  и  $\varphi'_1$  для второго приближения принимают  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}$  и все повторяют до тех пор, пока не будет выполняться неравенство  $|\varphi_n - \varphi'_n| \leq 0,02$ .

Опыт показывает, что после выполнения этого неравенства расчет можно считать законченным. Уточнив (округлив) размеры сечения, необходимо

сделать проверку выполнения условия устойчивости.

В каждой попытке, после получения значения площади  $A_n$ , для определения коэффициента продольного изгиба  $\varphi_n$  нам необходимо знать значение минимального радиуса инерции  $i_{min}$ , поэтому для каждого подбираемого сечения полезно выразить  $i_{min}$  через  $F$ .

### **3.3.2. Контрольные вопросы для самопроверки по теме**

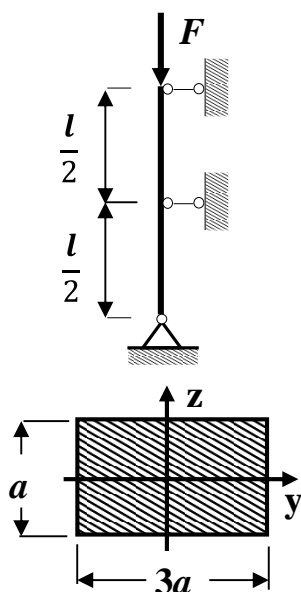
#### **«Устойчивость центрально сжатых стержней»**

1. В чем заключается явление потери устойчивости центрально сжатого стержня?
2. Какое равновесное состояние гибкого центрально сжатого стержня является устойчивым, безразличным или неустойчивым?
3. Какая сила называется критической?
4. Запишите формулу Эйлера для определения критической силы.
5. Как определяется приведённая длина центрально сжатого стержня?
6. Запишите формулу Эйлера с учетом условий закрепления центрально сжатого стержня.
7. Что называется гибкостью стержня?
8. Что такое предельная гибкость центрально сжатого стержня?
9. Условия применимости формулы Эйлера?
10. Формула Ясинского. Условия её применимости?
11. Как записывается условие устойчивости центрально сжатого стержня и какие задачи решаются с помощью этого условия?
12. Как определяется коэффициент продольного изгиба и от чего он зависит?
13. Как определяется величина допускаемой нагрузки.
13. Что такое коэффициент запаса устойчивости?
15. Как подбирают сечение центрально сжатого стержня при расчете на устойчивость?

*После изучения этой темы можно приступить к решению задачи № 3, включенной в контрольную работу.*

### 3.3.3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 3

#### «Устойчивость центрально сжатого стержня»



Исходные данные:  
 $l = 4 \text{ м} = 400 \text{ см}; \quad F = 200 \text{ кН};$   
 $[\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$

Рис. 3.19. Расчетная схема

Стальной стержень длиной  $l$  сжимается силой  $F$  (рис. 3.19).

Требуется:

1. Из условия устойчивости подобрать размеры поперечного сечения при допускаемом нормальном напряжении  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Расчет проводить с помощью метода последовательных приближений, предварительно задавшись величиной коэффициента  $\varphi_1 = 0,5$ .

Если гибкость стойки в первом приближении окажется меньше 50, необходимо проектную длину стойки увеличить в 2 раза, а при гибкости более 150 – уменьшить в 2 раза.

2. Проверить выполнение условия устойчивости.

3. Определить величину критической силы. Модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

4. Найти значения допускаемой нагрузки и коэффициента запаса устойчивости.

Решение

Определение размеров поперечного сечения стержня  
методом последовательных приближений

Условие устойчивости центрально сжатого стержня по методу

допускаемых напряжений имеет вид (3.22)

$$\sigma_{max} = \frac{N}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma],$$

где

$\sigma_{max}$  – максимальное нормальное напряжение в стержне;

$N$  – продольная сила, возникающая в стержне ( $N = F$ );

$A$  – площадь поперечного сечения стержня;

$\varphi$  – коэффициент продольного изгиба центрально – сжатых стержней (коэффициент понижения основного допускаемого напряжения);

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Из условия устойчивости определяем требуемую площадь поперечного сечения (3.23)

$$A^{треб} \geq \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{200 \text{ кН}}{\varphi \cdot 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = \frac{12,5 \text{ см}^2}{\varphi}, \quad A^{треб} \geq \frac{12,5 \text{ см}^2}{\varphi}.$$

Площадь поперечного сечения стержня  $A = 3a^2$ . Приравнявая  $A$  и  $A^{треб}$ , получаем

$$3a^2 \geq \frac{12,5 \text{ см}^2}{\varphi} \rightarrow a \geq \sqrt{\frac{12,5 \text{ см}^2}{3\varphi}} = \frac{2,04 \text{ см}}{\sqrt{\varphi}} \rightarrow \boxed{a \geq \frac{2,04 \text{ см}}{\sqrt{\varphi}}}$$

Выразим геометрические характеристики поперечного сечения стержня через размер  $a$ .

Минимальный момент инерции и минимальный радиус инерции заданного поперечного сечения стержня равны

$$J_{min} = J_y = \frac{3a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{4}; \quad i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{4 \cdot 3a^2}} = \frac{a}{3,46}.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{0,5 \cdot 400 \text{ см} \cdot 3,46}{a} = \frac{692 \text{ см}}{a} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{692 \text{ см}}{a}}$$

Формулы, обведенные в рамку, используем в методе последовательных приближений.

Приближение №1. Принимаем численное значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi_1 = 0,5$ .

Следовательно,

$$a \geq \frac{2,04 \text{ см}}{\sqrt{0,5}} = 2,88 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{692 \text{ см}}{2,88 \text{ см}} = 240 > 150.$$

В соответствии с условием задачи уменьшаем длину стержня в два раза,



тогда гибкость стержня тоже уменьшится в два раза, то есть  $\lambda = 120$ . Таким образом, для определения гибкости получаем новую формулу

$$\lambda = \frac{346 \text{ см}}{a}.$$

Используя таблицу коэффициентов продольного изгиба  $\varphi$  центрально сжатых элементов (приложение 2), по значению гибкости стержня  $\lambda = 120$  находим значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi'_1 = 0,45$ .

Так как  $\varphi'_1$  и  $\varphi_1$  не совпали, делаем проверку

$$|\varphi_1 - \varphi'_1| = |0,5 - 0,45| = 0,05 > 0,02,$$

следовательно, переходим к следующему приближению.

Приближение №2. Принимаем численное значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi_2$  равное

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,45}{2} = 0,475.$$

Следовательно,

$$a \geq \frac{2,04 \text{ см}}{\sqrt{0,475}} = 2,96 \text{ см} \approx 3,00 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{346 \text{ см}}{2,96 \text{ см}} = 117.$$

Используя таблицу коэффициентов продольного изгиба  $\varphi$  центрально сжатых элементов (приложение 2), методом линейной интерполяции определяем  $\varphi'_2$ :

$\lambda$	$\varphi$
110	0,52
117	$\varphi'_2$
120	0,45

$$\Delta\lambda_1 = 120 - 110 = 10 \quad \Delta\varphi_1 = 0,45 - 0,52 = -0,07$$

$$\Delta\lambda_2 = 117 - 110 = 7 \quad \Delta\varphi_2 = \varphi'_2 - 0,52.$$

Из пропорции  $\Delta\lambda_1 \cdot \Delta\varphi_2 = \Delta\lambda_2 \cdot \Delta\varphi_1$  находим

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\Delta\lambda_2 \cdot \Delta\varphi_1}{\Delta\lambda_1}; \quad \varphi'_2 - 0,52 = \frac{7 \cdot (-0,07)}{10} = -0,049.$$

Тогда

$$\varphi'_2 = 0,52 - 0,049 = 0,471.$$

Так как  $\varphi'_2$  и  $\varphi_2$  не совпали, делаем проверку

$$|\varphi_2 - \varphi'_2| = |0,475 - 0,471| = 0,004 < 0,02,$$

Опыт показывает, что после выполнения этого неравенства расчет можно считать законченным. Уточнив (округлив) размеры сечения, необходимо обязательно сделать проверку выполнения условия устойчивости.

### Проверка выполнения условия устойчивости

Условие устойчивости центрально сжатого стержня по методу допускаемых напряжений имеет вид (3.22)

$$\sigma_{max} = \frac{N}{\varphi \cdot A} \leq [\sigma],$$

где

$$N = F.$$

Вычисляем численное значение фактической площади подобранного сечения стержня

$$A^{факт} = 3a^2 = 3 \cdot (3,00 \text{ см})^2 = 27,0 \text{ см}^2$$

$$\sigma = \frac{F}{A^{факт}} = \frac{200 \text{ кН}}{27,0 \text{ см}^2} = 7,41 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 74,1 \text{ МПа} < [\sigma_y] = 75,4 \text{ МПа},$$

где

$[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение на устойчивость, равное

$$[\sigma_y] = \varphi'_2 [\sigma] = 0,471 \cdot 160 \text{ МПа} = 75,4 \text{ МПа}.$$

*Условие устойчивости выполняется.*

Проверяем выполнение условия экономичности

$$\delta = \frac{|[\sigma_y] - \sigma|}{[\sigma_y]} \cdot 100 \% = \frac{|75,4 - 74,1|}{75,4} \cdot 100 \% = 1,72 \% < 5 \%.$$

*Условие экономичности выполняется.*

*Условия устойчивости и экономичности выполняются, следовательно, принимаем окончательно центрально сжатый стержень прямоугольного поперечного сечения размером  $b \times h = 9 \times 3 \text{ см}$ .*

Таким образом,

$$A^{факт} = 27,0 \text{ см}^2; \quad \lambda_{факт} = 117; \quad \varphi_{факт} = \varphi'_2 = 0,471.$$

### Определение величины критической силы

Так как  $\lambda_{факт} = 117 > \lambda_{пред} = 100$ , то критическую силу определяем по формуле Эйлера (3.25)

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \frac{кН}{см^2} \cdot 20,3 см^4}{(0,5 \cdot 200 см)^2} = 400 кН ,$$

где

$$E = 2 \cdot 10^5 МПа = 2 \cdot 10^4 \frac{кН}{см^2}; \quad J_{min} = \frac{3a \cdot a^3}{12} = \frac{3 \cdot (3,00 см)^4}{12} = 20,3 см^4 .$$

#### **Определение величины допускаемой нагрузки и коэффициента запаса устойчивости**

Из условия устойчивости определяем величину допускаемой нагрузки  
(3.24)

$$[F] \leq \varphi \cdot [\sigma] \cdot A_{факт} \leq 0,471 \cdot 16 \cdot 27,0 \leq 203 кН.$$

Коэффициент запаса устойчивости будет равен

$$k_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{400 кН}{203 кН} = 1,97.$$

Полученное значение коэффициента запаса устойчивости находится в допускаемых для стали пределах ( $1,8 \leq k_y \leq 3$ ).

### 3.4. ТЕМА 4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ

#### 3.4.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

##### Учет сил инерции. Коэффициент динамичности

В предыдущих темах были рассмотрены методы расчета на прочность только с учетом статических нагрузок. В действительности на сооружения и машины действуют не только статические, но и динамические силы. В большинстве своем это силы инерции, величина которых во много раз превышает статические силы.

В этих случаях вопрос о прочности нельзя решить, не принимая во внимание характера движения рассматриваемой части сооружения или машины.

Такие задачи сопротивления материалов, при решении которых учитываются и динамические нагрузки, называются *динамическими*.

Динамическими нагрузками являются силы инерции деталей машин, движущихся возвратно – поступательно, центробежные силы вращающихся частей при пуске в ход и остановке машины и нагрузки, прикладываемые в течение весьма короткого промежутка времени (ударные нагрузки).

Существенной особенностью динамических нагрузок является большая скорость их приложения, в результате чего элементы, подвергающиеся действию таких нагрузок, получают значительные ускорения, влиянием которых на напряженно – деформированное состояние конструкции нельзя пренебречь, как это делается при рассмотрении действия статических нагрузок.

При этом, динамические напряжения существенно изменяют и сам процесс деформирования, в результате чего поведение тел при действии подобного рода напряжений оказывается отличительным от поведения тел в случае действия статических напряжений.

Наличие ускорений связано с возникновением особого рода сил – *сил инерции*, величина которых определяется произведением массы элементарного объема тела на ускорение центра тяжести этого объема, а направление обратно направлению ускорения.

Силы инерции, так же как и собственный вес, представляют собой объемные силы, так как приложены к каждой элементарной частице объема тела.

При расчете стержневых систем объемные силы инерции заменяют силами инерции, распределенными по длине оси каждого стержня, то есть распределенной погонной инерционной нагрузкой.

Интенсивность распределенной погонной инерционной нагрузки

выражается в н/м, кг/см и т.д.

В частности, при вращении тела с угловой скоростью  $\omega$  имеет место центростремительное ускорение

$$a = \omega^2 \cdot r, \quad (3.28)$$

где

$r$  – радиус – вектор точки.

Следовательно, на любой элементарный объем вращающегося тела, имеющего массу  $dm$ , действует сила инерции (центробежная сила)

$$dS_{\text{и}} = dm \cdot \omega^2 \cdot r \quad (3.29)$$

Величина сил инерции при колебаниях зависит от частоты колебания и ее амплитуды. Когда частоты вынужденных и собственных колебаний совпадают, имеем явление резонанса, которое очень опасно для строительных конструкций.

Зная величину и направление этой силы, с помощью принципа Даламбера можно составить условие динамического равновесия, откуда определяются усилия, приложенные к граням рассматриваемого элемента и напряжения.

Для упрощения решения задач динамики вводят так называемый *коэффициент динамичности*  $K_{\text{дин}}$ .

Для получения численных значений внутренних усилий, напряжений или перемещений от динамического воздействия нагрузок в расчетах динамическая нагрузка заменяется статической, а найденные от нее усилия, напряжения или перемещения умножаются на динамический коэффициент

$$S_{\text{дин}} = S_{\text{стат}} \cdot K_{\text{дин}} \quad (3.30)$$

Динамический коэффициент  $K_{\text{дин}}$  во многих случаях определяется аналитически, а в тех случаях, когда это сделать трудно, – экспериментально.

*Этот коэффициент зависит от вида динамической нагрузки, от размеров, массы, жесткости сооружения и ряда других факторов.*

### Учет сил инерции при равноускоренном движении груза

Рассмотрим равноускоренный подъем груза  $Q$ , подвешенного на стальном тросе площадью поперечного сечения  $A$ ; объемный вес материала троса равен  $\gamma$ ; груз поднимается с ускорением  $a$  см/сек<sup>2</sup> (рис. 3.20).

Необходимо определить напряжение в произвольном сечении троса на расстоянии  $x$  от точки подвеса груза.

Отсечем нижнюю часть и рассмотрим ее равновесие. Получим

$$\sum x = 0. \rightarrow \sigma_{\text{д}} A - Q - Q_1 - S_{\text{и}} = 0. \rightarrow \sigma_{\text{д}} A - Q - \gamma Ax - \frac{Q + \gamma Ax}{g} a = 0.$$

Отсюда

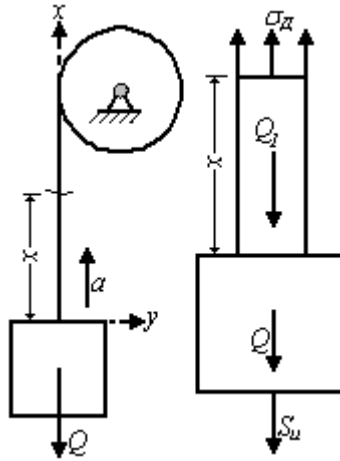


Рис. 3.20

$$\sigma_d = \frac{Q}{A} + \gamma \cdot x + \frac{a}{g} \cdot \left( \frac{Q}{A} + \gamma \cdot x \right) = \left( \frac{Q}{A} + \gamma \cdot x \right) \cdot \left( 1 + \frac{a}{g} \right).$$

При статическом действии нагрузки ( $a = 0$ ) будем иметь

$$\sigma_{ст} = \frac{Q}{A} + \gamma \cdot x.$$

Тогда

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot \left( 1 + \frac{a}{g} \right). \quad (3.31)$$

Обозначим

$$K_{дин} = 1 + \frac{a}{g} \quad (3.32)$$

где

$K_{дин}$  – динамический коэффициент при равноускоренном подъеме груза.

Тогда

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot K_{дин} \quad (3.33)$$

Таким образом, напряжение от динамической нагрузки равно напряжению от статической нагрузки, умноженной на динамический коэффициент при равноускоренном подъеме груза.

Динамический коэффициент при равноускоренном подъеме груза (3.32) зависит от величины ускорения  $a$ , с которым осуществляется подъем груза, поэтому динамические напряжения могут значительно превышать статические.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_d \leq [\sigma] \quad (3.39)$$

или

$$\sigma_{ст} \leq \frac{[\sigma]}{K_d} \quad (3.40)$$

Учитывать влияние сил инерции приходится, в частности, при расчете сооружений, расположенных в местностях, подверженных землетрясениям.

При землетрясении земная поверхность и части сооружений, закрепленные в грунте, перемещаются с некоторыми ускорениями, в результате чего сооружения испытывают действие сил инерции. На эти силы должен быть произведен расчет сооружений. Расчетная величина наибольшего ускорения движения земной поверхности устанавливается специальными техническими условиями в зависимости от силы землетрясения (характеризуемой в баллах); эта величина может достигать  $1 \text{ м/сек}^2$  и более.

### **Действие ударной нагрузки**

Частным случаем динамической нагрузки является ударная нагрузка, которая наиболее опасна для прочности конструкции.

Под ударом понимают взаимодействие движущихся тел в результате их соприкосновения, связанное с резким изменением скоростей точек этих тел за весьма малый промежуток времени. Время удара очень мало, а сила удара достигает большой величины (удар падающего груза при забивке свай и т.д.).

Задача определения напряжений при ударе в общем виде представляет значительные трудности, поэтому в инженерных расчетах эту задачу решают при следующих предположениях (приближенная теория удара):

1. Напряжения от ударной нагрузки будем определять в стержнях, размеры поперечного сечения которых малы по сравнению с длиной.
2. При определении напряжений будем пренебрегать массой стержня, а следовательно, и его силами инерции.
3. Силу, приложенную в месте удара, будем считать пропорциональной деформации, допуская, что напряжения при ударе не превышают пределов упругости.

Для стержней, в зависимости от направления удара по отношению к оси стержня и характера происходящих деформаций, различают продольный удар и поперечный (изгибающий) удар.

### **Продольный удар**

Рассмотрим случай продольного удара груза по неподвижному телу. Пусть груз весом  $G$  падает с высоты  $h$  на неподвижный стержень (рис. 3.21).

Скорость тела в момент удара определяется по известной формуле свободного падения

$$v = \sqrt{2gh} \quad (3.41)$$

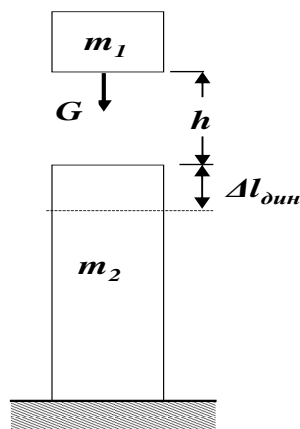


Рис. 3.21

Эта скорость за очень короткий промежуток времени удара, исчисляемый тысячными или сотыми долями секунды, упадет до нуля.

Благодаря большой величине ускорения (замедления) возникает значительная сила инерции, величиной которой и определяется действие удара.

Однако теоретически трудно установить закон изменения скорости, а, следовательно, и величину силы инерции. Здесь применяется другой путь, основанный на законе сохранения энергии и на следующих допущениях:

1. Напряжения при ударе не превосходят предела пропорциональности, так что закон Гука при ударе сохраняет свою силу.

2. Тела после удара не отделяются друг от друга, то есть удар считается не упругим.

3. Масса неподвижного стержня считается малой по сравнению с массой ударяющего тела, поэтому в расчет не принимается.

4. Потерей части энергии, перешедшей в теплоту и в энергию колебательного движения соударяющихся тел, пренебрегаем.

Приравняем работу падающего груза потенциальной энергии деформации стержня.

Работа, совершаемая весом падающего груза, будет равна

$$W = G(h + \Delta l_{дин}), \quad (3.42)$$

где

$\Delta l_{дин}$  – перемещение в точке удара, равное укорочению стержня.

Потенциальная энергия деформации при сжатии равна

$$U = \Delta l_{дин}^2 \frac{EA}{2l} \quad (3.43)$$

Из этих двух уравнений (3.42) и (3.43) получаем

$$G(h + \Delta l_{дин}) = \Delta l_{дин}^2 \cdot \frac{EA}{2l},$$



или

$$\Delta l_{дин}^2 EA - 2Gl\Delta l_{дин} - 2Ghl = 0$$

Разделив все члены этого уравнения на жесткость стержня  $EA$ , получим

$$\Delta l_{дин}^2 - 2\frac{Gl}{EA}\Delta l_{дин} - 2\frac{Gl}{EA}h = 0.$$

В этом уравнении величина

$$G \cdot l / E \cdot A = \Delta l_{ст},$$

где

$\Delta l_{ст}$  – абсолютное укорочение стержня от статически приложенной нагрузки  $G$ .

Тогда

$$\Delta l_{дин}^2 - 2\Delta l_{ст}\Delta l_{дин} - 2\Delta l_{ст}h = 0 \quad (3.44)$$

Решив это квадратное уравнение относительно  $\Delta l_{дин}$ , получим

$$\Delta l_{дин} = \Delta l_{ст} \pm \sqrt{\Delta l_{ст}^2 + 2h\Delta l_{ст}} \quad (3.45)$$

Оставляя знак плюс, (решение со знаком минус перед радикалом противоречит физическому смыслу задачи), получаем окончательно

$$\Delta l_{дин} = \Delta l_{ст} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} \right) = \Delta l_{ст} K_{дин}, \quad (3.46)$$

где

$K_{дин}$  - динамический коэффициент при продольном ударе, равный

$$K_{дин} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} \right) \quad (3.47)$$

Разделив обе части последнего уравнения (3.46) на длину стержня и умножив на модуль упругости  $E$ , перейдем, на основании закона Гука, от деформаций к напряжениям

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}}} \right) = \sigma_{ст} K_{дин} \quad (3.48)$$

Из этих формул (3.46) и (3.48) видно, что величины динамического перемещения и напряжения зависят от величины статической деформации  $\Delta l_{ст}$  ударяемого тела.

Чем больше статическая деформация (при прочих равных условиях), тем меньше динамические напряжения. Вот почему для смягчения удара применяют прокладки (резиновые, пружинные), дающие большие деформации.

Если в формулу (3.47) для вычисления динамического коэффициента  $K_{дин}$  при продольном ударе вместо  $2h$  подставить равное ему  $\frac{v^2}{g}$ , то получим

$$K_{\text{дин}} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot \Delta l_{\text{ст}}}} \right) \quad (3.49)$$

При сжимающем ударе, во избежание продольного изгиба динамические напряжения не должны превосходить критических напряжений.

Частные случаи продольного удара:

1. Рассмотрим случай, когда высота падения груза равна нулю, то есть  $h = 0$ . Такой случай носит название внезапного приложения нагрузки.

Он имеет место, например, при внезапном обрыве троса, когда груз опущен до соприкосновения с опорами или при «раскружливании» железобетонного перекрытия, когда стойки опалубки убираются мгновенно, например, ударом.

Тогда при  $h = 0$  из формулы (3.47) имеем

$$K_{\text{дин}} = 2.$$

Следовательно,

$$\Delta l_{\text{дин}} = 2\Delta l_{\text{ст}}; \rightarrow \sigma_{\text{дин}} = 2\sigma_{\text{ст}} \quad (3.50)$$

При внезапном приложении нагрузки в случае продольного удара деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же нагрузки.

2. Если высота падения  $h$  значительно больше статической деформации  $\Delta l_{\text{ст}}$ , то для определения динамического коэффициента получим следующую приближенную формулу

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}} \quad (3.51)$$

### Поперечный (изгибающий) удар

Рассмотрим балку на двух опорах, подвергающуюся действию груза  $G$ , который падает с высоты  $h$  на середину пролета (рис. 3.22).

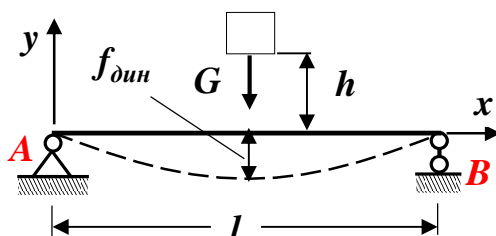


Рис. 3.22

Формула динамического коэффициента для случая поперечного (изгибающего) удара имеет аналогичный вид, только в этом случае вместо  $\Delta l_{\text{ст}}$

следует принимать статический прогиб балки в месте удара  $\Delta_{ст} = f_{ст}$

$$K_{дин} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} \right) \quad (3.52)$$

Аналогично, как и для продольного удара, можно рассмотреть случаи внезапного приложения нагрузки при  $h = 0$  и при очень большом значении  $h$ .

Частные случаи поперечного (изгибающего) удара:

1. Рассмотрим случай, когда высота падения груза равна нулю, то есть  $h = 0$ . Такой случай носит название внезапного приложения нагрузки.

Тогда при  $h = 0$  из формулы (3.52) имеем  $K_{дин} = 2$ .

Следовательно,

$$f_{дин} = 2f_{ст}; \rightarrow \sigma_{дин} = 2\sigma_{ст} \quad (3.53)$$

При внезапном приложении нагрузки в случае поперечного (изгибающего) удара деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же нагрузки.

2. Если высота падения  $h$  значительно больше статической деформации  $\Delta_{ст} = f_{ст}$ , то для определения динамического коэффициента получим следующую приближенную формулу

$$K_{дин} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} \right) = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{ст}}} \quad (3.54)$$

Из полученных выше формул видно, что чем больше статическая деформация упругой системы, тем меньше динамический коэффициент.

При статическом действии нагрузки напряжения в системе не зависят от модуля упругости материала, а при ударном – зависят, так как величина деформации обратно пропорциональна модулю упругости.

### 3.4.2. Контрольные вопросы для самопроверки по теме «Динамическое действие нагрузки»

1. В чем заключаются общие принципы расчета элементов конструкции на динамическое воздействие нагрузок?
2. По какой формуле вычисляется динамический коэффициент при равноускоренном подъеме груза?
3. Какие допущения (гипотезы) приняты при расчете элементов конструкции на ударную нагрузку?

4. Какой удар называется продольным?
5. По какой формуле вычисляется динамический коэффициент при продольном ударе?
6. По какой формуле вычисляется динамический коэффициент, если высота падения груза  $h$  значительно больше статической деформации, при продольном ударе?
7. Чему равен динамический коэффициент при внезапном приложении нагрузки при продольном ударе?
8. Какой удар называется поперечным (изгибающим)?
9. По какой формуле вычисляется динамический коэффициент при поперечном (изгибающем) ударе?
10. По какой формуле вычисляется динамический коэффициент, если высота падения груза  $h$  значительно больше статической деформации, при поперечном (изгибающем) ударе?
11. Чему равен динамический коэффициент при внезапном приложении нагрузки при поперечном (изгибающем) ударе?

***После изучения этой темы можно приступить к решению задачи № 4, включенной в контрольную работу.***

### 3.4.3. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 4

#### «Изгибающий (поперечный) удар»

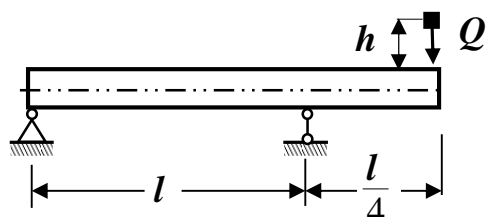


Рис. 3.23. Расчетная схема

Исходные данные:  
 $Q = 200 \text{ Н}$ ;  $h = 5 \text{ см}$ ;  
 двутавр № 40;  $l = 4 \text{ м}$ .

На двутавровую балку, свободно лежащую на двух опорах (рис. 3.23), с высоты  $h$  падает груз  $Q$ .

Требуется:

1. Найти наибольшие напряжения в балке.

Решение

Максимальные динамические напряжения при ударном изгибе могут быть определены по формуле

$$\sigma_{\max}^{\text{д}} = k_{\text{д}} \sigma_{\max}^{\text{ст}},$$

где

$\sigma_{\max}^{\text{д}}$  – максимальное динамическое напряжение;

$\sigma_{\max}^{\text{ст}}$  – максимальное статическое напряжение;

$k_{\text{д}}$  – динамический коэффициент, который в этом случае определяется по формуле

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}.$$

В этой формуле

$h$  – высота падения груза;

$\Delta_{\text{ст}}$  – абсолютное значение статического прогиба в месте удара.

Таким образом, для решения динамической задачи необходимо решить статическую задачу на определение максимального напряжения и прогиба в месте удара.

Расчетная схема статической задачи приведена на рис. 3.24 а.

#### Определение опорных реакций

Для определения опорных реакций  $R_A$ ,  $H_A$  и  $R_B$  для балки, изображенной на рис.3.24, составим три уравнения статики (равновесия), с учетом правила знаков:

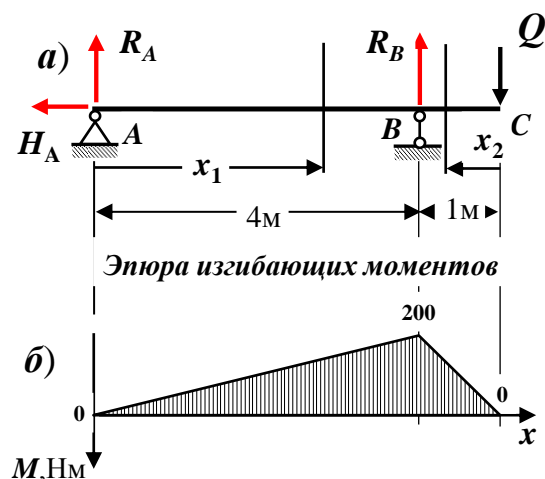


Рис. 3.24. Расчетная схема статической задачи и  
эпюра изгибающих моментов

1. Сумма проекций всех сил на ось  $x$  равна нулю

$$\sum F_x = 0: -H_A = 0, \rightarrow H_A = 0.$$



2. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $A$  равна нулю

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 4 - Q \cdot 5 = 0; \rightarrow R_B = \frac{5Q}{4} = \frac{5 \cdot 200 \text{ Н}}{4} = 250 \text{ Н};$$

3. Сумма моментов всех сил относительно опоры  $B$  равна нулю

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot 4 - Q \cdot 1 = 0; \rightarrow R_A = -\frac{Q}{4} = -\frac{200 \text{ Н}}{4} = -50 \text{ Н}.$$

Проверяем правильность вычисления опорных реакций (сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $z$  должна быть равна 0)

$$\sum F_z = R_A + R_B - Q = -50 + 250 - 200 = 250 - 250 = 0 (\pm 5\%).$$

### Построение эпюры изгибающих моментов

Балка имеет 2 участка  $AB$  и  $BC$ .

Участок  $AB$ :  $0 \leq x_1 \leq 4$

$$M(x_1) = R_A \cdot x_1 = -50 \cdot x_1;$$

$$M(0) = 0; M(4) = -50 \cdot 4 = -200 \text{ Нм}.$$

Участок  $BC$ :  $1 \geq x_2 \geq 0$

$$M(x_2) = -Q \cdot x_2 = -200 \cdot x_2;$$

$$M(0) = 0; M(1) = -200 \cdot 1 = -200 \text{ Нм}.$$

Используя полученные значения, строим эпюру изгибающих моментов (рис. 3.24, б).

### Определение максимального статического напряжения

В опасном сечении по нормальным напряжениям (сечение  $B$ , рис. 3.24)

$$M_{\text{max}} = 200 \text{ Нм} = 20000 \text{ Нсм}.$$

Из справочных таблиц (сортаментов) определяем момент сопротивления для двутавра №40

$$W_y = 953 \text{ см}^3.$$

Следовательно, максимальное статическое напряжение будет равно

$$\sigma_{\max}^{\text{ст}} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{20000 \text{ Нсм}}{953 \text{ см}^3} = 21,0 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 0,21 \text{ МПа}.$$

### Определение статического прогиба в сечении C

Для определения прогиба воспользуемся уравнением метода начальных параметров. Начало отсчета выбираем на левом конце балки, то есть на опоре A (рис.3.25).

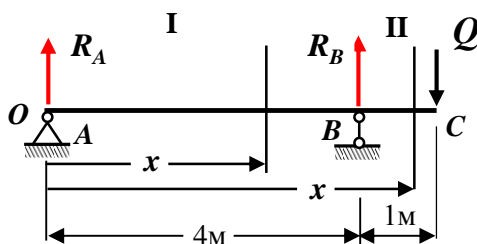


Рис. 3.25. Расчетная схема

### Определение неизвестных начальных параметров

Неизвестные кинематические начальные параметры  $w_0$  и  $\varphi_0$  определяются из граничных условий (условий закрепления балки).

В нашей задаче балка закреплена на шарнирных опорах A и B (рис. 3.25), то есть граничные условия принимают вид

$$w_A = w(0) = 0; \quad w_B = w(4) = 0$$

Следовательно, начальные параметры для этой балки будут равны

$$w_0 = w_A = 0; \quad \varphi_0 = \varphi_A = ?; \quad M_0 = 0; \quad F_0 = +R_A = -50 \text{ Н}$$

Уравнение метода начальных параметров для вычисления прогибов для этой балки имеет следующий вид

$$\text{I участок: } 0 \leq x \leq 4 \quad \text{II участок: } 4 \leq x \leq 5$$

$$w(x) = \varphi_0 \cdot x + \frac{1}{EJ_y} \left[ \frac{R_A x^3}{6} \Big|_I - \frac{R_B (x-4)^3}{6} \Big|_{II} \right]$$

Используя граничное условие на правой опоре B, и выражение для прогиба, получаем уравнение для определения начального угла поворота  $\varphi_0$

$$w(4\text{м}) = \varphi_0 \cdot 4\text{м} + \frac{1}{EJ_y} \left[ \frac{R_A (4\text{м})^3}{6} \right] = 0;$$

$$\varphi_0 \cdot 4\text{м} + \frac{1}{EJ_y} \left[ \frac{-50\text{Н}(4\text{м})^3}{6} \right] = 0; \rightarrow \varphi_0 = \frac{1}{EJ_y} \left[ \frac{50\text{Н}(4\text{м})^3}{6 \cdot 4\text{м}} \right] = \frac{133,3\text{Нм}^2}{EJ_y}.$$

Подставляя полученное значение  $\varphi_0$  в уравнение для вычисления прогибов для этой балки определяем прогиб в сечении  $C$

$$w_C = w(5\text{м}) = \frac{1\text{Нм}^3}{EJ_y} \left[ 133,3 \cdot 5 - \frac{50 \cdot 5^3}{6} + \frac{250(5-4)^3}{6} \right] = -\frac{334\text{Нм}^3}{EJ_y}.$$

*Вычисление жесткости балки при изгибе*

Из справочных таблиц определяем модуль упругости при растяжении для стали и главный момент инерции для двутавра № 40

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа} \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \right); \quad J_y = 19062 \text{ см}^4 = 19062 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Поэтому жесткость поперечного сечения балки при изгибе будет равна

$$EJ_y = 2 \cdot 10^8 \left( \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \right) \cdot 19062 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 38124 \text{ кНм}^2 = 38124 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2.$$

Статический прогиб балки в сечении  $C$  будет равен

$$\Delta_{cm} = |w_c| = \frac{334\text{Нм}^3}{38124 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2} = 8,76 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 8,76 \cdot 10^{-4} \text{ см}.$$

Определяем величину динамического коэффициента при изгибающем (поперечном) ударе

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5 \text{ см}}{8,76 \cdot 10^{-4} \text{ см}}} = 108.$$

Следовательно, максимальное динамическое напряжение будет равно

$$\sigma_{\text{мах}}^d = k_d \cdot \sigma_{\text{мах}}^{\text{ст}} = 108 \cdot 0,21 \text{ МПа} \approx 22,7 \text{ МПа}.$$



### **Рекомендуемая литература**

Для подготовки к выполнению контрольной работы рекомендуется использовать следующую литературу:

1. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учебник для студентов строительных специальностей вузов. /А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 2004. – 560 с.
2. Андреев В.И. Техническая механика (для учащихся строительных вузов и факультетов): учебник / В.И. Андреев, А.Г. Паушкин, А.Н. Леонтьев. – М.: Издательство АСВ, 2012. – 251 с.
3. Атаров, Н. М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 270100.– М.: ИНФРА – М, 2010. – 323 с.
4. Варданян Г.С. Сопротивление материалов (с основами строительной механики) / Г.С. Варданян, Н.М. Атаров, А.А. Горшков; под ред. Г.С. Варданяна. – М.: ИНФРА–М, 2011. – 480 с.
5. Михайлов А.М. Сопротивление материалов: учебник для студентов высших учебных заведений / А.М. Михайлов. – М.: Издательский центр «Академия», – 2009. – 448 с.
6. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Издательство МГТУ, 1999. – 591 с.

**Образец оформления  
титального листа контрольной работы**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Сопротивление материалов»  
Заочная форма обучения

Факультет \_\_\_\_\_

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № \_\_\_\_\_  
по \_\_\_\_\_  
(наименование дисциплины)

Студент \_\_\_\_\_  
(Направление (специальность),  
профиль подготовки)

Адрес студента \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
(Курс, группа)

\_\_\_\_\_  
(Ф. И. О.)

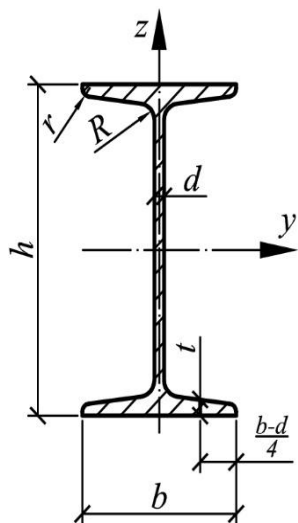
Шифр \_\_\_\_\_

Ростов-на-Дону  
2018

## **СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ**

**для выполнения контрольных работ и практических занятий  
по дисциплинам «Сопротивление материалов»  
и «Техническая механика»**

## ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ



$h$  – высота;  
 $d$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;  
 $R$  – радиус внутреннего закругления;  
 $r$  – радиус закругления полки;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $S$  – статический момент полусечения;  
 $i$  – радиус инерции

Номер двутавра	Размер, мм				Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Справочная величина для оси						
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>		y–y				z–z		
						<i>I<sub>y</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> см	<i>S<sub>y</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>I<sub>z</sub></i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>z</sub></i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>z</sub></i> см
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38

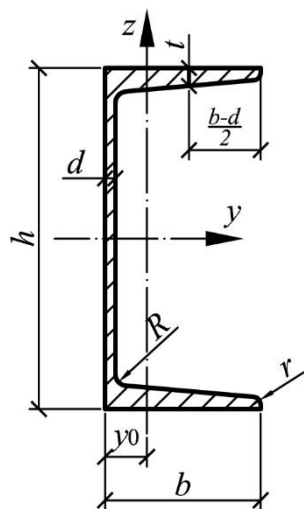
Продолжение

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>
<b>14</b>	<b>140</b>	<b>73</b>	<b>4,9</b>	<b>7,5</b>	<b>17,4</b>	<b>572</b>	<b>81,7</b>	<b>5,73</b>	<b>46,8</b>	<b>41,9</b>	<b>11,50</b>	<b>1,55</b>
<b>16</b>	<b>160</b>	<b>81</b>	<b>5,0</b>	<b>7,8</b>	<b>20,2</b>	<b>873</b>	<b>109,0</b>	<b>6,57</b>	<b>62,3</b>	<b>58,6</b>	<b>14,50</b>	<b>1,70</b>
<b>18</b>	<b>180</b>	<b>90</b>	<b>5,1</b>	<b>8,1</b>	<b>23,4</b>	<b>1290</b>	<b>143,0</b>	<b>7,42</b>	<b>81,4</b>	<b>82,6</b>	<b>18,40</b>	<b>1,88</b>
<b>20</b>	<b>200</b>	<b>100</b>	<b>5,2</b>	<b>8,4</b>	<b>26,8</b>	<b>1840</b>	<b>184,0</b>	<b>8,28</b>	<b>104,0</b>	<b>115,0</b>	<b>23,10</b>	<b>2,07</b>
<b>22</b>	<b>220</b>	<b>110</b>	<b>5,4</b>	<b>8,7</b>	<b>30,6</b>	<b>2550</b>	<b>232,0</b>	<b>9,13</b>	<b>131,0</b>	<b>157,0</b>	<b>28,60</b>	<b>2,27</b>
<b>24</b>	<b>240</b>	<b>115</b>	<b>5,6</b>	<b>9,5</b>	<b>34,8</b>	<b>3460</b>	<b>289,0</b>	<b>9,97</b>	<b>163,0</b>	<b>198,0</b>	<b>34,50</b>	<b>2,37</b>
<b>27</b>	<b>270</b>	<b>125</b>	<b>6,0</b>	<b>9,8</b>	<b>40,2</b>	<b>5010</b>	<b>371,0</b>	<b>11,20</b>	<b>210,0</b>	<b>260,0</b>	<b>41,50</b>	<b>2,54</b>
<b>30</b>	<b>300</b>	<b>135</b>	<b>6,5</b>	<b>10,2</b>	<b>46,5</b>	<b>7080</b>	<b>472,0</b>	<b>12,30</b>	<b>268,0</b>	<b>337,0</b>	<b>49,90</b>	<b>2,69</b>
<b>33</b>	<b>330</b>	<b>140</b>	<b>7,0</b>	<b>11,2</b>	<b>53,8</b>	<b>9840</b>	<b>597,0</b>	<b>13,50</b>	<b>339,0</b>	<b>419,0</b>	<b>59,90</b>	<b>2,79</b>
<b>36</b>	<b>360</b>	<b>145</b>	<b>7,5</b>	<b>12,3</b>	<b>61,9</b>	<b>13380</b>	<b>743,0</b>	<b>14,70</b>	<b>423,0</b>	<b>516,0</b>	<b>71,10</b>	<b>2,89</b>
<b>40</b>	<b>400</b>	<b>155</b>	<b>8,3</b>	<b>13,0</b>	<b>72,6</b>	<b>19062</b>	<b>953,0</b>	<b>16,20</b>	<b>545,0</b>	<b>667,0</b>	<b>86,10</b>	<b>3,03</b>

Окончание

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>
<b>45</b>	<b>450</b>	<b>160</b>	<b>9,0</b>	<b>14,2</b>	<b>84,7</b>	<b>27696</b>	<b>1231,0</b>	<b>18,10</b>	<b>708,0</b>	<b>808,0</b>	<b>101,00</b>	<b>3,09</b>
<b>50</b>	<b>500</b>	<b>170</b>	<b>10,0</b>	<b>15,2</b>	<b>100,0</b>	<b>39727</b>	<b>1589,0</b>	<b>19,90</b>	<b>919,0</b>	<b>1043,0</b>	<b>123,00</b>	<b>3,23</b>
<b>55</b>	<b>550</b>	<b>180</b>	<b>11,0</b>	<b>16,5</b>	<b>118,0</b>	<b>55962</b>	<b>2035,0</b>	<b>21,80</b>	<b>1181,0</b>	<b>1356,0</b>	<b>151,00</b>	<b>3,39</b>
<b>60</b>	<b>600</b>	<b>190</b>	<b>12,0</b>	<b>17,8</b>	<b>138,0</b>	<b>76806</b>	<b>2560,0</b>	<b>23,60</b>	<b>1491,0</b>	<b>1725,0</b>	<b>182,00</b>	<b>3,54</b>

## Швеллеры стальные горячекатаные



$h$  – высота;  
 $b$  – ширина полки;  
 $d$  – толщина стенки;  
 $R$  – радиус внутреннего закругления;  
 $r$  – радиус закругления полки;  
 $z_0$  – расстояние от оси  $Z-Z$  до наружной грани стенки;  
 $I$  – момент инерции;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $S$  – статический момент площади полусечения;  
 $i$  – радиус инерции

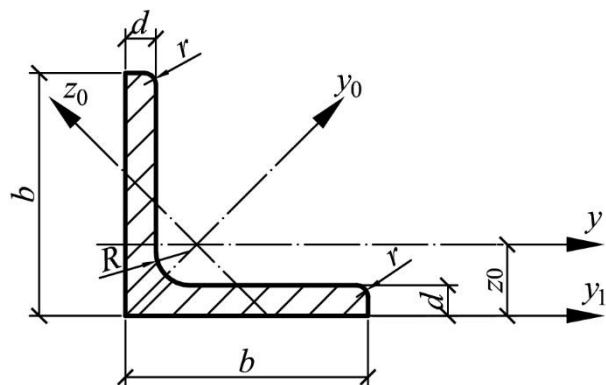
Номер швел- лера	$h$ мм	$b$ мм	$d$ мм	$t$ мм	Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Справочная величина для оси							$y_0$ см
						$y-y$				$z-z$			
						$I_x$ см <sup>4</sup>	$W_x$ см <sup>3</sup>	$i_x$ см	$S_x$ см <sup>3</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	
1	2	3		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	23,30	12,80	4,75	1,19	1,31

Окончание

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>
10	100	46	4,5	7,6	10,90	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,30	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,60	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67
16	160	64	5,0	8,4	18,10	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,50	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,70	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,20	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,20	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,70	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,37,	2,21
24	240	90	5,6	10,0	30,60	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	35,20	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,50	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,40	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,50	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,23	2,75



*Сталь прокатная угловая равнополочная*



Номер уголка	b	d	R	r	Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Масса 1м длины профиля,  кг
						y – y		y <sub>0</sub> – y <sub>0</sub>		z <sub>0</sub> – z <sub>0</sub>		y <sub>1</sub> – y <sub>1</sub>	z <sub>0</sub> см	
						I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> см	I <sub>y<sub>0</sub> max</sub> см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0</sub> max</sub> см	I <sub>z<sub>0</sub> min</sub> см <sup>4</sup>	i <sub>z<sub>0</sub> min</sub> см	I <sub>y<sub>1</sub></sub> см <sup>4</sup>		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,50	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4			1,46	0,40	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15

Продолжение

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>
2,5	25	3 4	3,5	1,2	1,43 1,86	0,81 1,03	0,75 0,74	1,29 1,62	0,95 0,93	0,34 0,44	0,49 0,48	1,57 2,11	0,73 0,76	1,12 1,46
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
3,2	32	3 4	4,5	1,5	1,86 2,43	1,77 2,26	0,97 0,96	2,80 3,58	1,23 1,21	0,74 0,94	0,63 0,62	3,26 4,39	0,89 0,94	1,46 1,91
3,6	36	3 4	4,5	1,5	2,10 2,75	2,56 3,29	1,10 1,09	4,06 5,21	1,39 1,38	1,06 1,36	0,71 0,70	4,64 6,24	0,99 1,04	1,65 2,16
4	40	3 4 5	5,0	1,7	2,35 3,08 3,79	3,55 4,58 5,53	1,23 1,22 1,20	5,63 7,26 8,75	1,55 1,53 1,54	1,47 1,90 2,30	0,79 0,78 0,79	6,35 8,53 10,73	1,09 1,13 1,17	1,85 2,42 2,97
4,5	45	3 4 5	5,0	1,7	2,65 3,48 4,20	5,13 6,63 8,03	1,39 1,38 1,37	8,13 10,50 12,70	1,75 1,74 1,72	2,12 2,74 3,33	0,89 0,89 0,88	9,04 12,10 15,30	1,21 1,26 1,30	2,08 2,73 3,37
5,0	50	3 4 5	5,5	1,8	2,96 3,89 4,80	7,11 9,21 11,20	1,55 1,54 1,53	11,30 14,60 17,80	1,95 1,94 1,92	2,95 3,80 4,63	1,00 0,99 0,98	12,40 16,60 20,90	1,33 1,38 1,42	2,32 3,05 3,77

Продолжение

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	1,73	20,80	2,18	5,41	1,11	23,30	1,52	3,44
		5			5,41	16,00	1,72	25,40	2,16	6,59	1,10	29,20	1,57	4,25
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,90	1,95	29,90	2,45	7,81	1,25	33,10	1,69	3,90
		5			6,13	23,10	1,94	36,60	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
		6			7,28	27,10	1,93	42,90	2,43	11,20	1,24	50,00	1,78	5,72
7,0	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,00	2,16	46,00	2,72	12,00	1,39	51,00	1,88	4,87
		5			6,86	31,90	2,16	50,70	2,72	13,20	1,39	56,70	1,90	5,38
		6			8,15	37,60	2,15	59,60	2,71	15,50	1,38	68,40	1,94	6,39
		7			9,42	43,00	2,14	68,20	2,69	17,80	1,37	80,10	1,99	7,39
		8			10,70	48,20	2,13	76,40	2,68	20,0	1,37	91,90	2,02	8,37
7,5	75	5	9	3,0	7,39	39,50	2,31	62,60	2,91	16,40	1,49	69,60	2,02	5,80
		6			8,78	46,60	2,30	73,90	2,90	19,30	1,48	83,90	2,06	6,89
		7			10,10	53,30	2,29	84,60	2,89	22,10	1,48	98,30	2,10	7,96
		8			11,50	59,80	2,28	94,60	2,87	24,80	1,47	113,00	2,15	9,02
		9			12,80	66,10	2,27	105,00	2,86	27,50	1,46	127,00	2,18	10,10
8,0	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,70	2,47	83,60	3,11	21,80	1,59	93,20	2,17	6,78
		6			9,38	57,00	2,47	90,40	3,11	23,50	1,58	102,00	2,19	7,36
		7			10,80	65,30	2,45	104,0	3,09	27,00	1,58	119,00	2,23	8,51
		8			12,30	73,40	2,44	116,0	3,08	30,30	1,57	137,00	2,27	9,65

Продолжение

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>
<b>9,0</b>	<b>90</b>	<b>6</b>	<b>10,0</b>	<b>3,3</b>	<b>10,60</b>	<b>82,10</b>	<b>2,78</b>	<b>130,00</b>	<b>3,50</b>	<b>34,00</b>	<b>1,79</b>	<b>145,00</b>	<b>2,43</b>	<b>8,33</b>
		<b>7</b>			<b>12,30</b>	<b>94,30</b>	<b>2,77</b>	<b>150,00</b>	<b>3,49</b>	<b>38,90</b>	<b>1,78</b>	<b>169,00</b>	<b>2,47</b>	<b>9,64</b>
		<b>8</b>			<b>13,90</b>	<b>106,00</b>	<b>2,76</b>	<b>168,00</b>	<b>3,48</b>	<b>43,80</b>	<b>1,77</b>	<b>194,00</b>	<b>2,51</b>	<b>10,90</b>
		<b>9</b>			<b>15,60</b>	<b>118,00</b>	<b>2,75</b>	<b>186,00</b>	<b>3,46</b>	<b>48,60</b>	<b>1,77</b>	<b>219,00</b>	<b>2,55</b>	<b>12,20</b>
<b>10</b>	<b>100</b>	<b>6,5</b>	<b>12,0</b>	<b>4,0</b>	<b>12,80</b>	<b>122,00</b>	<b>3,09</b>	<b>193,00</b>	<b>3,88</b>	<b>50,70</b>	<b>1,99</b>	<b>214,00</b>	<b>2,68</b>	<b>10,10</b>
		<b>7</b>			<b>13,80</b>	<b>131,00</b>	<b>3,08</b>	<b>207,00</b>	<b>3,88</b>	<b>54,20</b>	<b>1,98</b>	<b>231,00</b>	<b>2,71</b>	<b>10,80</b>
		<b>8</b>			<b>15,60</b>	<b>147,00</b>	<b>3,07</b>	<b>233,00</b>	<b>3,87</b>	<b>60,90</b>	<b>1,98</b>	<b>265,00</b>	<b>2,75</b>	<b>12,20</b>
		<b>10</b>			<b>19,20</b>	<b>179,00</b>	<b>3,05</b>	<b>284,00</b>	<b>3,84</b>	<b>74,10</b>	<b>1,96</b>	<b>333,00</b>	<b>2,83</b>	<b>15,10</b>
		<b>12</b>			<b>22,80</b>	<b>209,00</b>	<b>3,03</b>	<b>331,00</b>	<b>3,81</b>	<b>86,90</b>	<b>1,95</b>	<b>402,00</b>	<b>2,91</b>	<b>17,90</b>
		<b>14</b>			<b>26,30</b>	<b>237,00</b>	<b>3,00</b>	<b>375,00</b>	<b>3,78</b>	<b>99,30</b>	<b>1,94</b>	<b>472,00</b>	<b>2,99</b>	<b>20,60</b>
		<b>16</b>			<b>29,70</b>	<b>264,00</b>	<b>2,98</b>	<b>416,00</b>	<b>3,74</b>	<b>112,00</b>	<b>1,94</b>	<b>542,00</b>	<b>3,06</b>	<b>23,30</b>
<b>11</b>	<b>110</b>	<b>7</b>	<b>12,0</b>	<b>4,0</b>	<b>15,15</b>	<b>176,00</b>	<b>3,40</b>	<b>279,00</b>	<b>4,29</b>	<b>72,70</b>	<b>2,19</b>	<b>308,00</b>	<b>2,96</b>	<b>11,90</b>
		<b>8</b>			<b>17,20</b>	<b>198,00</b>	<b>3,39</b>	<b>315,00</b>	<b>4,28</b>	<b>81,80</b>	<b>2,18</b>	<b>353,00</b>	<b>3,00</b>	<b>13,50</b>
<b>12,5</b>	<b>125</b>	<b>8</b>	<b>14,0</b>	<b>4,6</b>	<b>19,70</b>	<b>294,00</b>	<b>3,87</b>	<b>467,00</b>	<b>4,87</b>	<b>122,00</b>	<b>2,49</b>	<b>516,00</b>	<b>3,36</b>	<b>15,50</b>
		<b>9</b>			<b>22,00</b>	<b>327,00</b>	<b>3,86</b>	<b>520,00</b>	<b>4,86</b>	<b>135,00</b>	<b>2,48</b>	<b>582,00</b>	<b>3,40</b>	<b>17,30</b>
		<b>10</b>			<b>24,30</b>	<b>360,00</b>	<b>3,85</b>	<b>571,00</b>	<b>4,84</b>	<b>149,00</b>	<b>2,47</b>	<b>649,00</b>	<b>3,45</b>	<b>19,10</b>
		<b>12</b>			<b>28,90</b>	<b>422,00</b>	<b>3,82</b>	<b>670,00</b>	<b>4,82</b>	<b>174,00</b>	<b>2,46</b>	<b>782,00</b>	<b>3,53</b>	<b>22,70</b>
		<b>14</b>			<b>33,40</b>	<b>482,00</b>	<b>3,80</b>	<b>764,00</b>	<b>4,78</b>	<b>200,00</b>	<b>2,45</b>	<b>916,00</b>	<b>3,61</b>	<b>26,20</b>
		<b>16</b>			<b>37,80</b>	<b>539,00</b>	<b>3,78</b>	<b>853,00</b>	<b>4,75</b>	<b>224,00</b>	<b>2,44</b>	<b>1051,00</b>	<b>3,68</b>	<b>29,60</b>

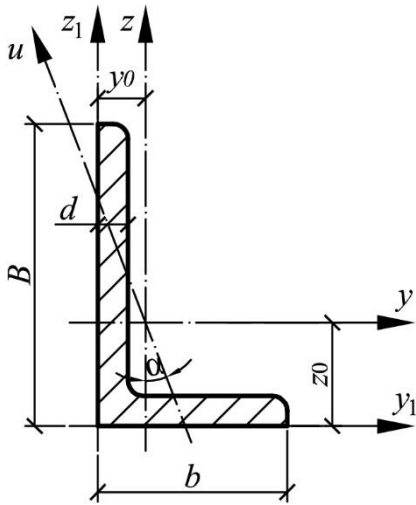
Продолжение

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>
<b>14</b>	<b>140</b>	<b>9</b>	<b>14,0</b>	<b>4,6</b>	<b>24,70</b>	<b>466,00</b>	<b>4,34</b>	<b>739,00</b>	<b>5,47</b>	<b>192,00</b>	<b>2,79</b>	<b>818,00</b>	<b>3,78</b>	<b>19,40</b>
		<b>10</b>			<b>27,30</b>	<b>512,00</b>	<b>4,33</b>	<b>814,00</b>	<b>5,46</b>	<b>211,00</b>	<b>2,78</b>	<b>911,00</b>	<b>3,82</b>	<b>21,50</b>
		<b>12</b>			<b>32,50</b>	<b>602,00</b>	<b>4,31</b>	<b>957,00</b>	<b>5,43</b>	<b>248,00</b>	<b>2,76</b>	<b>1097,00</b>	<b>3,90</b>	<b>25,50</b>
<b>16</b>	<b>160</b>	<b>10</b>	<b>16,0</b>	<b>5,3</b>	<b>31,40</b>	<b>774,00</b>	<b>4,96</b>	<b>1229,00</b>	<b>6,25</b>	<b>319,00</b>	<b>3,19</b>	<b>1356,00</b>	<b>4,30</b>	<b>24,70</b>
		<b>11</b>			<b>34,40</b>	<b>844,00</b>	<b>4,95</b>	<b>1341,00</b>	<b>6,24</b>	<b>348,00</b>	<b>3,18</b>	<b>1494,00</b>	<b>4,35</b>	<b>27,00</b>
		<b>12</b>			<b>37,40</b>	<b>913,00</b>	<b>4,94</b>	<b>1450,00</b>	<b>6,23</b>	<b>376,00</b>	<b>3,17</b>	<b>1633,00</b>	<b>4,39</b>	<b>29,40</b>
		<b>14</b>			<b>43,30</b>	<b>1046,00</b>	<b>4,92</b>	<b>1662,00</b>	<b>6,20</b>	<b>431,00</b>	<b>3,16</b>	<b>1911,00</b>	<b>4,47</b>	<b>34,00</b>
		<b>16</b>			<b>49,10</b>	<b>1175,00</b>	<b>4,89</b>	<b>1866,00</b>	<b>6,17</b>	<b>485,00</b>	<b>3,14</b>	<b>2191,00</b>	<b>4,55</b>	<b>38,50</b>
		<b>18</b>			<b>54,80</b>	<b>1299,00</b>	<b>4,87</b>	<b>2061,00</b>	<b>6,13</b>	<b>537,00</b>	<b>3,13</b>	<b>2472,00</b>	<b>4,63</b>	<b>43,00</b>
		<b>20</b>			<b>60,40</b>	<b>1419,00</b>	<b>4,85</b>	<b>2248,00</b>	<b>6,10</b>	<b>589,00</b>	<b>3,12</b>	<b>2756,00</b>	<b>4,70</b>	<b>47,40</b>
<b>18</b>	<b>180</b>	<b>11</b>	<b>16,0</b>	<b>5,3</b>	<b>38,80</b>	<b>1216,00</b>	<b>5,60</b>	<b>1933,00</b>	<b>7,06</b>	<b>500,00</b>	<b>3,59</b>	<b>2128,00</b>	<b>4,85</b>	<b>30,50</b>
		<b>12</b>			<b>42,20</b>	<b>1317,00</b>	<b>5,59</b>	<b>2093,00</b>	<b>7,04</b>	<b>540,00</b>	<b>3,58</b>	<b>2324,00</b>	<b>4,89</b>	<b>33,10</b>
<b>20</b>	<b>200</b>	<b>12</b>	<b>18,0</b>	<b>6,0</b>	<b>47,10</b>	<b>1823,00</b>	<b>6,22</b>	<b>2896,00</b>	<b>7,84</b>	<b>749,00</b>	<b>3,99</b>	<b>3182,00</b>	<b>5,37</b>	<b>37,00</b>
		<b>13</b>			<b>50,90</b>	<b>1961,00</b>	<b>6,21</b>	<b>3116,00</b>	<b>7,83</b>	<b>805,00</b>	<b>3,98</b>	<b>3452,00</b>	<b>5,42</b>	<b>39,90</b>
		<b>14</b>			<b>54,60</b>	<b>2097,00</b>	<b>6,20</b>	<b>3333,00</b>	<b>7,81</b>	<b>861,00</b>	<b>3,97</b>	<b>3722,00</b>	<b>5,46</b>	<b>42,80</b>
		<b>16</b>			<b>62,00</b>	<b>2363,00</b>	<b>6,17</b>	<b>3755,00</b>	<b>7,78</b>	<b>970,00</b>	<b>3,96</b>	<b>4264,00</b>	<b>5,54</b>	<b>48,70</b>
		<b>20</b>			<b>76,50</b>	<b>2871,00</b>	<b>6,12</b>	<b>4560,00</b>	<b>7,72</b>	<b>1182,00</b>	<b>3,93</b>	<b>5355,00</b>	<b>5,70</b>	<b>60,10</b>
		<b>25</b>			<b>94,30</b>	<b>3466,00</b>	<b>6,06</b>	<b>5494,00</b>	<b>7,63</b>	<b>1438,00</b>	<b>3,91</b>	<b>6733,00</b>	<b>5,89</b>	<b>74,00</b>
		<b>30</b>			<b>111,50</b>	<b>4020,00</b>	<b>6,00</b>	<b>6351,00</b>	<b>7,55</b>	<b>1688,00</b>	<b>3,89</b>	<b>8130,00</b>	<b>6,07</b>	<b>87,60</b>

Окончание

<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>
<b>22</b>	<b>220</b>	<b>14 16</b>	<b>21,0</b>	<b>7,0</b>	<b>60,40 68,60</b>	<b>2814,00 3175,00</b>	<b>6,83 6,81</b>	<b>4470,00 5045,00</b>	<b>8,60 8,58</b>	<b>1159,00 1306,00</b>	<b>4,38 4,36</b>	<b>4941,00 5661,00</b>	<b>5,93 6,02</b>	<b>47,40 53,80</b>
<b>25</b>	<b>250</b>	<b>16</b>	<b>24,0</b>	<b>8,0</b>	<b>78,40</b>	<b>4717,00</b>	<b>7,76</b>	<b>7492,00</b>	<b>9,78</b>	<b>1942,00</b>	<b>4,98</b>	<b>8286,00</b>	<b>6,75</b>	<b>61,50</b>
		<b>18</b>			<b>87,70</b>	<b>5247,00</b>	<b>7,73</b>	<b>8337,00</b>	<b>9,75</b>	<b>2158,00</b>	<b>4,96</b>	<b>9342,00</b>	<b>6,83</b>	<b>68,90</b>
		<b>20</b>			<b>97,00</b>	<b>5765,00</b>	<b>7,71</b>	<b>9160,00</b>	<b>9,72</b>	<b>2370,00</b>	<b>4,94</b>	<b>10401,00</b>	<b>6,91</b>	<b>76,10</b>
		<b>22</b>			<b>106,10</b>	<b>6270,00</b>	<b>7,69</b>	<b>9961,00</b>	<b>6,69</b>	<b>2579,00</b>	<b>4,93</b>	<b>11464,00</b>	<b>7,00</b>	<b>83,30</b>
		<b>25</b>			<b>119,70</b>	<b>7006,00</b>	<b>7,65</b>	<b>11125,00</b>	<b>9,64</b>	<b>2887,00</b>	<b>4,91</b>	<b>13064,00</b>	<b>7,11</b>	<b>94,00</b>
		<b>28</b>			<b>133,10</b>	<b>7717,00</b>	<b>7,61</b>	<b>12244,00</b>	<b>9,59</b>	<b>3190,00</b>	<b>4,89</b>	<b>14674,00</b>	<b>7,23</b>	<b>104,50</b>
		<b>30</b>			<b>142,00</b>	<b>8177,00</b>	<b>7,59</b>	<b>12965,00</b>	<b>9,56</b>	<b>3389,00</b>	<b>4,89</b>	<b>15753,00</b>	<b>7,31</b>	<b>111,40</b>

Сталь прокатная угловая неравнополочная



$B, b$  – ширина большей и меньшей полки;  
 $I, i$  – момент и радиус инерции;  
 $y_0, z_0$  – расстояние от центра тяжести до наружных граней полок

87

Номер уголка	$B$	$b$	$d$	Площадь поперечного сечения, $\text{см}^2$	Справочная величина для оси								$y_0$ см	$z_0$ см	$I_{yz}$ $\text{см}^4$	Угол наклона оси $\text{tga}$
	мм				$y-y$			$z-z$			$u-u$					
					$I_y$ $\text{см}^4$	$W_y$ $\text{см}^3$	$i_y$ см	$I_z$ $\text{см}^4$	$W_z$ $\text{см}^3$	$i_z$ см	$I_{u \max}$ $\text{см}^4$	$I_{v \min}$ $\text{см}^4$				
$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$8$	$9$	$10$	$11$	$12$	$13$	$14$	$15$	$16$	$17$
4/2,5	40	25	4	2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,54	0,63	1,37	1,22	0,381

Продолжение

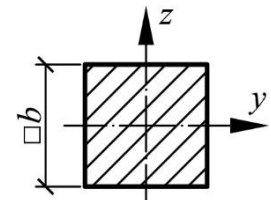
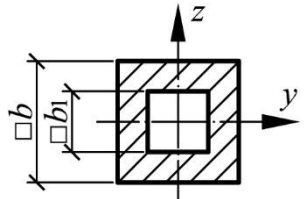
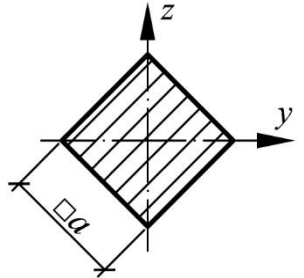
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>	<i>16</i>	<i>17</i>
<b>4,5/2,8</b>	<b>45</b>	<b>28</b>	<b>4</b>	<b>2,80</b>	<b>5,68</b>	<b>1,90</b>	<b>1,42</b>	<b>1,69</b>	<b>0,80</b>	<b>0,78</b>	<b>1,02</b>	<b>0,60</b>	<b>0,68</b>	<b>1,51</b>	<b>1,77</b>	<b>0,379</b>
<b>5,6/3,6</b>	<b>56</b>	<b>36</b>	<b>5</b>	<b>4,41</b>	<b>13,82</b>	<b>3,70</b>	<b>1,77</b>	<b>4,48</b>	<b>1,65</b>	<b>1,01</b>	<b>2,65</b>	<b>0,78</b>	<b>0,88</b>	<b>1,87</b>	<b>4,50</b>	<b>0,404</b>
<b>6,3/4,0</b>	<b>63</b>	<b>40</b>	<b>6</b>	<b>5,90</b>	<b>23,31</b>	<b>5,58</b>	<b>1,99</b>	<b>7,29</b>	<b>2,42</b>	<b>1,11</b>	<b>4,36</b>	<b>0,86</b>	<b>0,99</b>	<b>2,12</b>	<b>7,44</b>	<b>0,393</b>
<b>7/4,5</b>	<b>70</b>	<b>45</b>	<b>5</b>	<b>5,59</b>	<b>27,76</b>	<b>5,88</b>	<b>2,23</b>	<b>9,05</b>	<b>2,62</b>	<b>1,27</b>	<b>5,34</b>	<b>0,98</b>	<b>1,05</b>	<b>2,28</b>	<b>9,12</b>	<b>0,406</b>
<b>8/5</b>	<b>80</b>	<b>50</b>	<b>6</b>	<b>7,55</b>	<b>48,98</b>	<b>9,15</b>	<b>2,55</b>	<b>14,85</b>	<b>3,88</b>	<b>1,40</b>	<b>8,88</b>	<b>1,08</b>	<b>1,17</b>	<b>2,65</b>	<b>15,50</b>	<b>0,386</b>
<b>9/5,6</b>	<b>90</b>	<b>56</b>	<b>8</b>	<b>11,18</b>	<b>90,87</b>	<b>15,24</b>	<b>2,85</b>	<b>27,08</b>	<b>6,39</b>	<b>1,56</b>	<b>16,29</b>	<b>1,21</b>	<b>1,36</b>	<b>3,04</b>	<b>28,33</b>	<b>0,380</b>
<b>10/6,3</b>	<b>100</b>	<b>63</b>	<b>6</b>	<b>9,58</b>	<b>98,29</b>	<b>14,52</b>	<b>3,20</b>	<b>30,58</b>	<b>6,27</b>	<b>1,79</b>	<b>18,20</b>	<b>1,38</b>	<b>1,42</b>	<b>3,23</b>	<b>31,50</b>	<b>0,393</b>
<b>10/6,3</b>	<b>100</b>	<b>63</b>	<b>8</b>	<b>12,57</b>	<b>126,96</b>	<b>19,01</b>	<b>3,18</b>	<b>39,21</b>	<b>8,17</b>	<b>1,77</b>	<b>23,38</b>	<b>1,36</b>	<b>1,50</b>	<b>3,32</b>	<b>40,50</b>	<b>0,391</b>
<b>10/6,3</b>	<b>100</b>	<b>63</b>	<b>10</b>	<b>15,47</b>	<b>153,95</b>	<b>23,32</b>	<b>3,15</b>	<b>47,18</b>	<b>9,99</b>	<b>1,75</b>	<b>28,34</b>	<b>1,35</b>	<b>1,58</b>	<b>3,40</b>	<b>48,60</b>	<b>0,387</b>
<b>11/7</b>	<b>110</b>	<b>70</b>	<b>8</b>	<b>13,93</b>	<b>171,54</b>	<b>23,22</b>	<b>3,51</b>	<b>54,64</b>	<b>10,20</b>	<b>1,98</b>	<b>32,31</b>	<b>1,52</b>	<b>1,64</b>	<b>3,61</b>	<b>55,90</b>	<b>0,400</b>
<b>12,5/8</b>	<b>125</b>	<b>80</b>	<b>8</b>	<b>15,98</b>	<b>225,62</b>	<b>30,27</b>	<b>4,00</b>	<b>80,95</b>	<b>13,47</b>	<b>2,28</b>	<b>48,82</b>	<b>1,75</b>	<b>1,84</b>	<b>4,05</b>	<b>84,10</b>	<b>0,406</b>
<b>14/9</b>	<b>140</b>	<b>90</b>	<b>8</b>	<b>18,00</b>	<b>363,68</b>	<b>38,25</b>	<b>4,49</b>	<b>119,79</b>	<b>17,19</b>	<b>2,58</b>	<b>70,27</b>	<b>1,98</b>	<b>2,03</b>	<b>4,49</b>	<b>121,00</b>	<b>0,411</b>
<b>14/9</b>	<b>140</b>	<b>90</b>	<b>10</b>	<b>22,24</b>	<b>444,45</b>	<b>47,19</b>	<b>4,47</b>	<b>145,54</b>	<b>21,14</b>	<b>2,56</b>	<b>85,51</b>	<b>1,96</b>	<b>2,12</b>	<b>4,58</b>	<b>147,00</b>	<b>0,409</b>
<b>16/10</b>	<b>160</b>	<b>100</b>	<b>10</b>	<b>25,28</b>	<b>666,59</b>	<b>61,91</b>	<b>5,13</b>	<b>204,09</b>	<b>26,42</b>	<b>2,84</b>	<b>121,16</b>	<b>2,19</b>	<b>2,28</b>	<b>5,23</b>	<b>213,00</b>	<b>0,390</b>
<b>16/10</b>	<b>160</b>	<b>100</b>	<b>14</b>	<b>34,72</b>	<b>897,19</b>	<b>84,65</b>	<b>5,08</b>	<b>271,60</b>	<b>35,89</b>	<b>2,80</b>	<b>162,49</b>	<b>2,16</b>	<b>2,43</b>	<b>5,40</b>	<b>282,00</b>	<b>0,385</b>



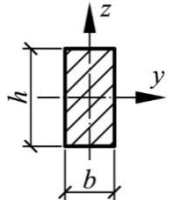
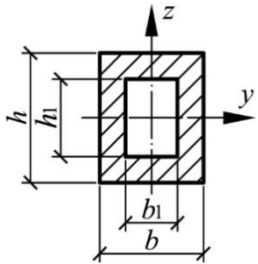
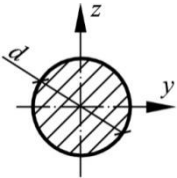
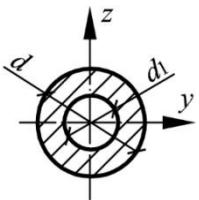
Окончание

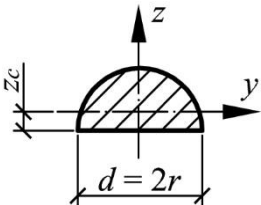
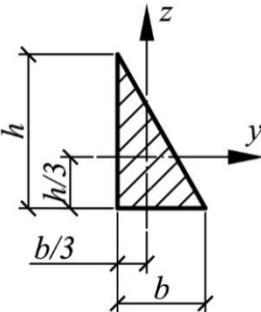
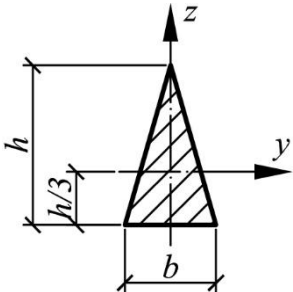
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>	<i>13</i>	<i>14</i>	<i>15</i>	<i>16</i>	<i>17</i>
<b>18/11</b>	<b>180</b>	<b>110</b>	<b>10</b>	<b>28,33</b>	<b>952,28</b>	<b>78,59</b>	<b>5,80</b>	<b>276,37</b>	<b>32,27</b>	<b>3,12</b>	<b>165,44</b>	<b>2,42</b>	<b>2,44</b>	<b>5,88</b>	<b>295,00</b>	<b>0,376</b>
<b>18/11</b>	<b>180</b>	<b>110</b>	<b>12</b>	<b>33,69</b>	<b>1122,56</b>	<b>93,33</b>	<b>5,77</b>	<b>324,09</b>	<b>38,20</b>	<b>3,10</b>	<b>194,28</b>	<b>2,40</b>	<b>2,52</b>	<b>5,97</b>	<b>348,00</b>	<b>0,374</b>
<b>20/12,5</b>	<b>200</b>	<b>125</b>	<b>12</b>	<b>37,89</b>	<b>1568,19</b>	<b>116,51</b>	<b>6,43</b>	<b>481,93</b>	<b>49,85</b>	<b>3,57</b>	<b>285,04</b>	<b>2,74</b>	<b>2,83</b>	<b>6,54</b>	<b>503,00</b>	<b>0,392</b>
<b>20/12,5</b>	<b>200</b>	<b>125</b>	<b>14</b>	<b>43,87</b>	<b>1800,83</b>	<b>134,64</b>	<b>6,41</b>	<b>550,77</b>	<b>57,43</b>	<b>3,54</b>	<b>326,54</b>	<b>2,73</b>	<b>2,91</b>	<b>6,62</b>	<b>575,00</b>	<b>0,390</b>
<b>20/12,5</b>	<b>200</b>	<b>125</b>	<b>16</b>	<b>49,77</b>	<b>2026,08</b>	<b>152,41</b>	<b>6,38</b>	<b>616,66</b>	<b>64,83</b>	<b>3,52</b>	<b>366,99</b>	<b>2,72</b>	<b>2,99</b>	<b>6,71</b>	<b>643,00</b>	<b>0,388</b>

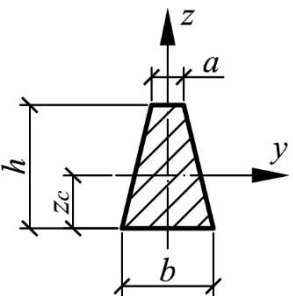
## Геометрические характеристики плоских сечений

Сечение	Площадь сечения $A$	Осевой момент инерции $I_y, I_z$	Момент сопротивления $W_y, W_z$	Радиус инерции $i_y, i_z$
	$b^2$	$I_y = I_z = \frac{b^4}{12}$	$W_y = W_z = \frac{b^3}{6} \approx 0,118b^3$	$i_y = i_z = \frac{b}{\sqrt{12}} \approx 0,289b$
	$b^2 - b_1^2$	$I_y = I_z = \frac{b^4 - b_1^4}{12}$	$W_y = W_z = \frac{b^4 - b_1^4}{6b}$	$i_y = i_z = \sqrt{\frac{b^2 + b_1^2}{12}}$
	$a^2$	$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$	$W_y = W_z = \frac{\sqrt{2}a^3}{12} \approx 0,118a^3$	$i_y = i_z = \frac{a}{\sqrt{12}} \approx 0,289a$

Продолжение

Сечение	Площадь сечения $A$	Осевой момент инерции $I_y, I_z$	Момент сопротивления $W_y, W_z$	Радиус инерции $i_y, i_z$
	$bh$	$I_y = \frac{bh^3}{12};$ $I_z = \frac{hb^3}{12}$	$W_y = \frac{bh^2}{6};$ $W_z = \frac{hb^2}{6}$	$i_y = \frac{h}{\sqrt{12}} \approx 0,289h;$ $i_z = \frac{b}{\sqrt{12}} \approx 0,289b$
	$bh - b_1h_1$	$I_y = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12};$ $I_z = \frac{b^3h - b_1^3h_1}{12}$	$W_y = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6h};$ $W_z = \frac{b^3h - b_1^3h_1}{6b}$	$i_y = \sqrt{\frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12(bh - b_1h_1)}};$ $i_z = \sqrt{\frac{hb^3 - h_1b_1^3}{12(bh - b_1h_1)}}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$	$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32}; \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$	$i_y = i_z = \frac{d}{4}$
	$\frac{\pi(d^2 - d_1^2)}{4}$	$I_y = I_z = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{64};$ $I_\rho = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{32}$	$W_y = W_z = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{32d};$ $W_\rho = \frac{\pi(d^4 - d_1^4)}{16d}$	$i_y = i_z = \frac{\sqrt{d^2 + d_1^2}}{4}$

Сечение	Площадь сечения $A$	Осевой момент инерции $I_y, I_z$	Момент сопротивления $W_y, W_z$	Радиус инерции $i_y, i_z$
	$\frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2}$	$I_y = 0,11r^4 = 0,007d^4;$ $I_z = 0,4r^4 = 0,025d^4$	$W_{yB} = 0,1912r^3 = 0,0239d^3;$ $W_{yH} = 0,258r^3 = 0,0323d^3;$ $W_z = 0,4r^3 = 0,05d^3$	$i_y = 0,264r = 0,132d;$ $i_z = 0,5r = 0,25d$
	$\frac{bh}{2}$	$I_y = \frac{bh^3}{36}; \quad I_z = \frac{hb^3}{36}$	$W_{yB} = \frac{bh^2}{24}; \quad W_{yH} = \frac{bh^2}{12};$ $W_{zH} = \frac{bh^2}{24}; \quad W_{zA} = \frac{bh^2}{12}$	$i_y = \frac{h}{\sqrt{18}} \approx 0,236h;$ $i_z = \frac{b}{\sqrt{18}} \approx 0,236b$
	$\frac{bh}{2}$	$I_y = \frac{bh^3}{36}; \quad I_z = \frac{hb^3}{48}$	$W_{yB} = \frac{bh^2}{24}; \quad W_{yH} = \frac{bh^2}{12};$ $W_z = \frac{bh^2}{24}$	$i_y = \frac{h}{\sqrt{18}} \approx 0,236h;$ $i_z = \frac{b}{\sqrt{24}} \approx 0,204b$

Сечение	Площадь сечения $A$	Осевой момент инерции $I_y, I_z$	Момент сопротивления $W_y, W_z$	Радиус инерции $i_y, i_z$
 $z_c = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$	$\frac{a+b}{2}h$	$I_y = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)};$ $I_z = \frac{h(b^4 - a^4)}{48(b-a)}$	$W_{yB} = \frac{h^2(a^2 + 4ab + b^2)}{12(a+2b)};$ $W_{yH} = \frac{h^2(a^2 + 4ab + b^2)}{12(2a+b)};$ $W_z = \frac{h(b^4 - a^4)}{24(b^2 - ba)}$	$i_y = \sqrt{\frac{h^2(a^2 + 4ab + b^2)}{18(a+b)^2}};$ $i_z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{24}}$

**Примечания:**

1.  $W_{yB}, W_{yH}, W_{zП}, W_{zЛ}$  – осевые моменты сопротивления крайних верхних (В), нижних (Н), правых (П) и левых (Л) волокон соответственно.
2. Единицы измерений величин:
  - площадь сечения  $A$ :  $\text{м}^2 = 10^4 \text{ см}^2$ ;
  - осевые и полярный моменты инерции:  $I_y, I_z, I_\rho, \text{м}^4 = 10^8 \text{ см}^4$ ;
  - осевые и полярный моменты сопротивления:  $W_y, W_z, W_\rho, \text{м}^3 = 10^6 \text{ см}^3$ ;
  - радиусы инерции:  $i_y, i_z, \text{м} = 10^2 \text{ см}$ .

**Зависимость между механическими единицами СИ, СГС и внесистемными единицами**

$1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$	$1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$	$1 \text{ Н} = 10^{-3} \text{ кН}$	$1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$
$1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ см}^2$	$1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$	$1 \text{ Н} = 10^{-6} \text{ МН}$	$1 \text{ МН} = 10^6 \text{ Н}$	$1 \text{ кПа} = 1 \text{ кН/м}^2$
$1 \text{ м}^3 = 10^6 \text{ см}^3$	$1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$	$1 \text{ кН} = 10^{-3} \text{ МН}$	$1 \text{ МН} = 10^3 \text{ кН}$	$1 \text{ МПа} = 1 \text{ МН/м}^2$
$1 \text{ м}^4 = 10^8 \text{ см}^4$	$1 \text{ см}^4 = 10^{-8} \text{ м}^4$	$1 \text{ т} = 10 \text{ кН}$	$1 \text{ кг} = 10 \text{ Н}$	$1 \text{ МН} = 100 \text{ т}$

$1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}$	$1 \text{ кПа} = 10^{-3} \text{ МПа}$	$1 \text{ МПа} = 10^3 \text{ кПа}$	$1 \text{ МПа} = 10 \text{ кг/см}^2$	$1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$
-----------------------------------	---------------------------------------	------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

**Таблица коэффициентов продольного изгиба  $\varphi$  центрально сжатых элементов**

Материал	Гибкость $\lambda$																	
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
Ст. 2, 3 (сталь)	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23
Дерево	0,99	0,97	0,93	0,87	0,8	0,71	0,61	0,47	0,37	0,30	0,25	0,21	0,18	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09

Значения  $\varphi$  для дерева определены в соответствии со СНиП II –25-80 по формулам:

$$\varphi = 1 - 0,8 \left( \frac{\lambda}{100} \right)^2, \text{ если } \lambda \leq 70; \quad \varphi = \frac{3000}{\lambda^2}, \text{ если } \lambda > 70, \text{ где } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} - \text{гибкость стержня};$$

$\mu$  – коэффициент приведения длины;  $l$  – длина стержня;  $i_{\min}$  – минимальный радиус инерции

**Значения коэффициентов  $a$  и  $b$ , используемых в формуле Ф.С. Ясинского,  
для некоторых материалов  
( $\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda$ )**

Материал	$a$ , МПа	$b$ , МПа	$\lambda_{пред}$
Сталь	310	1,14	100
Дерево	40	0,203	70

$\lambda_{пред}$  - предельная гибкость стержня

**Механические характеристики материалов**

Сталь				МЕДЬ		Чугун	Дерево
Е, МПа	G, МПа	$\alpha$ , 1/град	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Е, МПа	$\alpha$ , 1/град	Е, МПа	Е, МПа
$2,06 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$125 \cdot 10^{-7}$	78	$0,98 \cdot 10^5$	$165 \cdot 10^{-7}$	$1,18 \cdot 10^5$	$0,98 \cdot 10^4$

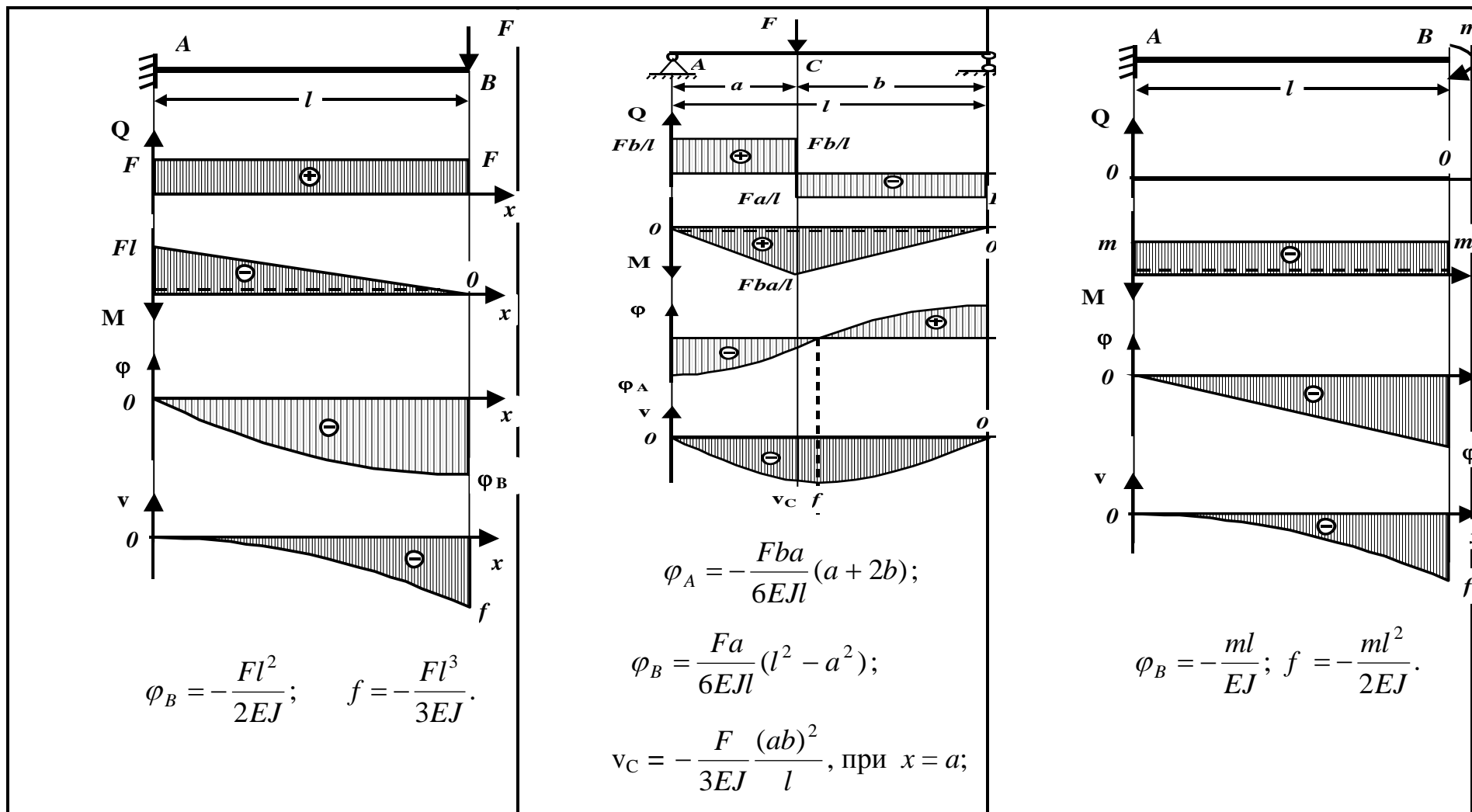
**Обозначения:**

$E$  - модуль упругости при растяжении;  $\gamma$  - объемный вес;  $\nu$  - коэффициент Пуассона;

$\alpha$  - температурный коэффициент линейного расширения;  $G$  - модуль упругости при сдвиге.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

**ЭПЮРЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ  $Q$ , ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ  $M$ , ПРОГИБОВ  $v$  И УГЛОВ ПОВОРОТА  $\varphi$   
НЕКОТОРЫХ БАЛОК**



$$\varphi_A = -\frac{Fba}{6EJl}(a+2b);$$

$$\varphi_B = \frac{Fa}{6EJl}(l^2 - a^2);$$

$$v_C = -\frac{F}{3EJ} \frac{(ab)^2}{l}, \text{ при } x = a;$$

**Обозначения:**  $\varphi$  - угол поворота поперечного сечения;  $v$  - прогиб;  $f$  - стрела прогиба (максимальный прогиб).