МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФГБОУ ВО "ПРИАМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

В.Н. Рябченко, М.В. Канделя

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ и КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Учебное пособие

Благовещенск-Биробиджан
Издательство ДальГАУ-ПГУ
2015

Рябченко В.Н., Канделя М.В. Основы теоретической механики и контрольные задания. Учебное пособие. – Благовещенск-Биробиджан: ДальГАУ-ПГУ, 2015. – 240 с.

В учебном пособии рассмотрены теоретические основы дисциплины «Теоретическая механика» в соответствии с ФГОС ВО по направлениям: "Электроэнергетика и электротехника", "Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов", "Агроинженерия", "Строительство". В пособии приведены основы теории разделов: СТАТИКА, КИНЕМАТИКА, ДИНАМИКА и АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. Разработаны варианты и схемы для выполнения контрольных заданий, включающие наиболее общие и часто встречающиеся в инженерной практике примеры и задачи.

Рецензенты:

Щитов С.В., доктор технических наук, профессор, проректор по учебной и воспитательной работе ДальГАУ.

Рубан Ю.Н., кандидат технических наук, профессор кафедры "Эксплуатация и ремонт транспортно-технологических мвшин и комплексов" ДальГАУ.

ISBN 978-5-9642-0051-9 Издательство ДальГАУ-ПГУ 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для активизации самостоятельного изучения курса теоретической механики, выполнения контрольных заданий для приобретения и усвоения практических навыков решения инженерных задач и, в том числе, для обеспечения интерактивных аудиторных занятий [1], с целью развития интеллекта и творческого потенциала студентов.

По содержанию разделов и контрольных заданий данное пособие может быть использовано студентами очного, заочного и заочно-сокращенного обучения, в том числе и студентами других направлений инженерного профиля.

В настоящем пособии перед каждым контрольным заданием кратко изложены основы теоретической механики, которые соответствуют программе курса. С более полным и глубоким изложением теоретического курса можно познакомиться в литературных источниках [2,3,...,10 и др.]. В конце задания приведены вопросы для индивидуальной защиты задания и для подготовки к интерактивным аудиторным занятиям.

Учебное пособие публикуется на основе опыта преподавания дисциплины "Теоретическая механика" в Дальневосточном ГАУ и Приамурском ГУ и апробированных методических указаний и учебных пособий авторов [11,12,13].

Предлагаемое учебное пособие, исправленное и дополненное в соответствии с требованиями ФГОС ПО нового поколения, позволяет каждому студенту проявить творческую активность и самостоятельность при изучении теоретических основ излагаемых разделов механики и выполнить индивидуальные контрольные задания.

Формулы, рисунки и номера расчетно-графических заданий имеют двойную нумерацию: первая цифра соответствует номеру раздела (главы), вторая - порядковому номеру формулы, рисунка или задания. Формулы в примерах решения задач имеют простую порядковую нумерацию.

При наличии учебника удобнее пользоваться и материалами пособия, и учебника, где теория излагается более подробно с примерами решения специально подобранных задач. Последовательное и более глубокое изучение предпочтительнее.

При изучении материала курса по настоящему пособию и учебнику нужно, прежде всего, уяснить существо каждого излагаемого раздела.

Изучать материал рекомендуется по темам (разделам) программы, основным положениям теории, по главам (параграфам) пособия или учебника. Следует прочитать весь материал темы (главы), затем надо вернуться к местам, вызвавшие затруднения, и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание следует обращать на формулировки соответствующих определений, теорем и т.д. (они обычно бывают набраны в учебнике курсивом или разрядкой); важно понять их смысл и уметь изложить результат своими словами.

Необходимо также понять ход всех доказательств и разобраться в их деталях. Доказательства надо уметь воспроизводить самостоятельно, что нетрудно сделать, поняв идею доказательства. Закончив изучение темы, полезно составить краткий конспект, по возможности не заглядывая в пособие или учебник. При изучении курса по учебнику особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив материал каждой темы, надо сначала обязательно разобраться в решении соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению.

Студенту необходимо выполнить все задачи своего варианта. Вариант выбирается по последней цифре шифра. Номер рисунка берется по предпоследней цифре шифра. Контрольные задания оформляются на стандартных листах А4 только на одной стороне листа, преимущественно в электронной форме. Допускается рукописное оформление. Титульный лист включает: название министерства, Вуза, наименование кафедры, вид работы, фамилию и инициалы студента, шифр, номер контрольного задания и варианта, место и год выполнения задания.

Выполняя контрольные задания, необходимо полностью переписывать текст каждой задачи и аккуратно и точно делать соответствующий чертеж. Размеры деталей чертежа, углы, заданные векторы сил, скоростей и ускорений изображать в масштабе в соответствии с данными варианта. На чертежах должны изображаться все векторы, которые встречаются в ходе решения.

Решение каждой задачи должно сопровождаться пояснениями, иначе задание направляется для полного оформления и только после этого принимается для защиты. Для облегчения выполнения контрольного задания приводится пример выполнения 10-го варианта для каждой задачи.

Выполнение расчетно-графической работы каждым студентом в соответствии с ФГОС ВО по дисциплине "Теоретическая механика" направлено на формирование профессиональных компетенций.

Паспорт формирования компетенций включает:

1. Определение/содержание и основные сущностные характеристики компетенций.

2. Формы контроля, позволяющие оценить сформированность компетенций.

3. Планируемые уровни сформированности компетенций при выполнении расчетно-графической работы.

4.Планируемые уровни сформированности компетенций при тестировании.

5. Комплекты оценочных средств -экзамен (зачет).

6. Вопросы к экзамену (зачету).

По направлению подготовки 140400.62 "Электроэнергетика и электротехника" по профилю "Электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений", квалификация - бакалавр, в частности, паспорт формирования компетенций приведен в приложении.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

СТАТИКА, **КИНЕМАТИКА, ДИНАМИКА и АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА** являются важными составными частями теоретической механики. По ряду направлений агроинженерного профиля в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования эти разделы входят в прикладную механику. Изучение **СТАТИКИ**, **КИНЕМАТИКИ, ДИНАМИКИ и АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ** в высших учебных заведениях составляет теоретическую основу знаний по механике материальных тел и механических систем.

Роль и значение теоретической механики в инженерном образовании определяется тем, что механика является научной базой многих областей современной техники. Её законы и методы позволяют изучить и объяснить целый ряд важных явлений в окружающем нас мире, способствуют дальнейшему развитию естествознания в целом и вырабатывают правильное материальное мировоззрение.

Раздел первый

СТАТИКА

Глава 1

Основные понятия, определения и аксиомы статики

1.1. Предмет статики и основные определения

Статика - раздел механики, в котором изучаются общие свойства сил и условия равновесия тел под действием этих сил.

Под ***равновесием*** понимается состояние покоя тела по отношению к другим телам (в частности к Земле) или состояние равномерного прямолинейного движения. В общем курсе рассматриваются обычно задачи о равновесии абсолютно твёрдых тел.

Абсолютно твёрдым телом или просто ***твердым телом*** называется такое недеформированное тело, состояние которого не изменяется под действием приложенных сил. Деформация тел учитывается в курсе сопротивления материалов.

<u>Сила</u> - количественная мера взаимодействия между телами. Сила векторная величина. Её действие на тело определяется:

- модулем или величиной;
- направлением вдоль линии действия;
- точкой приложения силы.

Единицей измерения силы в международной системе единиц (СИ) является 1Н (1 Ньютон). Для статического измерения силы используют приборы - динамометры.

<u>Система сил</u> - совокупность сил, действующих на тело.

Тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется ***<u>свободным.</u>***

Две системы сил называются ***<u>эквивалентными</u>,*** если одну систему, действующую на тело, можно заменить другой, не изменяя состояния покоя или движения.

<u>Уравновешенная система</u> - эквивалентная нулю или система сил, под действием которой свободное тело находится в покое.

<u>Равнодействующая системы сил</u> – сила, эквивалентная данной системе сил.

<u>Сосредоточенная сила</u> - сила, приложенная в одной точке. Понятие о сосредоточенной силе является условным, так как приложить силу к телу в данной точке практически нельзя. Силы, которые рассматриваются в механике как сосредоточенные, представляют собой по существу равнодействующие распределённых определённым образом систем сил.

<u>Распределенная сила</u> - сила, действующая на все точки данной поверхности.

В задачах статики распределённые силы, как правило, заменяются сосредоточенными (рис. 1.1).

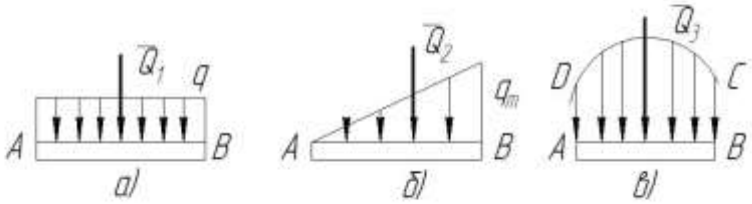


Рис. 1.1

На (рис. 1.1а) приведено равномерное распределение силы вдоль отрезка $AB=l$. Равнодействующая этих сил

$$Q_1 = q \cdot l, \tag{1.1}$$

где q - интенсивность распределения, т.е. величина силы, приходящаяся на единицу длины отрезка. Размерность q в системе СИ - Н/м.

На (рис. 1.1б) изображено распределение силы вдоль отрезка $AB=l$ по линейному закону. Интенсивность распределения изменяется от нуля до q_{max}. Равнодействующая этих сил

$$Q_2 = \frac{1}{2} q_{max} \cdot l \quad . \tag{1.2}$$

На (рис. 1.1в) сила распределена по произвольному закону. Эквивалентная им сосредоточенная сила по аналогии с уравнениями (1.1) и (1.2) будет определяться площадью фигуры ABCD в соответствующем масштабе.

Линия действия сосредоточенных сил проходит через центр тяжести соответствующей фигуры (эпюры) распределения действующих сил.

Основные задачи статики:

1) изучение свойств сил и, в частности, способов приведения любой системы сил к простейшему виду;

2) определение условий равновесия системы сил, действующих на твердое тело.

1.2. Аксиомы статики

Теоремы и уравнения равновесия в статике выводятся из некоторых исходных положений, которые принимаются без математических доказательств и называются аксиомами. Аксиомы статики представляют собой результат обобщения многочисленных опытов и наблюдений, проверенных неоднократно на практике.

АКСИОМА I. Тело под действием двух сил находится в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны,
т. е. когда $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (рис. 1.2).

АКСИОМА II. Действие данной системы сил не изменяется, если к ней добавить или от неё отнять уравновешенную систему сил.

Следствие: из аксиомы I и аксиомы II следует, что силу, приложенную к телу, не изменяя действия на тело, можно переносить в любую другую точку по линии ее действия. Для доказательства приложим в произвольной точке B по линии действия силы $\vec{F}$ (рис. 1.3) уравновешенную систему сил $\vec{F}' = -\vec{F}''$, равных по величине заданной силе $\vec{F}$. По аксиоме II действие системы сил на тело не изменится. В результате получим силы $\vec{F} = \vec{F}''$, которые по аксиоме l образуют уравновешенную систему сил, которую по аксиоме ll можно отбросить, не изменяя оказываемого действия. В результате получим силу $\vec{F}' = \vec{F}$, но приложенную в точке B.

изменится. В результате получим силу

АКСИОМА III. Аксиома параллелограмма сил: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах. Вектор $\vec{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{F}_1$ *и* $\vec{F}_2$ (рис. 1.4), называется геометрической (векторной) суммой или равнодействующей:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad (1.3)$$

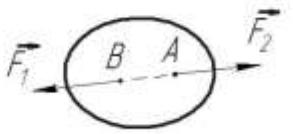


Рис. 1.2

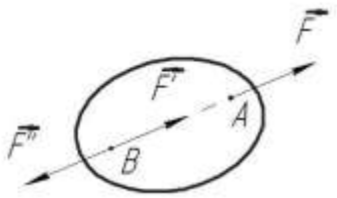


Рис. 1.3

<u>АКСИОМА IV</u>. Аксиома равенства действия и противодействия: <u>два тела взаимодействуют друг с другом силами, равными по величине и противоположно направленными</u>.

Силы $\vec{F}_1$ *и* $\vec{F}_2$ (рис. 1.5) равны и противоположны, т.е. $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ но в отличие от сил $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (рис. 1.2), не образуют уравновешенную систему, так как приложены к разным телам. Согласно данной аксиоме при изучении условий равновесия тела или конструкции необходимо учитывать только внешние силы, так как внутренние силы тела или конструкции образуют уравновешенную систему, которую можно отбросить.

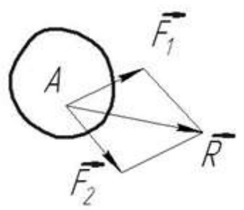


Рис. 1.4

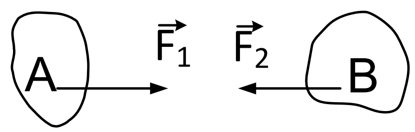


Рис. 1.5

<u>АКСИОМА V</u>. Принцип отвердевания: <u>равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящего под действием сил, не нарушится, если тело считать абсолютно твёрдым</u>.

Аксиома очевидна и не требует доказательств. Так равновесие гибкой нити (троса, цепи, ремня, пенькового каната и т. п.) не нарушится, если её считать абсолютно твёрдым телом. Однако, эти условия для изменяемого тела, будучи необходимыми, могут не быть достаточными.

Так для равновесия гибкой нити под действием двух сил, приложенных к её концам, необходимы те же условия, что и для жёсткого стержня. Но эти условия не будут достаточными. Для равновесия гибкой нити требуется ещё, чтобы приложенные силы были растягивающими.

Принцип отвердевания широко используется в инженерной практике. Он позволяет любое изменяемое тело или изменяемую конструкцию рассматривать как абсолютно жёсткие и применять к ним методы статики твёрдого тела.

Если составленных таким путём уравнений равновесия для решения задачи окажется недостаточно, то составляются дополнительные уравнения равновесия для отдельных частей конструкции и уравнения, учитывающие их деформации. Задачи с учётом деформаций тел или конструкций решаются в курсе сопротивления материалов.

1.3. Связи и их реакции

Тела, перемещение которых в пространстве ограничены, называются ***несвободными***. Всё то, что препятствует перемещению данного тела, называется ***связью***. В инженерной практике чаще всего мы имеем дело с несвободными телами: автомобиль, комбайн, барабан молотильный, ось колеса, вал двигателя и т. д. Несвободные тела действуют на связи с определёнными силами, что по закону действия и противодействия (аксиома IV) вызывает равные силам давления и противоположно направленные реакции связей. Определение величины и направления реакций связей составляет одну из задач статики. Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не даёт перемещаться телу. Это правило во многих случаях позволяет по виду связи и внешних нагрузок сразу определить направление реакций. Выбор направления реакций связей приведён на примерах.

1. Если связью является гибкая нерастяжимая нить (трос, канат, ремень, звенчатая цепь и т. д.), то реакция связи направлена вдоль нити в сторону, противоположную перемещению тела вдоль нити (рис. 1.6).

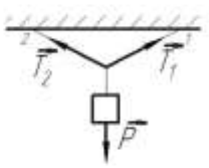


Рис. 1.6

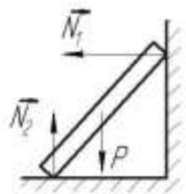


Рис. 1.7

2. Если связью является гладкая опора (трение незначительно), то реакция направлена по нормали к соприкасающимся телам (рис. 1.7).

3. Если связью является цилиндрический шарнир, то реакция связи направлена перпендикулярно оси шарнира (рис. 1.8 реакции $\vec{R}_A, \vec{R}_B$, рис. 1.9 реакция $\vec{R}_B$).

Так как заранее определить направления реакций связи в неподвижных шарнирах $A(\vec{R}_A)$ (рис. 1.8) и $B(\vec{R}_B)$ (рис. 1.9) не всегда возможно, их заменяют двумя составляющими по координатным осям x и y.

В шарнирно-подвижной опоре В (рис. 1.8) реакция $\vec{R}_B$ всегда направлена перпендикулярно опорной поверхности.

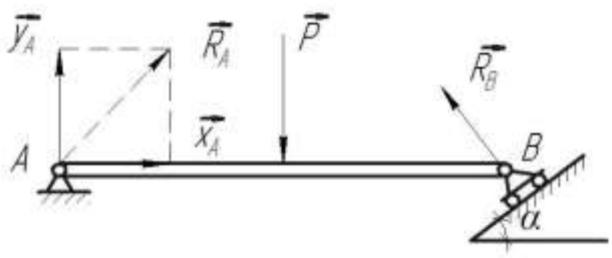


Рис. 1.8

4. В сферическом шарнире, цилиндрическом с упором (рис. 1.9) (подпятнике) реакция связи $\vec{R}_A$ может иметь всевозможные направления в зависимости от действия внешних нагрузок. При решении задач статики обычно реакцию таких связей заменяют составляющими по координатным осям (рис. 1.9).

5. На жёстко заделанный в опоре конец балки (рис. 1.10) действует произвольная плоская система сил, которая может быть заменена одной силой $\vec{R}_A$ и одной парой m_A, (см. параграф 2.4). Реакция $\vec{R}_A$ может быть разложена на составляющие по координатным осям X_A и Y_A.

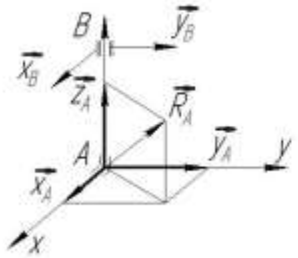


Рис. 1.9

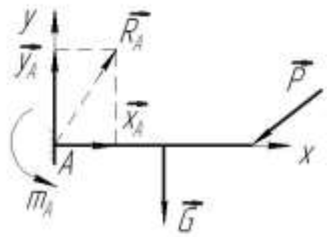


Рис. 1.10

АКСИОМА СВЯЗЕЙ. Как правило, при решении задач статики мы имеем дело с несвободными телами. В этих случаях равновесие тел изучается на основании следующей аксиомы: <u>любое несвободное тело можно представить как свободное, если отбросить связи и заменить их действия реакциями этих связей</u>.

Так на рис. 1.8 (шарнирно-неподвижная опора А и шарнирно-подвижная опора В), на рис. 1.9 (шарнир с упором в точке А и цилиндрический шарнир в точке В), на рис. 1.10 (жёсткая заделка в точке А) мысленно отброшены связи и заменены соответствующими реакциями этих связей. Модули этих реакций можно найти из условий равновесия сил, действующих как на свободные тела. В этом и состоит основной метод решения задач статики.

Глава 2

Равновесие произвольной плоской системы сил

2.1. Момент силы относительно центра (точки)

Моментом силы F относительно центра О называется взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы на длину плеча:

$$m_0\left(\vec{F}\right) = F \cdot h. \tag{2.1}$$

Плечо h (рис. 2.1) - кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы.

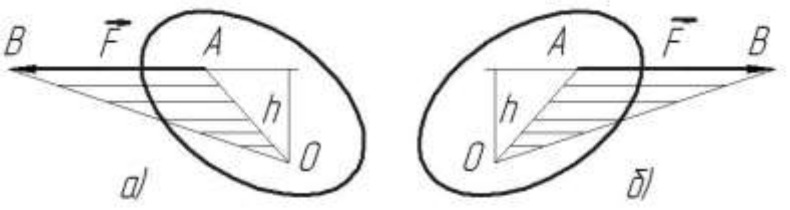


Рис. 2.1

Единица измерения момента силы в системе СИ - Н·м.

Обычно в теории момент считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки (рис.2.1а) и отрицательным - если по ходу часовой стрелки (рис. 2.1б).

Из рисунка 2.1 следует, что величина момента силы может определяться, как удвоенная площадь треугольника, проходящая через центр и силу:

$$m_0\left(\vec{F}\right) = 2 \cdot S_{OAB}. \tag{2.2}$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: Момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно любого центра в плоскости их действия равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этого же центра.

Пусть система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ имеет равнодействующую $\vec{R}$. Согласно аксиоме III математически это можно записать $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$ или $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$.

В неявном виде это уравнение даст систему сил, находящихся в равновесии: $\sum \vec{F}_k + \left(-\vec{R}\right) = 0$. При равновесии системы должно выполняться условие $m_0 \sum \vec{F}_k + \left[-m_0\left(\vec{R}\right)\right] = 0$.

Записывая это уравнение в явном виде относительно момента равнодействующей, получим:

$$m_0\left(\vec{R}\right) = m_0\left(\vec{F}_k\right). \tag{2.3}$$

Что и требовалось доказать.

Теоремой Вариньона иногда удобно пользоваться при решении задач, заменяя моменты силы алгебраической суммой моментов составляющих сил. Так, на рис. 1.8 момент силы R_B относительно точки A можно определить по формуле (2.1): $m_A\left(\vec{R}\right) = R_B \cdot h = R_B \cdot AB \cdot \cos\alpha$, так как плечо силы $R_B : h = AB \cdot \cos\alpha$.

Удобнее применять теорему Вариньона. Разложим силу R_B на составляющие (вдоль *AB*: $R_B \cdot \sin\alpha$ момент которой относительно точки *A* равен нулю, и перпендикулярно *AB:* $R_B \cdot \cos\alpha$). На основании уравнения (2.3) получим,

$$m_A\left(\vec{R}_B\right) = m_A\left(R_B \cdot \sin\alpha\right) + m_A\left(R_B \cdot \cos\alpha\right),$$

т.е. получим то же значение, что и по формуле (2.1):

$$m_A\left(\vec{R}_B\right) = m_A\left(R_B \cdot \cos\alpha\right) = R_B \cdot \cos\alpha \cdot AB.$$

В некоторых задачах применение теоремы Вариньона для вычисления момента силы предпочтительнее, чем по формуле (2.1). Пусть требуется определить момент силы F, приложенной под углом α в центре горизонтальной части ломаной прямоугольной балки, относительно шарнирно-неподвижной опоры A (рис. 2.2) *AB=BC=CD=l*

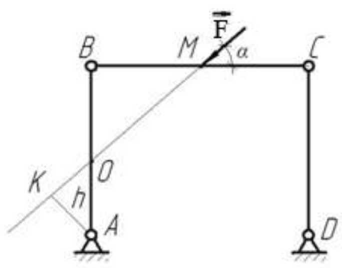


Рис. 2.2

На основании формулы (2.1) $m_A(\vec{F}) = F \cdot h$, где h - плечо силы F относительно центра A.
Из Δ-ка OBM:
$OB = BM \cdot tg\alpha = \frac{l}{2} tg\alpha$. Расстояние $OA = AB - OB = l - \frac{l}{2} tg\alpha$
Из Δ-ка OKA:

$$h = OA \cdot cos\,\alpha = \left(l - \frac{l}{2} tg\alpha \right) \cdot cos\,\alpha = l \cdot cos\,\alpha - \frac{l}{2} sin\,\alpha$$

Тогда величина момента силы F:

$$m_A(\vec{F}) = F \cdot l \left(cos\,\alpha - \frac{sin\,\alpha}{2} \right).$$

Этот же результат можно получить проще, заменяя силу F ее составляющими:

$F_x = F \cdot cos\,\alpha$ - по горизонтали и $F_y = F \cdot sin\,\alpha$.- по вертикали (оси x и y на рис. 2.2 условно не показаны).

По теореме Вариньона будем иметь:

$$m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F}_x) + m_A(\vec{F}_y) = F_x \cdot l - F_y \frac{l}{2} = F \cdot cos\,\alpha \cdot l - F \cdot sin\,\alpha \cdot \frac{l}{2} = F \cdot l \cdot \left(cos\,\alpha - \frac{sin\,\alpha}{2} \right).$$

2.2. Пара сил. Момент пары

<u>Парой сил</u> называется особая система двух, равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил, действующих на тело. Действие пары сил на тело характеризуется ее моментом.

Момент пары сил равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо:

$$m = \pm F_1 \cdot d\,. \qquad (2.4)$$

Плечо пары d (рис. 2.3), кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

Так же, как и для момента силы, момент пары положителен, если пара сил стремится повернуть тело против хода стрелки часов и наоборот.

Свойства пары сил (рис. 2.3):

- алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любого центра в плоскости ее действия равна моменту пары:

$$m_A\left(\vec{F}_1\right)+m_A\left(\vec{F}_2\right)=m\,. \tag{2.5}$$

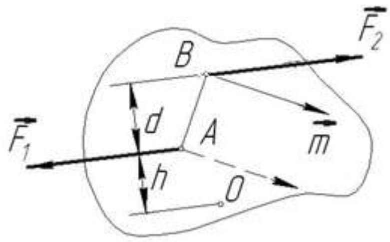


Рис. 2.3

- пару, не изменяя оказываемого ею действия на тело, можно переносить куда угодно в плоскости действия пары и в плоскости ей параллельные;
- у данной пары, не изменяя действия на тело, можно произвольно менять модули сил или длину плеча, сохраняя неизменным ее момент.

Для доказательства этих свойств составим алгебраическую сумму сил пары $\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right)$ относительно произвольного центра O:

$$m_O\left(\vec{F}_1\right)+m_O\left(\vec{F}_2\right)=F_1\cdot h+(-F_2\cdot d-F_2\cdot h)=-F_2\cdot d.$$

На основании уравнения (2.4): $-F_2\cdot d=m.$

Такой же результат получим, если составим алгебраическую сумму моментов сил пары $\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right)$ относительно точки А (уравнение 2.5) или относительно точки В. В учебной литературе приводятся разные способы для доказательства этих свойств пары сил.

Пара сил - особая система сил. Пару можно переносить, не изменяя действия на тело, не только в плоскости её действия, но из данной плоскости в любую другую, ей параллельную. Последнее свойство пары легко подтверждается логически из инженерной практики. Так, крутящий момент к вращающемуся барабану можно передать через шкив, установленный либо с одной стороны, либо с другой на вал барабана. При этом, вполне очевидно, что действие приводного момента пары будет определяться непосредственно моментом сопротивления вращающегося барабана и не будет зависеть от плоскости действия установленного шкива.

Из этих свойств следует, что действие пары на тело характеризуется только ее моментом с учётом направления вращения. Поэтому в технике часто пару сил обозначают круговой стрелкой, с обозначением направления вращения и значения момента. При составлении уравнений равновесия момент пары сил входит в уравнения с соответствующим знаком.

Сложение пар: Любая система пар эквивалентна одной паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов слагаемых пар.

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum m_k. \qquad (2.6)$$

Из уравнения (2.6) следует, что для равновесия плоской системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов этих пар равнялась нулю:

$$\sum m_k = 0. \qquad (2.7)$$

2.3. Теорема о параллельном переносе силы (метод Пуансо)

Теорема даёт метод преобразования любой системы сил в эквивалентную ей систему сходящихся сил и систему пар. Формулировка теоремы: силу, приложенную к телу, можно, не изменяя оказываемого действия, переносить параллельно ей самой в любую точку тела, добавляя при этом пару, момент которой равен моменту переносимой силы относительно точки переноса.

Если на тело в точке A действует сила F, то на основании аксиомы II в любой точке B можно добавить, не изменяя оказываемого действия на тело, уравновешенную систему сил F' и F'' так, чтобы $\vec{F}' = -\vec{F}'' = \vec{F}$ (рис. 2.4 а).

В результате получим эквивалентную силе F систему: силу $\vec{F}' = \vec{F}$, но приложенную в точке B, и пару сил с моментом $m = m_B\left(\vec{F}\right)$

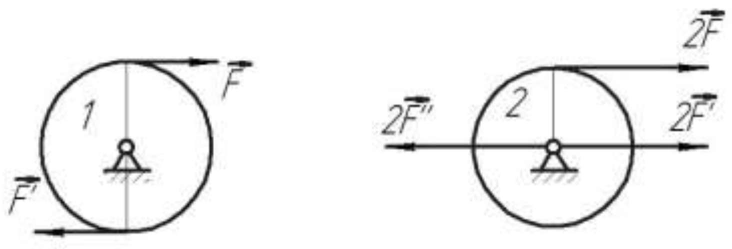
(рис. 2.4 б).

а) б)

Рис. 2.4

Рассмотрим пример, имеющий практический смысл и иллюстрирующий теорему. К шкиву 1 радиуса r приложена пара сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ (рис. 2.5а).

К шкиву 2 такого же радиуса (рис. 2.5б) приложена сила $2\vec{F}$. Эти силы дают одинаковые по величине моменты, численно равные $2F \cdot r$, но действие этих сил на шкивы будут различны. Действующую на шкив 2 силу $2\vec{F}$ можно заменить силой $2\vec{F}' = 2\vec{F}$ и парой сил ($2\vec{F}$, $2\vec{F}''$). В результате получим, что на этот шкив действует: 1) пара сил с таким же, как и в первом случае, моментом $2F \cdot r$, вращающим шкив, и 2) сила $2\vec{F}'$, оказывающая давление на ось шкива. Так как моменты, приложенные к шкивам 1 и 2, равны то эти шкивы будут вращаться одинаково, но при этом ось второго шкива будет испытывать давление, равное $2\vec{F}$.



а) б)

Рис. 2.5

2.4. Приведение системы сил к данному центру

Применяя метод Пуансо для произвольной плоской системы сил (рис. 2.6) и приводя их к центру О, получим систему сил, равных заданной: $\vec{F}_1 = \vec{F}_1', \vec{F}_2 = \vec{F}_2', \cdots, \vec{F}_n = \vec{F}_n'$, но приложенных в центре О, и систему пар с моментами относительно центра О: $m_1 = m_0(\vec{F}_1), m_2 = m_0(\vec{F}_2), \cdots, m_n = m_0(\vec{F}_n)$. Систему сходящихся сил в центре О можно заменить одной силой $\vec{R}$, которая называется <u>главным вектором</u> системы. Главный вектор на основании аксиомы параллелограмма сил (уравнение 1.3) будет равен:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k. \tag{2.8}$$

$\vec{R}$ можно определить геометрически, путём построения силового многоугольника или аналитически (методом расчёта) через его проекции на координатные оси (рис. 2.6б) по формуле:

$$R = \sqrt{R_X^{\ 2} + R_Y^{\ 2}}. \tag{2.9}$$

Проекции уравнений (2.8) на оси x, y *дают следующие значения*:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} \;\; или \; R_x = \sum F_{kx}, \qquad (2.10)$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} \;\; или \; R_y = \sum F_{ky}. \qquad (2.11)$$

С учётом уравнений (2.10) и (2.11)

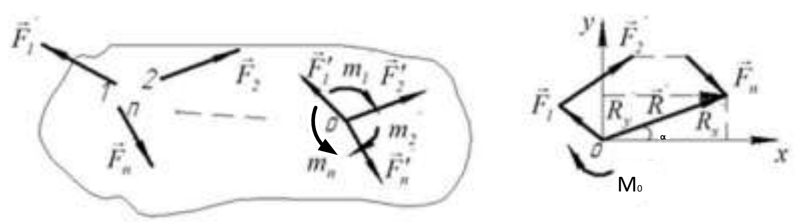
$$R = \sqrt{\sum F_{kx}{}^2 + F_{ky}{}^2}. \qquad (2.12)$$

Из схемы (рис. 2.6б) проекции R_X и R_Y равны:

$$R_X = R \cdot \cos\alpha \qquad (2.13)$$

$$R_Y = R \cdot \cos(90 - \alpha) = R \cdot \sin\alpha \qquad (2.14)$$

Аналогично определяются проекции составляющих сил $\vec{F}_K$.



а) б)

Рис. 2.6

Правило: <u>проекция силы $\vec{F}$ на любую ось (</u>F_X<u>,) равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и оси (направляющий косинус).</u> Проекция положительна, если угол между направлением силы и положительным направлением оси острый, и отрицательна, если этот угол тупой.

Главный момент на основании уравнения (2.6) будет равен:

$$M_0 = \sum m_k = \sum m_0 (\vec{F}_k). \qquad (2.15)$$

Таким образом, любая система сил на плоскости при приведении к произвольно взятому центру О заменяется одной силой R, равной главному вектору системы (уравнение 2.12), и одной парой с моментом $\grave{I}_0$, равным главному моменту системы относительно центра О (уравнение 2.15).

Примечание:

1) сила $\vec{R}$ не является равнодействующей данной системы сил, так как она заменяет систему сил не одна, а вместе с парой;

2) значение силы $\vec{R}$ от выбора центра О не зависит;

3) значение момента M_0 при изменении положения центра О может изменяться вследствие изменения моментов слагаемых сил. При равновесии M_0=0. За центр может быть выбрана любая точка.

Частные случаи приведения.

В зависимости от значений главного вектора $\vec{R}$ и главного момента M_0 произвольная плоская система сил может быть приведена к следующим простейшим видам:

1. Если $\vec{R}$=0 и Мо=0, то система находится в равновесии.

2. Если $\vec{R} \neq 0$, а Мо=0, то система приводится к одной силе $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$. Эта сила является равнодействующей данной произвольной плоской системы сил.

3. Если $\vec{R}$ =0 и $M_0 \neq 0$, то система приводится к одной паре $M_0 = \sum m_0\left(\vec{F}_k\right)$. В этом случае величина Мо не будет зависеть от выбора центра О, так как иначе мы получили бы, что одна и та же система заменяется разными, не эквивалентными друг другу парами, что невозможно.

4. Если $\vec{R} \neq 0$ и $M_0 \neq 0$, то система также приводится *к* одной силе, равной главному вектору $\vec{R}$, но приложенному в точке С, смещенной

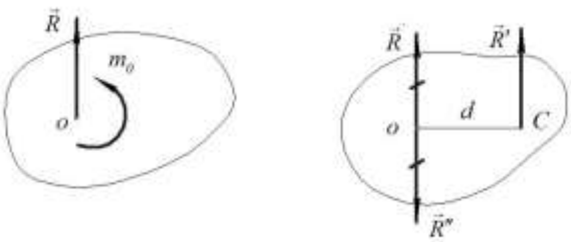
относительно центра приведения О на расстояние:

$$d = \frac{M_0}{R}. \tag{2.16}$$

Для доказательства изобразим пару с моментом Мо (рис. 2.7а) ей эквивалентной парой двух сил $\vec{R}'$и$\vec{R}''$. Причем $\vec{R}'=\vec{R}$,а $\vec{R}''= -\vec{R}$ (рис. 2.76).

Момент эквивалентной пары R.d=Mo. Отбросим силы $\vec{R}$ и $\vec{R}''$**,** как уравновешенные, и получим, что система заменяется одной силой $\vec{R}'=\vec{R}$, но проходящей через точку С.

Таким образом, рассмотренные случаи показывают, что плоская система сил, если не находится в равновесии, приводится к одной равнодействующей (случай 2 и случай 4) или к одной паре (случай 3).



а) б)

Рис. 2.7

2.5. Условия равновесия произвольной плоской системы сил

Необходимые и достаточные условия равновесия любой плоской системы сил дают уравнения (2.12) и (2.15), когда R=0 и M_0=0.

Эти условия будут выполнены, если:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum m_0(\vec{F}_k) = 0. \qquad (2.17)$$

Уравнения (2.17) выражают основную форму условия равновесия[1] : <u>для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма моментов этих же сил относительно любого центра в плоскости их действия были равны нулю.</u>

Другие формы условий равновесия:

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \sum \vec{F}_{k_{x \not\perp AB}} = 0. \qquad (2.18)$$

<u>Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов этих сил относительно любых двух центров A и B и сумма их проекций на ось X, не перпендикулярную прямой AB, были равны нулю.</u>

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \sum m_C(\vec{F}_k) = 0. \qquad (2.19)$$

<u>Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов этих сил относительно любых трех центров A, B и C, не лежащих на одной прямой, были равны нулю.</u>

---

[1] Если плоская система сил заменяется одной силой $\vec{R}$, то эта сила $\vec{R}$ является равнодействующей данной системы сил. Причём линия действия равнодействующей (главного вектора, геометрической суммы) и линия действия составляющих сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$ проходят через одну точку (или приложены в одной точке). Такая система сил называется сходящейся.

Для уравновешенной системы сходящихся сил сумма моментов относительно любого центра тождественно равна нулю, т.е. 1

$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0.$

Необходимость этих условий очевидна. Покажем их достаточность. Если в условиях (2.18) $\sum m_A(\vec{F}_k) = 0$ и $\sum m_B(\vec{F}_k) = 0,$ то система не может находиться в равновесии, если их равнодействующая R одновременно проходит через точки А и В. Но по третьему уравнению условий (2.18) $\sum \vec{F}_{k_{x \perp AB}} = 0$, следовательно, имеет место равновесие.

Достаточность условий (2.19) следует из того, что при одновременном выполнении условий система может иметь равнодействующую, проходящую одновременно через точки А, В и С. Но это невозможно, так как точки А, В и С не лежат на одной прямой. Следовательно, при выполнении условий (2.19) имеет место равновесие.

Во всех рассмотренных случаях для произвольной плоской системы сил составляются по три уравнения равновесия. Условия (2.17) являются основными, так как при их использовании никаких ограничений на выбор координатных осей и центра моментов не накладывается.

Примечание:

1) уравнения (2.18) применяются при условии, что ось x не перпендикулярна прямой, соединяющей точки А и В;

2) уравнения (2.19) применяются при условии, что точки А, В и С не лежат на одной прямой.

2.6. Решение задач

Задачи, в которых число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия, составленных для данной системы сил, называются статически определенными, а тела (система тел), для которых это имеет место, - статически определимыми и наоборот.

Задачи, в которых число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции, называются статически неопределенными, а тела (система тел), для которых это имеет место, статически неопределимыми.

В статике, как правило, решаются статически определённые задачи. Статически неопределимые конструкции можно рассчитывать, если составить дополнительные уравнения с учётом их деформаций. Статически неопределенные задачи решаются в курсе сопротивления материалов.

При решении статически определенных задач необходимо соблюдать следующий порядок:

1. Установить, равновесие какого тела (или тел) следует рассмотреть для определения искомых величин.
2. Изобразить тело (или тела) в заданном положении, приложить все действующие силы и искомые реакции связей.
3. Выбрать координатные оси и составить условия равновесия вида (2.17, 2.18 или 2.19). Координатные оси выбираются произвольно, но полученные

уравнения будут решаться проще, если одну из осей направить перпендикулярно какой-либо неизвестной силе. При использовании основной формы условий равновесия (2.17) за центр О может быть принята любая точка, но лучше выбрать такую, где сходятся больше неизвестных сил.

4. Определить искомые величины и проверить правильность решения.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА С1

На однородную балку АВ длиной 2м и весом $\vec{G}$ действует равномерно распределенная нагрузка *q* и пара сил с моментом m. В точке Д пол углом α к балке АВ прикреплена невесомая нить, перекинутая через блок Е, к концу которой подвешен груз весом $\vec{P}$.

Определить реакции опор в точках А и В (рис. С1.0-С1.6) или реакции жесткой заделки А (рис. С1.7–С1.9).

Данные различных вариантов сведены в таблицу С1.

Таблица С1

Номер Варианта	*G, Н*	*P, Н*	*q, Н/м*	*m, Н·м*	*АД, м*	*СК, м*	*АС, м*	*α, рад*
0	100	60	50	40	1,2	0,4	0	π/6
1	90	80	60	20	0,4	0,6	1,4	π/4
2	110	90	100	50	1,8	0,2	0,4	π/3
3	150	80	50	60	0,4	0,6	1	π/4
4	120	50	100	75	0,5	0,4	1,6	2π/3
5	80	60	40	45	1,5	0,5	0,5	π/3
6	140	110	120	30	1,6	0,6	0	3π/4
7	120	90	80	80	1,4	0,8	0,6	5π/6
8	90	70	125	25	0,6	0,8	1,2	π/6
9	130	75	150	60	1,5	0,6	0,8	π/4
10	50	100	100	40	1,5	0,5	0,6	π/4

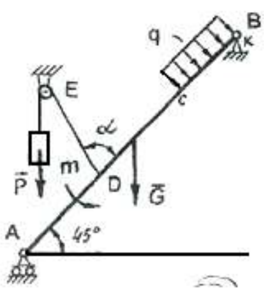


Рис. С1.0-С1.1

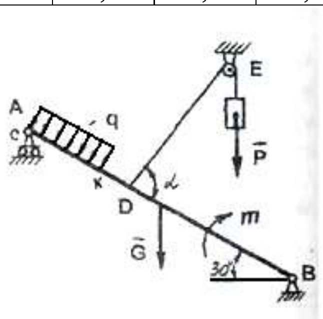


Рис. С1.2-С1.3

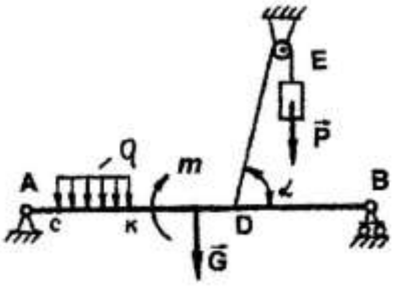


Рис. С1.4-С1.5

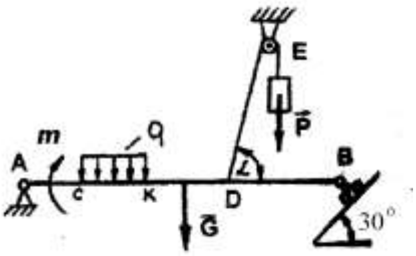


Рис. С1.6

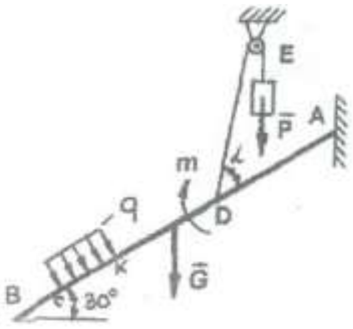


Рис. С1.7

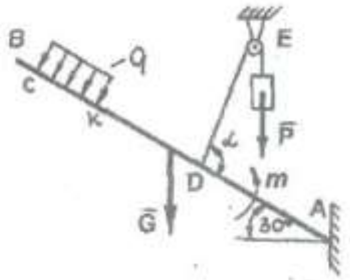


Рис. С1.8

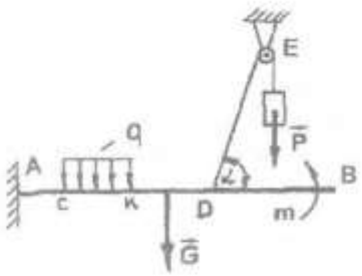


Рис. С1.9

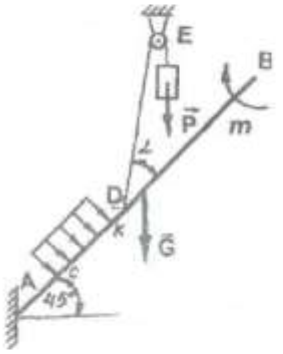


Рис. С1.10

Пример решения задачи С1 для варианта 10.

Определить реакции жесткой заделки в точке А (рис. С1.10).

<u>РЕШЕНИЕ</u>**:** Рассмотрим равновесие консольной балки АВ.

Изобразим балку АВ в заданном положении и проведем координатные оси Ax, Ay, как показано на рисунке С1.11. Освободим балку АВ от связей:

жесткой заделки А и нити ДЕ. Заменим действие жесткой заделки А реакциями $\vec{X}$А и $\vec{y}$А и реактивным моментом m_A. Действие нити ДЕ - силой $\vec{P}$, приложенной к балке АВ в точке Д вдоль нити.

Одновременно заменим распределенную нагрузку интенсивности q сосредоточенной силой Q=q·CK=100·0,5= 50H.

Сила $\vec{Q}$ приложена в середине отрезка СК (в точке N), вес балки $\vec{G}$ в середине ее длины, т.к. балка однородная (рис. С1.11).

Балка АВ находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил (заданных - $\vec{G}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}$ и пары сил с моментом m и *в том числе* искомых - $\vec{X}$А,$\vec{Y}$А и пары сил с реактивным моментом m_A).

Составляем условия ее равновесия:

$$\sum F_{k_x} = 0,\ X_A + Q \cdot cos45^0 + P \cdot cos(30^0 + 45^0) = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{k_y} = 0,\ Y_A - Q \cdot sin45^0 - G + P \cdot sin(30^0 + 45^0) = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0,\ m_A - Q \cdot AN - G \cdot \frac{AB}{2} \cdot cos45^0 - m + P \cdot AD \cdot sin30^0 = 0. \quad (3)$$

При определении моментов сил G и P относительно точки А удобно воспользоваться теоремой Вариньона. Из уравнения (1) определим реакцию X_a:

$$X_A = -Q \cdot \cos 45° - P \cdot \cos(30° + 45°) = -50 \cdot 0{,}707 - 100 \cdot 0{,}259 = \\ = -61{,}25\, H$$

$$X_A = -61{,}25\, H.$$

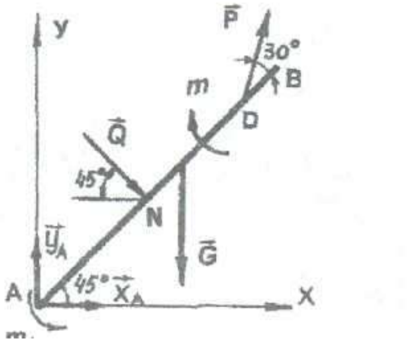


Рис. С1.11

Из уравнения (2) определим реакцию $Y_{\grave{A}}$:

$$Y_A = Q \cdot sin45° + G\text{-}P \cdot sin(30° + 45°) = 50 \cdot 0{,}707 + 50\text{-}100 \cdot 0{,}966 = \text{-}11{,}25H.$$

$$\mathrm{Y_A} = \text{-}11{,}25\mathrm{H}.$$

Из уравнения (3) определим реактивный момент

$$m_A = Q \cdot AN + G \cdot \frac{AB}{2} \cdot cos45° + m\text{-}P \cdot AD \cdot sin30° =$$
$$50 \cdot 0{,}85 + 50 \cdot 0{,}707 + 40\text{-}100 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 42{,}85Í \cdot ì .$$
$$m_A = 42{,}85Í \cdot ì .$$

Отрицательные знаки полученных реакций говорят о том, что действительное направление реакций противоположно выбранным направлениям на рис. С1.11.

Для проверки правильности решения задачи нужно составить такие уравнения равновесия балки, которые не использовались при решении задачи. Составим уравнение моментов действующих сил и реакций связей относительно точки В:

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = 0,$$
$$m_A - m + Q \cdot NB + G \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos 45° - P \cdot BD \cdot \sin 30° - Y_A \cdot AB \cdot \cos 45° + X_A \cdot AB \cdot \sin 45° = 0. \quad (4)$$

Так как реакции $X_{\grave{A}}$ $Y_{\grave{A}}$ и реактивный момент $m_{\grave{A}}$ вошли в уравнение (4), то для проверки достаточно одного этого уравнения. После подстановки числовых значений в уравнение (4) получим:

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = 42{,}85 - 40 + 50 \cdot 1{,}15 + 50 \cdot 1 \cdot 0{,}707 - 100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 - (-11{,}25 \cdot 2 \cdot 0{,}707) +$$
$$+ (-61{,}25 \cdot 2 \cdot 0{,}707) = -151{,}6 + 151{,}6 = 0,$$
$$0=0.$$

Таким образом, искомые величины удовлетворяют условию равновесия, следовательно, они определены правильно.

Вопросы для индивидуальной защиты задания:
1. Виды связей и их реакции.
2. Проекция силы на ось и плоскость.
3. Момент силы относительно центра.
4. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.
5. Главный вектор и главный момент плоской системы сил.
6. Условия равновесия произвольной плоской системы сил.
7. Три формы условий равновесия.
8. Алгоритм решения задачи для определения реакций связей в плоскости.

2.7. Равновесие составной конструкции

Составные инженерные конструкция имеют внутренние связи, при помощи которых части конструкции соединены между собой, и внешние связи, соединяющие конструкцию с другими телами, не входящими в нее.

Расчет составной конструкции заключается в определении реакций внешних и внутренних связей.

Обычно конструкцию расчленяют на отдельные части и составляют условия равновесия для каждой части отдельно. При этом реакции внутренних связей на основе аксиомы IV, будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Порядок составления условий равновесия изложен в пунктах 2 и 3 параграфа 2.6.

Для конструкций из n тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, составляются *3n* уравнений. Если число внутренних и внешних реакций связей будет больше *3n*, то конструкция будет статически неопределимой.

Примечание: при рассмотрении системы *3n* уравнений значения каждой искомой величины в последующие уравнения подставляются с полученным знаком.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА С2

Составная конструкция состоит из двух невесомых частей: жесткого угольника и прямолинейного стержня, которые соединены между собой шарниром (рис. С2.0- С2.6) или опираются друг о друга (рис. С2.7-С2.9) в точке С. Размеры меньшей стороны угольника l_1, большей l_2. Длина стержня *l*. Внешние связи конструкции: цилиндрический шарнир или жесткая заделка в точке А и неподвижная или подвижная опора в точке В.

Система находится в равновесии под действием сосредоточенной силы $\vec{P}$, приложенной в точке Е под углом α, пар сил с момента m_1 и m_2 и равномерно распределенной вдоль СК нагрузки интенсивности q.э

Определить реакции внешних и внутренних связей в точках А, В и С.

Таблица С2

Номер варианта	*P, Н*	m_1, *Н·м*	m_2, *Н·м*	*q, Н/м*	l_1, *м*	l_2, *м*	*l, м*	*СК, м*	*АЕ, м*	*α, рад*
0	10	20	7	2	10	12	6	2	5	π/6
1	5	3	4	1	8	15	7	5	4	π/3
2	40	50	20	5	5	10	8	4	2	π/4
3	4	15	6	3	6	12	6	4	4	π/6
4	50	30	40	4	4	10	8	3	1	π/3
5	1	2	4	0,5	2	5	4	2	1	π/4
6	15	12	8	2	3	7	6	3	2	2π/3
7	20	15	30	1	2	4	8	5	1	5/π
8	14	10	5	3	4	6	8	3	3	2/3π
9	8	4	5	2	6	8	10	4	б	π/3
10	6	2	4	1	5	10	8	3	4	π/4

Пример решения задачи С2 для варианта 10.

Определить реакции внешних связей (в точках А и В) и внутренней связи (в точке С) рис. С2.10.

<u>РЕШЕНИЕ</u>: Задача С2 на равновесие составной конструкции под действием произвольной плоской системы сил.

Проверяем статическую определимость составной конструкции. Количество искомых реакций 2(А)+2(С)+2(В)=6, равно числу уравнений равновесия (3·2=6), следовательно, задача статически определенная.

Расчленяем конструкцию на составные части по внутренней связи С. Проводим координатные оси, как показано на рис. С2.11. Освобождаемся от связей, заменив их действие реакциями, причем учитываем, что давления одной части конструкции на другую одинаковы по величине и противоположны по направлению: $\vec{X}_C = -\vec{X}'_C; \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C$. Одновременно заменяем действие распределенной нагрузки интенсивности q сосредоточенной силой $Q = q \cdot CK = 1 \cdot 3 = 3$Н, приложенной в центре отрезка СК. CN=1,5м (рис. С2.11).

Каждая из составных частей: левая и правая находятся в равновесии под действием произвольной плоской системы сил, следовательно, для каждой части составляем три уравнения равновесия.

Для левой части:

$$\sum F_{\text{К}_x} = 0,\ X_A + \text{X}_\text{c} - P \cdot cos45^\text{o} = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{k_y} = 0,\ Y_A + Y_c - P \cdot sin45^\text{o} = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0,\ \text{Y}_\text{c} * L_1 - \text{X}_c * L_2 - P \cdot sin45^0 * \text{AE} + m_1 - 0. \quad (3)$$

Для правой части:

$$\sum F_{Kx} = 0, X_B - X_C^1 - Q \cdot \cos 30^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\sum F_{Ky} = 0, Y_B - Y_C^1 - Q \cdot \sin 30^\circ = 0, \quad (5)$$

$$\sum m_{(B)}(\vec{F}_k) = 0,\ Y_C^1 \cdot l \cdot cos60^0 + X_C^1 \cdot l \cdot sin60^0 + Q \cdot NB - m_1 = 0 \quad (6)$$

Решая совместно уравнения (3) и (6), определяем реакции X_C и Y_C, учитывая, что по величине $X_C = X_C^1; Y_C = X_C^1$.

$$\text{Y}_\text{c} \cdot 0.5 + \text{X}_\text{c} \cdot 10 - 6 \cdot 0.707 \cdot 4 + 2 = 0,$$

$$Y_c \cdot 8 \cdot 0{,}5 + X_c \cdot 8 \cdot 0{,}87 + 3 \cdot 6{,}5 - 4 = 0.$$

Откуда X_c= -1.82 Н, Y_c = -0.68 Н,

Из уравнения (1) находим X_A:

$$X_A = P \cdot \cos 45^\circ - X_C = 6 \cdot 0{,}707 + 1{,}82 = 6{,}02\text{Н} \qquad X_A = 6{,}02\text{Н}.$$

Из уравнения (2) находим Y_A:

$$Y_A = P \cdot \cos 45^\circ - Y_C = 6 \cdot 0{,}707 + 0{,}68 = 4{,}88\text{Н} \qquad Y_A = 4{,}88\text{Н}.$$

Из уравнения (4) находим X_B:

$$X_B = Q \cdot \cos 30° + X_C^1 = 3 \cdot 0{,}87 - 1{,}82 = 0{,}79\text{Н} \qquad X_B = 0{,}79\text{Н}.$$

Из уравнения (5) находим Y_B:

$$Y_B = Y_C^1 + Q \cdot \cos 30° = -0{,}68 + 3 \cdot 0{,}5 = 0{,}82\text{Н}. \qquad Y_B = 0{,}82\text{Н}.$$

Реакции $X_C, X_C^1, Y_C.Y_C^1$, значения которых получены с отрицательными знаками, в действительности направлены в стороны, противоположные показанным на рис. С2.11.

Дня проверки правильности определенных реакций внешних связей составим уравнение равновесия для всей конструкции в целом.

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = 0.$$

$$X_A \cdot l_2 - Y_A \cdot l_1 + P \cdot \sin 45° \cdot (l_1 - AE) - P \cdot \cos 45° \cdot l_2 + m_1 - Q \cdot CN - m_2 + Y_B \cdot l \cdot \cos 60° +$$
$$+ X_B \cdot l \cdot \sin 60° = 6{,}02 \cdot 10 - 4{,}88 \cdot 5 + 6 \cdot 0{,}707 \cdot (5-4) - 6 \cdot 0{,}707 \cdot 10 - 3 \cdot 1{,}5 -$$
$$- 4 + 0{,}82 \cdot 8 \cdot 0{,}5 + 0{,}79 \cdot 8 \cdot 0{,}87 = 0,$$

0=0.

Реакции внешних связей удовлетворяют условию равновесия, следовательно, они определены правильно.

Для проверки следует составлять такие уравнения равновесия, которые не использовались при решении задачи.

Для проверки реакций внутренних связей составим уравнение моментов всех сил относительно точки Е для левой части конструкции (рис. С2.11).

$$\sum m_E(\vec{F}_k) = 0.$$

$$Y_A \cdot AE + Y_C \cdot (l_1 - AE) - X_C \cdot l_2 + m_1 = -4{,}88 \cdot 4 - 0{,}68 \cdot 1 + 1{,}82 \cdot 10 + 2 = 0,$$

0=0

Полученные значения реакций внутренних связей также удовлетворяют условию равновесия.

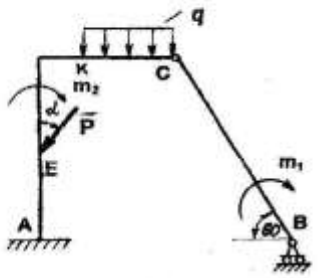


Рис. С2.0

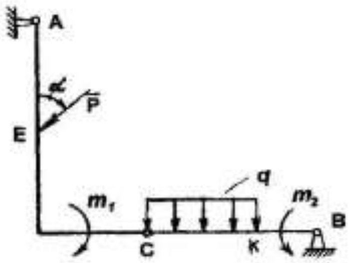


Рис. С2.1

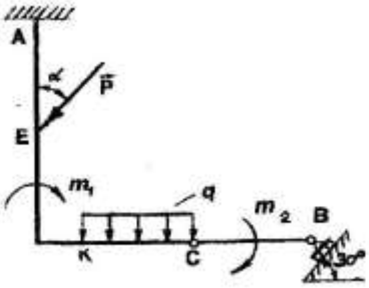


Рис. С2.2

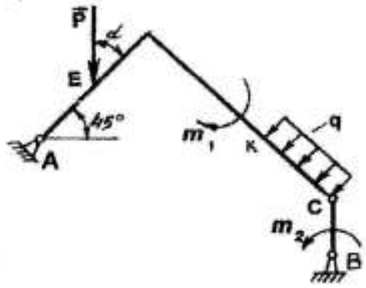


Рис. С2.3

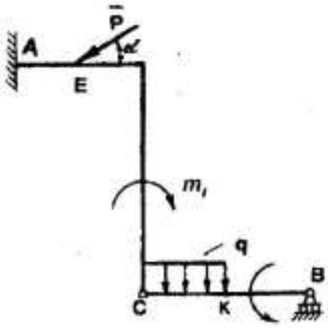


Рис. С2.4

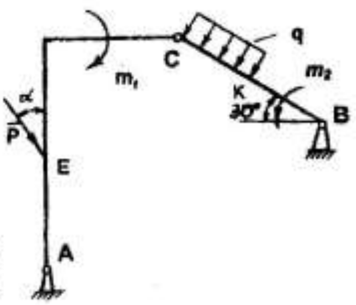


Рис. С2.5

34

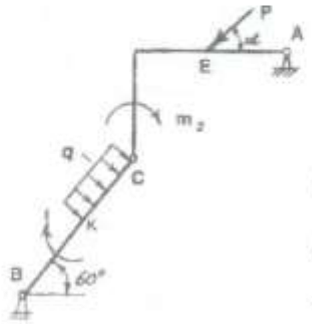


Рис. С2.6

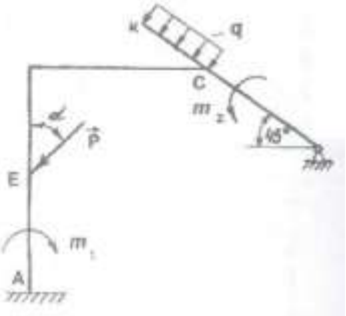


Рис. С2.7

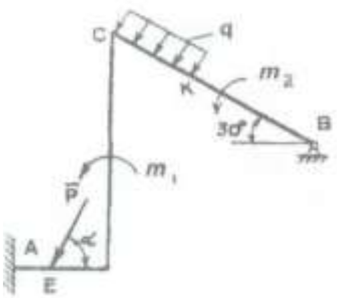


Рис. С2.8

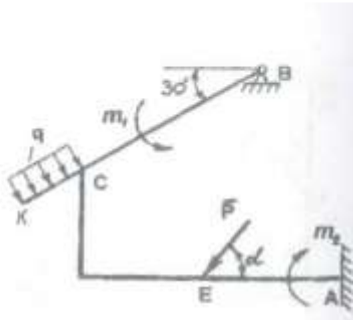


Рис. С2.9

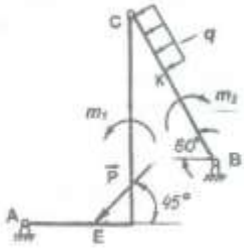


Рис. С2.10

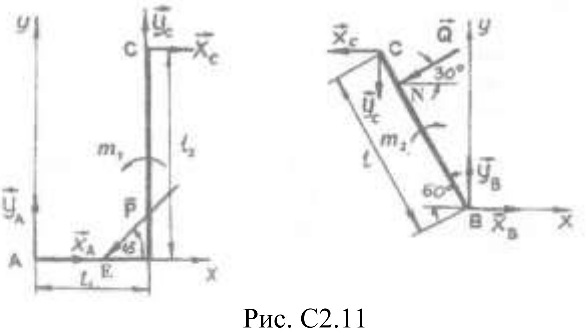


Рис. С2.11

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Связи внешние и внутренние.
2. Статическая определимость и статическая неопределимость конструкций.
3. Условия равновесия составных конструкций.
4. Особенности расчета составных конструкций.
5. Вычисление момента силы относительно любого центра.
6. Проверочный расчет составных конструкций.

2.8. Равновесие при наличии трения

Расчет конструкций с учетом сил трения сводится обычно к рассмотрению предельного равновесия, когда сила трения достигает максимального значения. Аналитическое решение задач производится методами статики, изложенными в предыдущих параграфах настоящей главы, при этом реакцию шероховатой связи (в которой возникает сила трения) изображают двумя составляющими: N - нормальная реакция и $F_{тр}$ - максимальная (предельная) сила трения.

Законы трения скольжения:

1. Сила трения скольжения возникает при стремлении сдвинуть одно тело относительно другого (рис. 2.8) и направлена в сторону, противоположную сдвигающей силе. Сила трения изменяется от 0 (нуля) до $F_{тр}$ (максимального значения), при изменении сдвигающей силы от 0 (нуля) до предельного значения $Q_{пр}$ (предельное равновесие).

2. Максимальная сила трения определяется по закону Амонтона-Кулона и численно равна произведению статического коэффициента трения на силу нормального давления:

$$F_{\max} = f_0 \cdot N . \qquad (2.20)$$

<u>Коэффициент трения</u> f_0 - безразмерная величина. Определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей.

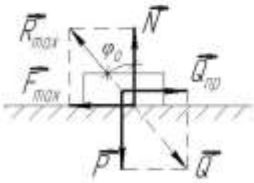


Рис. 2.8

3. При нарушении предельного равновесия (при сдвиге) сила трения уменьшается. Для большинства случаев динамический коэффициент трения меньше статического:

$$f_{дин} < f_0 . \tag{2.21}$$

4. Коэффициент трения скольжения равен тангенсу угла трения:

$$f_0 = tg\varphi_0. \qquad (2.22)$$

Угол трения φ_0, который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, при изменении силы трения от 0 (нуля) до $F_{\max}$, как видно из рис. 2.8, также изменяется от 0 (нуля) до максимального значения φ_0, т.к. $tg\varphi_0 = \dfrac{F_{\max}}{N} = f_0$,

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА С3

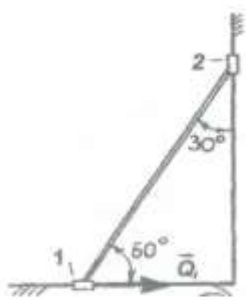
Однородный стержень весом Р прикреплен шарнирно к невесомым ползунам 1 и 2 (рис. С3.0-С3.9). К ползуну 1 приложена сила $\vec{Q}_1$.

Определить для заданного на рисунках положения механизма наименьшее и наибольшее значение силы $\vec{Q}_2$, которую нужно приложить к ползуну 2 вдоль направляющих для сохранения равновесия, если коэффициент трения ползуна 1 о направляющие равен f. Трением ползуна 2 о направляющие пренебречь.

Данные для различных вариантов приведены в таблице С3.

Таблица С3

Номер варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Р,Н	40	50	80	90	60	50	70	90	80	70	40
Q,Н	60	80	40	50	110	40	50	120	110	120	110
f	0,2	0,7	0,3	0,5	0,4	0,6	0,5	0,2	0,3	0,4	0,6



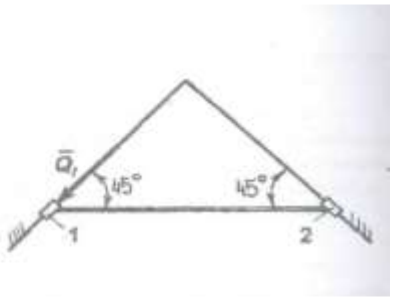


Рис. С3.0-Рис. С3.1 Рис. С3.2- Рис. С3.3

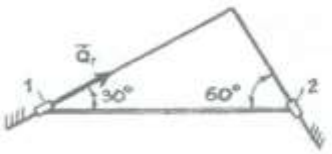


Рис. С3.4- Рис. С3.5

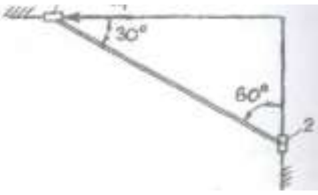


Рис. С3.6- Рис. С3.7

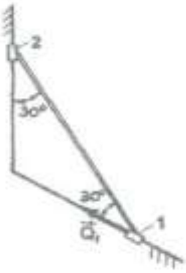


Рис. С3.8

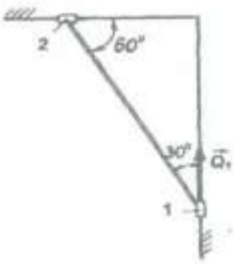


Рис. С3.9

Пример решения задачи СЗ для варианта 10.

Определить наименьшее и наибольшее значение силы $\vec{Q}_2$, которую нужно приложить к ползуну 2 вдоль направляющих для сохранения равновесия.

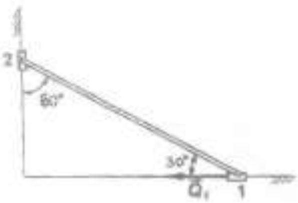


Рис. С3.10

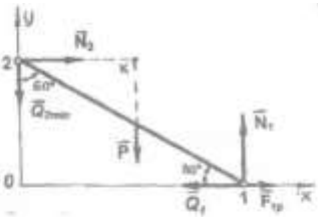


Рис. С3.11

<u>РЕШЕНИЕ</u>: Задача СЗ на равновесие тела под действием плоской системы сил при наличии трения скольжения. Рассмотрим предельное положение равновесия стержня, когда сила трения, возникающая при сдвиге ползуна 1, достигает своего наибольшего значения, $F_{mp} = f \cdot N$ ($\vec{N}$ - сила нормального давления). Так как стержень однородный, сила веса $\vec{P}$ будет приложена в центре тяжести на расстоянии *l/2* от его концов *(l* - длина стержня). Силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}_1$ будут вызывать нормальные реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, действующие на стержень через ползуны со стороны направляющих, и силу

трения $\vec{F}_{тр}$, направленную в сторону, противоположную возможному перемещению ползуна 1.

Для сохранения равновесия прикладываем к ползуну 2 вдоль направляющих силу $\vec{Q}_2$.

Наименьшее значение силы Q_2=$Q_{2\min}$ необходимо приложить при сдвиге ползуна 1 влево от положения равновесия. Схема действующих на стержень активных сил и реакций связи для этого случая будет иметь вид, показанный на рис. С3.11.

Для определения $Q_{2\min}$ выбираем координатные оси и составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{k_Y} = 0, N_1 - P - Q_{2\min} = 0 \ , \qquad (1)$$

$$\sum m_1(\vec{F}_k) = 0, P \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos 30° + Q_{2\min} \cdot l \cdot \cos 30° - N_2 \cdot l \cdot \sin 30° = 0 \ , \qquad (2)$$

$$\sum m_2(\vec{F}_k) = 0, N_1 \cdot l \cdot \cos 30° + F_{тр} \cdot l \cdot \sin 30 - Q_1 \cdot l \cdot \sin 30° - P \cdot \frac{l}{2} \cdot \cdot \cos 30° = 0 \ . \qquad (3)$$

Из уравнения (3), заменяя $F_{тр} = f \cdot N_1$, находим N_1:

$$N_1 = \frac{Q_1 \cdot \sin 30° + P \cdot l / 2 \cdot \cos 30°}{\cos 30° + f \cdot \sin 30°} = \frac{110 \cdot 0{,}5 + 40 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}87}{0{,}87 + 0{,}3 \cdot 0{,}5} = 70{,}98\text{Н} \ .$$

Из уравнения (1)

$$Q_{2\min} = N_1 - P = 70{,}98 - 40 = 30{,}98\text{Н} \ .$$

<u>Примечание</u>: В данном примере сила трения определяется через нормальную реакцию N_1, и действует на ползун 1. Следовательно, реакцию $\vec{N}_2$ можно не определять и составлять только два уравнения, в которые сила $\vec{N}_2$ не входит.

Для проверки решения составим уравнения моментов всех действующих на стержень сил относительно точки K, Точка K взята на линии действия реакции $\vec{N}_2$, т.к. $\vec{N}_2$ при решении задачи не определялась.

$$Q_{2\min}\cdot\frac{l}{2}\cdot\cos 30° + N_1\cdot\frac{l}{2}\cdot\cos 30° + F_{mp}\cdot l\cdot\sin 30° - Q_1\cdot l\cdot\sin 30° = 30{,}98\cdot 0{,}5\cdot 0{,}87 +$$
$$+ 70{,}98\cdot 0{,}5\cdot 0{,}87 + 0{,}37\cdot 0{,}98\cdot 0{,}5 - 110\cdot 0{,}5 = 0,$$
$$0=0.$$

Значения $Q_{2\min}$ и N_1 удовлетворяют условиям равновесия, следовательно, они определены правильно.

Определяем $Q_2 = Q_{2max}$.

Наибольшее значение силы $Q_2 = Q_{2max}$ необходимо приложить при сдвиге ползуна 1 вправо от положения равновесия. Схема действующих на стержень активных сил и реакций связи для этого случая будет иметь вид, показанный на рис. С3.12.

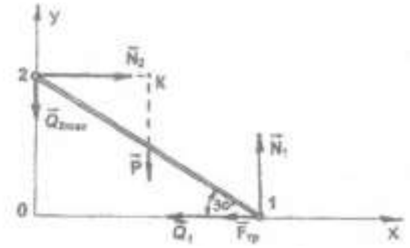


Рис. С3.12

$Q_{2\max}$ определится из следующих уравнений равновесия:

$$\sum F_{k_Y} = 0, N_1 - P - Q_{2\max} = 0\,, \tag{4}$$

$$\sum m_2(\vec{F}_k) = 0, N_1\cdot l\cdot\cos 30° - F_{mp}\cdot l\cdot\sin 30 - Q_1\cdot l\cdot\sin 30° - P\cdot\frac{l}{2}\cdot\cos 30° = 0\,. \tag{5}$$

Из уравнения (5), заменяя $F_{mp} = f\cdot N_1$, находим N_1:

$$N_1 = \frac{Q_1\cdot\sin 30° + P\cdot l/2\cdot\cos 30°}{\cos 30° - f\cdot\sin 30°} = \frac{110\cdot 0{,}5 + 40\cdot 0{,}5\cdot 0{,}87}{0{,}87 - 0{,}3\cdot 0{,}5} = 100{,}55\text{H}\,.$$

Из уравнения (4)

$$Q_{2\max} = N_1 - P = 100{,}55 - 40 = 60{,}55\text{H}\,,$$

$$Q_{2\max} = 60{,}55\text{H}\,.$$

Для проверки решения составим уравнения моментов всех действующих на стержень сил относительно точки К. Точка К взята на линии действия реакции $\vec{N}_2$, т.к. $\vec{N}_2$ при решении задачи не определялась.

$$Q_{2\max}\cdot\frac{l}{2}\cdot\cos 30° + N_1\cdot\frac{l}{2}\cdot\cos 30° - F_{тр}\cdot l\cdot\sin 30° - Q_1\cdot l\cdot\sin 30° = 60{,}55\cdot 0{,}5\cdot 0{,}87 +$$
$$+100{,}55\cdot 0{,}5\cdot 0{,}87 - 0{,}3\cdot 100{,}55\cdot 0{,}5 - 110\cdot 0{,}5 = 0,$$
$$0=0.$$

Значения $Q_{2\max}$ и N_1 удовлетворяют условиям равновесия, следовательно они определены правильно.

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Силы трения скольжения и трения качения.
2. Свойства сил трения скольжения.
3. Коэффициент трения скольжения.
4. Угол трения скольжения.
5. Полная реакция шероховатой связи.
6. Условия сдвига и равновесия тела под действием сдвигающей силы, направленной под углом к направлению сдвига.
7. Условия равновесия с учетом сил трения.

2.9. Расчет ферм

При устройстве перекрытий, строительстве мостов, кранов, мачт для высоковольтных линий и т.п. применяют конструкции, которые называют фермами.

Ферма - жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами.

Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферма называется плоской. Места соединения стержней называют узлами. При расчете фермы все внешние нагрузки прикладывают в узлах. Трением в узлах и весом стержней пренебрегают. При необходимости учета веса стержней его распределяют по узлам. В этом случае все стержни будут работать только на растяжение или на сжатие. Расчеты показали, что и при жестком соединении стержней в узлах, усилия также распределяются вдоль стержней. Расчет ферм заключается в определении реакций в опорах и усилий в стержнях фермы. Жесткие фермы образуются из треугольников. Для статически определимых ферм зависимость между числом стержней и узлов

$$n = 2k - 3, \tag{2.23}$$

где k - число узлов,

n - число стержней фермы.

Если $n < 2k - 3$, то ферма будет иметь подвижность, т.е. не будет жесткой.

Расчет усилий в стержнях фермы, как правило, производится методом РОЗ (разрежем, отбросим, заменим). В практике используются два метода: метод вырезания узлов для определения усилий во всех стержнях фермы и метод Риттера для определения усилий в отдельных стержнях или для проверки расчётов. Прежде, чем начать расчет усилий в стержнях фермы, определяются реакции в опорах обычными методами статики (параграф 2.6). При этом ферма рассматривается в целом как твердое тело. Порядок расчёта усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов следующий:

1. Пронумеровать стержни арабскими, а узлы римскими цифрами.
2. Вырезать последовательно все узлы, изображая каждый узел отдельно, и приложить в каждом узле внешние силы и усилия в стержнях, направляя их вдоль стержней от узла, т.е считаем, что стержни работают на растяжение.
3. Выбрать систему координат (для плоских ферм X и Y) и составить уравнения равновесия для сходящихся сил в узле (параграф 2.5): $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$.
4. Определить искомые усилия в стержнях, решая полученные уравнения равновесия.

Расчёт начинается с узла, где сходятся два стержня. Если усилия в каком-либо стержне при расчётах будут получены со знаком минус (-), значит этот стержень работает на сжатие.

Результаты расчетов заносятся в таблицу. Полный расчёт фермы рассмотрим на конкретном примере.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА С4

Определить опорные реакции и усилия в стержнях ферм, изображенных на рис. С4.0...С4.9, на которые действуют силы P_1, P_2 и P_3 Размеры фермы и направления сил указаны на рисунках. Расчет во всех стержнях ферм произвести методом вырезания узлов. Проверочный расчет усилий в трех стержнях -методом Риттера. Данные для различных вариантов сведены в таблицу С4.1.

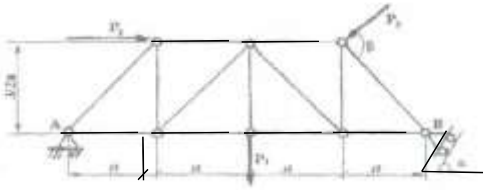


Рис. 4.0

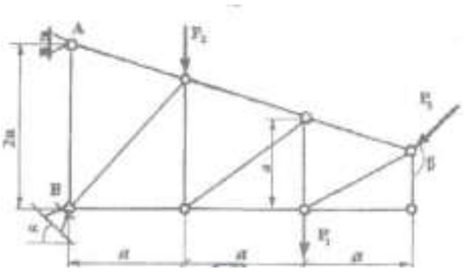


Рис. С4.1-С4.2

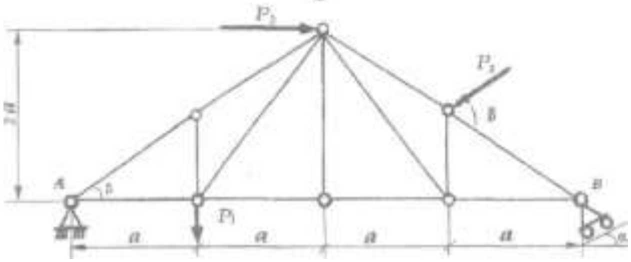


Рис. С4.3

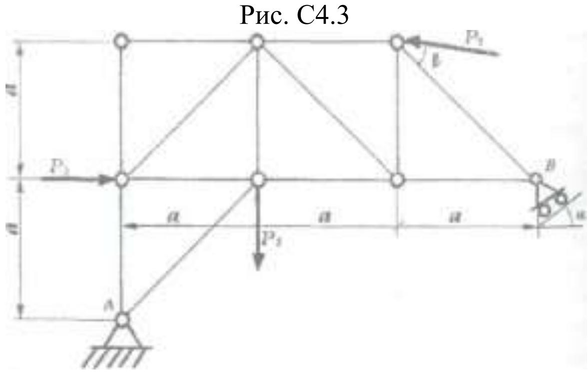


Рис. С4.4-С4.5

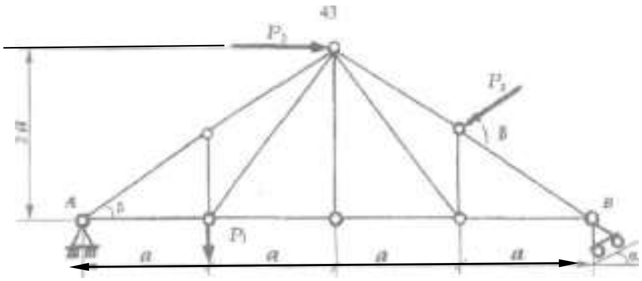


Рис. С4.6

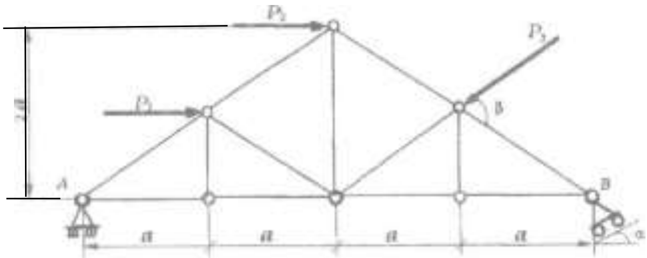


Рис. С4.7-С4.8

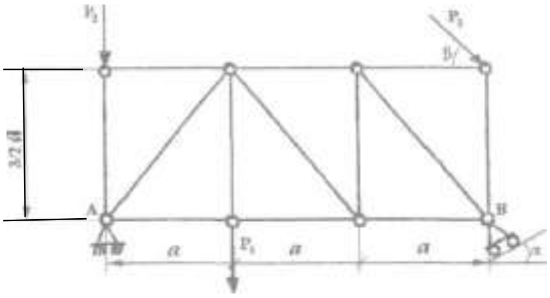


Рис. С4.9

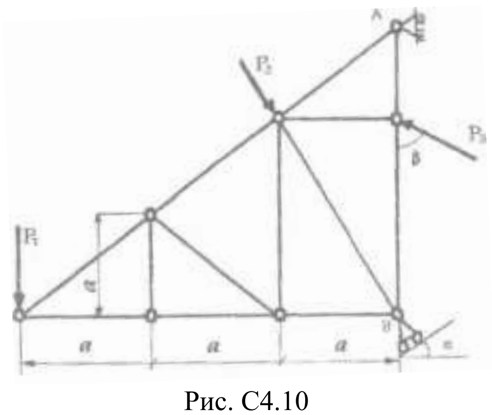


Рис. С4.10

Таблица С4.1

Номер варианта	P_1, *кН*	P_2, *кН*	P_3, *кН*	*a*, *м*	*α*, *рад*	*β*, *рад*
0	15	20	25	1,5	π/6	π/3
1	10	15	20	1,2	π/3	π/4
2	20	30	40	2	π/6	3π/4
3	15	25	20	1,6	π/3	π/6
4	20	25	30	1,5	π/3	π/4
5	30	20	40	2	π/3	π/2
6	15	30	25	1,8	π/4	π/6
7	20	15	25	2	3π/4	π/2
8	25	20	30	1,5	π/4	3π/2
9	30	25	15	1,6	3π/2	π/3
10	10	15	30	1,6	5π/6	π/2

Пример решения задачи С4 для варианта 10.

Определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы, изображённой на рисунке С4.10.

<u>РЕШЕНИЕ</u>: Изображаем ферму – рис. С4.10 в заданном положении $(\alpha = 5\pi/6)$. Прикладываем силы P_1 и P_2 как показано на рисунке, а силу P_3 под углом $\pi/2$ (рис. С4.11).

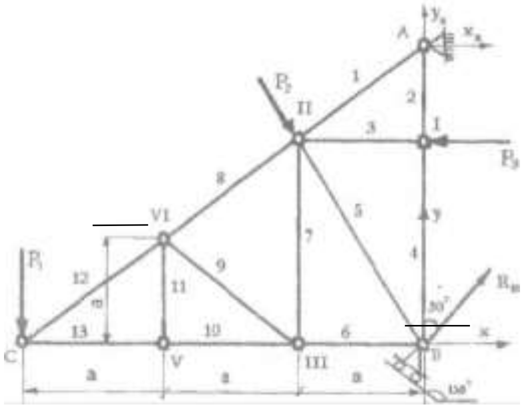


Рис. С4.11

Во-первых, определяем реакции в опорах А и В, рассматривая ферму в целом (как твердое тело), обычными методами статики. Мысленно отбрасываем опоры и заменяем их действия реакциями: X_A, Y_A *и* R_B . Составляем уравнения равновесия:

$$\left.\begin{array}{r}\sum F_{Kx}=0,\\ \sum F_{Ky}=0,\\ \sum m_B(\vec{F}_K)=0.\end{array}\right\}\left.\begin{array}{c}X_A+R_B\cdot\sin 30^\circ-P_3+P_2\cdot\cos\gamma=0,\\ Y_A+R_B\cdot\cos 30^\circ-P_2\cdot\sin\gamma-P_1=0,\\ -X_A\cdot 3a+P_3\cdot 2a+P_1\cdot 3a=0.\end{array}\right\}\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Из уравнения (3):

$$X_A=\frac{2\cdot P_3+3\cdot P_1}{3}=\frac{2\cdot 30+3\cdot 10}{3}=30\,,$$

$$X_A=30кН. \qquad (4)$$

Из уравнения (1)

$$R_B=\frac{P_3-P_2\cdot\cos\gamma-X_A}{\sin 30^\circ}=\frac{30-15\cdot 1/\sqrt{5}-30}{1/2}=-13{,}42,$$

. (5)

Из уравнения (2) $R_B=-13{,}42кН$

$$Y_A=P_2\cdot\sin\gamma+P_1-R_B\cdot\cos\gamma=15\cdot 2\sqrt{5}+10+13{,}42\cdot 0{,}866=35{,}04,$$

$$Y_A=35{,}04кН. \qquad (6)$$

Для проверки составим уравнение моментов относительно точки С

$$\sum m_C(F_K)=0,$$

$$R_B\cdot\cos\alpha\cdot 3\alpha+Y_A\cdot 3\alpha-X_A\cdot 3\alpha-P_2\cdot\cos\gamma\cdot 2\alpha-P_2\cdot\sin\gamma\cdot 2\alpha+P_3\cdot 2\alpha=0,$$

$$-13{,}42\cdot 3\cdot 0{,}866+35{,}04\cdot 3-30\cdot 3-15\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}-15\cdot 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+30\cdot 2=$$
$$=165{,}12-165{,}12=0.$$

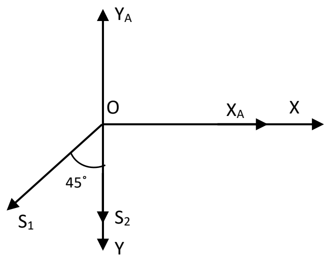
Следовательно, реакции в опорах А и В определены верно. Так как реакция R_B получена со знаком минус (-), то в действительности она направлена в сторону, противоположную указанному направлению на рисунке С4.11.

Во-вторых, определяем усилия во всех стержнях фермы методом вырезания узлов. Пронумеруем все стержни фермы арабскими цифрами: 1,2,...,13. Узлы будем нумеровать буквами А, В, С и далее римскими цифрами: I...V, количество узлов k=8. Проверяем статическую определимость по формуле (4.1):

$$n=2\cdot 8-3=13.$$

Таким образом, рассматриваемая ферма жесткая и статически определимая. Вырежем последовательно все узлы, начиная с узла А, где сходятся два стержня. Отброшенные стержни заменяем усилиями, направляя их от узла. Считаем, что все стержни работают на растяжение. Если усилие в стержне будет получено со знаком минус (-), значит, этот стержень работает на сжатие. Для каждого узла составляем условие равновесия как для сходящихся сил в плоскости.

Узел А:



$$\sum F_{kx} = 0\,, X_A - S_1 \sin 45° = 0, \tag{7}$$
$$\sum F_{ky} = 0\,, -Y_A + S_2 + S_1 \cdot \cos 45° = 0. \tag{8}$$

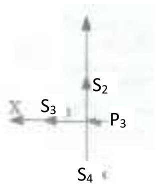
Из уравнения (7) $S_1 = X_A / \sin 45° = 30/0{,}707 = 42{,}43$,

$$S_1 = 42{,}43кН.$$

Из уравнения (8) $S_2 = Y_A - S_1 \cdot \cos 45° = 35{,}04 - 42{,}43 \cdot 0{,}707$,

$$S_2 = 5{,}04кН.$$

Узел I:



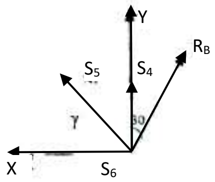
$$\sum F_{kx} = 0\,, S_3 + P_3 = 0\,, \tag{9}$$

$$\sum F_{ky} = 0\,, S_2 - S_4 = 0, \tag{10}$$

Из уравнения (9) $S_3 = -P_3 = -30, S_3 = -30кН.$

Из уравнения (10) $S_4 = S_2 = 5{,}04, S_4 = 5{,}04кН.$

Узел B:



$$\sum F_{kx} = 0\ , S_5 \cdot \cos\gamma + S_6 - R_B \cdot \sin 30^\circ = 0, \qquad (11)$$

$$\sum F_{ky} = 0. S_4 + R_B \cdot \cos 30^\circ + S_5 \cdot \sin y = 0. \qquad (12)$$

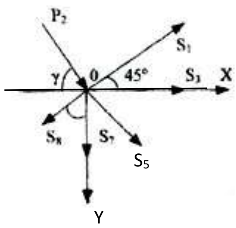
Из уравнения (12) $S_5 = \frac{-S_4 - R_B \cdot \cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{-5{,}04-(-13{,}42)\cdot 0{,}866}{2\sqrt{5}} = 7{,}36,$

$$S_5 = 7{,}36\text{кН}.$$

Из уравнения (11) $S_6 = R_B \cdot \sin\alpha - S_5 \cdot \sin\gamma = -13{,}42 \cdot \frac{1}{2} -$ $-7{,}36 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -10,$

$$S_6 = -10\text{кН}.$$

Узел II:



$$\sum F_{kx} = 0. S_1 \cdot \cos 45^\circ + S_3 + S_5 \cdot \cos y - S_8 \cdot \cos 45^\circ + P_2 \cdot \cos y = 0, \qquad (13)$$

$$\sum F_{ky} = 0. P_2 \cdot \sin y - S_1 \cdot \sin 45^\circ + S_7 + S_5 \cdot \sin y + S_8 \cdot \sin 45^\circ = 0, \qquad (14)$$

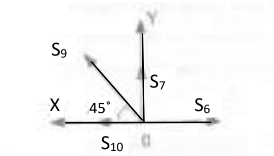
Из уравнения (13) $S_8 = \frac{S_1 \cdot \cos 45^\circ + S_3 + S_5 \cdot \cos\gamma}{\sin 45^\circ} = (42{,}43 \cdot 0{,}707 - 30 +$ $+7{,}36 \cdot 1/\sqrt{5})/0{,}707 = 14{,}14,$

$$S_8 = 14{,}14\text{кН}.$$

Из уравнения (14)
$S_7 = -P_2 \cdot \sin\gamma + S_1 \cdot \sin 45° - S_5 \cdot \sin\gamma - -S_8 \cdot \cos 45° = -15 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 42{,}43 \cdot 0{,}707 - 7{,}36 \cdot 2\sqrt{5} - 14{,}14 \cdot 0{,}707 = 0$
,

$$S_7 = 0.$$

Узел III:

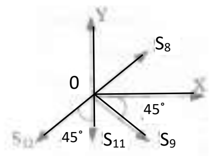


$$\sum F_{kx} = 0\,, S_9 \cdot \cos 45° + S_{10} - S_6 = 0, \qquad (15)$$

$$\sum F_{ky} = 0\,, S_9 \cdot \sin 45° + S_7 = 0. \qquad (16)$$

Из уравнения (16) $S_9 = -S_7 / \sin 45° = 0, S_9 = 0$.

Из уравнения (15) $S_{10} = S_6 = -10, S_4 = -10 кН$.
Узел IV:



$$\sum F_{kx} = 0\,, S_8 \cdot \cos 45° + S_9 \cdot \cos 45° - S_{12} \cdot \sin 45° = 0, \qquad (17)$$

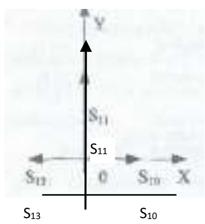
$$\sum F_{ky} = 0\,, -S_{11} - S_{12} \cdot \cos 45° - S_9 \cdot \sin 45° + S_8 \cdot \sin 45° = 0. \qquad (18)$$

Из уравнения (17) $S_{12} = S_8 \cdot \frac{0{,}707}{0{,}707} = S_8 = 14{,}14$, $S_{12} = 14{,}14 кН$.

Из уравнения (15) $S_{11} = -S_{12} \cdot \cos 45° - S_9 \cdot \sin 45° + S_8 \cdot \sin 45° = -14{,}14 \cdot 0{,}707 + 14{,}14 \cdot 0{,}707 = 0$,

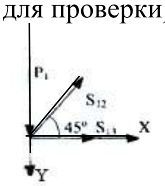
$$S_{11} = 0.$$

Узел V:



$$\sum F_{kx} = 0\,, S_{10} - S_{13} = 0, S_{13} = S_{10} = -10, S_{13} = -10кН. \qquad (19)$$
$$\sum F_{ky} = 0\,, S_{11} = 0.$$

Узел С (рассматривается для проверки):



$$\sum F_{kx} = 0\,, S_{12}\cos 45° + S_{13} = 0, \qquad (20)$$

$$\sum F_{ky} = 0\,, P_1 - S_{12}\sin 45° = 0. \qquad (21)$$

Из уравнения (20) $14{,}14 \cdot 0{,}707 + (-10) = 0$.

Из уравнения (21) $10 - 14{,}14 \cdot 0{,}707 = 0$.

Следовательно расчёт усилий произведён верно.

В-третьих, произведем расчет усилий в стержнях 8,9 и 10 методом Риттера. Для чего рассекаем ферму по этим стержням на две части. Линия сечения показана на рисунке С4.11. Усилия в стержнях S_8, S_9 и S_{10} направляем от узлов. Считаем, что эти стержни работают на растяжение. Составляем условия равновесия для левой части рис.С4.12, более простой по нагрузке. Удобнее для расчетов составлять уравнения моментов относительно точек Риттера, где сходятся два неизвестных усилия в стержнях (точки 1 и 2). Применим 2-ю форму условий равновесия (уравнение 2.18 параграф 2.5).

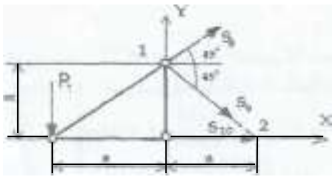


Рис. С. 4.11

$$\sum m_1(\vec{F}_k)=0, P_1 a + S_{10} a = 0, \qquad (22)$$

$$\sum m_2(\vec{F}_k)=0, P_1 2a + S_8 a\sqrt{2} = 0, \qquad (23)$$

$$\sum F_{kx} = 0, S_8 \cdot \cos 45° + S_9 \cdot \cos 45° + S_{10} = 0. \qquad (25)$$

Из уравнения (22) $S_{10} = -P_1 = -10, S_{10} = -10кН.$

Из уравнения (23) $S_8 = P_1\sqrt{2} = 10 \cdot 1{,}414 = 14{,}14, S_8 = 14{,}14$kН.

Из уравнения (24) $S_9 = -S_8 \cdot \cos 45° - S_{10} = -14{,}14 \cdot 0{,}707 + 10 = 0, S_9 = 0$

Значения усилий в стержнях S_8, S_9 $и$ S_{10} получены те же, что и методом вырезания узлов. Результаты расчётов для удобства сводим в таблицу С4.2.

Таблица С4.2

№ стержня	*Усилия в стержне, кН*	*Примечание*
1	$S_1 = 42{,}43$	растяжение
2	$S_2 = 5{,}04$	растяжение
3	$S_3 = -30$	сжатие
4	$S_4 = 5{,}04$	растяжение
5	$S_5 = 7{,}36$	растяжение
6	$S_6 = -10$	сжатие
7	$S_7 = 0$	нулевое
8	$S_8 = 14{,}14$	растяжение
9	$S_9 = 0$	нулевое
10	$S_{10} = -10$	сжатие
11	$S_{11} = 0$	нулевое
12	$S_{12} = 14{,}14$	растяжение
13	$S_{13} = -10$	сжатие

Расчеты показывают, что стержни 3,6,10,13 работают на сжатие, стержни 7,9,11 - нулевые, т.к. они нагрузку не несут. Остальные стержни работают на растяжение.

Примечания:

1. Метод Риттера применяют для расчета усилий не во всех, а отдельных стержнях фермы или для проверки расчетов.
2. Сечение не должно пересекать более трех стержней, в противном случае задача будет статически не определённой.

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Понятие о ферме. Условия применения ферм в инженерной практике.
2. Условия статической определимости фермы.
3. Полный расчет фермы.
4. Расчет усилий в стержнях фермы.
5. Расчет усилий в стержнях методом вырезания узлов.

6. Расчет усилий в стержнях методом Риттера.
7. Учет работы стержней фермы на растяжение и сжатие.

Глава 3

Пространственная система сил

3.1. Момент силы относительно центра как вектор

Для любой силы в пространстве, вращающий эффект характеризуется тремя элементами (рис. 3.1):
1) величиной (модулем) момента, равным F·h;
2) плоскостью поворота OAB;
3) направлением поворота в этой плоскости.

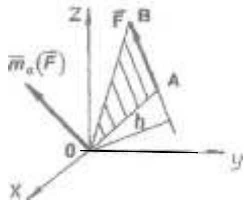


Рис. 3.1

Все эти три элемента характеризуются одним вектором $\vec{m}_0(\vec{F})$, приложенным в центре O, равным по величине F·h (произведению модуля силы на плечо), перпендикулярным плоскости поворота OAB и направленным в сторону, откуда поворот, совершаемый силой $\vec{F}$, виден против хода часовой стрелки. Таким образом, вектор момента $\vec{m}_0(\vec{F})$, одновременно характеризует величину, плоскость и направление поворота силы $\vec{F}$ относительно центра O и определяется векторным произведением

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{3.1}$$

<u>Момент силы $\vec{F}$ относительно центра O равен векторному произведений радиуса - вектора точки приложения силы $\vec{r}$ на вектор силы $\vec{F}$.</u>

Уравнение (3.1) определяет все три элемента момента силы, в том числе его величину

$$m_0(\vec{F}) = 2_{пл} OAB = F \cdot h. \tag{3.2}$$

3.2. Момент силы относительно оси

Пусть сила $\vec{F}$, приложенная в точке А, стремится повернуть тело вокруг оси z (рис. 3.2). Определим ее вращательный эффект. Проведем через точку А плоскость xy, перпендикулярную оси *z,* и разложим силу $\vec{F}$ на составляющие: $\vec{F}_z$ параллельную оси *z* и $\vec{F}_{XY}$ в плоскости ху. Сила $\vec{F}_z$ II z и не может повернуть тело относительно оси (она стремится сдвинуть его вдоль оси). Следовательно, весь вращающий эффект, создаваемый силой $\vec{F}$, будет определяться моментом ее составляющей $\vec{F}_{XY}$. Из рис. 3.2 видно, что момент $\vec{F}_{XY}$ относительно оси z равен моменту этой же силы относительно точки О (точки пересечения оси z с плоскостью ху). Момент же силы $\vec{F}_{XY}$ на основании уравнения (2.1) равен $\vec{m}_0(\vec{F}_{XY}) = \pm F_{XY} \cdot h$. Тогда окончательно будем иметь:

$$\vec{m}_z(\vec{F}) = \vec{m}_z(\vec{F}_{XY}) = \pm F_{XY} \cdot h \, . \qquad (3.3)$$

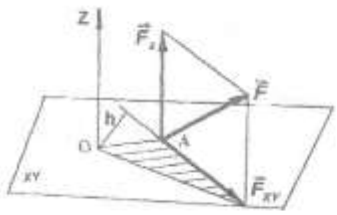


Рис. 3.2

Определение: <u>Момент силы относительно оси - алгебраическая величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью</u>.

Момент считается положительным, если с положительного конца оси z поворот, который стремится совершить сила $\vec{F}_{XY}$, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу стрелки часов. На рис. 3.2 момент силы $\vec{F}$ относительно оси *z* - отрицательный.

<u>Частные случаи</u>:

1. Если сила $\vec{F}$ параллельна оси z, то ее момент равен нулю $m_Z(\vec{F}) = 0$, т.к. $F_{XY} = 0$.

2. Если сила $\vec{F}$ пересекает ось z, то ее момент равен нулю $m_Z(\vec{F}) = 0$, т.к. h=0.

3. Если сила $\vec{F}$ перпендикулярна оси z, то ее момент равен произведению модуля силы на ее расстояние до оси $m_Z(\vec{F}) = F \cdot h$.

<u>Аналитические формулы для вычисления моментов силы относительно оси</u>. Пусть сила $\vec{F}$, проекции которой на оси F_X, F_Y, F_Z, приложена к телу в точке A с координатами (x,y,z) (рис. 3.3). На основании уравнения (3.3)

По теореме Вариньона (уравнение 2.3):

$$m_Z(\vec{F}) = m_Z(\vec{F}_{XY}) = m_0(\vec{F}_{XY}) = m_0(\vec{F}_X) + m_0(\vec{F}_Y).$$

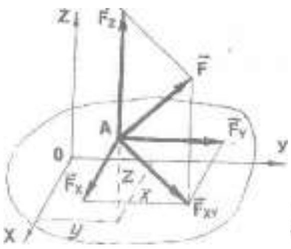


Рис. 3.3

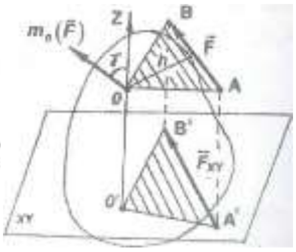


Рис. 3.4

Из рис. 3.3 следует, что $m_0(\vec{F}_X) = -F_X \cdot y$, а $m_0(\vec{F}_Y) = F_Y \cdot x$. С учётом этих значений $m_Z(\vec{F}) = F_Y \cdot x - F_X \cdot y$. Аналогично вычисляются моменты относительно других осей. В результате имеем:

$$\begin{aligned} m_X(\vec{F}) &= y \cdot F_Z - z \cdot F_Y, \\ m_Y(\vec{F}) &= z \cdot F_X - x \cdot F_Z, \\ m_Z(\vec{F}) &= x \cdot F_Y - y \cdot F_X. \end{aligned} \qquad (3.4)$$

3.3. Зависимость между моментом силы относительно центра и относительно оси

Пусть на тело в точке А действует сила $\vec{F}$ (рис. 3.4). Проведём ось Z и возьмём на ней произвольно точку О. Момент силы $\vec{F}$ относительно центра О будет определяться вектором $\vec{m}_0(\vec{F}) \perp$ пл.ОАВ, по величине (уравнения 3.1 и 3.2), $m_0(\vec{F}) \perp$ = F * h= 2пл.ОАВ.

Через любую точку О ' проведём плоскость xy ⊥Z и найдём проекцию силы F на эту плоскость ($\vec{F}_{xy}$). Тогда на основании уравнений (3.3 и 2.2) $m_z(\vec{F}) = m_{0'}(\vec{F}_{xy})$=2пл.*O'A'B'*.

Так как *O'A'B'* является проекцией *OAB* на плоскость xy, то пл$O'A'B'$=пл$OAB\cdot\cos\gamma$, где γ - угол между плоскостями этих треугольников, равный углу между перпендикулярами к плоскостям. Умножая обе части последнего равенства на два, получим с учётом предыдущих уравнений:

$$m_z(\overrightarrow{F}) = m_0(\overrightarrow{F}) \cdot \cos\gamma \ \ \textit{или}\ m_z(\vec{F}) = \left[\overrightarrow{m}_0(\vec{F})\right]_z. \qquad (3.5)$$

Определение: Проекция вектора момента силы относительно центра на любую ось равна моменту данной силы относительно этой же оси.

3.4. Теорема Вариньона о моменте силы относительно оси

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно любого центра (уравнение 2.3) для произвольной системы сил в векторной форме определяется равенством:

$$\vec{m}_0(\vec{R}) = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k).$$

Проекция этого равенства на координатную ось, согласно формуле (3.5), будет иметь вид:

$$m_z(\vec{R}) = \sum m_z(\vec{F}_k). \qquad (3.6)$$

Следовательно, теорема Вариньона справедлива и для моментов относительно любой оси. Этой теоремой удобно пользоваться при решении задач для нахождения момента силы относительно координатных осей, разлагая силу по координатным осям.

3.5. Момент пары сил как вектор

Действие пары сил на тело в общем случае, как и момента силы, характеризуется тремя элементами:

1) величиной (модулем) момента пары;
2) плоскостью действия;
3) направлением поворота в этой плоскости.

Все эти три элемента, по аналогии с моментом силы, можно изображать вектором $\overrightarrow{m}$, равным по модулю моменту пары сил, перпендикулярным плоскости действия и направленным в сторону, откуда поворот, совершаемый парой сил, виден против хода часовой стрелки. Как известно (параграф 2.2), модуль момента пары равен моменту одной из сил пары не её плечо. Следовательно $m = m_A(\vec{F}_2) = m_B(\vec{F}_1)$.

На основании формулы (3.1) момент пары можно определить по величине и направлению векторным уравнением:

$$\vec{m} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_1 = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_2. \tag{3.7}$$

Так как пару сил можно располагать где угодно в плоскости ее действия или плоскости ей параллельной, то вектор $\vec{m}$ можно прикладывать в любой точке тела. Такой вектор называется скользящим или свободным.

3.6. Приведение произвольной пространственной системы сил к данному центру

Применяя метод Пуансо, произвольную пространственную систему сил, так же как и плоскую (параграф 2.4), можно привести к одной силе, приложенной в центре приведения, которая называется главным вектором

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k, \tag{3.8}$$

и одной паре, которая называется главным моментом относительно центра приведения

$$\vec{M}_0 = \vec{m}_1(\vec{F}_1) + \vec{m}_2(\vec{F}_2) + \cdots + \vec{m}_n(\vec{F}_n) = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k). \tag{3.9}$$

Численное значение главного вектора $\vec{R}$ определяется через его проекции

$$R_x = \sum Fk_x,\ R_y = \sum Fk_y,\ R_z = \sum Fk_z,$$

следовательно,

$$R = \sqrt{\sum F_{kx}{}^2 + \sum F_{ky}{}^2 + \sum F_{kz}{}^2}. \tag{3.10}$$

Главный момент $\vec{M}_0$ по величине так же, как и главный вектор $\vec{R}$, определяется через проекции на оси: M_{0x}, M_{0y}, M_{0z}. Но по соответствующей теореме статики (параграф 3.3)

$$M_{0x} = \sum m_x(\vec{F}_k),\ M_{0y} = \sum m_y(\vec{F}_k),\ M_{0z} = \sum m_z(\vec{F}_k),$$

следовательно,

$$M_0 = \sqrt{\sum m_x(F_k)^2 + \sum m_y(F_k)^2 + \sum m_z(F_k)^2}. \qquad (3.11)$$

Частные случаи приведения пространственной системы сил.

В зависимости от значений главного вектора и главного момента пространственной системы сил и их расположения возможны следующие простейшие случаи приведения:

1. Если $\vec{R} = 0$ и $\vec{M}_0 = 0$,то система находится в равновесии.

2. Если $\vec{R} \neq 0$ и $\vec{M}_0 = 0$, то система приводится к одной силе $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$, которая является равнодействующей, проходящей через центр О.

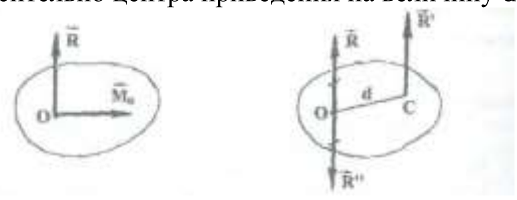
Свободное тело под действием такой системы сил может совершать, в том числе и поступательное движение, если равнодействующая $\vec{R}$ проходит через центр тяжести тела.

3. Если $\vec{R} = 0$ и $\vec{M}_0 \neq 0$, то система приводится к одной паре $\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k)$. В этом случае, как и для плоской системы сил (параграф 2.4), величина $\vec{M}_0$ не зависит от выбора центра приведения.

4. Если $\vec{R} \neq 0$ и $\vec{M}_0 \neq 0$, то возможны следующие инварианты в зависимости от расположения векторов $\vec{R}$ и $\vec{M}_0$.

4.1. Пусть $\vec{R} \perp \vec{M}_0$. Такая система приводится к одной равнодействующей, равной $\vec{R}$, но не проходящей через центр О (рис. 3.5).

Действительно, представим вектор $\vec{M}_0$ (рис. 3.5а) эквивалентной парой сил $(\vec{R}', \vec{R}")$ (рис. 3.5б), у которой по величине R'=R"=R. Плечо d этой пары будет равно: $d = \frac{M_0}{R}$. Пара сил $(\vec{R}', \vec{R}")$ располагается в плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{M}_0$ и проходящей через точку О. Разместим эту пару так, что бы одна из сил пары, например $\vec{R}"$, уравновесила главный вектор $\vec{R}$. Отбрасывая уравновешенные силы $\vec{R}$ и $\vec{R}"$, в итоге получим вместо данной системы сил одну силу $\vec{R} = \vec{R}'$, которая и будет равнодействующей, но смещенной относительно центра приведения на величину d.



а) б)

Рис. 3.5

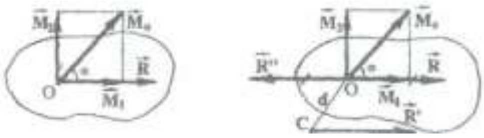
4.2. Пусть $\vec{R} \parallel \vec{M}_0$ (рис. 3.6 а). Данная система сил дает совокупность силы $\vec{R}$ и пары $(\vec{F}, \vec{F}')$, лежащей в плоскости, перпендикулярной силе (рис.3.6б). Такая совокупность коллинеарных векторов силы и пары называется динамическим винтом или динамой, а прямая, вдоль которой направлен вектор $\vec{R}$, осью винта. Дальнейшее упрощение данной системы сил невозможно.

а) б)

Рис. 3.6

В случае, когда направления векторов $\vec{R}$ и $\vec{M}_0$, совпадают (рис. 3.6 а) – правый винт. Если же векторы $\vec{R}$ и $\vec{M}_0$ противоположны по направлению, имеет место левый винт. Твердое тело, к которому приложена динама, может совершать только сложное (винтовое) движение.

4.3. Пусть $\vec{R}$ не перпендикулярен и не параллелен $\vec{M}_0$. Такая система сил также приводится к динаме, но ось динамы смещена относительно центра приведения (рис. 3.7).



а) б)

Рис. 3.7

Для доказательства разложим вектор $\vec{M}_0$ на составляющие: $\vec{M}_1$ - вдоль главного вектора $\vec{R}$ и $\vec{M}_2$ - перпендикулярно к $\vec{R}$ (рис. 3.7а). Значения $M_1 = M_0 \cos\alpha$, $M_2 = M_0 \sin\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{R}$ и $\vec{M}_0$. Пару, изображаемую вектором $\vec{M}_2 (\vec{M}_2 \perp \vec{R})$, и силу $\vec{R}$ можно заменить одной силой $\vec{R}'$, как и в случае на рис. 3.5б, но приложенной в центре С. Причем $OC = d = \frac{M_2}{R'} = M_0 \sin\alpha / R$.

В результате данная система сил заменится силой $\vec{R}' = \vec{R}$ и парой с моментом $\vec{M}_1 \parallel \vec{R}$, т.е. динамой, ось которой проходит через центр С.

3.7. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Необходимые и достаточные условия равновесия произвольной пространственной системы сил выражаются равенствами $\vec{R}$=0, $\vec{M}_0 = 0$. Эти векторы согласно уравнениям (3.10) и (3.11) будут равны нулю, когда каждый член подкоренных выражений уравнений (3.10) и (3.11) будет удовлетворять условиям:

$$\sum Fk_x = 0, \sum Fk_y = 0, \sum Fk_z = 0 \qquad (3.12)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_y(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum m_z(\vec{F}_k) = 0 \quad .$$

Таким образом, <u>для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трёх координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю [2].</u>

По механическому смыслу первые три уравнения показывают, что тело не имеет перемещений относительно координатных осей, а последние три уравнения - и не вращается относительно этих же осей, т.е. находится в равновесии.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ. ЗАДАЧА С5

Однородный горизонтальный вал весом $\vec{P}$ вращается в двух цилиндрических подшипниках А и В. С валом жестко соединены колесо 1 радиуса R_1 и колесо 2 радиуса R_2. На колесо 1 навернут трос, к концу которого подвешен груз весом Q . Груз $\vec{Q}$ равномерно поднимается приводными ремнями, натяжение которых $\vec{T}$ и $2\vec{T}$, направленными под углом α к горизонтали в плоскости xAz.

Определить: вес поднимаемого груза и реакции подшипников А и В для заданных схем (рис. С5.0 - С5.9) и параметров, приведенных в таблице С5. Весом колес и троса пренебречь.

Пример решения задачи С5 для варианта 10.

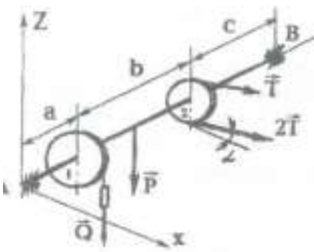
Определить вес поднимаемого груза $\vec{Q}$ и реакции подшипников А и В для схемы рис. (С5.10).

[2] Дня пространственной системы сходящихся сил уравнения моментов относительно координатных осей x, y, z тождественно равны нулю и, следовательно, уравнения равновесия будут иметь следующий вид:

$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0.$

Таблица С5

Номер варианта	*P, H*	*T, H*	R_1, *м*	R_2, *М*	*a, м*	*ь, м*	*c, м*	*α, рад.*
0	80	150	0,4	0,2	0,8	1	0,5	π/6
1	100	240	0,4	0,3	0,6	0,8	0,4	3π/4
2	50	120	0,5	0,2	0,8	1,2	0,6	π/3
3	80	160	0,6	0,4	0,6	1,4	*0,5*	π/4
4	60	150	0,5	од	0,5	1,6	0,5	2π/3
5	120	240	0,4	0,1	0,6	1,2	0,4	3π/4
6	100	210	0,6	0,2	0,8	U	0,6	6π'6
7	120	180	0,5	0,3	0,6	1.4	0,4	2π/3
8	ПО	220	0,4	0,2	0,5	1.2	0,5	π/3
9	90	180	0,3	0,8	0.8	1	0,6	π/4
10	80	250	0,2	0,4	0,8	0,8	0.6	*π/6*



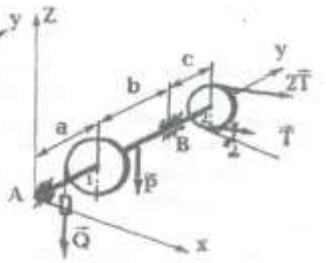
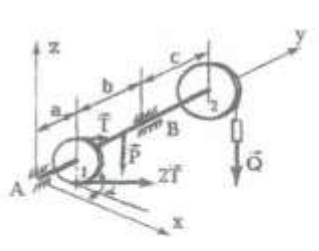


Рис. С5.0-С5.1 Рис. С5.2-С5.3



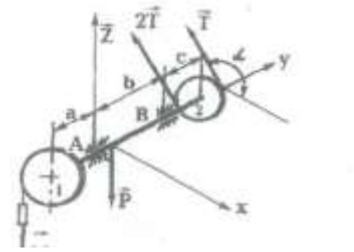
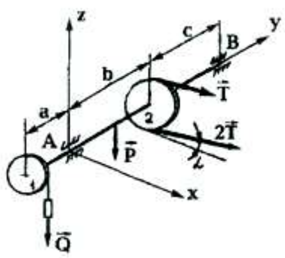


Рис. С5.4-С5.5 Рис. С5.6-С5.7



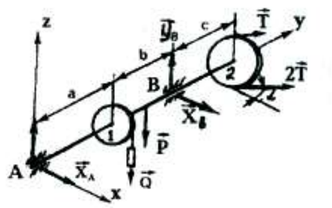


Рис. С5.8-С5.9 Рис. С5.10

<u>РЕШЕНИЕ</u>: Задача С5 на равновесие произвольной пространственной системы сил. Для определения искомых величин рассмотрим равновесие вала с колесами 1 и 2. При равномерном вращении вала, действующие на колесо 2 силы натяжения ремней $2\vec{T}$ и $\vec{T}$ и веса вала $\vec{P}$, уравновешиваются реакциями подшипников А и В и весом поднимаемого груза $\vec{Q}$, приложенного к колесу 1 в точке касания вдоль направления троса. Проведем координатные оси A_x, A_y, A_z, как показано на рис. С5.10.

Мысленно отбрасываем подшипники А и В и заменяем их действие реакциями, направленными вдоль координатных осей: $\vec{X}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_{A,} \vec{Z}_B$. Реакции вдоль оси A_y возникать не будут, т.к. проекции активных сил на ось A_y равны нулю.

Для рассматриваемой системы пространственных сил условия равновесия имеют вид:

$$\sum F_{Kx} = 0,\ X_A + X_B + 2T \cdot \cos\alpha + T \cdot \cos\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{Kz} = 0,\ Z_A + Z_B - Q - P - 2T \cdot \sin\alpha + T \cdot \sin\alpha = 0, \qquad (2)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0, 2T \cdot (a+b+c) \cdot \sin\alpha + T \cdot (a+b+c) \cdot \sin\alpha + \\ + Z_B \cdot (a+b) - Q \cdot a - P \cdot \frac{a+b+c}{2} = 0, \qquad (3)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = 0,\ QR_1 + TR_2 - 2TR_2 = 0, \qquad (4)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = 0, -X_B \cdot (a+b) - 2T \cdot (a+b+c)\cos\alpha - \\ -T \cdot (a+b+c)\cos\alpha = 0. \qquad (5)$$

Из уравнения (4)

$$Q = \frac{(2T-T) \cdot R_2}{R_1} = \frac{TR_2}{R_1} = \frac{250 \cdot 0{,}4}{0{,}2} = 500\text{Н}.$$
$$Q = 500\text{Н}.$$

Из уравнения (5)

$$X_B = \frac{-3T \cdot (a+b+c)\cos\alpha}{a+b} = \frac{-3 \cdot 250 \cdot 0{,}87 \cdot 2{,}2}{1{,}6} = -897{,}2\text{Н},$$
$$X_B = -897{,}2\text{Н}.$$

Из уравнения (3)

$$Z_B = \frac{Q \cdot a + P \cdot \frac{a+b+c}{2} - 3T \cdot (a+b+c)\sin\alpha}{a+b} = \frac{500 \cdot 0{,}8 + 80 \cdot 1{,}1 - 3 \cdot 250 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}2}{1{,}6} = -210{,}6\text{Н}.$$
$$Z_B = -210{,}6\text{Н}.$$

Из уравнения (2)

$$Z_A = Q + P - Z_B - 3T \cdot \sin\alpha = 500 + 80 + 210{,}6 - 3 \cdot 250 \cdot 0{,}5 = 415{,}6\text{Н}.$$
$$Z_A = 415{,}6\text{Н}.$$

Из уравнения (1)

$$X_A = -X_B 3T \cdot \cos\alpha = 897{,}2 - 3 \cdot 250 \cdot 0{,}87 = 244{,}7\text{Н}.$$
$$X_A = 244{,}7\text{Н}.$$

Реакции $\vec{X}_B$ и $\vec{Z}_B$ получены со знаком минус, значит, их действительные направления противоположны выбранным на рис. С5.10.

Для проверки решения составим уравнения моментов относительно осей CX^1 и CZ^1 (рис.С5.11).

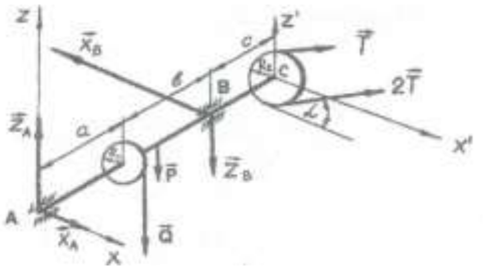


Рис. С5.11

$Z_B \cdot c + P \cdot \frac{a+b+c}{2} + Q \cdot (b+c) - Z_A \cdot (a+b+c) =$
$= 210{,}6 \cdot 0{,}6 + 80 \cdot 1{,}1 + 500 \cdot 1{,}4 - 415{,}6 \cdot 2{,}2 = 0,$
$0 = 0.$
$X_A \cdot (a+b+c) - X_B \cdot c = 244{,}7 \cdot 2{,}2 - 897{,}2 \cdot 0{,}6 = 0,$
$0 = 0.$

Значения полученных реакций удовлетворяют уравнениям равновесия, следовательно, задача решена правильно.

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Главный вектор и главный момент произвольной системы сил в пространстве.
2. Приведение пространственной системы сил к простейшему виду.
3. Момент силы относительно центра как вектор.
4. Момент силы относительно оси.
5. Аналитические формулы момента силы относительно координатных осей.
6. Зависимость момента силы относительно центра и относительно оси.
7. Условия равновесия произвольной системы сил.

Глава 4

Центр параллельных сил и сил тяжести

4.1. Центр параллельных сил

Точка С, через которую проходит линия действия равнодействующей системы при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

Найдём координаты центра параллельных сил: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots, \vec{F}_n$, равнодействующая которых

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k . \tag{4.1}$$

Пусть координаты точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2), \cdots$, С$(x_c, y_c, z_c)$ (рис.4.1). На основании теоремы Вариньона:

$$m_y(\vec{R}) = \sum m_y(\vec{F}_k). \tag{4.2}$$

Из рисунка 4.1. следует, что $m_y(\vec{R}) = R \cdot x_c$, $m_y(\vec{F}_1) = F_1 \cdot x_1$ и т.д. Подставляя эти значения моментов в равенство (4.2), получим:

$$R \cdot x_c = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + \cdots + F_n \cdot x_n .$$

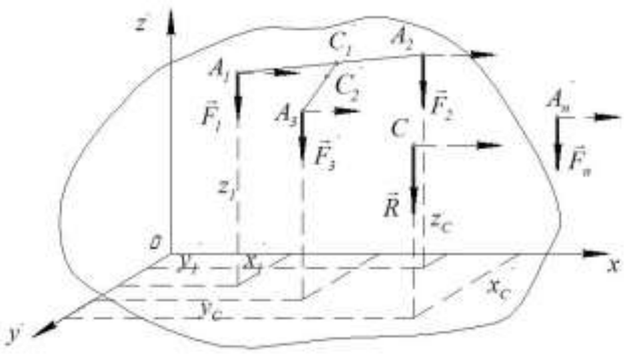


Рис. 4.1

Отсюда находим

$$X_c = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots + F_b x_b}{R} = \frac{\sum F_k x_k}{R}.$$

Аналогично определяется координата y_c . Чтобы определить координату z_c следует повернуть все силы параллельно оси оу и применить теорему Вариньона относительно оси ох.

Окончательно получим следующие формулы:

$$x_c = \frac{\sum F_k x_k}{R}, y_c = \frac{\sum F_k y_k}{R}, z_c = \frac{\sum F_k z_k}{R}. \quad 4.3)$$

4.2. Центр тяжести твёрдого тела

На любое твёрдое тело вблизи земной поверхности действуют силы тяжести отдельных частей тела: P_1 , P_2 ,…, P_n ,направленные вертикально вниз. Равнодействующая этих сил называется весом тела и определяется равенством:

$$\vec{P} = \sum \vec{P}_k. \quad (4.4)$$

Точка С, через которую проходит равнодействующая сил тяжести при любых поворотах тела в пространстве, называется центом тяжести тела.

Координаты центра тяжести, как и центра параллельных сил, определяются формулами (4.3):

$$x_c = \frac{\sum P_k x_k}{P}, y_c = \frac{\sum P_k y_k}{P}, z_c = \frac{\sum P_k z_k}{P}, \quad (4.5)$$

где x_k, y_k, z_k - координаты точек приложения сил тяжести P_k отдельных частей тела.

Центр тяжести - точка геометрическая, она может лежать и вне пределов данного тела (кольцо, полый цилиндр и др.).

Координаты центров тяжести однородных тел.

Для однородного тела вес Р пропорционален объёму V , вес любой части P_k пропорционален объёму этой же части:

$P = \gamma \cdot V, P_k = \gamma \cdot V_k$, где γ - вес единицы объёма. Подставляя эти значения Р и P_k в формулы (4.5) и сокращая на γ, получим центр тяжести объёма:

$$x_c = \frac{\sum V_K x_k}{V}, y_c = \frac{\sum V_K y_k}{V}, \qquad Z_c = \frac{\sum V_k \cdot Z_k}{V}. \quad (4.6)$$

Аналогично рассматривая однородное плоское тело, получим координаты центра тяжести площади:

$$x_c = \frac{\sum S_K x_k}{S}, y_c = \frac{\sum S_K y_k}{S}, \quad (4.7)$$

где S - площадь тела, S_k - площадь его частей.

Так же определяется центр тяжести линии:

$$x_c = \frac{\sum L_K x_k}{L}, y_c = \frac{\sum L_K y_k}{L}, z_c = \frac{\sum L_K z_k}{L}, \qquad (4.8)$$

где L - длина линии (стержня, трубы и т. п.), L_k - длина её частей.

Таким образом, центр тяжести однородного тела определяется как центр тяжести объёма (4.6), площади (4.7) и линии (4.8).

4.3. Способы определения координат центров тяжести тел

Полученные формулы позволяют выделить конкретные способы определения координат центров тяжести тел.

1. Способ симметрии. Если тело имеет центр, ось или плоскость симметрии, то центр тяжести в силу симметрии одинаковых частей тела будет лежать соответственно в центре, на оси или плоскости симметрии (кольцо, круглая или прямоугольная пластина, параллелепипед, треугольник и т. п.).

2. Способ разбиения на части. Если тело можно разбить на конечное число частей, центры тяжести которых известны, то координаты центра тяжести определяются по формулам (4.5-4.8). Число слагаемых в числителе будет равно числу частей, на которые разбивается тело.

Примечание: вырезанная часть тела учитывается со знаком минус.

3. Способ интегрирования. Если тело нельзя *разбить* на отдельные части, центры тяжести которых известны, то разбивают тело на ∞ малые части и суммы в формулах (4.6-4.8) превращают в интегралы по объёму, площади, линии. Примеры изложены в курсе высшей математики и в учебниках по теоретической механике.

4. Способ экспериментальный. Для тел сложной конфигурации используют метод подвешивания на нити или тросе за две разные точки.

Линии пересечения дают положение центра тяжести. Для крупногабаритных тел: автомобиль, трактор, комбайн и т. п. - используют метод взвешивания. Идея метода представлена на рисунке 4.2, откуда следует

$$\sum m_0(\vec{F}_k) = 0; \qquad -P \cdot x_c + Q \cdot l = 0;.$$

$$x_c = \frac{Q \cdot l}{P} \quad . \tag{4.9}$$

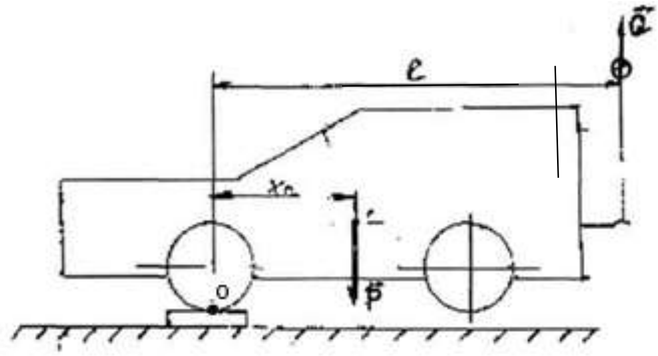


Рис. 4.2

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА С6

Определить положение центра тяжести однородной пластины, из которой вырезан полукруг (рис. С6.0 - С6.4), или однородной пластины, составленной из полукруга и прямоугольника, из которой вырезан прямоугольник (рис. С6.5 - С6.9).

Данные для различных вариантов сведены в таблицу С6.

Таблица С6

Номер варианта	*а, см*	*в, см*	*с, см*	*d, см*
0	110	40	28	80
1	80	50	24	40
2	100	56	30	40
3	94	34	20	30
4	82	26	20	30
5	88	20	26	50
б	78	20	18	30
7	70	28	30	40
8	80	22	32	40
9	74	14	22	60
10	90	40	30	20

Пример решения задачи С6 для варианта 10 (рис. С6.10).

РЕШЕНИЕ: Координаты центра тяжести однородной площади определяем по формулам:

$$x_C = \sum \frac{S_k \cdot x_k}{S}, y_C = \sum \frac{S_k \cdot y_k}{S}. \quad (1)$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, разбиваем площадь пластины на отдельные части, центры тяжести которых известны. В данном случае такими частями являются два прямоугольника и половина круга (рис.С6.11).

Площадь половины круга, вырезанную из площади прямоугольника, будем считать отрицательной.

Вычисляем:

площадь прямоугольника с центром тяжести в точке C_1

$$S_1 = 40 \cdot 30 = 1200\ \text{см}^2,$$

площадь прямоугольника с центром тяжести в точке C_2

$$S_2 = 50 \cdot 20 = 1000\ \text{см}^2,$$

площадь половины круга

$$S_3 = \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 200\pi = 628\text{см}^2.$$

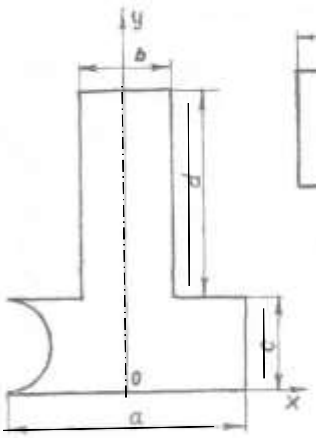


Рис. С6.0

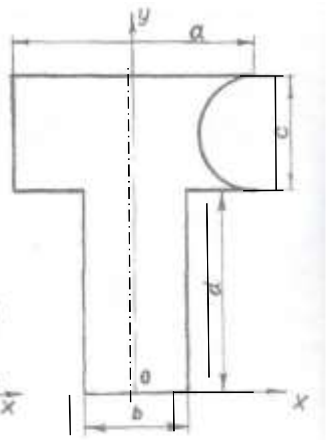


Рис. С6.1

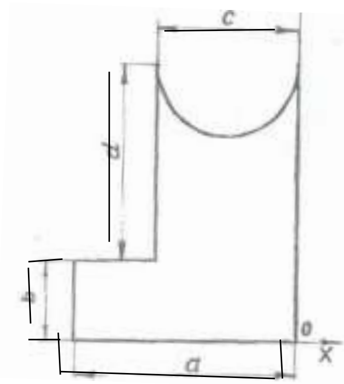


Рис. С6.2

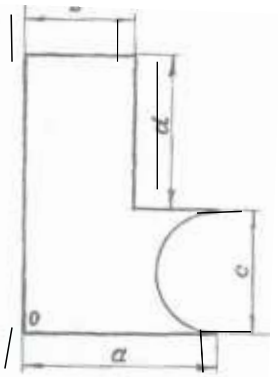


Рис. С6.3

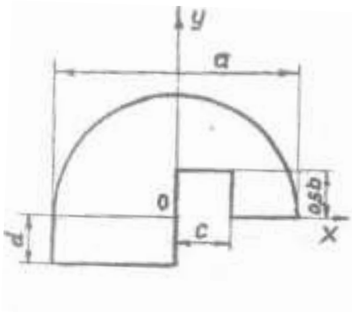


Рис. С6.4

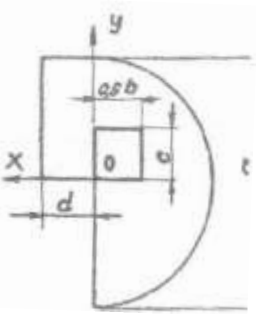
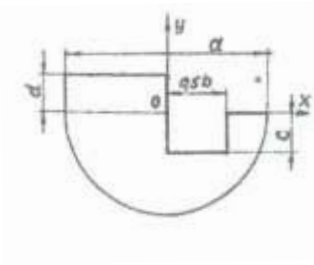


Рис. С6.5



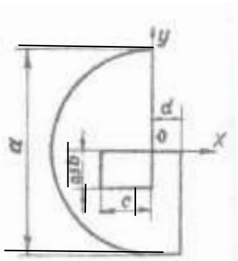


Рис. С6.6-С6.7

Рис. С6.8-С6.9

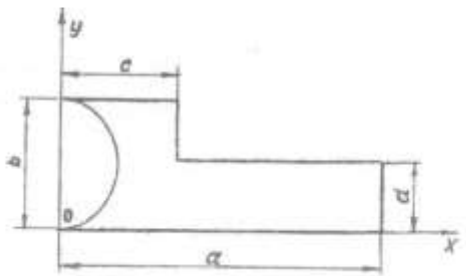


Рис. С6.10

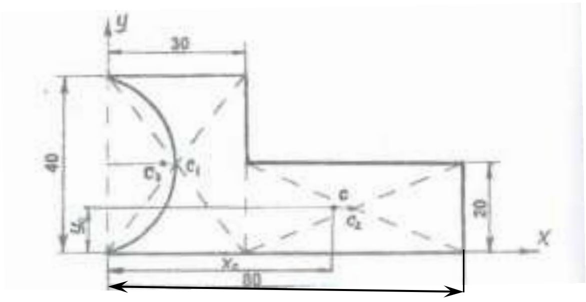


Рис. С6.11

Центры тяжести рассматриваемых частей пластины имеют следующие координаты:

для первого прямоугольника

$$x_1 = 15\text{см}, y_1 = 20\text{см};$$

для второго прямоугольника

$$x_2 = 30 + \frac{50}{2} = 55\text{см},\ y_2 = 20/2 = 10\text{см};$$

для половины круга (Тарг С.М. [4])

$$x_3 = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{2R \cdot 1}{3\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi} = 8{,}5\text{см}, y_3 = 20\text{см},$$

где $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Подставляя эти значения в формулы (1), получаем:

$$x_c = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 - S_3 \cdot x_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{1200 \cdot 15 + 1000 \cdot 55 - 628 \cdot 8{,}5}{1200 + 1000 - 628} = 42{,}3\text{см},$$

$$y_c = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 - S_3 \cdot y_3}{S_1 + S_2 - S_3} = \frac{1200 \cdot 20 + 1000 \cdot 10 - 628 \cdot 20}{1200 + 1000 - 628} = 13{,}4\text{см}.$$

Изображаем на схеме рис. С6.І1 искомые координаты центра тяжести пластины.

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Понятие о центре параллельных сил и центре тяжести твердого тела.
2. Определение координат центра тяжести твердого тела.
3. Центр тяжести однородного объема, плоскости, линии.
4. Способы определения координат центра тяжести твердого тела.
5. Экспериментальные способы определения координат центра тяжести твердого тела и системы тел.

Раздел второй

КИНЕМАТИКА

ГЛАВА 5

Кинематика точки

5.1. Введение в кинематику

Кинематика - раздел механики, в котором изучается движение тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.

Кинематика, с одной стороны, устанавливает основные понятия и зависимости, необходимые для изучения динамики. С другой стороны, методы кинематики имеют и самостоятельное практическое значение, например, при изучении передач движения в механизмах.

Под движением тел в механике понимается изменение с течением времени положения их в пространстве по отношению к другим телам (системам отсчета). За единицу длины принимается -1м, за единицу времени -1с.

В кинематике простейшего объекта - материальной точки решают две задачи:

1) задание движения, т.е. задание положения точки относительно системы отсчета в любой момент времени;

2) определение по заданному движению (закону) всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

5.2. Способы задания движения точки

Обычно применяют три способа: векторный, координатный, естественный.

<u>1. Векторный способ задания движения</u>

Положение точки относительно выбранной системы отсчета задается радиусом - вектором (рис. 5.1), изменяющимся с течением времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) определяет закон движения, т.к. позволяет в любой момент времени найти положение движущейся точки по величине и направлению радиуса - вектора $\vec{r}$.

2. Координатный способ задания движения

Аналитически положение точки М (рис. 5.1) можно задавать проекциями радиуса - вектора на координатные оси: х, у и z. Обозначая для краткости проекции $r_x = X, r_y = Y, r_z = Z$, где х, у, z - координаты движущейся точки, получим

$$X = f_1(t), Y = f_2(t), Z = f\ \ (t). \qquad (5.2)$$

Уравнения (5.2) выражают закон движения точки в координатной форме, т.к. в любой момент времени они позволяют определить координаты и найти положение точки.

Если точка движется в одной плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость OXY, получим в этом случае два уравнения

$$X = f_1(t), Y = f_2(t). \qquad (5.2')$$

Уравнения (5.2) и (5.2') представляют собой и уравнения траектории точки в параметрической форме. Исключив из уравнений движения параметр t, можно найти уравнение в обычной форме, т.е. в виде зависимости между ее координатами.

3. Естественный способ задания движения

Применяется, когда траектория движущейся точки АВ известна. Положение точки М от начала отсчета точки О однозначно определяется зависимостью (рис. 5.2)

$$S = f(t), \qquad (5.3)$$

где S - криволинейная координата.

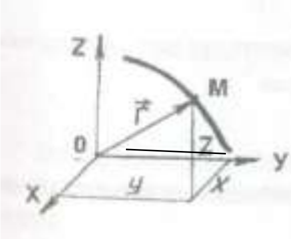


Рис. 5.1

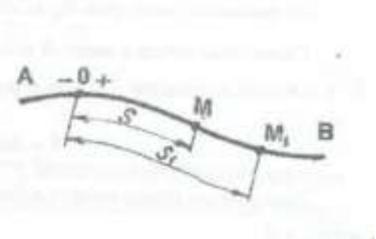


Рис. 5.2

Перемещение точки М в одну сторону считается положительным, в другую - отрицательным.

5.3. Определение скорости и ускорения при векторном способе задания движения точки

Скорость точки одна из основных характеристик движения, Пусть положение точки М в момент времени t определяется радиусом - вектором $\vec{r}$, а в момент t_1 - $\vec{r}_1$, (рис. 5.3). Тогда за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ перемещение точки будет определяться вектором $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$.

Вектор средней скорости равен отношению вектора перемещения к промежутку времени, за который это перемещение произошло:

$$\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

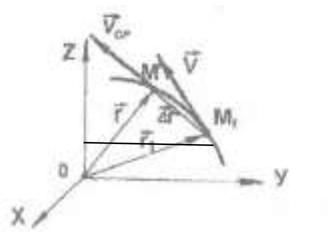


Рис. 5.3

Направление векторов $\vec{V}_{\text{ср}}$ и $\Delta\vec{r}$ одинаково.

Скоростью точки в данный момент времени называется векторная величина $\vec{V}$, к которой стремится $\vec{V}_{\text{ср}}$ при стремлении Δt *к* нулю:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Этот предел представляет собой первую производную от вектора $\vec{r}$ по времени *t*, т.е.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{5.4}$$

Вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса - вектора точки по времени.

Направлен вектор скорости по касательной к траектории, т.к. пределом секущей MM_1 является касательная. Размерность скорости в системе СИ, м/с.

Ускорение точки характеризует изменение скорости с течением времен; Пусть $\vec{V}$ - скорость в момент времени t, а $\vec{V}_1$; - скорость в момент времени t_1. Тогда за $_\Delta t = t_1 - t$ скорость изменяется на $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$ (рис.5.4).

Вектор среднего ускорения равен:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}.$$

Направлен вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$ по направлению $\Delta\vec{V}$, т.е. всегда в сторону вогнутости траектории (рис. 5.4)

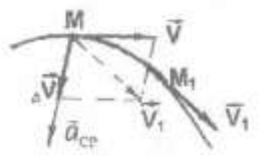


Рис. 5.4

Ускорением точки в данный момент времени называется векторная величина $\vec{a}$, к которой стремится в пределе среднее ускорение при стремлении $_\Delta t$ к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt},$$

С учетом уравнения (5.4)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (5.5)$$

<u>Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса - вектора точки по времени.</u>

Направлен вектор $\vec{a}$ в сторону вогнутости траектории в соприкасающейся плоскости, т.к. в пределе точка M_1 стремиться к точке М.

Размерность ускорения в системе СИ, м/с^2.

5.4. Скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения

Для определения скорости точки спроектируем векторное уравнение (5.4) на координатные оси, получим:

$$V_x = \frac{dr_x}{dt} = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}, V_z = \frac{dz}{dt}. \quad (5.6)$$

Проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Модуль скорости через ее проекции на координатные оси

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (5.7)$$

Направление скорости найдем по направляющим косинусам

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V}, \cos\beta = \frac{V_y}{V}, \cos\gamma = \frac{V_z}{V}. \quad (5.8)$$

Ускорение точки определяется аналогично скорости из уравнения (5.5).

Проекции ускорений на координатные оси

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (5.9)$$

Проекции ускорений на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени.

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (5.10)$$

Направление ускорения

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \cos\gamma = \frac{a_z}{a}. \quad (5.11)$$

5.5. Скорости и ускорения при естественном задании движения точки

При естественном способе задания движения точки траектория известна, поэтому в качестве системы отсчета принимается не произвольная Oxyz декартова система координат (в которой траекторию надо определять и строить), а оси естественного (скоростного) трехгранника $M\tau nb$, которые перемещаются вместе с движущейся точкой. Ось τ направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния; ось n - по нормали к траектории в соприкасающейся плоскости (в плоскости кривой, если кривая плоская), ось b - перпендикулярна к первым двум. Эти оси называются: касательная, главная нормаль, бинормаль.

Скорость точки направлена по касательной к траектории и определяется только одной проекцией V_τ, на ось M_τ. Следовательно, V_τ совпадает по модулю с V и может отличаться знаком минус (при замедленном движении).

Найдем ее значение. Пусть за промежуток времени $_\Delta t = t_1 - t$ тело совершит перемещение по траектории $\Delta S = S_1 - S$ (рис. 5.2). Тогда средняя скорость $V_{\text{ср}} = \Delta S/ {_\Delta t}$ и в пределе получим

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ или } V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}. \quad (5.12)$$

Скорость точки в данный момент времени равна первой производной от криволинейной координаты S по времени.

Ускорение точки при естественном способе задания движения определяется через проекции на оси τ и n. Проекции ускорения на бинормаль $a_b = 0$, т.к. вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости. Из параграфа (5.2) вектор ускорения

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}}{\Delta t}.$$

В проекциях на оси τ и n получим (рис. 5.5):

$$a_\tau = \frac{V_1 \cdot \cos \Delta\varphi - V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}_1 - \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{dV}{dt},$$

так как $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \cos \Delta\varphi = 1$..

$$a_n = \frac{V_1 \cdot \sin \Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_1 \cdot \sin \Delta\varphi \cdot \Delta S \cdot \Delta\varphi}{\Delta S \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta t} = \frac{V^2}{p},$$

так как $\Delta t \to 0$ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = V, \lim V_1 = V, \lim \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1, \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{1}{p}$.

Окончательно, с учетом уравнения (5.12), будем иметь:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}. \tag{5.13}$$

$$a_n = \frac{V^2}{p}. \tag{5.14}$$

<u>Проекция ускорения на касательную ось (касательное ускорение) равно первой производной от скорости или второй производной от криволинейной координаты по времени. Проекция ускорения на главную нормаль (нормальное ускорение) равно квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории.</u>

На рис. 5.6 изображены векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Вектор $\vec{a}_n$ по величине из уравнения (5.14) всегда положителен и направлен по главной нормали в сторону вогнутости кривой.

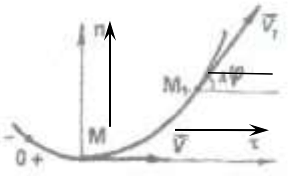


Рис. 5.5

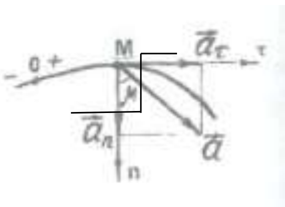


Рис. 5.6

Вектор $\vec{a}_\tau$ может быть и положительным и отрицательным в зависимости от знака проекции (уравнение 5.13). Из рис. 5.6 видно, что $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, т.е. полное ускорение точки определяется диагональю параллелограмма, стороны которого a_τ и a_n.

По величине ускорение точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\frac{dV}{dt})^2 + (\frac{V^2}{p})^2}. \tag{5.15}$$

Направление вектора к нормали определяется углом μ.:

$$tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}. \tag{5.16}$$

5.6. Частные случаи движения точки

Приведенные результаты позволяют рассмотреть некоторые частные случаи движения.

1.Прямолинейное движение

При движении по прямой радиус кривизны траектории $p = \infty$. Следовательно, $a_n = \frac{V^2}{p}$=0 и полное ускорение равно только касательному:

$$a= a_\tau = \frac{dV}{dt}. \tag{5.17}$$

Так как в данном случае скорость изменяется только по величине, то заключаем, что касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине.

2.Криволинейное движение

2.1 Криволинейное равномерное движение

Криволинейное равномерное движение характеризуется тем, что величина скорости все время остается постоянной: V=const. По уравнению (5.13) $a_\tau = \frac{dV}{dt}$. Тогда полное ускорение равно только нормальному ускорению:

$$a = a_n = \frac{V^2}{p}. \tag{5.18}$$

Вектор $\vec{a} = \vec{a}_n$ направлен все время по нормали к траектории. Так как в данном случае ускорение появляется за счет изменения траектории, то заключаем, что нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Найдем закон этого движения. Из формулы (5.12) $dS = V \cdot dt$. Возьмем определенные интегралы от левой и правой частей равенства в пределах изменения переменных. После преобразований получим

$$\int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t V \cdot dt\,, S = S_0 + Vt, \qquad (5.19)$$

где S_0 - расстояние от начала отсчета при $t = 0$ (начальная криволинейная координата).

Если $S_0 = 0$, то расстояние, пройденное за время *t*, будет пропорционально времени, а скорость равна отношению пути ко времени:

$$S = V \cdot dt, V = \frac{s}{t}. \qquad (5.20)$$

2.2. Криволинейное равнопеременное движение

При равнопеременном движении касательное ускорение $a_\tau = const$. Тогда скорость будет изменяться от V_0 при $t = 0$ до текущего значения V. Из уравнения (5.13) $dV = a_\tau \cdot dt$. Беря определенные интегралы от обеих частей равенства в пределах изменения переменных, получим после преобразования:

$$V = V_0 + a_\tau t. \qquad (5.21)$$

Закон этого движения определяется из уравнения (5.21), которое можно записать в следующем виде:

$$V = \frac{dS}{dt} \text{ или } dS = (V_0 + a_\tau t)dt.$$

Беря определенные интегралы от обеих частей равенства в пределах изменения переменных, получим

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a\tau^2}{2}. \qquad (5.22)$$

Если при движении $a_\tau > 0$, то скорость возрастает и движение будет ускоренное; если $a_\tau < 0$, то скорость убывает и движение будет замедленное.

Примечание. Формулы (5.20,..,5.22) могут быть использованы и для прямолинейного равномерного и равнопеременного движений.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА К1

Движение точки в плоскости xOy задано уравнениями $x = f_1(t), y = f_2(t)$.

Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки в момент времени $t = t_1$, а также ее нормальное, касательное ускорения и радиус кривизны траектории в этот момент времени.

Показать на рисунке вид траектории, положение точки в момент времени $t = t_1$, скорость точки, ее ускорения полное, нормальное и касательное.

Данные для различных вариантов сведены в таблицу К1.

Пример решения задачи К1 для варианта 10.

РЕШЕНИЕ: Из таблицы К1 движение точки задано уравнениями:

$$x = 3t, \qquad (1)$$

$$y = t^2 - 6. \qquad (2)$$

Таблица К1

Предпоследняя цифра шифра	*№ варианта*	$f_1(t)$, *м*	$f_2(t)$, м	*t*, *с*
0	0	10t-sin(10t)	l-cos(10t)	0
0	1	2cos(πt/4)	3sin(πt/4)	0
0	2	$4t^2$	6t	1
0	3	300t	$400t-5\ t^2$	0
0	4	$4t^2+l$	8t	2
0	5	10t-0,6sin(20t)	0,5-0,6cos(20t)	0
0	6	2t	$t-3t^2$	0,5
0	7	400t	$1960-490t^2$	0
0	8	10t-cos(10t)	l-sin(10t)	0
0	9	2cos2(πt)	2sin(πt)	0,5
1	0	4sin(πt)	cos(πt)	0
1	1	t^2	2t-l	1
1	2	2t	$3t^2$	0,5
1	3	$4t^2+1$	12t-3	1
1	4	5t-cos(5t)	l-sin(5t)	π/10
1	5	2sin(πt/2)	cos(πt/2)	0
1	6	$6t^2$	2t-l	0
1	7	cos(πt2/4)	sin(πt2/4)	1
1	8	3cos(πt)	1,5sin(πt)	0,5
1	9	$2t^2$	4t	1
2	0	cos(πt2/4)	$\sin(\pi t^2/4)$	2
2	1	3sin(πt)	2cos(πt)	1
2	2	2cos(πt)	2sin(πt)	2
2	3	2sin(πt/4)	2cos(πt/4)	3
2	4	$20t^2+5$	$15t^2-3$	1
2	5	$4t-2t^2$	$1,5\ t^2-3t$	1
2	6	20t	$245-49t^2$	1
2	7	2cos2(πt)	2sin2(πt)	2
2	8	$2t^2$	4t-l	1/4
2	9	5cos2(πt/4)	2sin2(πt/4)	1

3	0	10t	20t-5t2	1
3	1	2sin(πt/2)	3cos(πt/2)	2
3	2	t^2-6t	2,5t	2
3	3	5+3cos(πt/2)	4sin(πt/2)	1
3	4	10t	$5t^2$	1
3	5	75cos(πt/2)	75sin(πt/2)	2
3	6	2cos(πt/2)	2sin(πt/2)	0,5
3	7	$4t^2$+l	8t-2	1
3	8	4sin(πt/2)	2cos(πt/2)	1
3	9	cos(πt^2)-l	sin(πt^2)+2	1
4	0	2-3cos(π/6)	12sin(πt/6)	1
4	1	3+4cos(πt^2)	2+5sin(πt^2)	1,5
4	2	2cos(πt^2)	cos(πt^2)	0,5
4	3	9,8t	9,8-4,9t^2	1
4	4	2sin(2t)	4cos(2t)	π/6
4	5	3cos(πt/2)	2sin(πt/2)	0,5
4	6	2-3sin(πt/6)	-4-6cos(πt/6)	1
4	7	3t	1-t^2	1
4	8	$4t^2$	8t+2	1
4	9	6cos(πt/6)-3	3-8sin(πt/6)	1
5	0	9sin(πt/6)-4	6cos(πt/6)-3	1
5	1	4sin(πt/2)	cos(πt/2)	0,5
5	2	9cos(πt/6)+5	2-3sin(πt/6)	1
5	3	2+cos(πt2/4)	3-sin(πt2/4)	1
5	4	0,5sin(πt/4)	5cos2(πt/4)	0,5
5	5	4-2t	2-2t^2	1
5	6	$2t^2$+2	2-t	
5	7	$2t^2$	4t	1
5	8	cos(πt2/4)	sin(πt2/4)	2
5	9	3sin(2πt)	2cos(2πt)	1
6	0	2cos(πt/2)	2sin(πt/2)	2
6	1	2sin(πt/4)	2cos(πt/4)	3
6	2	$20t^2$+5	$15t^2$-3	1
6	3	2-3t^2	2-t	1
6	4	$2t^2$+2	4-2t	1
6	5	2+cos(πt/4)	2-2sin(πt/4)	1

6	6	8sin(πt/4)	t-4	1
6	7	$2\text{-}3t^2$	2t	1
6	8	t-4	2cos(πt/4)!	1
6	9	$(2+t)^2$	t-4	1
7	0	8sin(πt/6)-2	9cos(πt/6)-3	1
7	1	12sin(πt/6)	-10cos(πt/6)	1
7	2	4-6sin(πt/3)	8-12cos(πt/3)	1
7	3	$4t\text{-}2t^2$	$1{,}5t^2\text{-}3t$	1
7	4	4cos(πt/6)	3-8sin(πt/6)	1
7	5	2-3cos(πt/6)	12sin(πt/6)	1
7	6	$6\ t^2$	t+2t	1
7	7	3sin(πt)	1.5cos(πt)	1
7	8	$4t^2\text{-}l$	8t	1
7	9	10t-0,6sin(20t)	0,5-0,6cos(20t)	π/40
8	0	2t	$t\text{-}3t^2$	1/6
8	1	$6t^2+t$	2t	1
8	2	8sm(πt/6)-2	3cos(πt/6)	1
8	3	4-6sin(πt/3)	6-8cos(πt/3)	1
8	4	2t	2+2cos(πt/4)	1
8	5	2-t	$2\text{-}t^2$	1
8	6	4-2t	4cos(πt/4)	1
8	7	t-4	8sin(7π/4)	1
8	8	4cos(πt/6)-2	12sin(πt/6)	1
8	9	4cos(πt/6)	4-6sm(πt/6)	1
9	0	$(t+1)^3$	4-2t	1
9	1	$2\text{-}t^2$	2t	1
9	2	$2t^3$	t-4	1
9	3	-4cos(πt/6)	8sin(πt/6)-2	1
9	4	9sin(πt/3)+5	6cos(πt/3)-3	1
9	5	3-8sin(πt/6)	4cos(πt/6)	1
9	6	2+2cos(πt/4)	2-t	1
9	7	$2\text{-}3t^2$	4-2t	1
9	8	5+9sin(πt/6)	2-3cos(πt/6)	1
9	9	$(2+t)^2$	2t	1
	10	3t	$t^2\text{-}6$	2

Уравнение траектории найдем совместным решением уравнений (1) и (2) исключения из них времени t.

Из уравнения (1) $t = \frac{x}{3}$. Подставляя это значение времени в уравнение (2), получим уравнение траектории точки:

$$Y = \frac{x^2}{9} - 6. \qquad (3)$$

Из уравнения (3) следует, что траектория точки - часть параболы, изображенной на рисунке К1.

При t=2c, x=6, y=-2, (точка М, рис. К1).

Скорость точки определяется по ее проекциям на координатные оси:

При t=2c, Vx=3, Vy=4, $V = \sqrt{9+16} = 5$м/с.

Показываем вектор скорости на рисунке К1 в соответствующем масштабе. Ускорение точки так же, как и скорость, определяется по его проекциям на координатные оси:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d(3)}{dt} = 0, a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2,\; a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2^2} = 2.$$

При t=2c, $a_x = 0$, $a_y = 2$, $a = 2$м/с^2.

Показываем ускорение на рисунке К1 в масштабе.

Для определения нормального, касательного ускорений и радиуса кривизны траектории точки используем естественный способ задания движения точки, согласно которому полное ускорение

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Тогда нормальное ускорение $a_n = \sqrt{a - a_\tau^2}$.

Касательное ускорение $a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\sqrt{9+4t^2}}{dt} = \frac{8t}{2\sqrt{9+4t^2}}$;

При t=2c, $a_\tau = \frac{16}{2\sqrt{9+16}} = \frac{10}{16} = 1{,}6$ ì / ñ^2

следовательно, $a_n = \sqrt{2^2 - 1{,}6^2} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$м/с^2.

Так как $a_n = \frac{V^2}{p}$, то радиус кривизны траектории $p = \frac{V^2}{a_n}$.

При t=2c, $p = \frac{5^2}{1{,}2} = 20{,}83$м.

Показываем нормальное и касательное ускорения на рисунке К1. Ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по касательной к траектории. Т.к. при t=2c a_τ имеет положительный знак, то направление его совпадает с направлением скорости. Ускорение $\vec{a}_n$ перпендикулярно $\vec{a}_\tau$ и направлено к центру кривизны траектории.

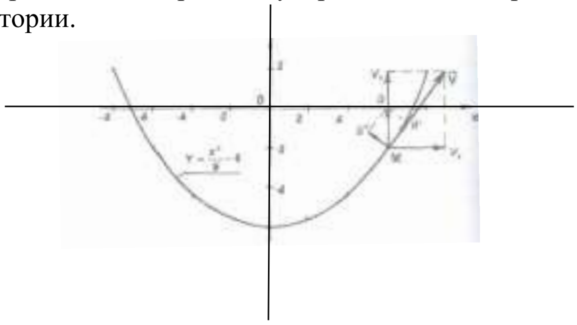


Рис. К1

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Способы задания движения материальной точки.
2. Определение скоростей и ускорений при векторном способе задания движения.
3. Определение скорости и ускорения при координатном способе задания движения.
4. Определение траектории и радиуса кривизны траектории при координатном способе задания движения.
5. Определение скорости при естественном способе задания движения.
6. Касательное и нормальное ускорения.
7. Закон равномерного движения.
8. Равнопеременное движение. Закон движения и закон изменения скорости при равнопеременном движении.

Глава 6

Поступательное и вращательное движение твердого тела

6.1. Поступательное движение

В кинематике твердого тела для каждого вида движений решаются три задачи:

1) задание движения тела;
2) определение кинематических характеристик тела в целом;
3) определение кинематических характеристик отдельных точек тела.

Рассмотрим поступательное движение. Поступательным называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно самой себе.

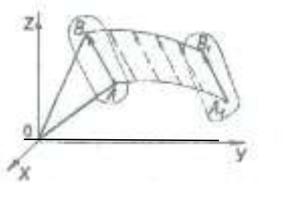


Рис. 6.1

Свойство этого движения определяется теоремой: при поступательном движении все точки тела движутся по одинаковым траекториям, имеют одинаковые скорости и ускорения.

Рассмотрим твердое тело, движущееся поступательно относительно Oxyz (рис. 6.1). Возьмем произвольно две точки A и B, радиусы - векторы которых $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ соответственно. Тогда из векторного треугольника ΔOAB

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + AB. \tag{6.1}$$

Вектор AB=const по определению поступательного движения. Тогда траектория BB_1 точки B получается смещением траектории AA_1 точки A на постоянную величину AB, следовательно, эти траектории одинаковы.

Продифференцируем равенство (6.1) по времени. Учитывая, что $dAB/dt = 0$, т.к. AB=const, получим

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \text{ или } \vec{V}_B = \vec{V}_A. \tag{6.2}$$

Беря вторые производные по времени, получим

$$\frac{d^2\vec{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} \text{ или } \vec{a}_B = \vec{a}_A. \tag{6.3}$$

Следовательно, скорости и ускорения точек A и B одинаковы. Так как точки A и B выбраны произвольно, то из полученных результатов следует, что у всех точек тела их траектории, скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы.

Из теоремы следует, что поступательное движение тела вполне определяется движением какой-либо одной из его точек и сводится к задачам кинематики точки, рассмотренным в главе V. Скорость и ускорение любой точки являются общими для всего тела.

6.2. Вращение вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение

Вращением вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором какие-либо две точки тела (или неизменно связанные с ним) остаются неподвижными во все время движения.

Прямая, проходящая через неподвижные точки A и B, называется осью вращения.

Найдем закон вращательного движения. Проведем через ось вращения Z неподвижную I и подвижную II, жестко связанные с телом, полуплоскости.

Положение тела (полуплоскость II) относительно неподвижной полуплоскости I в любой момент времени будет определяться углом вращения - φ. Условимся считать $\varphi > 0$, если тело совершает поворот против хода стрелки часов (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси) и $\varphi < 0$, если - по ходу часовой стрелки. Размерность угла поворота - радиан. Изменение угла вращения φ от времени

$$\varphi = f(t) \tag{6.4}$$

и выражает закон вращательного движения.

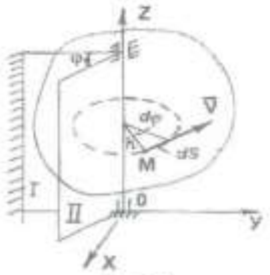


Рис. 6.3.

Основные кинематические характеристики вращения: угловая скорость φ и угловое ускорение ε.

Если за время $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то средняя угловая скорость $\omega = \Delta\varphi / \Delta t$. В пределе получим

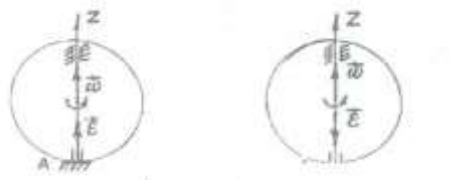
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{6.5}$$

Угловая скорость тела в данный момент времени равна первой производной от угла поворота по времени. Знак ω определяется направлением вращения тела. Размерность угловой скорости рад/с или 1/с ($с^{-1}$).

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\vec{\omega}$, величина которого равна $d\varphi/dt$ и который направлен вдоль оси вращения в сторону, откуда поворот виден против хода стрелки часов (рис. 6.3). Такой вектор сразу определяет и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости с течением времени. Если за время $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость изменяется на величину $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то среднее угловое ускорение $\varepsilon_{ср} = \Delta\varphi / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \to 0$ найдем, с учетом равенства (6.5), что

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \tag{6.6}$$



а) б)

Рис. 6.3

Угловое ускорение тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени. Размерность углового ускорения рад/с^2 или 1/с^2(с$^{-2}$). Угловое ускорение тела (как и угловую скорость) можно изобразить в виде вектора $\vec{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения. При этом вектор $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$, если вращение ускоренное (рис. 6.3а) и противоположно вектору ω при замедленном вращении (Рис. 6.3б).

6.3. Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Рассмотрим произвольную точку М, находящуюся на расстоянии h от оси вращения (рис. 6.2). Точка М будет описывать окружность радиуса h, перпендикулярно оси вращения. За время dt тело повернется на угол $d\varphi$, при этом точка М по своей траектории переместится на $dS = h \cdot d\varphi$. Тогда величина скорости по уравнению (5.12) будет равна

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{h \cdot d\varphi}{dt} \text{ или } V = h \cdot \omega. \qquad (6.7)$$

Скорость любой точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости тела на расстояние этой точки до оси вращения.

Для определения ускорения точки М воспользуемся формулами (5.13) и (5.14). Касательное ускорение, с учетом уравнения (6.7), будет равно

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = h\frac{d\omega}{dt} \text{ или } a_\tau = h \cdot \varepsilon. \qquad (6.8)$$

Нормальное ускорение, учитывая, что p=h, равно:

$$a_n = \frac{V^2}{h} = \frac{h^2\omega^2}{h} \text{ или } a_n = h\omega^2. \qquad (6.9)$$

Вектор касательного ускорения точки М (рис. 6.4) будет направлен по касательной к траектории (окружность радиуса СМ) в сторону направления углового ускорения. Вектор нормального ускорения - по нормали МС к оси вращения.

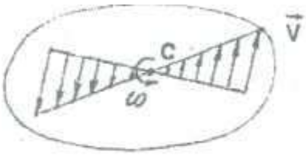
Полное ускорение точки М

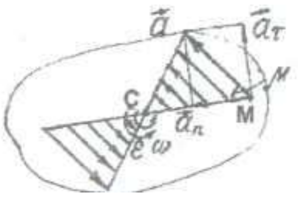
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \text{ или } a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}. \qquad (6.10)$$

Направление вектора ускорение a к нормали определяется углом μ:

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} \text{ или } tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \qquad (6.11)$$

Так как ω и ε для всех точек в данный момент времени одинаковы, то из уравнений (6.7...6.10) следует, что скорости (рис. 6.4а) и ускорение (рис.6.4б) пропорциональны их расстояниям до оси вращения.





а) б)

Рис. 6.4

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА К2

Зная закон движения груза В $x = f(t)$, определить в момент времени t, угловую скорость и угловое ускорение колеса III, а также скорость и ускорение конца А рукоятки.

Данные для различных вариантов сведены в таблицу К2.

Пример решения задачи К2 да варианта 10.

РЕШЕНИЕ: Груз В опускается по закону $x = 0{,}02t^2$, длина рукоятки ОА равна 0,8м. Найти угловую скорость и угловое ускорение колеса I, а также скорость и ускорение конца рукоятки ОА в момент времени $t = 5$с. Радиусы колес $r_1 = 0{,}5$м, $r_2 = 1$м, $r_3 = 0{,}2$м.

Зная закон движения $x = 0{,}02t^2$, определим его скорость:

$$V_B = \frac{dx}{dt} = \frac{d(0{,}02t^2)}{dt} = 0{,}04t.$$

При $t = 5\text{с}, V_B = 0{,}04 \cdot 5 = 0{,}2\text{м/с}.$

Угловая скорость колеса II

$$\omega_{II} = \omega_{III} = \frac{V_B}{r_3} = \frac{0{,}04\text{t}}{0{,}2} = 0{,}2t$$

Угловую скорость колеса I и рукоятки ОА определим через скорость точки С, общей для колес II и I.

Скорость точки С (рис. К2.10) на основании уравнения (6.7) будет равна:

$V_C = \omega_{II} \cdot r_2 = \omega_I \cdot r_1.$

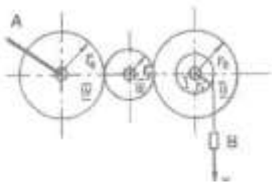
Следовательно,

$$\omega_I = \omega_{OA} = \frac{\omega_{II} \cdot r_2}{r_1} = \frac{0{,}2t \cdot I}{0{,}5} = 0{,}4t.$$

При $t = 5\text{с}, \omega_1 = \omega_{OA} = 0б4 \cdot 5 = 2c^{-1}.$

Таблица К2

№ варианта	*x=f(t), м*	*Длина рукоятки ОА, м*	r_1, *м*	r_2, *м*	r_3, *м*	r_4, *м*	t_1, *с*
0	$10t^2$+t	0,3	0,1	0,2	0,25	0.15	2
1	$5t^3$	0,25	0,2	0,3	0,15	0.1	5
2	$2(t^2+2t)$	0,4	0,2	0,5	0,4	0.2	1
3	$10t^2$	0,5	0,3	0,5	0,15	0.4	2
4	$10(t^3+6t^2)$	1,0	0,5	0,8	0,4	0.5	1
5	$20(t^2$-t)	2,0	0,5	1,0	0,4	0.8	2
6	$20t^2$	0,8	0,4	0,6	0,3	1.0	3
7	$5(t^3+2t^2)$	1,0	1,0	1,2	0,5	0.7	4
8	$4t^3$	0,7	1,2	1,5	0,8	1,0	3
9	$10(t^2$+t)	0,9	0,6	1,0	0,4	0.7	1
10	$0{,}02t^2$	0,8	0,5	!,0	0,2	-	5



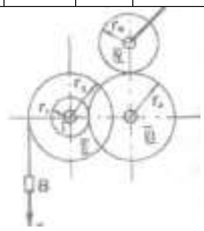


Рис. К2.0-К2.1 Рис. К2.2-К2.3

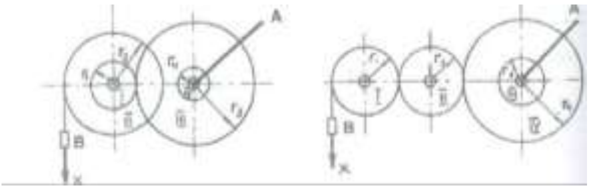


Рис. К2.4-К2.5 Рис. К2.6-К2.7

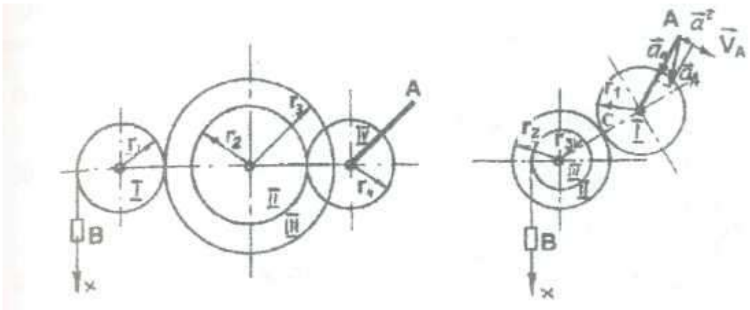


Рис. К2.8-К2.9 Рис. К2.10

Угловое ускорение колеса I и рукоятки OA находим по формуле:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{OA} = \frac{d\omega_I}{dt} = \frac{d(0{,}4t)}{dt} = 0{,}4\text{с}^{-2}.$$

Оно не зависит от времени и является постоянным.
Следовательно; и при . $t = 5\text{с}, \varepsilon_I = \varepsilon_{OA} = 0{,}4\text{с}^{-2}$
Скорость конца рукоятки $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 0{,}4t \cdot 0{,}8 = 0{,}32t$.
При $t = 5\text{с}, V_A = 0{,}32 \cdot 5 = 1{,}6\text{м/с}$.
11ормальное ускорение конца рукоятки OA

$$a_n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = (0{,}4t)^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}128t^2.$$

При $t = 5\text{с}, a_n = 0{,}128 \cdot 5^2 = 3{,}2\text{м/с}^2$.
Касательное ускорение:

$$a_\tau = \varepsilon_{OA} \cdot \text{OA} = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32\text{м/с}^2.$$

Полное ускорение:

$$a_A = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{3{,}2^2 + 0{,}32^2} = 3{,}22\text{м/с}^2.$$

Направление векторов $\vec{V}_A, \vec{a}_n, \vec{a}_\tau, \vec{a}_A$ показаны на рисунке К2.10.

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Поступательное движение и способы его задания.
2. Определение скоростей и ускорений при поступательном движении твердого тела.
3. Закон вращения относительно неподвижной оси.
4. Угловая скорость и угловое ускорение.
5. Определение скоростей и ускорений отдельных точек при вращении.
6. Равномерное и равнопеременное вращения. Законы этих движений.
7. Зависимость между угловой скоростью и числом оборотов в минуту.

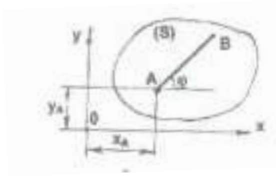
Глава 7

Плоскопараллельное движение твердого тела

7.1. Уравнения плоскопараллельного движения. Разложение на поступательное и вращательное

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Из определения следует, что для изучения плоскопараллельного движения тела достаточно рассматривать любое его сечение, параллельное неподвижной плоскости.



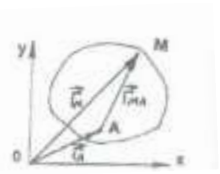


Рис. 7.1.   Рис. 7.2

Положение тела (или его сечения S) определяется положением какого-либо отрезка АВ (рис. 7.1). В свою очередь, отрезок АВ может быть задан координатами точки А (x_A, y_A) и утлом φ, который отрезок образует с осью x. Следовательно закон плоскопараллельного движения определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} x_A &= f_1(t), \\ y_A &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Точка А, при помощи которой определяется положение тела (сечения), называется полюсом. За полюс может быть принята любая точка тела, но обычно выбираются характерные (центр тяжести, конец отрезка и т.п.).

Первые два из уравнений (7.1) определяют поступательное движение, которое совершалось бы при $\varphi = const$. Третье уравнение определяет вращательное движение, когда $x_A = const$, $y_A = const$, т.е. когда полюс А неподвижен. Отсюда следует, что <u>плоское движение складывается из поступательного, при котором все точки движутся, как полюс А, и вращательного вокруг выбранного полюса.</u>

7.2. Определение скоростей отдельных точек плоской фигуры

Плоское движение состоит из двух простых движений: поступательного, при котором все точки движутся со скоростью полюса, и вращательного движения вокруг этого полюса. Докажем, что скорость любой точки геометрически складывается из скоростей, которые она получает в каждом из этих движений. Пусть $\vec{r}_A$ – радиус - вектор полюса (точки А), $\vec{r}_M$ – радиус - вектор произвольной точки М, $\vec{r}_{MA}$ – радиус - вектор, который определяет положение точки М относительно точки А (рис. 7.2).

Из векторного треугольника *OAM*

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_{MA}$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{MA}}{dt}.$$

С учетом уравнения (5.4), будем иметь:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}, \tag{7.2}$$

где $\vec{V}_M$ и $\vec{V}_A$ - векторы скоростей произвольной точки М и полюса А относительно начала координат. $\vec{V}_{MA}$ - вектор скорости точки М при ее вращении относительно полюса А. По модулю

$$V_{MA} = \omega \cdot MA, \tag{7.3}$$

по направлению $\vec{V}_{MA} \perp MA$.

Скорость любой точки М при плоскопараллельном движении геометрически складывается из скорости какой-либо другой точки А, принимаемой за полюс, и скорости, которую получает точка М при вращении тела вокруг этого полюса. Модуль и направление $\vec{V}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 7.3).

При решении практических задач уравнение (7.2) обычно не используется, т.к. это связано с довольно сложными расчетами. Однако этот результат дает два сравнительно простых способа определения скоростей отдельных точек, которые и применяются в инженерных расчетах.

1-й способ дает теорема: проекции скоростей любых двух точек на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.

Рассмотрим какие-либо две точки С и М плоской фигуры (рис. 7.3).

Примем точку С за полюс. Тогда по уравнению (7.2) $\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{MC}$. Проектируя обе части этого равенства на прямую МС и учитывая, что $\vec{V}_{MC} \perp MC$, получим

$$V_M \cos\beta = V_C \cos\alpha, \tag{7.4}$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема позволяет легко находить скорость любой точки тела, если известно ее направление и скорость какой-либо другой точки этого же тела.

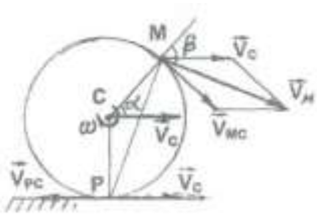


Рис. 7.3

2-й способ: определение скорости любой точки при помощи мгновенного центра скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется такая точка в плоскости фигуры, скорость которой в данный момент времени рана нулю. Легко убедиться, что при плоскопараллельном движении такая точка существует и в каждый момент времени и притом единственная. Из рисунка 7.4 видно, что перпендикуляры, проведенные из точек А и В к направлениям их скоростей, пересекаются в точке $P(V_P = 0)$, которая и является мгновенным центром скоростей (МЦС) тела в данный момент времени.

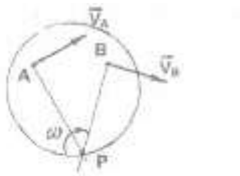


Рис. 7.4

Если точку *P* принять за полюс, то по уравнению (7.2)

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP} = \vec{V}_{AP},$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP} = \vec{V}_{BP}. \tag{7.5}$$

Скорость любой точки при плоском движении равна ее скорости при вращении тела относительно мгновенного центра скоростей.

По модулю

$$V_A = V_{AP} = \omega \cdot AP,$$

$$V_B = V_{BP} = \omega \cdot BP.$$

Откуда следует, что

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \omega. \tag{7.6}$$

Скорости точек тела при плоском движении пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей. А также: угловая скорость тела равна отношению скорости любой точки к ее расстоянию до мгновенного центра скоростей.

Найдем другое выражение для ω. Из равенств (7.2) и (7.3) следует, что по абсолютной величине

$|V_{MA}| = |V_M - V_A|$ и $V_{MA} = \omega \cdot MA$.

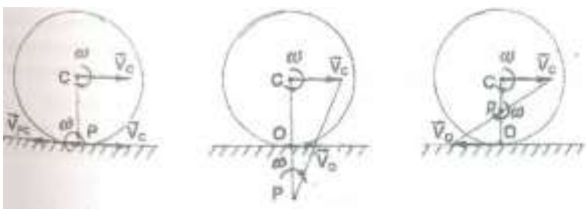
Тогда

$$\omega = \frac{|V_M - V_A|}{MA}. \tag{7.7}$$

Если $V_A = 0$ (точка А - мгновенный центр скоростей), то формула (7.7) переходит в (7.6).

Рассмотрим частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

1. Пусть колесо движется без скольжения и буксования (рис. 7.5а) со скоростью центра V_C



а) без скольжения и буксования

б) со скольжением

в) с буксованием

Рис. 7.5

Нетрудно видеть, что колесо совершает плоскопараллельное движение, состоящее из поступательного, когда все точки движутся со скоростью полюса V_C и вращательного вокруг полюса С. Точка контакта колеса с неподвижной поверхностью P имеет скорость $V_P = V_C - V_{PC} = 0$ и является мгновенным центром скоростей. Угловая скорость по уравнению (7.5).

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_C}{R}, \tag{7.8}$$

т.е. движение колеса можно представить и как вращение в данный момент вокруг точки P с той же угловой скоростью ω.

2. Колесо движется со скольжением. Скорость центра колеса V_C скорость точки контакта $V_O < V_C$ (рис. 7.5б).

Для определения мгновенного центра скоростей проводим из точек С и О перпендикуляры к направлениям скоростей. Они не пересекаются, а совпадают по направлению. В этом случае МЦС находится построением (рис. 7.5б). Угловая скорость на основании уравнений (7.6) или (7.7):

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_O}{OP} \text{ или } \omega = \frac{V - V_O}{R}. \tag{7.9}$$

Примечание:

1) при $V_0 \succ V_c$ мгновенный центр скоростей будет расположен выше центра колеса;

2) при $V_O = V_C$ мгновенный центр скоростей находится в ∞. Имеет место мгновенно-поступательное движение, при котором

$\omega = \frac{V_C}{\infty} = 0.$

3. Колесо движется с буксованием. Скорость центра V_C, скорость точки контакта $(-V_O)$. Перпендикуляры из точек С и О к направлениям скоростей не пересекаются (накладываются друг на друга). Положение мгновенного центра скоростей находится построением (рис. 7.5в). Угловая скорость

$$\omega = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_O}{OP} \text{ или } \omega = \frac{V_C - (-V_O)}{R} = \frac{V_C + V_O}{R}. \tag{7.10}$$

7.3. Определение ускорений отдельных точек тела

Ускорение, так же как и скорость, любой точки тела геометрически складывается из ускорений, которые получает точка при поступательном и вращательном движениях этого тела. Для доказательства возьмем первую производную от левой и правой частей уравнения (7.2):

$$\frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{\vec{V}_{MA}}{dt}.$$

В полученном выражении: $\frac{d\vec{V}_M}{dt} = \vec{a}_M$ - вектор ускорения произвольной точки М, $\frac{d\vec{V}_A}{dt} = \vec{a}_A$ - вектор ускорения полюса А, $\frac{d\vec{V}_{MA}}{dt} = \vec{a}_{MA}$ - вектор ускорения точки М при ее вращении вокруг полюса А, т.е.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}. \quad (7.11)$$

Ускорение любой точки М тела геометрически складывается из ускорения какой-либо точки, принимаемой за полюс, и ускорения точки М при ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса.

При этом вращательное ускорение вокруг полюса $\vec{a}_{MA}$ будет определяться по величине и по направлению по формулам (6.10) и (6.11):

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, tg\mu = \frac{|\epsilon|}{\omega^2}, \quad (7.12)$$

где ω и ϵ - угловая скорость и угловое ускорение тела, μ - угол между направлением $\vec{a}_{MA}$ и отрезком МА. Однако при решении задач уравнением (7.11) не пользуются, т.к. это усложняет расчеты, удобнее ускорение $\vec{a}_{MA}$. разлагать на составляющие: касательное $\vec{a}^{\tau}_{MA}$ и нормальное $\vec{a}^{n}_{MA}$.

По величине

$$a^{\tau}_{MA} = \epsilon \cdot MA, a^{n}_{MA} = \omega^2 \cdot MA. \quad (7.13)$$

Если полюс А движется по кривой, то его ускорение будет также слагаться из касательного и нормального и тогда уравнение (7.11) примет вид:

$$\vec{a}_M = \vec{a}^{\tau}_A + \vec{a}^{n}_A + \vec{a}^{\tau}_{MA} + \vec{a}^{n}_{MA}. \quad (7.14)$$

При решении задач определяются ускорения, стоящие в правой части равенства (7.14). Затем методом проекций находятся проекции ускорений точки М на оси x и y: a_{Mx} и a_{My}, Величина ускорения точки М вычисляется по формуле:

$$a_M = \sqrt{a^2_{Mx} + a^2_{My}}. \quad (7.15)$$

Направление определяется по направляющим косинусам:

$$\cos(a_M, x) = \frac{a_{Mx}}{a_M}, \text{или } \cos(a_M, y) = \frac{a_{My}}{a_M}. \qquad (7.16)$$

Графически ускорение точки $M(\vec{a}_M)$ можно определить построением векторного многоугольника согласно векторному равенству (7.14).

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА К3

Кривошипно-шатунный механизм ОАВ приводится в движение кривошипом ОА, который в рассматриваемом положении имеет угловую скорость ω и угловое ускорение ε (вращается ускоренно).

Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна АВ, скорости и ускорения точек А, В, С. Точка С находится на середине длины шатуна АВ. Длина кривошипа равна l_1. Длина шатуна АВ равна l_2.

Данные к задаче сведены в таблицу К3.

Пример решения задачи К3 для варианта 10.

<u>РЕШЕНИЕ</u>: Строим схему механизма в масштабе (рис. К3.10).

Скорость точки А определяем как скорость точки, принадлежащей ведущему звену ОА.

$V_A = \omega \cdot h = \omega \cdot OA = 2 \cdot 1 = 2$м/с.

Таблица К3

№ варианта	l_1, М	l_2, м	α, рад.	β, рад.	γ, рад.	ω, с-1	ε, с-2
0	0,4	0,6	π/6	2π/3	π/3	1	2
1	0,5	1	π/4	π/3	π/2	2	1
2	1	2	π/2	3/4π	π/6	1	3
3	0,2	0,6	π/3	5/6π	3π/2	2	5
4	2	4	π/6	π/4	0	5	4
5	0,3	0,6	π/6	π/3	π/4	3	1
6	0,8	1,6	π/4	2π/3	π/6	1	2
7	0,5	1,2	π/3	π/6	0	2	3
8	0,1	0,2	π/6	5/6π	π/4	4	3
9	0,4	0,8	π/6	π/4	π/3	2	4
10	1	2	π/3	π/6	π/3	2	1

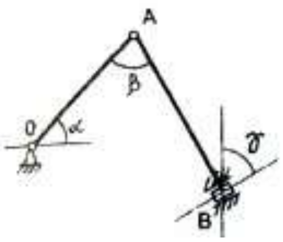


Рис. К3.0-К3.1

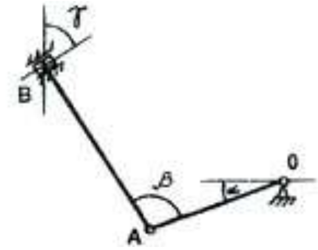


Рис. К3.2-К3.3

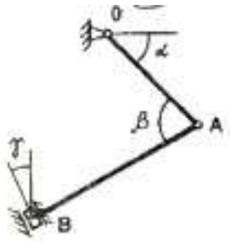


Рис. К3.4-К3.5

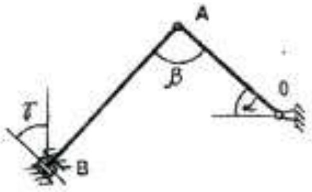


Рис. К3.6-К3.7

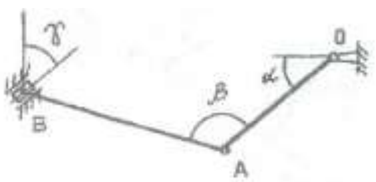


Рис.К3.8-К3.9

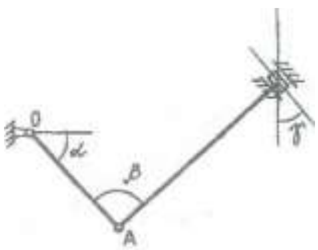


Рис. К3.10

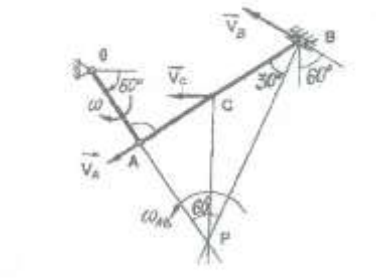


Рис. К3.11

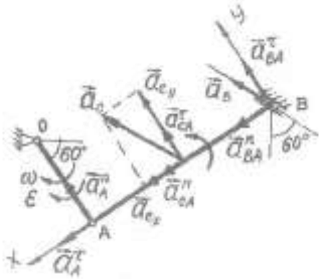


Рис. К3.12

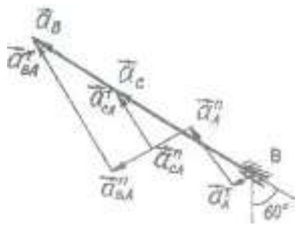


Рис. К3.13

Вектор скорости $\vec{V}_A$ направлен перпендикулярно радиусу вращения точки А в сторону ω (рис. К3.11).

Для определения скоростей точек В и С можно использовать 1-й способ (теорему о проекции скоростей двух точек) или 2-й способ (при помощи мгновенного центра скоростей), параграф 7.2. Но т.к. траектория точки С неизвестна, применим 2-й способ. Находим положение мгновенного центра скоростей (МЦС) звена АВ, совершающего плоскопараллельное движение, для чего нужно знать направление скоростей двух точек этого звена. Направление скорости точки А определено.

Вектор скорости точки В - $\vec{V}_B$ направлен по направление движению ползуна В (рис. К3.11).

МЦС - точка Р находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ (рис. К3.11).

Тогда угловая скорость звена АВ $\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP}$.

Расстояние АР вычисляем из треугольника АРВ (рис. К3.11), т.к. треугольник прямоугольный, то

$BP = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = 2/0{,}87 \approx 2{,}3$м,

тогда $\mathrm{AP} = \mathrm{BP} \cdot \sin 30^\circ = 2{,}3 \cdot 0{,}5 = 1{,}15$м. Следовательно,

$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{2}{1{,}15} = 1{,}74\text{с}^{-1}$.

Скорость точки В равна произведению ω_{AB} на расстояние точки В до МЦС:

$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 1{,}74 \cdot 2{,}3 = 4\text{м/с}$.

Скорость точки С $V_C = \omega_{AB} \cdot CP$. Из треугольника АСР

$CP = \sqrt{AC^2 + AP^2} = \sqrt{1 + 1{,}32} = 1{,}52$м.

Тогда

$V_C = 1{,}74 \cdot 1{,}52 = 2{,}64\text{м/с}$.

Скорость $\vec{V}_C$ направлена перпендикулярно прямой СР, соединяющей точку С и точку Р (МЦС).

Ускорение точки А определяем как ускорение точки, принадлежащей вращающемуся звену ОА.

Так как звено ОА вращается неравномерно, точка А будет иметь нормальное и касательное ускорения.

Нормальное ускорение точки А

$a_A^n = \omega^2 \cdot h = \omega^2 \cdot OA = 4 \cdot 1 = 4\text{м/с}^2$.

Вектор $\vec{a}_A^n$ направлен к центру вращения О (рис. К3.12).

Касательное ускорение точки А

$a_A^\tau = \varepsilon \cdot h = \varepsilon \cdot AB = 1 \cdot 1 = 1\text{м/с}^2$.

Вектор $\vec{a}_A^\tau$ направлен перпендикулярно нормальному $\vec{a}_A^n$ в сторону углового ускорения ε (рис. К3.12).

Ускорение точки В определяется как ускорение точки, принадлежащей звену АВ, совершающему плоскопараллельное движение. Оно равно геометрической сумме ускорения точки, принятой за полюс, и ускорения точки В при ее вращении вокруг полюса. За полюс принимаем точку А, т.к. ее ускорение известно.

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}$.

Так как $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$; $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$, то

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \quad (1)$$

Находим численное значение ускорений $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ и $\vec{a}_{BA}^{n}$. Нормальное ускорение точки В при ее вращении вокруг точки А

$a_{BA}^{n} = \omega_{AB}^{2} \cdot AB = 1{,}74^{2} \cdot 2 = 6\text{м/с}^{2}$.

Касательное ускорение точки В при ее вращении вокруг точки А

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB. \qquad (2)$$

где ε_{AB} - угловое ускорение шатуна.

Для определения ε_{AB} использовать формулу:

$\varepsilon_{AB} = \frac{d\omega_{AB}}{dt}, (\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP})$

нельзя, т.к. расстояние АР с течением времени меняется и закон АР=f(t) неизвестен.

Показываем на схеме направления ускорений (рис. К3.12) $\vec{a}_{BA}^{\tau}, \vec{a}_{BA}^{n}, \vec{a}_{B}$.

Вектор $\vec{a}_{BA}^{n}$ направляем от точки В к центру вращения (полюсу А), вектор $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ - перпендикулярно вектору $\vec{a}_{BA}^{n}$, а вектор полного ускорения $\vec{a}_{B}$ - по направлению движения ползуна В, т.е. считаем, что ползун движется так же, как и точка А, ускоренно. Если при расчетах получим значение ускорения a_B , или a_{BA}^{τ} со знаком минус, значит, данное ускорение направлено противоположно указанному на схеме (рис. К3.12).

Для определения ускорений $\vec{a}_{B}$, или $\vec{a}_{BA}^{\tau}$ выбираем систему осей координат *xBy* (рис. КЗ. 12) и находим проекции векторов равенства (1) на оси координат (ось х направляем по АВ, т.к. касательное ускорение по величине неизвестно).

В проекции на ось х:

$$a_B \cos 60° = a_A^{\tau} + a_{BA}^{n}. \qquad (3)$$

В проекции на ось у:

$$a_B \cos 30° = a_A^{n} + a_{BA}^{\tau}. \qquad (4)$$

Из равенства (3)

$a_B = \frac{a_A^{\tau} + a_{BA}^{n}}{\cos 60°} = \frac{1+6}{0{,}5} = 14\text{м/с}^{2}$.

Из равенства (4)

$a_{BA}^{\tau} = a_B \cos 30° - a_A^{n} = 14 \cdot 0{,}87 - 4 = 8{,}2\text{м/с}^{2}$.

Из равенства (2)

$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{8{,}2}{2} = 4{,}1\text{м/с}^{2}$.

Таким образом, направления ускорений на схеме (рис. КЗ.12) выбрано верно.

Направление ε_{AB} совпадает с направлением касательного ускорения точки B относительно точки $A - \vec{a}_{BA}^{\tau}$.

Определяем ускорение точки C:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{CA}^{\tau} + \vec{a}_{CA}^{n}, \tag{5}$$

Находим значения нормального и касательного ускорений точки C относительно точки A:

$a_{CA}^{n} = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 1{,}74^2 \cdot 1 = 3\text{м/с}^2$.

$a_{CA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 4{,}1 \cdot 1 = 4{,}1\text{м/с}^2$.

Вектор $\vec{a}_{CA}^{n}$- направлен от C к A, вектор $\vec{a}_{CA}^{\tau}$ - перпендикулярно $\vec{a}_{CA}^{n}$ в сторону углового ускорения ε_{AB}.

Проекции равенства (5) на оси координат (рис. К3.12):

$a_{Cx} = a_A^{\tau} + a_{CA}^{n} = 1 + 3 = 4\text{м/с}^2$.

$a_{Cy} = a_A^{n} + a_{CA}^{\tau} = 4 + 4{,}1 = 8{,}1\text{м/с}^2$.

Полное ускорение точки C

$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = \sqrt{16 + 65{,}61} = \sqrt{81{,}61} = 9{,}03\text{м/с}^2$.

Направлен вектор $\vec{a}_C$ как показано на схеме (рис. К3.12).

Для проверки решения можно в масштабе построить многоугольник ускорений для точек B и C, согласно векторным равенствам (1) и (5). На рисунке К3.13 построен векторный многоугольник для точек B и C.

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела.
2. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения.
3. Закон плоского движения.
4. Определение скорости и ускорения поступательного и угловой скорости и углового ускорения вращательного движения тела при плоском движении.
5. Определение скорости отдельных точек.
6. Мгновенный центр скоростей. Определение скорости отдельных точек при помощи мгновенного центра скоростей.
7. Формулы для определения угловой скорости при помощи мгновенного центра скоростей.
8. Определение ускорения отдельных точек при плоском движении твердого тела.

Глава 8

Сложное движение точки

8.1. Относительное, переносное и абсолютное движения

В инженерной практике часто приходится рассматривать движение точки (тела) относительно двух систем отсчета - сложное движение. Например, в кривошипно-кулисном механизме (рис. 8.1): движение камня А относительно кулисы O_1B (подвижной системы отсчета) - относительное движение; движение камня А, вместе с кулисой относительно неподвижного центра O_1 (неподвижной системы отсчета O_1xy) - переносное движение. В результате этих двух движений камень А совершает сложное или абсолютное движение.

Скорость точки (камня) А по отношению к подвижному телу - кулисе O_1B (подвижным осям $O_1x_1y_1$) называется относительной скоростью ($\vec{V}_{\text{отн}}$), а ее ускорение - относительным ускорением ($\vec{a}_{\text{отн}}$).

Скорость и ускорение той точки *а* кулисы O_1B, которая совпадает в данный момент времени с камнем А, относительно неподвижного тела (неподвижной системы O_1xy) называется переносной скоростью ($\vec{V}_{\text{пер}}$) и переносным ускорением ($\vec{a}_{\text{пер}}$). Т.е. - это скорость и ускорение, с которыми камень А переносится вместе с кулисой относительно неподвижного тела (системы).

Скорость и ускорение точки А в результате этих двух движений называется абсолютной скоростью $(V_{àáñ})$ и абсолютным ускорением $(a_{àáñ})$.

При решении инженерных задач важно правильно определиться с выбором относительного и переносного движений. Для лучшего уяснения относительного движения надо не учитывать переносное движение и, наоборот, для уяснения переносного - не учитывать движение относительное.

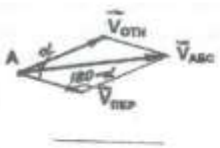


Рис. 8.1 Рис. 8.2

8.2. Теорема о сложении скоростей

Абсолютная скорость точки при сложном движении равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

$$\vec{V}_{\text{àáñ}} = \vec{V}_{\text{îòí}} + \vec{V}_{\text{ïåð}} \, . \tag{8.1}$$

Можно привести строгое математическое доказательство уравнения (8.1), однако эта зависимость логично вытекает из аксиомы параллелограмма векторов (параграф 1.2). Если угол между векторами $\vec{V}_{\text{отн}}$ и $\vec{V}_{\text{пер}}$ равен α (рис. 8.2), то модуль (по теореме косинусов):

$$V_{\text{àáñ}} = \sqrt{V_{\text{îòí}}^2 + V_{\text{ïåð}}^2 + 2V_{\text{ïåð}}^2 V_{\text{îòí}}^2} \cos\alpha \, . \tag{8.2}$$

Значение V_{ABC} и его направление можно определять изложенным выше методом проекции векторного уравнения (8.1) на координатные оси

$$V_{\text{àáñ}} = \sqrt{V_{\text{àáñ}_x}^2} + \sqrt{V_{\text{àáñ}_y}^2} \, . \tag{8.3}$$

8.3. Теорема Кориолиса о сложении ускорений

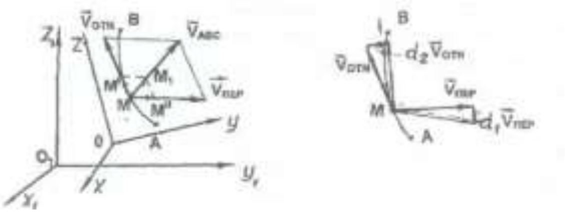
Абсолютное ускорение точки при сложном движении геометрически складывается из трех ускорений: относительного, переносного и Кориолиса.

$$\vec{a}_{\text{àáñ}} = \vec{a}_{\text{îòí}} + \vec{a}_{\text{ïåð}} + \vec{a}_k \, . \tag{8.4}$$

Для доказательства теоремы рассмотрим точку М, которая движется по траектории АВ относительно подвижной системы координат Oxyz и вместе с Oxyz перемешается относительно неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 8.3а). Тогда за время dt точка М получит относительное перемещение MM^I, переносное MM^{II} и абсолютное MM_1. Так как перемещения бесконечно малые, то соответствующие скорости направлены по направлению перемещений. С учетом уравнения (8.1), вектор абсолютного ускорения точки М будет равен:

$$\vec{a}_{\text{àáñ}} = \frac{d\vec{V}_{\text{àáñ}}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{\text{îòí}}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{\text{ïåð}}}{dt} , \tag{8.5}$$

в данном выражении $\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} \neq \vec{a}_{отн}$, т.к. $d\vec{V}_{отн}$ - приращение относительной скорости при абсолютном движении точки М (вектор $d\vec{V}_{отн}$ изменяется и при относительном, и при переносном движениях). Соответственно $\frac{d\vec{V}_{пер}}{dt} \neq \vec{a}_{пер}$, т.к. $d\vec{V}_{пер}$ - приращение вектора переносной скорости в результате движения по траектории АВ, поскольку в результате относительного движения точка М переходит в новое положение, где $\vec{V}_{пер}$ будет уже другим (рис. 8.3б).



а) б)

Рис. 8.3

Введем обозначения: d - приращение скорости на абсолютном перемещении, d_1 - на относительном перемещении, d_2 - на переносном перемещении. Тогда первый член уравнения (8.5)

$$\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} = \frac{d_1\vec{V}_{отн}}{dt} + \frac{d_2\vec{V}_{отн}}{dt} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_1, \tag{8.6}$$

где $\frac{d_1\vec{V}_{отн}}{dt} = \vec{a}_{отн}$, т.к. $d_1\vec{V}_{отн}$ - приращение вектора $\vec{V}_{отн}$ на относительном перемещении MM^I, $\frac{d_2\vec{V}_{отн}}{dt} = \vec{a}_1$ - ускорение, характеризующее изменение вектора $\vec{V}_{отн}$ на переносном движении MM^{II}.

$$\frac{d\vec{V}_{пер}}{dt} = \frac{d_1\vec{V}_{пер}}{dt} + \frac{d_2\vec{V}_{пер}}{dt} = \vec{a}_2 + \vec{a}_{пер}, \tag{8.7}$$

где $\frac{d_2\vec{V}_{пер}}{dt} = \vec{a}_{пер}$ - переносное ускорение, т.к. $d_2\vec{V}_{пер}$ - приращение вектора $\vec{V}_{пер}$ на переносном движении MM^{II}, $\frac{d_1\vec{V}_{пер}}{dt} = \vec{a}_2$ - дополнительное ускорение, характеризующее изменение вектора $\vec{V}_{пер}$ на относительном перемещении MM^I.

Из теоретического курса механики [3,4,5,7] известно, что дополнительные ускорения одинаковы и равны:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{V}_{\text{отн}}. \tag{8.8}$$

где $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ - вектор угловой скорости переносного движения.

Подставляя в уравнение (8.5) значения ускорений из выражений (8.6) и (8.7), окончательно получим:

$$\vec{a}_{\text{àáñ}} = \vec{a}_{\text{îòí}} + \vec{a}_{\text{ïåð}} + \vec{a}_k, \tag{8.9}$$

где $\vec{a}_K = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ - ускорение Кориолиса.

Ускорение Кориолиса характеризует изменение вектора относительной скорости при переносном движении и вектора переносной скорости при относительном движении.

С учетом значений $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ из выражения (8.8) ускорение Кориолиса определяется следующим векторным уравнением:

$$\vec{a}_K = 2(\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{V}_{\text{отн}}). \tag{8.10}$$

Если переносное движение поступательное, то $\omega_{\text{пер}} = 0$ и $a_K = 0$. Тогда абсолютное ускорение равно $\vec{a}_{\text{àáñ}} = \vec{a}_{\text{îòí}} + \vec{a}_{\text{ïåð}}$, как и в случае плоскопараллельного движения.

8.4. Вычисление относительного, переносного и Кориолиса ускорений

При вычислении относительного ускорения не следует учитывать переносное движение. Тогда $\vec{a}_{\text{отн}}$ определяется методами кинематики точки (параграфы 5.3, 5.4, 5.5). Переносное ускорение вычисляется без учета относительного движения, т.е. $\vec{a}_{пер}$ определяется методами кинематики твердого тела (параграфы 6.3, 7.3). Вектор ускорения Кориолиса определяется по уравнению (8.10). По величине

$$a_K = 2 \cdot \omega_{пер} \cdot V_{отн} \cdot \sin\alpha, \tag{8.11}$$

где α - угол между векторами $\vec{\omega}_{пер}$ и $\vec{V}_{отн}$.

Направлен вектор $\vec{a}_K$ (из уравнения 8.10) перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{\omega}_{пер}$ и $\vec{V}_{отн}$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\vec{\omega}_{пер}$ и $\vec{V}_{отн}$ видно происходящим против хода стрелки часов.

Можно пользоваться правилом, следующим из рис. 8.4, которое называется методом Н.Е. Жуковского: направление $\vec{a}_K$ определяется поворотом на 90° в сторону переносного вращения проекции вектора $\vec{V}_{отн}$ на плоскость, перпендикулярную $\vec{\omega}_{пер}$..

При плоском движении направление $\vec{a}_K$ определяют поворотом $\vec{V}_{отн}$ на 90° в сторону переносного вращения. В связи с этим $\vec{a}_K$ иначе называют поворотным ускорением.

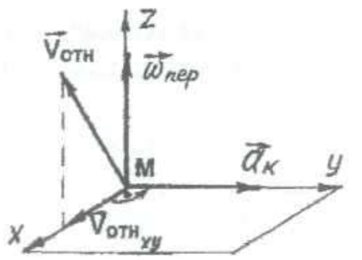


Рис. 8.4

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА К4

Прямоугольная пластина (рис. К4.0...К4.4) или круглая пластина радиусом $R = 1\text{м}$ (рис. К4.5…К4.9) вращается вокруг своей оси по закону $\varphi = f_1(t)$.

На рисунке К4.0, К4.1, К4.3, К4.5, К4.6 ось вращения перпендикулярна плоскости вращения пластины и проходит через точку О, на рисунке К4.2, К4.4, К4.7 (ось вращения OO_1 вертикальная), на рисунке К4.8 и К4.9 – ось вращения горизонтальная.

По пластине вдоль прямой BD (рис. К4.0...К4.4) или по окружности радиуса R (рис. К4.5...К4.9) движется точка М. Закон ее относительного движения

$S = AM = f_2(t)$.

Положительное направление отсчета от точки А к точке D.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени $t = 1\text{с}$.

Данные к решению задачи сведены в таблицу К4.

Таблица К4

Для всех рисунков		Для рис. К4.0...К4.4		Для рис. К4.5...К4.9	
№	$\varphi = f_1(t)$, рад.	a, м.	$S = AM = f_2(t)$, м.	h, м.	$S = AM = f_2(t)$, м.
0	$4(t^2-t)$	0,2	$0{,}5(3t-t^2)-0{,}6$	R	$R(4t^2-2t^3)\pi/3$
1	$3t^2-8t$	0,3	$0{,}4(3t^2-t^4)-0{,}3$	4R/3	$R(2t^2-t^3)\pi/2$
2	$6t^3$-l2t^2	0,1	$0{,}8(t^2-t)+0{,}4$	R	$R(2t^2$-l$)\pi/3$
3	t^2-2t^3	0,4	$0{,}6(t^4-3t^2)+0{,}5$	R	$R(t^4-3t^2)\pi/3$
4	$10t^2-5t^3$	0,5	$0{,}8(2t^2-t^3)$-0>2	R	$R(3t-t^2)\pi/6$
5	2(t2-t)	0,2	$0{,}6(t^3-2t^2)$	R	$R(t^3-2t)\pi/3$
6	$5t-4t^2$	0,5	$0{,}4(t^2-3t)+0{,}1$	3R/4	$R(t^3-2t^2)\pi/2$
7	$5t-3t^3$	0,3	$0{,}6(t-t^3)+0{,}4$	R	$R(t-5t^2)\pi/6$
8	$2t^3-11t$	0,1	$0{,}5(t^3-t)-0{,}3$	R	$R(3t^2-t)\pi/3$
9	$6t^2-3t^2$	0,2	$0{,}4(t-2t^3)-0{,}4$	4R/3	$R(t-2t^2)\pi/2$
10	$4t^2-t^3$	-	-	0,3R	$R(2t^3-4t)\pi/6$

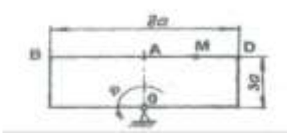


Рис. К4.0

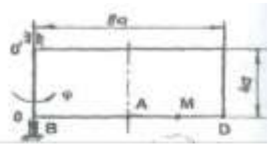


Рис. К4.1

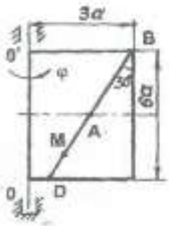


Рис. К4.2

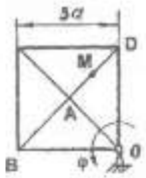


Рис. К4.3

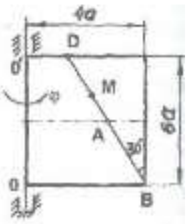


Рис. К4.4

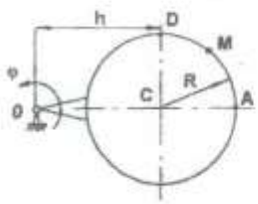


Рис. К4.5

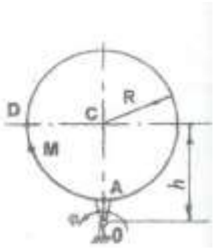


Рис. К4.6

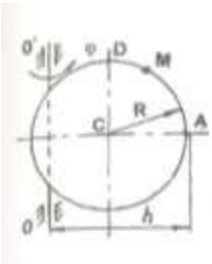


Рис. К4.7

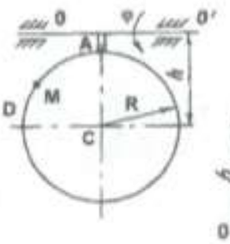
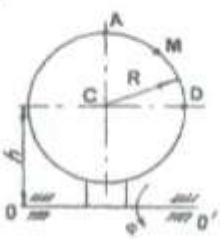


Рис. К4.8



К4.9

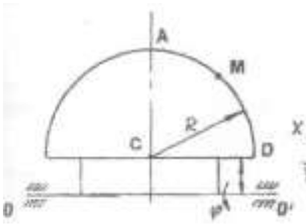


Рис. К4.10

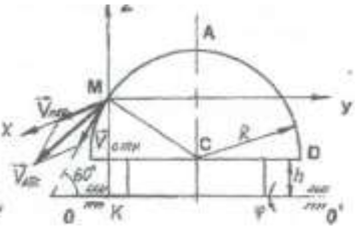


Рис.К4.11

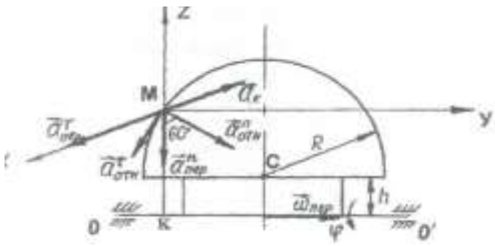


Рис.К4.12

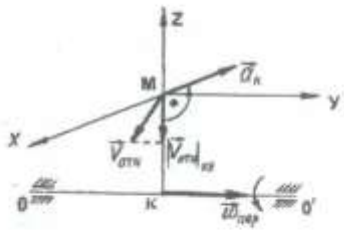


Рис.К4.13

Пример решения задачи К4 для варианта 10.

<u>РЕШЕНИЕ</u>: Определяем положение точки М на полуокружности в момент времени $t = 1c$:

$AM = S = \frac{\pi}{6}R(2-4) = -\frac{\pi}{3}R.$

Знак минус показывает, что точка М из начального положения А переместится в направлении отрицательного отсчета. Угол АСМ будет равен $\frac{AM}{R} = \frac{\pi R}{3R} = \frac{\pi}{3}$, т.е. 60°.

Выполняем схему в масштабе, показываем на ней положение точки в момент времени *t=1c* (рис. К4.11).

Точка М совершает сложное движение, состоящее из относительного движения по полуокружности радиуса R и из вращательного движения вместе с пластиной, т.е. вращения вокруг оси OO_1 с радиусом вращения МК.

Абсолютная скорость точки М

$$\vec{V}_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}} = \vec{V}_{\hat{\imath}\grave{o}\acute{\imath}} + \vec{V}_{\ddot{\imath}\mathring{a}\eth}\,. \qquad (1)$$

Величина относительной скорости

$$V_{\text{отн}} = \frac{dS}{st} = \frac{d\left[\frac{\pi\cdot R(2t^2-4t)}{6}\right]}{dt} = \frac{\pi}{6}R(6t^2-4),$$

при $t = 1$с:

$V_{\text{отн}} = \frac{\pi}{6}2\mathrm{R} = 1{,}04$м/с.

Вектор $\vec{V}_{\hat{\imath}\grave{o}\acute{\imath}}$ направлен по касательной к траектории относительного движения (рис. К4.11).

Величина переносной скорости

$V_{\text{пер}} = \omega_{\text{пер}} \cdot$ MK.

где МК - радиус вращения точки М в переносном движении.

Угловая скорость переносного движения

$$\omega_{\text{пер}} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(4t^2-t^2)}{dt} = 8t - 3t^2,$$

при $t = 1$с $\omega_{\text{пер}} = 8 \cdot 3 = 5\text{с}^{-1}$.

Величина радиуса вращения из рис. К4.12

$$MK = h + R \cdot \sin 30° = 0{,}31 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}8\text{м}.$$

Тогда

$$V_{\text{пер}} = 5 \cdot 0{,}8 = 4\text{м/с}.$$

Вектор $\vec{V}_{\text{пер}}$ направлен по касательной к окружности, описываемой точкой М при вращении круга вокруг оси OO_1 т.е. по оси x в системе осей координат xMy (рис. К4.11).

Величина абсолютной скорости точки М определится через проекции $\vec{V}_{ABC}$ на оси координат:

$$V_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}} = \sqrt{V^2_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}_x} + V^2_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}_y} + V^2_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}_z}}\,.$$

Проекции векторного равенства (1) на оси координат x, y, z:

$$V_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}_x} = V_{\ddot{\imath}\mathring{a}\eth} = 4\grave{\imath}\ /\ \tilde{n},$$

$$V_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}_y} = -V_{\hat{\imath}\grave{o}\acute{\imath}} \cdot \cos 60° = -1{,}04 \cdot 0{,}5 = -0{,}52\grave{\imath}\ /\ \tilde{n},$$

$$V_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}_z} = -V_{\hat{\imath}\grave{o}\acute{\imath}} \cdot \cos 30^\circ = -1{,}04 \cdot 0{,}87 = -0{,}9 \grave{\imath}\ /\ \tilde{n}\,,$$

Тогда

$$V_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}} = \sqrt{4^2 + (-0{,}52)^2 + (0{,}9)^2} = \sqrt{16 + 0{,}27 + 0{,}81} = 4{,}1 \grave{\imath}\ /\ \tilde{n}\,.$$

Направление вектора скорости $\vec{V}_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}}$ показано на рис. К4.11. Абсолютное ускорение точки М равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и Кориолиса.

$$\vec{a}_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}} = \vec{a}_{\hat{\imath}\grave{o}\acute{\imath}} + \vec{a}_{\ddot{\imath}\mathring{a}\eth} + \vec{a}_k\,,$$

где

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{a}^{\tau}_{\text{отн}} + \vec{a}^{n}_{\text{отн}},$$

$$\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}^{\tau}_{\text{пер}} + \vec{a}^{n}_{\text{пер}}.$$

Тогда

$$\vec{a}_{\grave{a}\acute{a}\tilde{n}} = \vec{a}^{\tau}_{\hat{\imath}\grave{o}\acute{\imath}} + \vec{a}^{n}_{\hat{\imath}\grave{o}\acute{\imath}} + \vec{a}^{\tau}_{\ddot{\imath}\mathring{a}\eth} + \vec{a}^{n}_{\ddot{\imath}\mathring{a}\eth} + \vec{a}_k\,. \qquad (2)$$

Значение относительного нормального ускорения

$$a^n_{\text{отн}} = \frac{V^2_{\text{отн}}}{p} = \frac{V^2_{\text{отн}}}{R} = \frac{1{,}04^2}{1} = 1{,}08\text{м/с}^2.$$

Вектор - $\vec{a}^n_{\text{отн}}$ направлен к центру кривизны относительной траектории точки М (рис. К4.12).

Ускорение относительное касательное

$$a^{\tau}_{\text{отн}} = \frac{dV_{\text{отн}}}{dt} = \frac{d\left(\pi R t^2 - \frac{2}{3}\pi R\right)}{dt} = 2\pi R t,$$

при $t = 1\text{с}$, $a^{\tau}_{\text{отн}} = 2\pi R = 6{,}28\text{м/с}^2$.

Вектор $a^{\tau}_{\text{отн}}$ направлен перпендикулярно $\vec{a}^n_{\text{отн}}$ в сторону направления $\vec{V}_{\text{отн}}$, т.к. производная $\frac{dV_{\text{отн}}}{dt}$ положительная по знаку (в случае отрицательного знака производной $\frac{d\vec{V}_{\text{отн}}}{dt}$ вектор $\vec{a}^{\tau}_{\text{отн}}$ будет направлен противоположно $\vec{V}_{\text{отн}}$).

Ускорение переносное нормальное

$$a^n_{\text{пер}} = \omega^2_{\text{пер}} \cdot MK = 5^2 \cdot 0{,}8 = 20\text{м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}^n_{\text{пер}}$ направлен к центру кривизны переносной траектории точки, т.е. от М к К (рис.К4.12).

Ускорение переносное касательное

$$a^{\tau}_{\text{пер}} = \varepsilon_{\text{пер}} \cdot MK. \qquad (3)$$

Переносное угловое ускорение

$$\varepsilon_{\text{пер}} = \frac{d\omega_{\text{пер}}}{dt} = \frac{d(8t-3t^2)}{dt} = 8-6t,$$

при t=$1c$

$$\varepsilon_{\text{пер}} = 8-6 = 2\text{с}^{-2}.$$

После подстановки значений в уравнение (3) получим:

$$a^{\tau}_{\text{пер}} = 2\cdot 0{,}8 = 1{,}6\text{м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}^{\tau}_{\text{пер}}$, направлен по касательной к траектории переносного движения в сторону $\vec{V}_{\text{пер}}$ (т.к. ε>0 (рис. К4.12).

Ускорение Кориолиса

$$a_k = 2\cdot\omega_{\text{пер}}\cdot V_{\text{отн}}\cdot\sin\alpha, \qquad (4)$$

где α - угол между векторами $\vec{\omega}_{\text{пер}}$, и $\vec{V}_{\text{отн}}$ (рис. К 4.12), $\alpha = 60°$.

После постановки значений в уравнение (4)

$$a_k = 2\cdot 5\cdot 1{,}04\cdot 0{,}87 = 9\text{м/с}^2.$$

Чтобы найти направление вектора $\vec{a}_k$, нужно найти проекцию вектора $\vec{V}_{\text{отн}}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ (на плоскость xz), и повернуть эту проекцию на 90° в сторону переносного вращения (рис. К4.12 и К4.13).

Величина абсолютного ускорения точки М

$$a_{\text{àáñ}} = \sqrt{a^2_{\text{àáñ}_x} + a^2_{\text{àáñ}_y} + a^2_{\text{àáñ}_z}}. \qquad (5)$$

Проекции векторного равенства (2) на оси x, y, z:

$$a_{\text{àáñ}_x} = \vec{a}^{\tau}_{\text{ïåð}} - \vec{a}_k = 1{,}6 - 9 = -7{,}4\text{ì} \ / \ \text{ñ}^2,$$

$$a_{ABCy} = a^n_{\text{отн}}\cdot\cos 30° - a^{\tau}_{\text{отн}}\cdot\cos 60° = 1{,}08\cdot 0{,}87 - 6{,}28\cdot 0{,}5 = -2{,}2\text{м/с}^2,$$

$$a_{ABCz} = -a^n_{\text{отн}}\cdot\cos 60° - a^{\tau}_{\text{отн}}\cdot\cos 30° - a^n_{\text{пер}} = -1{,}08\cdot 0{,}5 \ - 6{,}28\cdot 0.8 - 20 = = -26\text{м/с}^2$$

Тогда, подставляя значения проекций $a^2_{\text{àáñ}_x}, a^2_{\text{àáñ}_y}, a^2_{\text{àáñ}_z}$ в уравнение (5), окончательно получим

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{(-7{,}4)^2 + (-2{,}2)^2 + (26)^2}, \text{ м/с}^2, \quad a_{\text{абс}} = 27{,}1, \text{ м/с}^2$$

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Сложное движение материальной точки.
2. Относительное и переносное движения.
3. Сложение скоростей при сложном движении.
4. Сложение ускорений при сложном движении.
5. Теорема Кориолиса.
6. Ускорение Кориолиса (поворотное ускорение).
7. Правило Жуковского.

Раздел третий

ДИНАМИКА

Глава 9

Динамика материальной точки

9.1. Введение в динамику. Законы динамики

Динамика — это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел с учетом действующих на них сил и инертности тел.

Всякое движение рассматривается в динамике связи с учетом физических факторов, определяющих характер этого движения. В этом заключается отличие динамики от кинематики, где движение рассматривается только с геометрической стороны. Изучение динамики начинается обычно с изучения движения наиболее простого объекта - материальной точки.

Материальной точкой называется материальное тело, размерами которого по сравнению с проходимыми расстояниями можно пренебречь.

Для решения задач в динамике пользуются как установленными в статике способами сложения сил и приведения их систем к простейшему виду, так и принятыми в кинематике характеристиками и приемами описания различных движений. Количественные соотношения между различными физическими величинами, связанными с движением материальных тел, устанавливаются в динамике путем математических выводов на основе законов классической механики.

Эти законы служат фундаментом, на котором строится все содержание динамики.

Первый закон (закон инерции): *изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока на нее не подействует какая-нибудь сила.* Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением *по инерции.*

Второй закон (основной закон динамики) устанавливает, как будет изменяться скорость тела, если на него действует сила: *произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.*

Математически этот закон выражается векторным равенством:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{9.1}$$

Между модулем ускорения и модулем силы имеет место зависимость:

$$ma = F. \tag{9.2}$$

Если на точку действует одновременно несколько сил, то уравнение (9.2), выражающее основной закон динамики, принимает вид:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k. \tag{9.3}$$

В соответствии со вторым законом динамики вес тела

$$P = mg, \tag{9.4}$$

где g - ускорение свободного падения, м/с^2. Отсюда масса тела

$$m = \frac{P}{g}. \tag{9.5}$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия): два *тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль одной прямой в противоположные стороны.*

Для двух взаимодействующих тел с массами m_1, и m_2 их ускорения на основании третьего закона будут обратно пропорциональны массам.

9.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Как правило, для решения задач динамики используются две системы дифференциальные уравнений:

Уравнения в декартовых координатах. Проектируя векторное равенство (9.3) на координатные оси *x, y, z* и учитывая, что $x = f_1(t), y = f_2(t)$ получим дифференциальные уравнения движения точки в декартовой системе координат:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}, \qquad (9.6)$$

где $\sum F_{kx}$; $\sum F_{ky}$; $\sum F_{kz}$- алгебраические суммы проекций действующих на точку сил на соответствующие координатные оси, Н.

Уравнения (9.6) можно записать и в другом виде, т.к. проекции ускорения, в частности на ось *x,* может быть выражены в следующей форме $(a_x = \frac{dV_x}{dt}, a_x = \dot{V}_x, a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, a_x = \ddot{x})$.

Уравнения движения в естественной форме. Для получения этих уравнений, спроектируем обе части равенства (9.3) на естественные (скоростные) координатные оси τ, n, b. С учетом значений касательного ускорения $a_\tau = \frac{dV}{dt}$ и нормального ускорения $a_n = \frac{V^2}{p}$ получим:

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}, m\frac{V^2}{p} = \sum F_{kn}, 0 = \sum F_{kb}, \qquad (9.7)$$

где p - радиус кривизны траектории точки, м;

V - скорость точки, м/с;

$\sum F_{k\tau}, \sum F_{kn}, \sum F_{kb}$ - алгебраические суммы проекций сил, соответственно на касательную, главную нормаль и бинормаль к траектории точки, Н.

9.3. Две основные задачи динамики и их решение

Множество частных задач динамики материальной точки, как правило, сводятся к двум основным задачам.

Первая задача динамики заключается в определении действующих сил по заданному закону движения.

Вторая задача динамики — определение закона движения точки по известным действующим силам, в том числе и определение реакций наложенных связей.

Решение первой задачи динамики производится путём составления дифференциальных уравнений движения в виде уравнений (9.6) или (9.7) (подробный порядок рассмотрен ниже). Затем находят соответствующие ускорения методом дифференцирования уравнений движения по времени, если движение задано в функциях: $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$ или $S = f(t)$. Если ускорение известно по условию задачи, то в дальнейшем определяются искомые силы или реакции связей из полученных дифференциальных уравнений движения в соответствии с данными задачи.

Решение второй задачи динамики необходимо производить в следующем порядке:

1. Составить дифференциальные уравнения движения, для чего:

1.1. Изобразить тело в текущем положении (в любой момент времени).

1.2. Выбрать систему координат. Если тело движется по прямой или траектория неизвестна, то выбирается декартова система координат. Если траектория известна, то используются естественные оси координат.

1.3. Записать уравнения вида (9.6) или (9.7) и начальные условия задачи: при $t = 0; x = x_0$, и т.д.; $V_x = V_{x0}$ и т.д.

2. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения движения методами математики. Если применяется неопределенный интеграл, то, используя начальные условия движения, определяются постоянные интегрирования. Можно брать определенный интеграл в пределах изменения переменных.

3. Определить искомые величины из уравнений после первого и (или) второго интегрирования. Решение проводить в общем виде, что позволит косвенно (по размерностям) проверить правильно ли выполнено решение.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА Д1

Груз массой m, получив в точке *A* скорость $\vec{V}o$, движется по участку *ABC*. На груз, кроме силы тяжести $\vec{P}$, действуют силы: на участке *AB* – сила $\vec{F}$, зависящая от времени, на участке *BC* — постоянная сила $\vec{Q}$ и сила трения скольжения $\vec{F}тр$.

Коэффициент трения скольжения *f*, расстояние *AB*= l_1, *BC*= l_2, время движения груза по участку *AB* равно t_1. При переходе с участка *AB* на участок *BC* груз не меняет величины скорости.

Значения параметров для различных вариантов сведены в таблицу Д1. Схемы движения груза представлены на рисунках Д1.0-Д1.10.

Таблица Д1

Номер варианта	*m*, *КГ*	V_0, *м/с*	l_1, *м*	l_2, *м.*	t_1, *с*	*f*	*Q*, *Н*	*F*, *Н*	α, *град*
0	1	20	-	2	2	0,1	40	6	30
1	2	15	0,2	1	-	0,12	20	9	45
2	3	10	-	3	1	0,15	30	10	60
3	4	12	0,3	2	-	0,1	50	8	30
4	2	16	-	1	3	0,14	70	4	45
5	5	25	0,1	3	-	0,2	80	6	60
6	4	14	-	4	2	0,1	60	2	30
7	1	18	0,4	2	-	0,16	50	4	45
8	2	20	-	1	1	0,18	30	15	60
9	3	15	0,2	2	-	0,2	60	2	30
10	5	16	-	4	3	0,25	20	8	60

Найти законы движения груза по участкам *AB* и *BC,* кроме того определить скорость груза в точках *B* и *C.*

Пример решения задачи Д1 для варианта 10 (рис. Д1.10)

Решение: Задача Д1 решается методом интегрирования дифференциальных уравнений движения точки. Рассмотрим движение груза на участке *AB,* считая его материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) на расстоянии x_1 от начала движения и действующие на него силы: $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ - вес груза, $\vec{F}$- переменная сила, $F = 8t$ и $\vec{N}_1$ - реакция поверхности (рис. Д1.11).

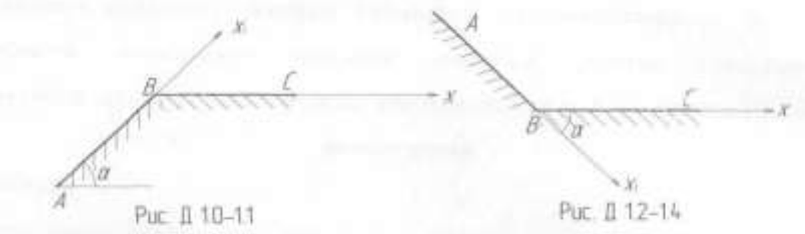


Рис. Д 10–11

Рис. Д 12–14

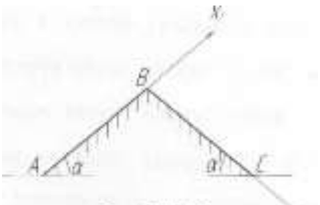


Рис. Д 15-17

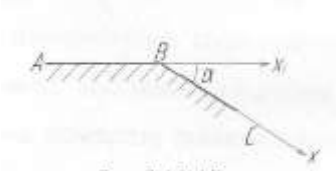


Рис. Д 18-19

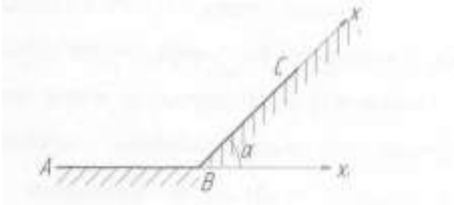


Рис. Д 1.10

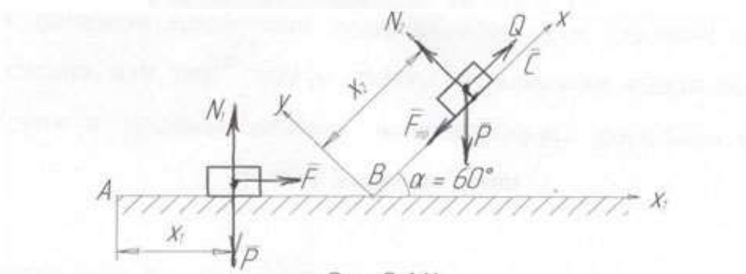


Рис. Д 1.11

Проводим ось Ax_1 и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = \sum F_{kx_1},$$

где $\sum F_{kx_1}$ - сумма проекций сил на ось x_1. $\sum F_{kx_1} = F \cdot t = 8t$. Тогда уравнение примет вид:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = 8t. \qquad (1)$$

После преобразования (делим обе части этого равенства на массу m), получим:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{8}{m}t. \qquad (2)$$

Разделяем переменные в выражении (2) и берем неопределенный интеграл от обеих частей. После первого интегрирования будем иметь:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{8}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 = \frac{4t^2}{m} + C_1. \tag{3}$$

Интегрируем равенство (3) второй раз:

$$x_1 = \frac{4}{3m} t^3 + C_1 t + C_2. \tag{4}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим по начальным условиям задачи. При *t=0;* x_{1_0}*=0;* $V_{0_{x_1}}$=V_0. Подставляя начальные условия в равенства (3) и (4), получим: C_1=V_0; C_2*=0.* С учётом значений C_1и C_2*:*

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{4t^2}{m} + V_0. \tag{5}$$

$$x_1 = \frac{4}{3m} t^3 + V_0 t. \tag{6}$$

Подставляя численные значения в уравнение (5), получим закон изменения скорости груза на участке *AB:*

$$\frac{dx_1}{dt} = V_{x_1} = \frac{4}{5} t^2 + 16 \text{ или } V_{x_1} = 0{,}8t^2 + 16 \tag{7}$$

Уравнение движения груза будет иметь следующий вид:

$$x_1 = 0.27t^3 + 16t. \tag{8}$$

Подставляя в равенство (7) время *t=3*с, найдём скорость груза в точке *B.*

$$V_B = \left(V_{x_1}\right)_B = 0.8t^2 + 16 = 23/2(\text{м/с}).$$

Рассмотрим движение груза на участке BC. Найденная скорость $\vec{V}_B$ будет для движения на этом участке начальной скоростью $\vec{V}_{0_x} = \vec{V}_B$. Изображаем груз (в произвольном положении) на расстоянии *x* от точки *B* и действующие на него силы: $\vec{\text{P}}$ - вес груза, $\vec{Q}$ - постоянная сила; $\vec{F}$*тр* - сила трения скольжения, $\vec{N}_2$ - реакция поверхности. Проведём из т. *B* оси *Bx* и *By* и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx_2*:*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -P \cdot \sin\alpha - F_{\text{тр}} + Q, \tag{9}$$

где $F_{тр} = f \cdot N_2$.

Для определения N_2 составим уравнение в проекции на ось *By.* Так как груз не перемещается вдоль оси *By* то *ay=0* и, следовательно $\sum F_{ky} = 0$, *тогда* 0=N_2-*Pcos*$60°$, откуда N_2=*Pcos*$60°$ *и Fтр=fPcos*$60°$. Подставляем в уравнение (9) значение силы трения скольжения, и, сокращая обе части уравнения на *m,* получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha) + \frac{Q}{m}. \qquad (10)$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (10) дважды, получим:

$$\frac{dx}{dt} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\cdot t + \frac{Q}{m}t + C_1, \qquad (11)$$

$$x = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + \frac{Q}{m}\cdot\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \qquad (12)$$

Записываем начальные условия движения груза на участке ВС. При t=0; x_0=0; $V_{0_x}=V_B$.

Подставляем начальные условия в уравнения (11) и (12), находим: $C_1 = V_B$; $C_2 = 0$.

С учётом численных значений: g=10 $м/с^2$; *sinα=sin 60 ° =0,87; cosα=cos60°*=0,5; *Q = 20H; m=5кг; f=0,25;* C_1=*VB=23,2*$м/с$*; C2*=0, получим:

$$V_x = -5{,}91t + 23{,}2, \qquad (13)$$

$$x = 2{,}95t^2 + 23{,}2t \qquad (14)$$

Уравнение (13) выражает закон изменения скорости на участке *ВС,* а уравнение (14) - закон движения груза на этом же участке.

Подставляя в уравнение (14) *x=*l_2*=4м,* находим время движения груза по участку *ВС:*

4=2,95t2+23,2t.

Преобразуя последнее равенство, получим:

$t_2+7{,}86t-1{,}35=0,$

откуда

t_1*=0,22с, t*$_2$*=7,64с.*

Определяем скорость груза в т. *C,* подставляя полученные значения t_1 и t_2 в уравнения (13):

$$V_{1C} = (\frac{dx}{dt})_c = -5{,}91 \cdot 0{,}22 + 23{,}2 = 1{,}3\text{м/с},$$

$$V_{2C} = (\frac{dx}{dt})_c = -5{,}91 \cdot 7{,}64 + 23{,}2 = -21{,}95\text{м/с}.$$

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Дифференциальные уравнения движения в координатной фооме.
2. Дифференциальные уравнения движения в естественной форме.
3. Составление дифференциальных уравнений движения: порядок действий.
4. 1-я и 2-я задачи динамики.
5. Решение 2-й задачи динамики.
6. Определение постоянных интегрирования дифференциальных уравнений движения и их физическая суть.
7. Определение скорости движения, если известен закон движения по координатным осям.

9.4. Общие теоремы динамики точки

1. Теорема об изменении количества движения точки

Количество движения точки.

Одной из основных динамических характеристик движения точки является количество движения.

Количеством движения материальной точки называ

ется векторная величина $m\vec{V}$*, равная произведению массы точки на ее скорость.* Направлен вектор $m\vec{V}$ так же, как и скорость точки, т.е. по касательной к ее траектории.

Единица измерения количества движения в СИ - 1кг·м/с=1Н·с.

Импульс силы.

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторой промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. *Элементарный импульс* $d\vec{S}$ силы $\vec{F}$ - это векторная величина, равная произведению вектора силы $\vec{F}$ на элементарный промежуток времени ее действия:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt. \tag{9.8}$$

Элементарный импульс направлен по вектору силы. Импульс силы за конечный промежуток $\Delta t = t_1 - t_0$ равен интегральной сумме ее элементарных импульсов за этот промежуток времени.

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_1} d\vec{S} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt. \tag{9.9}$$

В частном случае, если сила постоянная *($\vec{F}$=const)*, то $\vec{S}=\vec{F}\cdot t$.

Проекции импульса силы на оси координат:

$$S_x = \int_{t_0}^{t_1} F_x dt\,, S_y = \int_{t_0}^{t_1} F_y dt\,, S_z = \int_{t_0}^{t_1} F_z dt. \tag{9.10}$$

Единица измерения импульса силы, как и количества движения в СИ - 1кг·м/с=1Н·с. Следовательно, эти величины имеют одинаковую размерность и их можно сравнить.

Уравнение (9.3), выражающее основной закон динамики, можно записать в другом виде (т.к. m=*const*, $\vec{a} = d\vec{V}/dt$):

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum \vec{F}_k. \tag{9.11}$$

Это уравнение одновременно *выражает теорему об изменении количества движения.*

Разделяя переменные в уравнение (9.11) и беря определенные интегралы в пределах изменения переменных, получим:

$$m\vec{V}_1 - m\vec{V}_0 = \sum \vec{S}_k. \tag{9.12}$$

Уравнение (9.12) выражает *теорему об изменении количества движения точки* в конечном виде: *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за этот же промежуток времени.*

При решении задач вместо векторного уравнения (9.12) часто пользуются уравнениями в проекциях на координатные оси:

$$m\vec{V}_{1_x} - m\vec{V}_{0_x} = \sum \vec{S}_{k_x},$$
$$m\vec{V}_{1_y} - m\vec{V}_{0_y} = \sum \vec{S}_{k_y}, \tag{9.13}$$

$$m\vec{V}_{1_z} - m\vec{V}_{0_z} = \sum \vec{S}_{k_z},$$

2. Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов)

В ряде задач динамики вместо динамической характеристики вектора $m\vec{V}$ используется его момент относительно центра или оси. Определяется вектор момента количества движения точки относительно центра (оси) так же, как и момент силы:

$$\vec{m}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}. \tag{9.14}$$

Момент количества движения точки относительно некоторого центра O равен векторному произведению радиуса-вектора движущейся точки $\vec{r}$ на количество движения $m\vec{V}$.

Модуль момента количества движения равен

$$/\vec{m}_0(m\vec{V})/= mV \cdot h, \tag{9.15}$$

где h - плечо вектора $m\vec{V}$ относительно центра *O*.

В векторной форме теорема о моменте количества движения материальной точки соответствует теореме об изменении количества движения: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра O равна сумме моментов действующих сил относительно этого же центра, т.е.*

$$\frac{d}{dt}\vec{m}_0(m\vec{V}) = \sum \vec{m}_0(\vec{F}). \tag{9.16}$$

Для обоснования теоремы (9.16) следует взять первую производную по времени от уравнения (9.14).

Проекция векторного равенства (9.16) на какую-либо из координатных осей, проходящих через центр О, даёт уравнение, выражающее эту же теорему в скалярной форме:

$$\frac{d}{dt}m_z(m\vec{V}) = m_z(\vec{F}). \tag{9.17}$$

3. Теорема об изменении кинетической энергии точки

<u>Работа и мощность силы.</u>

Работа силы — скалярная величина, характеризующая эффект действия силы в зависимости от пути, на протяжении которого эта сила действует.

1. Если сила постоянная, то работа определяется:

$$A = FS\cos\alpha, \quad (9.18)$$

где S-перемещение точки.

2. Если сила *F* переменная, то вычисляется элементарная работа:

$$dA = FdScosa. \quad (9.19)$$

3. Работа силы на любом конечном перемещении M_0M определяется как интеграл от элементарной работы:

$$A_{M_0M} = \int_{M_0}^{M} FdScosa. \quad (9.20)$$

4. Аналитическая форма элементарной работы силы:

$$dA=Fxdx+Fydy+Fzdz. \quad (9.21)$$

5. Работа силы тяжести:

$$A=\pm Ph, \quad (9.22)$$

где *h*- вертикальное перемещения центра тяжести.

6. Работа силы трения:

$$A_{\text{тр}} = -F_{max}S. \quad (9.23)$$

7. Работа силы, приложенной к вращающемуся телу:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi, \quad (9.24)$$

где M_z – крутящий момент, равный $M_z = m_z(\vec{F})$.

Если момент постоянный, то

$$A = M_z \cdot \varphi. \quad (9.25)$$

Единицей измерения работы в международной системе единиц СИ является 1джоуль ($1\text{Дж} = 1\text{Н} \cdot \text{м} = 1\ \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$).

Мощность.

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность *N=A/t*, где *t* - время, в течение которого произведена работа. В общем случае при поступательном движении

$$N = \frac{dA}{dt} = F_\tau dS/dt = F_\tau V. \qquad (9.26)$$

При вращательном движении

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z \cdot \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega. \qquad (9.27)$$

Следовательно, *мощность* при поступательном движении *равна произведению касательной составляющей силы на скорость или при вращательном движении произведению момента вращения на угловую скорость.*

Единицей измерения мощности в СИ является ватт (1Вт=1Дж/с).

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $\frac{mV^2}{2}$, *равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.*

Единица измерения кинетической энергии та же, что и работы силы (в СИ - 1Дж).

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме выражается следующим равенством:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \sum dA_k, \qquad (9.28)$$

Проинтегрировав обе части равенства (9.28) в пределах изменения переменных в точках от M_o до M_1, найдем окончательно

$$\frac{mV_1^{\ 2}}{2} - \frac{mV_0^{\ 2}}{2} = \sum A_k\,(M_0 M_1). \qquad (9.29)$$

Уравнение (9.29) выражает *теорему об изменении кинетической энергии точки в конечном виде:* изменение кинетической энергии материальной точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

Глава 10

Введение в динамику механической системы. Геометрия масс

10.1. Механическая система. Классификация сил, действующих на систему

Под механической системой в механике понимается совокупность взаимодействующих между собой материальных тел или точек, определенным образом увязанных между собой. Положение и движение каждого тела или точки системы зависит от положения и движения всех остальных.

Действующие на механическую систему активные силы $\vec{F}_k^a$ и реакции связей $\vec{N}_k$ разделяют на внешние - $\vec{F}_k^e$ и внутренние - $\vec{F}_k^i$ (индексы e и i от латинских exterior - внешний и interior - внутренний).

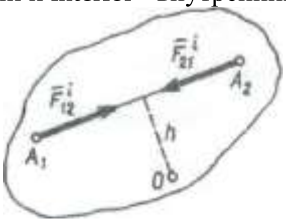


Рис. 10.1

Внешними называют силы, действующие на систему со стороны других систем или тел, не входящих в состав данной системы. *Внутренними* называют силы, с которыми тела или точки данной системы действуют друг на друга. Это разделение является условным и зависит от того, какая механическая система рассматривается.

Свойство внутренних сил:

1. *Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю. В* самом деле, по третьему закону динамики любые две точки системы (рис. 10.1) действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами $\vec{F}_{12}^i$ и $\vec{F}_{21}^i$, сумма которых равна нулю. Так как аналогичный результат имеет место для любой пары точек системы, то

$$\sum \vec{F}_k^i = 0. \tag{10.1}$$

2. *Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.* Действительно, если взять произвольный центр *O,* то из рис. 10.1 видно, что $\vec{m}_0(\vec{F}_{12}^i) + \vec{m}_0(\vec{F}_{21}^i) = 0$. Аналогичный результат получится при вычислении

моментов относительно оси. Следовательно, и для всей системы будет:

$$\sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^i\right) = 0 \text{ и } \sum m_x\left(\vec{F}_k^i\right) = 0. \quad (10.2)$$

Из доказанных свойств не следует, однако, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к разным материальным точкам или телам и могут вызвать взаимные перемещения этих точек или тел. Уравновешенной вся совокупность внутренних сил будет у системы, представляющей собой абсолютно твердое тело.

10.2. Масса системы. Центр масс

Масса системы (обозначаем *М* или *m) равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему:*

$$\mathrm{M} = \sum m_k. \quad (10.3)$$

Распределение масс в системе определяется значениями масс m_k ее точек и их взаимными положениями, т.е. их координатами x_k, y_k, z_k. Однако оказывается, что при решении тех задач динамики, которые мы будем рассматривать, в частности динамики твердого тела, для учета распределения масс достаточно знать не все величины m_k, x_k, y_k, z_k , а некоторые, выражаемые через их суммарные характеристики. Ими являются: *координаты центра масс* (выражаются через суммы произведений масс точек системы на их координаты), *осевые моменты инерции* (выражаются через суммы произведений масс точек системы на квадраты их координат) и *центробежные моменты инерции* (выражаются через суммы произведений масс точек системы и двух их координат). Эти характеристики мы в данной главе и рассмотрим.

Центр масс. В однородном поле тяжести *(g=const)* центр масс и центр тяжести системы или твердого тела совпадают. Однако центр масс имеет более широкое значение, т.к. он имеет место и в невесомости. Положение центра масс по координатным осям находится также, как и центра тяжести:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}, y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}, z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}, \quad (10.4)$$

где x_k, y_k, z_k - координаты тел системы или отдельных точек твердого тела.

Исходя из уравнения (10.4), радиус-вектор центра масс тела $\vec{r}_c$ определяется выражением:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}. \quad (10.5)$$

10.3. Момент инерции относительно оси (центра). Радиус инерции

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или центра О) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси (центра):

$$J_z = \sum m_k h_k^2. \tag{10.6}$$

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

В дальнейшем будет показано, что осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т.е. что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.*

Единицей измерения момента инерции в СИ будет 1 кг·м^2.

В технике для расчета момента инерции часто используется следующая формула:

$$J_z = M \cdot p_z^2. \tag{10.7}$$

где p_z, - радиус инерции твердого тела относительно оси *Oz*.

Для стандартных материалов и изделий, выпускаемых промышленностью, значения радиуса инерции приводятся в справочных данных.

Радиус инерции p_z определяет расстояние от оси *Oz* до точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела, чтобы момент инерции полученной точки относительно данной оси равнялся моменту инерции тела.

<u>Моменты инерции некоторых однородных тел</u>

1. Тонкий однородный стержень длиной l и массой M:

$$J_{z_0} = \frac{1}{3} M l^2, \tag{10.8}$$

$$J'_{z_C} = \frac{1}{12} M l^2, \tag{10.9}$$

где *O* - крайняя точка стержня,

с- центр масс стержня,

$\bar{l}$ - длина стержня.

2. Тонкое круглое однородное кольцо радиуса R и массы М:

$$J_z = MR^2. \qquad (10.10)$$

3. Круглая однородная пластина (круг) или сплошной цилиндр радиуса R и массы М:

$$J_z = \frac{1}{2}MR^2. \qquad (10.11)$$

4. Прямоугольная пластина, конус, шар:

а) сплошная прямоугольная пластина массой *М со сторонами: а вдоль оси x и* b *- вдоль оси y.*

$$J_x = \frac{1}{3}Mb^2, J_y = \frac{1}{3}Ma^2; \qquad (10.12)$$

б) прямой сплошной круглый конус массы *М* и радиуса основания *R:*

$$J_z = 0{,}3MR^2; \qquad (10.13)$$

в) сплошной шар массы *М* и радиуса *R*

$$J_z = 0{,}4MR^2. \qquad (10.14)$$

10.4. Моменты инерции тела относительно параллельных осей (Теорема Гюйгенса)

Зная момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела J_z, формулы (10.8-10.14), можно найти момент инерции относительно любой другой оси, ей параллельной J'_z. Проведем через центр масс С тела произвольные оси *С* x_c, y_c, z_c, а через любую точку *О* на оси X_c - оси *О* x', y', z' такие, что $y' \parallel y$, $z' \parallel z$ (рис. 10.2). Расстояние между осями *С z* и *О z* обозначим через *d*. Применяя выражение (10.6), определим момент инерции относительно оси $O_{z'}$.

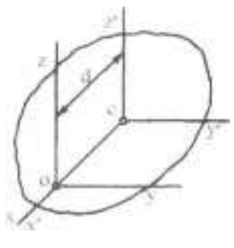


Рис. 10.2

Впервые это было доказано Х. Гюйгенсом и формула, выражающая теорему, имеет следующий вид:

$$J_{z'} = J_z + Md^2, \qquad (10.15)$$

где *d* - расстояние между осями Z_c и Z'.

Теорема Гюйгенса формулируется следующим образом: *момент инерции тела относительно любой оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.*

Из формулы (10.15) следует, что $J_{z'} > J_{z_c}$. Следовательно, из всех осей данного направления наименьший момент инерции будет относительно оси, проходящей через центр масс тела (см уравнения (10.8) и (10.9) параграф (10.3).

10.5. Центробежные моменты инерции. Понятия о главных осях инерции

Если через точку *O* провести координатные оси *Oxyz,* то по отношению к этим осям *центробежными моментами инерции* (или *произведениями инерции) называют величины Jxy, Jyz, Jzx, определяемые равенствами:*

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k, J_{yz} = \sum m_k y_k z_k, J_{zx} = \sum m_k z_k x_k, \qquad (10.16)$$

где m_k - массы точек; x_k, y_k, z_k - координаты точек по соответствующим осям.

Для сплошных тел формулы (10.16) принимают вид:

$$J_{xy} = \int_{(V)} \mathrm{m} xy dV \text{ и т.д.} \qquad (10.17)$$

В отличие от осевых центробежные моменты инерции могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, в частности, при определенным образом выбранных осях *Oxyz* могут обращаться в нули.

Отметим следующие свойства центробежных моментов инерции:

1). Если тело имеет ось симметрии *Oz,* то центробежные моменты инерции с индексом этой оси будут равны нулю, т.е.

$$J_{xz} = 0, \; J_{yz} = 0. \qquad (10.18)$$

Ось *Oz*, для которой выполняется равенство (10.18) называется *главной* *осью инерции.* Если ось проходит через центр масс, то ее называют *главной центральной осью инерции.*

2). Если тело имеет плоскость симметрии, то центробежные моменты инерции с индексом оси, перпендикулярной плоскости симметрии, также равны нулю и эта ось является главной осью инерции.

Понятие о главных осях инерции играет важную роль в динамике твердого тела. В частности, если ось вращения тела или системы является главной осью инерции, то вращающиеся массы уравновешены и статически, и динамически.

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются *главными моментами инерции тела.*

Главные оси инерции, построенные для центра масс тела, называют *главными центральными осями инерции тела.* Из рассмотренного выше следует, что если тело имеет ось симметрии, то эта ось является одной из главных центральных осей инерции тела, так как центр масс лежит на этой оси. Если же тело имеет плоскость симметрии, то ось, перпендикулярная этой плоскости и проходящая через центр масс тела, будет также одной из главных центральных осей инерции тела.

Глава 11

Общие теоремы динамики системы

11.1. Дифференциальные уравнения движения системы

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы с массой м$_к$. Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке внешних сил (и активных, и реакций связей) через $\vec{F}_k^e$, а равнодействующую всех внутренних сил - через $\vec{F}_k^i$. Если точка имеет при этом ускорение $\vec{a}_k$, то по основному закону динамики $m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$.

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы будет

$$\begin{gathered} m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_2^i, \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}^i{}_n. \end{gathered} \tag{11.1}$$

Уравнения (11.1) представляют собой *дифференциальные уравнения движения системы в векторной форме* (в них $\vec{a}_k = \dot{\vec{V}}_k = \ddot{\vec{r}}_k$). Входящие в правые части уравнений силы могут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей.

Проекции равенства (11.1) на координатные оси, дают дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси. Однако при решении задач динамики уравнения вида (11.1) практически не используется из-за сложности и громоздкости расчетов.

11.2. Теорема о движении центра масс

В инженерной практике, как правило, применяются теоремы динамики, в которых используются обобщенные динамические характеристики тел или систем, определенным образом влияющие на их движение. В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела) требуется знать закон движения ее центра масс. Чтобы найти этот закон, обратимся к уравнениям движения системы (11.1) и сложим почленно их левые и правые части. Так как по свойству внутренних сил системы $\vec{F}_k^i = 0$, получим

$$\sum m_k\vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e. \tag{11.2}$$

Преобразуем формулу (10.5) к виду $\sum m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_c$. Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и учитывая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем

$$\sum m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2}.$$

или

$$\sum m_k \vec{a}_k = M\vec{a}_c, \tag{11.3}$$

где $\vec{a}_c$ - ускорение центра масс системы. И окончательно:

$$M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e. \tag{11.4}$$

Уравнение (11.4) выражает *теорему о движении центра масс системы: произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.*

Проектируя обе части равенства (11.4) на координатные оси, получим:

$$M \cdot \ddot{x}_c = \sum F_{k_x}^e, M \cdot \ddot{y}_c = \sum F_{k_y}^e, M \cdot \ddot{z}_c = \sum F_{k_z}^e. \tag{11.5}$$

Эти уравнения представляют собой *дифференциальные уравнения движения центра масс* в проекциях на оси декартовой системы координат.

11.3. Закон сохранения движения центра масс

Из теоремы о движении центра масс можно получить следующие важные следствия.

1. Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\sum \vec{F}_k^e = 0.$$

Тогда из уравнения (11.4) следует, что $a_c = 0$ или $\vec{V}$ *c=const.* Следовательно, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т.е. равномерно и прямолинейно.* В частности, если вначале центр масс был в покое, то он и остается в покое. Действие внутренних сил движение центра масс системы изменить не может.

2. Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, не равна нулю, но эти силы таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, ось x) равна нулю: $\sum \vec{F}_{k_x}^e = 0$.

Тогда первое из уравнений (11.5) дает

$$\ddot{x}_c = 0 \text{ или } x_c = V_{c_x} = const.$$

Следовательно, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось, равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная.* В частности, если в начальный момент $V_{c_x} = 0$, то и в любой последующий момент времени $V_{c_x} = 0$, т.е. центр масс системы в этом случае вдоль оси *x* перемещаться не будет ($x_c = const$).

Все эти результаты выражают собой *закон сохранения движения центра масс системы: никакими внутренними силами нельзя изменить положение центра масс системы.*

Если имеет место закон сохранения движения центра масс системы по оси x, то справедливо следующее выражение:

$$\sum m_k \zeta_k = 0, \qquad (11.6)$$

где ζ_k -абсолютное перемещение центра каждой части масс системы по оси x.

Из выражения (11.6) можно по перемещению одной части системы найти перемещение его другой части.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА Д2

Грузы массой m_1 и m_2 , соединённые нерастяжимой нитью, переброшенной через блок *A,* скользят по гладким боковым сторонам клина, опирающегося основанием *BC* на гладкую горизонтальную плоскость (рис.Д2.0-Д2.10). Найти перемещение клина по горизонтальной плоскости при опускании груза массы m_1, на высоту *h.* Масса клина *m.*

Значения параметров для различных вариантов сведены в таблицу Д2.

Таблица Д2

Номер варианта	m_1, *кг*	m_2, *кг*	*m, кг*	α, *рад*	β, *рад*	h, м
0	m_1	$m_1/3$	$3m_1$	$\pi/4$	$\pi/2$	0,15
1	m_1	$m_1/5$	$4m_1$	$\pi/3$	$\pi/2$	0,12
2	m_1	$m_1/4$	$5m_1$	$\pi/4$	$2\pi/3$	0,14
3	m_1	$m_1/6$	$6m_1$	$\pi/3$	$\pi/3$	0,08
4	m_1	$m_1/5$	$7m_1$	$\pi/3$	$\pi/6$	0,07
5	m_1	$m_1/7$	$4m_1$	$\pi/4$	$\pi/4$	0,05
6	m_1	$m_1/8$	$5m_1$	$\pi/6$	$\pi/3$	0,1
7	m_1	$m_1/4$	$6m_1$	$\pi/9$	$\pi/2$	0,09
8	m_1	$m_1/5$	$2m_1$	$\pi/12$	$\pi/3$	0,06
9	m_1	$m_1/6$	$3m_1$	$7\pi/18$	$\pi/9$	0,13

10	m_1	$m_1/4$	$4m_1$	$\pi/6$	$\pi/2$	0,1

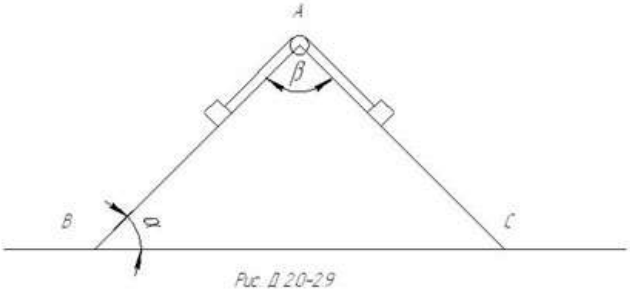


Рис Д 20-29

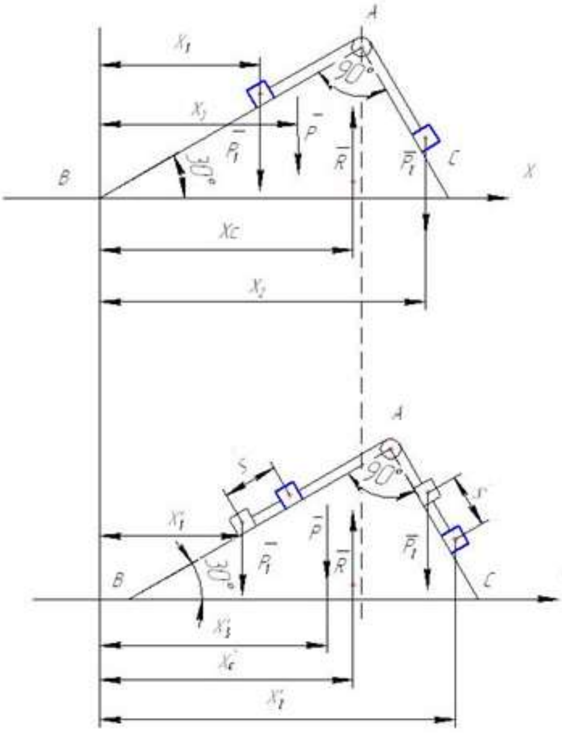


Рис Д 2.10

Пример решения задачи Д2 для варианта 10.

<u>Решение:</u> Задача Д2 на применение теоремы о движении центра масс системы. Система, состоящая из клина и грузов, находится в покое под действием четырёх внешних вертикальных сил: веса грузов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, клина $\vec{P}$ и реакции гладкой горизонтальной поверхности $\vec{R}$, линия действия которой проходит через центр масс системы (рис. Д2.10).

Проведём из точки *B* горизонтальную и вертикальную оси координат. Обозначим через x_1, x_2, и x_3 - координаты центра масс отдельных тел системы, находящейся в покое, и вычислим координату центра масс этой системы x_c по формуле:

$$x_c = \frac{\sum m_k \cdot x_k}{M}, \tag{1}$$

где: m_k - масса отдельных тел системы,

x_k - координаты центра масс этих тел.

Для заданной системы

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m\, x_3}{m_1 + m_2 + m}. \tag{2}$$

Так как проекция на ось *x* главного вектора внешних сил, действующих на систему, равна нулю и начальная скорость равна нулю, то согласно второму следствию теоремы о движении центра масс, координата x_c центра масс не изменяется. Отсюда следует, что при движении груза P_1 вдоль *AB* вниз, клин переместится вправо настолько, что центр масс системы останется на той же вертикали. Найдём новые координаты центров масс грузов $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ и $\vec{P}$, обозначив смещение клина через *x*, а смещение грузов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ вдоль плоскостей через *s*. Новые координаты отдельных тел системы обозначим через $x_1{}', x_2{}', x_3{}'$. Выразим их через координаты центров масс этих тел до перемещения:

$$\begin{aligned} x_1{}' &= x_1 - s\cos 30^\circ + x, \\ x_2{}' &= x_2 - s\cos 60^\circ + x, \\ x_3{}' &= x_3 + x. \end{aligned} \tag{3}$$

Координаты центра масс системы в этом положении с учётом выражений (2) и (3) определим следующим образом:

$$x_c' = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2 + m\, x'_3}{m_1 + m_2 + m} = \frac{m_1(x_1 - S\cos 30^\circ + x) + m_2(x_2 - S\cos 60^\circ + x) + m(x_3 + x)}{m_1 + m_2 + m}, \tag{4}$$

Так как координата по оси *X* центра масс системы не изменяется, то

$$x_c = x_c' = const.$$

С учётом уравнений (1) и (4) получим

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m x_3}{m_1 + m_2 + m} = \frac{m_1(x_1 - S\cos 30° + x) + m_2(x_2 - S\cos 60° + x) + m(x_3 + x)}{m_1 + m_2 + m}.$$

После преобразований

$$s \cdot \cos 30° \cdot m_1 + s \cdot \cos 60° \cdot m_2 = (m_1 + m_2 + m)x. \qquad (5)$$

Зная *h*, определим *S*

$$s = \frac{h}{\sin 60°} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2\text{м}. \qquad (6)$$

После подстановки заданных значений уравнение (3) примет вид:

$$0{,}2 \cdot 0{,}87 \cdot m_1 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot m_2 = (m_1 + m_2 + m)x = 0{,}17 \cdot m_1 + 0{,}1 \cdot m_2 + (m_1 + m_2 + m)x$$

.

Выражая значение *m* и m_2 через m_1, получим: $0{,}79 \cdot m_1 = 21 m_1 x$.
Откуда $x = \frac{0.79}{21} = 0{,}028$м.

Вопросы для индивидуальной защиты зсдания:

1. Центр масс твердого тела и системы.
2. Способы определения центра масс.
3. Дифференциальные уравнения движения системы.
4. Теорема о движении центра масс.
5.Следствия из теоремы о движении центра масс.
6.Закон сохранения движения центра масс.

11.4. Теорема об изменении количества движения системы

Количество движения системы (твердого тела).*Количеством движения системы называется векторная величина Q, равная геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы (рис. 10.3).*

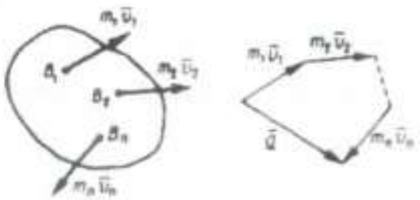


Рис. 10.3

Пользуясь этим определением, найдем формулу, с помощью которой значительно легче вычислять величину $\vec{Q}$, а также уяснить ее смысл. Из равенства (10.5) следует, что

$$\sum m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_c.$$

Беря от обеих частей производную по времени, получим

$$\sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = M\frac{d\vec{r}_c}{dt} \text{ или } \sum m_k \vec{V}_k = M\vec{V}_c.$$

Отсюда находим, что

$$\vec{Q} = M\vec{V}_c, \tag{11.7}$$

т.е. *количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.* Этим результатом особенно удобно пользоваться при вычислении количеств движения твердых тел.

Из формулы (11.7) видно, что если тело (или система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс, будет равно нулю.

Если же движение тела является сложным, то величина $\vec{Q}$ не будет зависеть от его вращательного движения вокруг центра масс. Например, для катящегося колеса $\vec{Q} = M\vec{V}_c$ независимо от того, как вращается колесо вокруг его центра масс C.

Таким образом, количество движения можно рассматривать как характеристику поступательного движения системы (тела), а при сложном движении - как характеристику поступательной части движения вместе с центром масс.

Рассмотрим систему, состоящую из *n* материальных точек. Составим для этой системы дифференциальные уравнения движения (11.2). Левую часть выразим через количество движения системы:

$$\sum m_k \vec{a}_k = \frac{d}{dt}\sum m_k \vec{V}_k = \frac{d\vec{Q}}{dt}.$$

Окончательно уравнение (11.2) примет вид:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e. \quad (11.8)$$

Уравнение (11.8) выражает теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.* В проекциях на координатные оси получим:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \quad (11.9)$$

Найдем другое выражение теоремы. Пусть в момент времени $t=0$ количество движения системы равно $\vec{Q}_0$,а в момент t_1 становится равным $\vec{Q}_1$. Тогда, умножая обе части равенства (11.8) на dt и интегрируя в пределах изменения переменных, получим

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \int_0^t \vec{F}_k^e dt$$

или

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e. \quad (11.10)$$

Уравнение (11.10) выражает теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме: изменение количества *движения системы за любой промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.*

В проекциях на координатные оси будет:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e. \quad (11.11)$$

Укажем на связь между доказанной теоремой и теоремой о движении центра масс. Так как $\vec{Q} = M\vec{V}_c$ то, подставляя это значение в равенство (11.8) и учитывая, что по $\frac{d\vec{V}_c}{dt} = \vec{a}_c$, получим, что $M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e$, т.е. уравнение (11.4).

Следовательно, теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения системы представляют собой, по существу, две разные формы одной и той же теоремы. В тех случаях, когда изучается движение твердого тела (или системы тел), можно в равной мере пользоваться любой из этих форм, причем уравнением $M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e$ обычно пользоваться удобнее. Для, непрерывной же среды (жидкость, газ) при решении задач обычно пользуются теоремой об изменении количества движения системы.

Практическая ценность теоремы состоит в том, что она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы (например, силы давления друг на друга частиц жидкости).

11.5 Закон сохранения количества движения

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия.

1. Пусть сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\sum \vec{F}_k^e = 0.$$

Тогда из уравнения (11.8) следует, что при этом $\vec{Q}$ = *const*. Таким образом, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.*

2. Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, *Ox)* равна нулю:

$$\sum \vec{F}_{k_x}^e = 0.$$

Тогда из уравнений (11.9) следует, что при этом *Qx* = *const*. Таким образом, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.*

Эти результаты и выражают *закон сохранения количества движения системы:* никакими внутренними силами нельзя изменить количество движения системы.

11.6. Теорема об изменении главного момента количества движения системы (теорема моментов)

Момент количества движения системы. Главный момент количества движения системы с учетом уравнения (9.14) относительно центра *O* будет равен геометрической сумме моментов количества движения всех точек этой системы:

$$\vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0 \left(m_k \vec{V}_k\right). \qquad (11.12)$$

На основании соответствующей теоремы статики (проекция вектора момента силы на любую ось равна моменту силы относительно оси), уравнения (11.12) в проекции на координатные оси будет иметь вид:

$$K_x = \sum m_x \left(m_k \vec{V}_k\right), K_y = \sum m_y \left(m_k \vec{V}_k\right), K_z = \sum m_z \left(m_k \vec{V}_k\right). \qquad (11.13)$$

Тогда по величине главный момент количества движения системы можно определить через его проекции на координатные оси по известной формуле:

$$K_0 = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}. \qquad (11.14)$$

В технике наиболее часто применяется момент количества движения (кинетический момент) относительно оси вращения. Его величина равна:

$$K_z = J_z \cdot \omega, \qquad (11.15)$$

т.е. кинетический момент любой системы относительно оси вращения равен произведению момента инерции системы (твердого тела) относительно этой оси на угловую скорость.

Для обоснования формулы (11.15) вычислим (так же как и для момента силы) кинематический момент произвольной точки тела массы $m_к$, находящейся от оси вращения *Oz* на расстоянии $h_к$:

$$m_z\left(m_k \vec{V}_k\right) = m_k \cdot V_k \cdot h_k.$$

Кинетический момент всего тела будет равен

$$K_z = \sum m_k \cdot V_k \cdot h_k.$$

Заменяя $V_k = \omega \cdot h_k$, и вынося ω за знак суммы, получим:

$$K_z = \omega \cdot \sum m_k \cdot {h_k}^2 \text{ или } K_z = J_z \cdot \omega.$$

Следует заметить, что формула (11.15) по физической сути идентична формуле (11.7). При поступательном движении учитывается динамическая характеристика - количество движения ($\vec{Q} = M \cdot \vec{V}_c$), при вращении - кинетический момент ($K_z = J_z \cdot \omega$).

Теорема моментов для одной материальной точки (параграф 9.4) будет справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой m_k, имеющую скорость $\vec{V}k$, то для нее будет:

$$d/dt\left[\vec{m}_0\left(m_k\vec{V}_k\right)\right] = \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^i).$$

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим

$$d/dt\left[\sum\vec{m}_0\left(m_k\vec{V}_k\right)\right] = \sum\vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \sum\vec{m}_0(\vec{F}_k^i).$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы равна нулю. Тогда, учитывая равенство (11.12), окончательно получим

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum\vec{m}_0(\vec{F}_k^e). \tag{11.16}$$

Уравнение (11.16) выражает следующую теорему моментов для системы: *производная по времени от главного момента количества движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.* Проектируя обе части равенства (11.16) на неподвижные оси *Oxyz*, получим:

$$\frac{dK_{0x}}{dt} = \sum m_x(\vec{F}_k^e),\ \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y(\vec{F}_k^e),\ \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_k^e). \tag{11.17}$$

Уравнения (11.17) *выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.*

11.7 Закон сохранения главного момента количества движения

Из теоремы моментов можно получить такие следствия.

1. Пусть сумма моментов относительно центра *O* всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, т.е.

$$\sum\vec{m}_0(\vec{F}_k^e) = 0.$$

Тогда из уравнения (11.16) следует, что при этом $\vec{K}_0$=*const,* Таким образом, *если сумма моментов относительно данного центра приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количества движения системы относительно этого центра будет постоянным по величине и по направлению.*

2. Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их моментов относительно некоторой неподвижной оси *Oz* равна нулю:

$$\sum m_z(\vec{F}_k^e) = 0.$$

Тогда из уравнений (11.17) следует, что при этом K_z =*const.* Таким образом, *если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количества движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.*

Эти результаты выражают собой *закон сохранения главного момента количества движения системы.* Из них следует, что внутренние силы изменить главный момент количества движения системы не могут.

Случай вращающейся системы. Рассмотрим систему, вращающуюся вокруг неподвижной (или проходящей через центр масс) оси z. Тогда кинетический момент относительно этой оси $K_z = J_z \cdot \omega$. Если в этом случае $\sum m_z(\vec{F}_k^e) = 0$, то $J_z\omega = const$.

Отсюда приходим к следующим выводам:

а) если система *неизменяема* (абсолютно твердое тело), то $J_z = const$ и, следовательно, $\omega = const$, т.е. твердое тело, закрепленное на оси, вращается в этом случае с постоянной угловой скоростью;

б) если система *изменяема,* то под действием внутренних (или внешних) сил отдельные ее точки могут удаляться от оси, что вызывает увеличение J_z, или приближаться к оси, что приведет к уменьшению J_z. Но поскольку $J_z\omega = const$, то при увеличении момента инерции угловая скорость системы будет уменьшаться, а при уменьшении момента инерции - увеличиваться. Таким образом, действием внутренних сил можно изменить угловую скорость системы, так как постоянство K_z не означает вообще постоянства ω.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА Д3

Однородный сплошной диск радиуса *R* и массы m_1 вращается вокруг вертикальной оси *OZ*. На диске находится ползун *Д* с массой m_2, который может перемещаться по диску в радиальных направляющих. Диску сообщена начальная угловая скорость ω_0 . Зная закон относительного движения ползуна $S = Д_0Д = f(t)$, определить угловую скорость диска через *t* секунд после начала относительного перемещения ползуна. Трением пренебречь (рис. Д3).

Данные для различных вариантов сведены в таблицу Д3.

Таблица Д3

Номер варианта	m_1, *КГ*	m_2, *КГ*	*R*, *м*	ω_0, c^{-1}	t, с	*S*, *м*
0	25	15	0,6	3	2	$0.8(1-\cos\frac{\pi\cdot t^2}{12})$
1	30	15	0,8	2	1	$0.4\sin\frac{\pi\cdot t}{2}$
2	35	20	0,8	3	1	$0.2(t^3+t^2)$
3	40	20	1,0	2	2	$\sin\frac{\pi\cdot t^2}{24}$
4	45	25	1,0	4	2	$0.1t^3$
5	50	25	1,2	2	4	$0.1t^4$
6	55	30	1,2	3	1	$1.6\sin\frac{\pi\cdot t^2}{26}$
7	60	35	1,4	2	3	$2(1-\cos\frac{\pi\cdot t}{9})$
8	65	35	1,4	3	4	$4\sin^2\frac{\pi\cdot t}{24}$
9	62	34	0,5	2	1	$4\sin^3\frac{\pi\cdot t^2}{12}$
10	20	10	0,6	2	1	$0.4t^2$

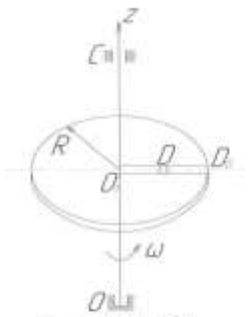


Рис. Д 3.0-3.9

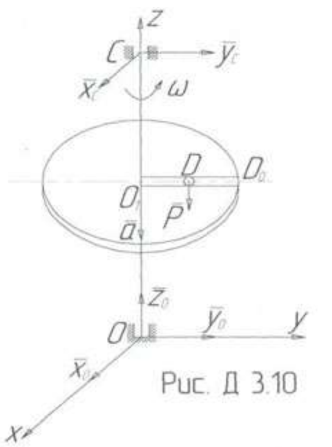


Рис. Д 3.10

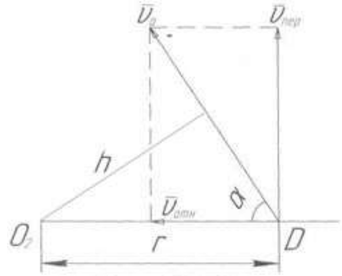


Рис. Д 3.11

Пример решения задачи Д3 для варианта 10

<u>Решение:</u> Задача Д3 на применение теоремы о кинетическом моменте системы. Проведём оси координат *Oxyz,* как показано на рисунке Д3.10. Рассмотрим механическую систему, состоящую из диска и ползуна. Внешними силами, действующими на систему, являются вес диска $\vec{Q}$, вес

ползуна $\vec{P}$, реакции подшипника: О - $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$, $\vec{Z}_0$ и подшипника С - $\vec{X}c$, $\vec{Y}c$. Так как реакции опор пересекают ось Z, а силы тяжести $\vec{Q}$ и $\vec{P}$ параллельны оси *Z*, то алгебраическая сумма моментов внешних сил, действующих на систему относительно оси вращения Z, равна нулю, т.е.

$$M_z^e = 0,$$

где M_z^e - главный момент внешних сил.

Применяя теорему об изменении кинетического момента относительно оси *Oz*, будем иметь:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e, \tag{1}$$

Вследствие того, что $M_z^e = 0$, то $\frac{dK_z}{dt} = 0$ и $K_z = const$.

Следовательно, кинетический момент $(K_z)_{t_0}$ до начала движения ползуна должен быть равен кинетическому моменту $(K_z)_t$ в любой момент времени: $(K_z)_{t_0} = (K_z)_t$.

Определим K_z системы. Кинетический момент системы равен:

$$K_z = K_{z_\partial} + K_{z_n}, \tag{2}$$

где K_{z_∂} - кинетический момент диска,
K_{z_n} - кинетический момент ползуна.

$$K_{z_\partial} = J_{z_\partial} \cdot \omega_0, \tag{3}$$

где J_{z_0} - момент инерции диска относительно оси Z.

$$J_{z_\partial} = \frac{1}{2} m_1 \cdot R^2,$$

$$K_{z_\partial} = \frac{1}{2} m_1 \cdot R^2 \cdot \omega_0, \tag{4}$$

$$K_{z_n} = m_2 \cdot V_a \cdot h, \tag{5}$$

где *h* - плечо вектора количества движения ползуна Д.
Va - абсолютная скорость ползуна.

Так как в начальный момент относительная скорость движения ползуна равна нулю, то абсолютная скорость ползуна равна скорости ползуна в переносном движении:

$$V_a = \omega_0 \cdot R. \quad (6)$$

Подставляя уравнение (6) в выражение (5), получим $K_{z_n} = m_2 \omega_0 R^2$, следовательно, кинетический момент при *t = 0*:

$$(K_z)_{t_0} = \frac{1}{2} m_1 R^2\, \omega_0 + m_2 \omega_0 R^2 = \omega_0 R^2 \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2\right) =$$
$$= 2 \cdot 0{,}6^2 \left(\frac{1}{2} 20 + 10\right) = 14{,}4 \text{кгм}^2 \text{с}^{-1}. \quad (7)$$

Определим кинетический момент системы (K_z) через t секунд после начала движения ползуна:

$$K_{z_\partial} = J_z \cdot \omega = \frac{1}{2} m_1 \cdot R^2 \cdot \omega = \frac{1}{2} 20 \cdot 0{,}6^2 \omega = 3{,}6\omega \text{ кгм}^2 \text{с}^{-1}$$

$$K_{z_n} = m_2 \cdot V_a \cdot h. \quad (8)$$

В данный момент времени ползун находится на расстоянии r от центра диска: *r=R-S, St=0,4t*^{2}*=0,4м, r=0,6-0,4=0,2м.*

Ползун совершает сложное движение, абсолютная скорость определяется по формуле (рис. Д3.11).

$$\vec{V}_a = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_{\text{пер}}, \quad (9)$$

где $\vec{V}_{\text{отн}}$ - вектор относительной скорости ползуна,
$\vec{V}_{\text{пер}}$, - вектор переносной скорости ползуна.

Относительная скорость определяется:

$$V_{\text{отн}} = \frac{dS}{dt}, \quad (10)$$

Переносная скорость определяется:

$$V_{\text{пер}} = \omega_{\text{пер}} \cdot r. \quad (11)$$

Определим h, используя рисунок Д3.11.

$$h = r \cdot \sin \alpha. \quad (12)$$

где α - угол между векторами: $\vec{V}_a$ и $\vec{V}_{\text{пер}}$.

Из рисунка Д3.11

$$\sin\alpha = \frac{V_{\text{пер}}}{V_a}, \qquad (13)$$

Тогда

$$h = r \cdot \frac{V_{\text{пер}}}{V_a}. \qquad (14)$$

Кинетический момент ползуна через *t* секунд равен:

$$(K_{zn})_t = m_2.V_a h. = m_2.V_a r \frac{V_{\text{пер}}}{V_a} = m_2 r^2 \omega = 10 \cdot 0{,}2^2 \omega = 0{,}4\omega \text{ кгм}^2\text{с}^{-1}.$$

Кинетический момент системы через *t* секунд равен:

$$(K_z)_t = 3{,}6\omega + 0{,}4\omega = 4\omega \text{ кгм}^2\text{с}^{-1}.$$

Приравниваем значения кинетического момента: $(K_z)_{t_0} = (K_z)_t$, получим:

$$14{,}4 = 4\omega.$$

Отсюда найдём искомую угловую скорость диска через *t* секунд:

$$\omega = \frac{14{,}4}{4} = 3{,}6\text{с}^{-1}. \qquad (15)$$

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. **Количество движения точки и системы.**
2. **Кинетический момент точки и системы.**
3. **Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения.**
4. **Теорема об изменении кинетического момента относительно цетра.**
5. **Теорема об изменении кинетического момента относительно оси вращения.**
6. **Дифференциальное уравнение вращения.**
7. **Закон сохранения кинетического момента.**

11.8. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическая энергия системы.

Кинетической энергией системы называется скалярная величина T, равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum m_k V_k^2/2. \tag{11.18}$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного, и вращательного движений системы. Главное отличие величины T от введенных ранее характеристик $\vec{Q}$ *и* $\vec{K}o$ состоит в том, что кинетическая энергия является величиной скалярной и притом существенно положительной. Поэтому она не зависит от направлений движения частей системы и не характеризует изменение этих направлений.

Если система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий этих тел, т.е., $T_{\text{сист}} = \sum T_k$.

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии тела для разных случаев движения.

1. Поступательное движение. В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс. Следовательно, для любой точки *Vk*=*Vc* и формула (11.18) дает

$$T_{\text{пост}} = \sum m_k V_k^2/2 = (\sum m_k) V_C^2/2$$

или

$$T_{\text{пост}} = M V_C^2/2. \tag{11.19}$$

Таким образом, *кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.*

2. Вращательное движение. Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси *Oz*, то скорость любой его точки $V_k = \omega h_k$, где h_k - расстояние точки до оси вращения, а ω - угловая скорость тела. Поставляя это значение в формулу (11.18) и вынося общие множители за скобки, получим

$$T_{\text{вр}} = \sum m_k \omega^2 h_k^2/2 = (\sum m_k h_k^2)\omega^2/2.$$

Величина, стоящая в скобках, представляет собой момент инерции тела относительно оси *z*. Таким образом, окончательно найдем

$$T_{\text{вр}} = J_z \omega^2/2, \tag{11.20}$$

т.е. *кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.*

3 Плоскопараллельное движение. При этом движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей p (рис. 11.1). Следовательно, по формуле (11.20)

$$T_{\text{плоск}} = J_p \omega^2/2, \quad (11.21)$$

где J_p - момент инерции тела относительно названной выше оси;
ω - угловая скорость тела.

Величина J_p будет переменной, так как положение центра p при движении тела все время меняется. Введем вместо J_p постоянный момент инерции J_c относительно оси, проходящей через центр масс С тела. По теореме Гюйгенса (10.4) $J_p = J_c + M \cdot d^2$, где $d^2 = PC$. После преобразований уравнения (11.21), получим:

$$T_{\text{плоск}} = MV_C^2/2 + J_c \omega^2/2.$$

Следовательно, *при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс (рис. 11.2).*

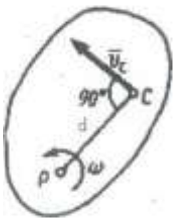


Рис. 11.1

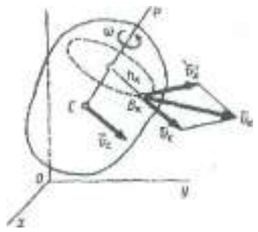


Рис. 11.2

Доказанная в параграфе (9.4) теорема (формула 9.29) справедлива для любой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть какую-нибудь точку системы с массой *mк*, имеющую скорость *Vk* , то для этой точки будет

$$d(m_k V_k^2/2) = dA_k^e + dA_k^i,$$

где dA_k^e и dA_k^i - элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил. Составляя такие уравнения для каждой из точек системы и складывая их почленно, найдем:

$$d(\sum m_k V_k^2/2) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

или

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i. \quad (11.22)$$

Равенство (11.22) выражает *теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.* Проинтегрировав обе части этого равенства в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия равна T_0, в положение, где значение кинетической энергии становится равным T_1, получим

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \tag{11.23}$$

Это уравнение выражает теорему об изменении кинетической анергии в другой (интегральной) форме: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.*

Рассмотрим два важных частных случая.

1. Если система неизменяемая, то $\sum A_k^i = 0$ и уравнения (11.22) и (11.23) примут вид:

$$dT = \sum A_k^e \text{ и } T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \tag{11.24}$$

2. Если система в т.ч. имеет идеальные связи, для которых $\sum A_k^r = 0$, то теорема используется в такой форме:

$$dT = \sum A_k^a \text{ и } T_1 - T_0 = \sum A_k^a. \tag{11.25}$$

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
Задача Д4

К грузу *А* массой m_1 прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок *Д* массой m_2 и намотанная на боковую поверхность цилиндрического катка *В* массой m_3. При движении груза *А* вниз по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, вращается блок *Д*, а каток *В* катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол β Определить скорость груза *А* в зависимости от пройденного им пути *S*, если в начальный момент система находилась в покое.

Блок *Д* и каток *В* считать однородными круглыми цилиндрами. Силами трения и весом нити пренебречь.

Данные для различных вариантов сведены в таблицу Д4.

Таблица Д4

Номер варианта	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	α, *Рад*	β, *рад*	*S*, *м*	$R_Д$, *м.*	R_β, *м.*
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	m	m/2	2m	$\pi/3$	$\pi/4$	4	0,20	0,30
1	m	m/4	3m	$\pi/3$	$\pi/6$	6	0,25	0,35
2	m	m/3	4m	$\pi/4$	$\pi/6$	7	0,15	0,30

3	m	m/4	3m	$\pi/4$	$\pi/6$	2	0,20	0,40
4	m	m/4	3m	$\pi/4$	$\pi/6$	2	0,15	0,25
5	m	m/2	4m	0	$\pi/3$	3	0,16	0,30
6	m	m/3	2m	0	$\pi/4$	4	0,10	0,25
7	m	m/4	3m	0	$\pi/6$	5	0,20	0,15
8	m	m/3	2m	$\pi/4$	$\pi/4$	3	0,30	0,20
9	m	m/2	3m	$\pi/6$	$\pi/3$	5	0,10	0,40
10	m	m/4	2m	π **/3**	$\pi/6$	6	0,40	0,50

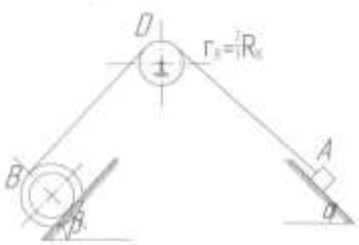


Рис. Д 4.0–4.1

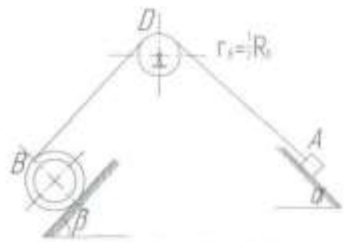


Рис. Д 4.2–4.3

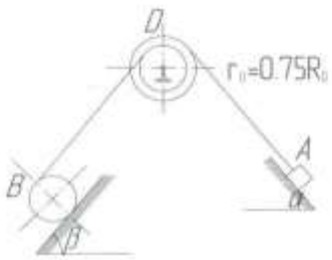


Рис. Д 4.4–4.5

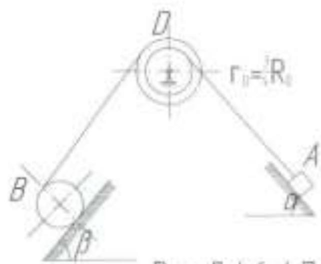


Рис. Д 4.6–4.7

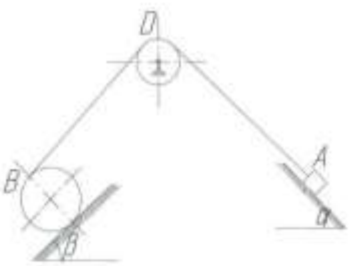


Рис. Д4.8-4.10

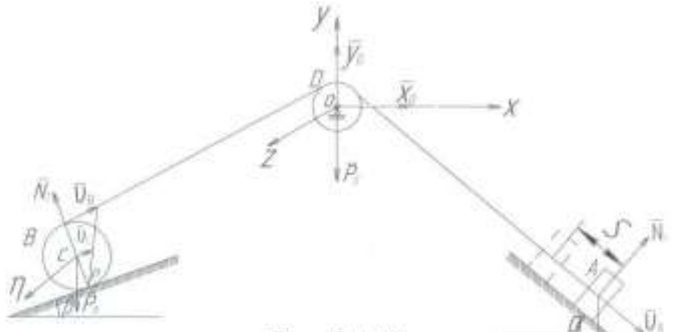


Рис. Д 4.11

<u>Решение:</u> Задача Д4 на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы.

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e, \qquad (1)$$

где T_0 и T_1 - кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях,

$\sum A_k^e$ - сумма работ всех внешних сил, приложенных к системе.

Так как в начале система находилась в покое, то $T_0 = 0$, следовательно уравнение (1) имеет вид:

$$T_1 = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Определим кинетическую энергию системы T_1 в конечном её положении. Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий тел *А, В* и *Д:*

$$T_1 = T_a + T_в + T_∂. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия груза *А,* движущегося поступательно:

$$T_a = \frac{m_a V_a^2}{2}.$$

Кинетическая энергия блока Д.

$$T_∂ = \frac{J_z \omega_z^2}{2},$$

где J_z - момент инерции блока *Д* относительно горизонтальной оси *Oz,* проходящей через его центр тяжести.

$$J_z = \frac{1}{2} m_\partial r_\partial^2, \quad (4)$$

где r_∂ - радиус блока Д
С учётом значений момента инерции блока, кинетическая энергия блока:

$$T_\partial = \frac{1}{4} m_\partial . r_\partial^2 \cdot \omega_\partial^2, \quad (5)$$

где ω_∂– угловая скорость блока Д.
Так как при вращении скорость точек обода блока Д равна скорости движения сходящей с блока нити, то:

$$r_\partial \cdot \omega_\partial = V_a .$$

Тогда:

$$T_\text{в} = \frac{1}{4} m_\partial V_a^2 . \quad (5')$$

Кинетическая энергия катка *В,* совершающего плоское движение:

$$T_\text{в} = \frac{m_\text{в} V_C^2}{2} + \frac{J_\eta \omega_\text{в}^2}{2},$$

где V_c - скорость центра тяжести *С* катка;
J_η - момент инерции катка относительно его центральной продольной оси C_η;
$\omega_\text{в}$ - угловая скорость катка.
Момент инерции катка определяется:

$$J_\eta = \frac{1}{2} m_\text{в} \cdot r_\text{в}^2 .$$

Выразим скорость V_c и угловую скорость $\omega_\text{в}$ через скорость груза *А. При вращении* скорость точек обода катка *В* равна скорости движения сходящей с блока нити и следовательно:

$$V_\text{в} = V_a .$$

Мгновенный центр скоростей катка *В* находится в точке *р.* Следовательно:

$$\omega_\text{в} = \frac{V_\text{в}}{2 r_\text{в}} = \frac{V_a}{2 r_\text{в}},$$

$$V_c = \frac{V_a}{2}.$$

С учётом этого кинетическая энергия катка равна:

$$T_в = \frac{m_в}{2}\cdot\frac{V_a^2}{4} + \frac{1}{4}m_в r_в^2 \omega_в^2 = m_в\frac{V_a^2}{8} + \frac{1}{4}\,m_в\frac{V_a^2}{4} = \frac{3}{16}m_в V_a^2. \quad (6)$$

После подстановки значений T_a, $T_в$, $T_д$ в уравнение (3) кинетическая энергия системы

$$T_1 = \frac{m_a V_a^2}{2} + \frac{1}{4}m_д V_a^2 = V_a^2\left(\frac{m}{2} + \frac{1\cdot m}{4\cdot 4} + \frac{3\cdot 2m}{16}\right) = \frac{15}{16}mV_a^2 = 0{,}937mV_a^2. \quad (7)$$

Найдём сумму работ всех сил, приложенных к системе на заданном её перемещении *S*.

На груз *А* действуют силы: вес $\vec{P}_a$ и нормальная реакция плоскости $\vec{N}_1$, (рис. Д4.11).

На блок Д действуют силы: вес $\vec{P}_д$ и составляющие реакции подшипника $\vec{x}_0$ и $\vec{y}_0$.

На каток *В* действуют силы: вес $\vec{P}_в$ и нормальная реакция плоскости $\vec{N}_2$

Работа нормальных реакций $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ равна нулю.

Силы $\vec{P}_д, \vec{x}_0$ и $\vec{y}_0$ не производят работы, так как приложены к неподвижной точке.

Работа силы P_a определяется:

$$A_a = P_a \cdot S \cdot \sin\alpha. \quad (8)$$

Работа силы $P_в$ определяется:

$$A_в = -P_в \cdot \frac{S}{2} \cdot \sin\beta. \quad (9)$$

Работа крутящего момента

$$A_k = -M_k \cdot \varphi = -M_k \cdot \frac{S}{r_д}. \quad (10)$$

Сумма работ всех сил, приложенных к рассматриваемой системе, и момента M_k равна:

$\sum A_k^e = P_a \cdot S \cdot \sin\alpha - P_в \cdot \frac{S}{2} \cdot \sin\beta - M_k \cdot \frac{S}{r_э} =$
$S\left(g \cdot m_a \sin\alpha - g \cdot \frac{m_в}{2} \sin\beta - \frac{M_k}{r_э}\right) = S\left(g \cdot m \cdot 0{,}87 - mg0{,}5 - \frac{40}{0{,}4}\right) = 0{,}37mgS$
.

Приравняв значения T_1 и $\sum A_k^e$, получим:

$$0{,}937m \cdot V_a^2 = \left(0{,}367mg - \frac{M_k}{r_э}\right) - S.$$

Откуда, при m=10кг

$$V_B = \sqrt{\frac{0{,}367}{0{,}937} gS} = \sqrt{\frac{0{,}367 \cdot 9{,}81 \cdot 6}{0{,}937}} = 4{,}08 \text{м/с}. \qquad (11)$$

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Кинетическая энергия точки и системы.
2. Работа силы: тяжести, трения, упругости.
3. Работа силы, приложенной к телу вращения.
4. Аналитическая формула вычисления работы силы.
5. Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной и интегральной форме.
6. Теорема об изменении кинетической энергии для неизменяемых систем и систем с идеальными связями.

Раздел четвертый АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава 12

Принцип Даламбера

12.1. Принцип Даламбера для точки и механической системы

Принцип Даламбера является одним из общих принципов механики, которые позволяют другим, более эффективным способом, решать задачи динамики.

Этот принцип вытекает из основного закона Ньютона. Уравнение (9.3) можно представить для несвободной материальной точки в форме:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k^a + \vec{N}, \qquad (12.1)$$

где $\vec{F}_k^a$ - активные силы, вызывающие движение точки;
$\vec{N}$ - реакция наложенной связи.

В неявном виде уравнение (12.1) будет иметь вид:

$$\sum \vec{F}_k^a + \vec{N} + (-m\vec{a}) = 0.$$

Вектор $(-m\vec{a})$ назван силой инерции $\vec{F}^и$:

$$\vec{F}^и = -m \cdot \vec{a}. \qquad (12.2)$$

Из формулы (12.2) следует, что сила инерции точки по модулю равна произведению массы точки на ее ускорение и направлена противоположно ускорению. Уравнение (12.1) с учетом (12.2) имеет вид:

$$\vec{F}^a + \vec{N} + \vec{F}^и = 0. \qquad (12.3)$$

Эта формула выражает *принцип Даламбера для материальной точки.* Если к активным силам и реакции связи добавить возникающую при движении точки силу инерции, то совокупность этих сил можно рассматривать в состоянии равновесия.

Рассмотрим теперь механическую систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы массой m_k. Под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$ (в которые входят и активные силы, и реакции связей) точка будет двигаться по отношению к инерциальной системе отсчета с некоторым ускорением $\vec{a}_k$. Введя для этой точки силу инерции $\vec{F}_k^и = -m_k\vec{a}_k$, получим согласно равенству (12.3), что

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^и = 0 \qquad (12.4)$$

Рассматривая все точки системы, получаем следующий результат, выражающий *принцип Даламбера для системы: если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил добавить возникающие силы инерции, то полученная система сил может рассматриваться уравновешенной и к ней можно применять все уравнения статики.*

Из статики известно, что в общем случае геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра O равны нулю. Это справедливо для сил, действующих не только на твердое тело, но и на любую изменяемую механическую систему. Тогда на основании принципа Даламбера для всех точек системы должно быть:

$$\sum(\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^u)=0,$$

$$\sum\left[\vec{m}_0\left(\vec{F}_k^e\right) + \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^i\right) + \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^u\right)\right] = 0. \tag{12.5}$$

Введем обозначения:

$$\vec{R}^u = \sum \vec{F}_k^u, \vec{M}_0^u = \sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^u\right). \tag{12.6}$$

Величины $\vec{R}^u$, $\vec{M}_0^u$ представляют собой *главный вектор и главный момент сил инерции системы относительно центра О.* В результате, учитывая, что геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов равны нулю, получим из равенств (12.5):

$$\sum \vec{F}_k^e + \vec{R}^u = 0, \sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k^u\right) + \vec{M}_0^u = 0. \tag{12.7}$$

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при непосредственном его применении к задачам динамики уравнения движения системы составляются в форме хорошо известных уравнений равновесия в статике. Это делает единообразным подход к решению задач и часто упрощает соответствующие расчеты.

12.2. Главный вектор и главный момент сил инерции

Сравнивая первое из равенств (12.7) с уравнением, выражающим теорему о движении центра масс $\sum \vec{F}_k^e = M_k \vec{a}_c$, найдем, что

$$\vec{R}^u = -M\vec{a}_c, \tag{12.8}$$

т. е. *главный вектор сил инерции механической системы (в частности, твердого тела) равен произведению массы системы (тела) на ускорение центра масс и направлен противоположно этому ускорению.*

Если ускорение $\vec{a}_c$ разложить на касательное и нормальное, то вектор $\vec{R}^u$ разложится на составляющие

$$\vec{R}_\tau^u = -M\vec{a}_{c_\tau}, \vec{R}_n^u = -M\vec{a}_{c_n}. \tag{12.9}$$

Сравнив теперь второе из равенств (12.7) с уравнением, выражающим теорему моментов $\frac{d\vec{k}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e)$, и учтя, что аналогичным будет соотношение для моментов относительно оси, получим:

$$\vec{M}_o^u = -\frac{d\vec{K}_o}{dt} \text{ и } \vec{M}_z^u = -\frac{d\vec{K}_z}{dt} \quad , \qquad (12.10)$$

т.е. *главный момент сил инерции механической системы (твердого тела) относительно некоторого центра O или оси z равен взятой со знаком минус производной по времени от кинетического момента системы (тела) относительно того же центра или оси.*

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Поступательное движение. В этом случае ускорения всех точек тела одинаковы и равны ускорению $\vec{a}_c$ центра масс *C* тела $(\vec{a}_k = \vec{a}_c)$, тогда угловое ускорение $\varepsilon = 0$, а главный момент сил инерции относительно центра масс из уравнения (12.10) будет равен нулю, т.к.

$$\vec{M}_C^u = -\frac{dK_C}{dt} = -I_C \quad \cdot \vec{\varepsilon} = 0. \qquad (12.11)$$

Таким образом, при поступательном движении

$$\vec{R}^u = -M\vec{a}_c. \qquad (12.12)$$

т.е. при поступательном движении силы инерции твердого тела приводятся к главному вектору сил инерции $\vec{R}^u$, равному произведению массы тела на ускорение центра масс тела, приложенному в центре масс и направленному противоположно ускорению.

2. Вращательное движение. Пусть твердое тело имеет плоскость материальной симметрии *Oxy* и вращается вокруг оси *Oz*, перпендикулярной этой плоскости (рис. 12.1, где показано сечение тела плоскостью *Oxy).* Если привести силы инерции к центру O, то вследствие симметрии результирующая сила и пара будут лежать в плоскости *Oxy* и момент пары будет равен $\vec{M}_0^u$. Тогда главный вектор сил инерции и главный момент сил инерции будут равны:

$$\vec{R}^u = -M\vec{a}_c, \qquad (12.12')$$

$$\vec{M}_o^u = -\frac{d\vec{K}_o}{dt} = -J_0 \cdot \vec{\varepsilon} \qquad (12.13)$$

Следовательно, система сил инерции такого вращающегося тела приводится к силе $\vec{R}^u$, определяемой формулой (12.12) и приложенной в точке O (рис. 6), и к паре с моментом $\vec{M}_0^u$, определяемым формулой (12.13), лежащей в плоскости симметрии тела.

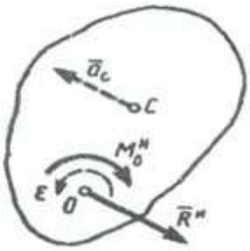


Рис. 12.1

2.1. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела. Если тело вращается вокруг оси C_z, проходящей через центр масс C тела, то $\vec{R}^u = 0$, так как $\vec{a}_c = 0$. Следовательно, в этом случае система сил инерции тела приводится только к одной паре с моментом $M_{c_z}^u$, лежащей в плоскости симметрии тела, т. е:

$$\vec{M}_c^u = -J_c \cdot \vec{\varepsilon}. \qquad (12.14)$$

2.2. Вращение вокруг оси O_z, смещенной относительно центра масс. Исходя из уравнений (12.12') и (12.13) получим

$$\vec{R}^u = -M\vec{a}_c \text{ и } \vec{M}_o^u = -J_0 \cdot \vec{\varepsilon}. \qquad (12.15)$$

3. <u>Плоскопараллельное движение</u>: Если тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно этой плоскости, то, очевидно, система сил инерции тела приведется к лежащим в плоскости симметрии силе, равной $\vec{R}^u$ и приложенной в центре масс С тела, и паре с моментом $\vec{M}_{C_z}^u = -J_{C_z} \cdot \vec{\varepsilon}$. Модуль момента $M_{C_z}^u = J_C \cdot \varepsilon$, а его направление, противоположно направлению углового ускорения ε.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА Д5

Ломаный стержень *EDK* с точечным грузом в точке *K* жёстко соединён с валом *AB*. Вал вращается равномерно вокруг оси *By* с угловой скоростью ω. Найти реакции подшипника *A* и подпятника *B*, если $EA = a$; $BE = d$; $ED = l_1$; $DK = l_2$; масса стержня *ED* - m_1; масса стержня *DK* - m_2; масса точечного груза - m_3. Если масса $m_2 = 0$, стержень изображать на схеме, считая его невесомым, если $m_3 = 0$, точечный груз не изображать на схеме.

Данные для различных вариантов приведены в таблице Д5.

Таблица Д5

Номер вариант	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	ω, c^{-1}	l_1, *м*	l_2, *м*	*a, м*	*d, м*	*α, град*
0	10	5	0	5	1	0,5	0,2	0,8	30
1	7	0	3	4	0,5	0,25	0,4	0,12	45
2	8	2	0	8	4	1	0,2	0,6	60
3	6	2	3	7	0,6	0,2	0,1	0,5	30
4	5	1	0	6	1	0,2	0,2	0,8	45
5	4	0	5	2	2	1	0,4	0,6	60
6	6	2	0	1	0,9	0,3	0,3	0,2	60
7	12	3	0	4	1,2	0,3	0,4	0,5	45
8	20	5	0	5	0,8	0,2	0,1	0,6	30
9	10	0	6	2	1	0,5	0,4	0,6	60
10	18	6	4	10	0,3	0,2	0,2	0,6	30

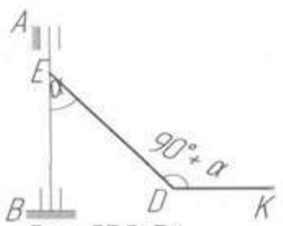


Рис. Д5.0–5.1

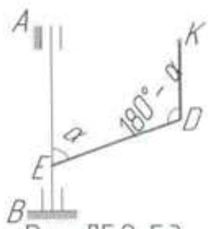


Рис. Д5.2–5.3

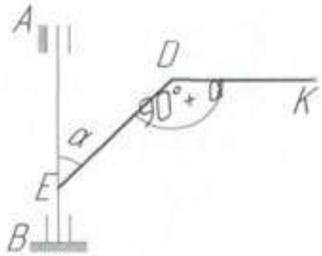


Рис. Д5.4–5.5

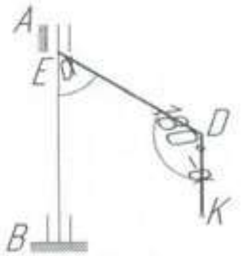


Рис. Д5.6–5.7

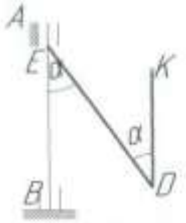


Рис. Д5.8–5.9

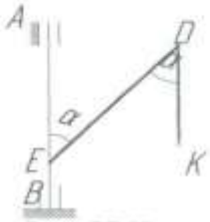
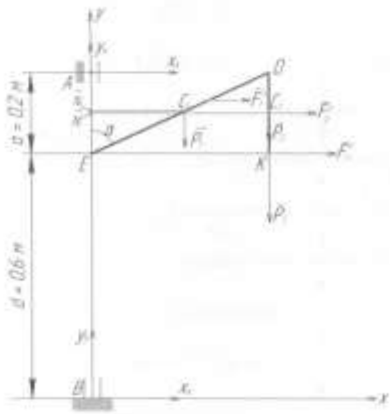


Рис. Д5.10



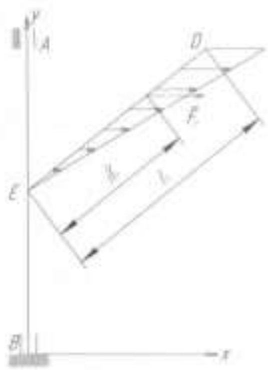


Рис. Д5.11 Рис. Д5.12

Пример решения задачи Д5 для варианта 10. Определить реакции подшипников *A и B* для схемы (рис. Д5.10).

<u>Решение:</u> Задача Д5 на применение принципа Даламбера. Покажем на схеме (рис. Д5.11) действующие на систему силы: $\vec{P}_1$, - вес стержня *ED;* $\vec{P}_2$ вес стержня *DK;* $\vec{P}_3$ - вес точечного груза *K; XA, YB, XB* - реакции подшипников.

К действующим на систему силам добавляем силы инерции. При равномерном вращении возникнут только нормальные силы инерции (касательные силы инерции в этом случае отсутствуют).

Сила инерции, возникающая при вращении стержня *ED,* по величине будет равна:

$$F_1^u = m_1 \cdot a_{c_1}^n = m_1 \cdot \omega^2 \cdot C_1N_1 = m_1 \cdot \omega^2 \cdot \frac{l_1}{2} \sin 30° = 18 \cdot 100 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}5 = 135\text{Н}, \quad (1)$$

где $a_{c_1}^n$ - нормальное ускорение точки C_1; $a_{c_1}^n = \omega^2 \cdot h_1 = \omega^2 \cdot C_1N_1$;

C_1 - центр масс стержня *ED.*

Направлен вектор $\vec{a}_{c_1}^n$ к центру вращения точки C_1, т.е. от точки C_1 к точке N_1, следовательно вектор $\vec{F}_1^u$ - главный вектор сил инерции стержня *ED* направлен противоположно вектору $\vec{a}_{c_1}^n$. Приложен вектор $\vec{F}_1^u$ согласно закону распределения сил инерции по длине стержня (рис. Д5.12) на расстоянии $\frac{2}{3}l_1$, считая от точки *E.*

Сила инерции, возникающая при вращении стержня *DK*, определяется по величине:

$$F_2^u = m_2 \cdot a_{c_2}^n = m_2 \cdot \omega^2 \cdot C_2N_2, \quad (2)$$

где $C_2N_2 = ED \cdot \sin\alpha = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15\text{м}.$

$$F_2^u = 6 \cdot 100 \cdot 0{,}15 = 90\text{Н}.$$

Направлен вектор $\vec{F}_2^u$ противоположно нормальному ускорению точки C_2 (рис.Д5.11).

Сила инерции, возникающая при вращении точечного груза, по величине равна:

$$F_3^u = m_3 \cdot a_k^n = m \cdot \omega^2 \cdot N_3K = 4 \cdot 100 \cdot 0{,}15 = 60\text{Н}.$$

Направлен вектор $\vec{F}_3^u$ противоположно нормальному ускорению точки *K* (рис. Д5.11). Составляем согласно принципу Даламбера уравнения равновесия для системы. Данную систему в любой момент времени можно рассматривать как плоскую, поэтому составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0\,,\; X_a + X_в + F_1^u + F_2^u + F_3^u = 0, \quad (3)$$

$$\sum F_{ky} = 0\,,\; Y_в - P_1 - P_2 - P_3 = 0, \quad (4)$$

$$\sum m_{в}(\vec{F}_k) = 0\,,\ X_a \cdot (a + d) - P_1 \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \sin\alpha - (P_2 + P_3) \cdot l_1 \cdot \sin\alpha - F_1^{u}\left(\frac{2}{3} l_1 \cdot \cos 30° + d\right) -$$
$$-F_2^{u}\left(d + l_1 \cdot \cos 30° - \frac{l_2}{2}\right) - F_3^{u}(d + l_1 \cdot \cos 30° - l_2) = 0$$
. (5)

Из уравнения (4) находим реакцию YB:

$$Y_{в} = P_1 + P_2 + P_3 = g(m_1 + m_2 + m_3) = 10(18 + 6 + 4) = 280\text{Н}.$$

Из уравнения (5) определяем реакцию X_A:

$$X_a = \frac{P_1 \cdot 0{,}075 + P_2 \cdot 0{,}15 + P_3 \cdot 0{,}15 + F_1^{u} \cdot \left(\frac{2}{3} l_1 \cdot \cos 30° + d\right) + F_2^{u}\left(d + l_1 \cdot \cos 30° - \frac{l_2}{2}\right) + F_3^{u}(d + l_1 \cdot \cos 30° - l_2)}{0{,}8} =$$
$$= \frac{180 \cdot 0{,}075 + 60 \cdot 0{,}15 + 40 \cdot 0{,}15 + 135 \cdot 0{,}77 + 90 \cdot 0{,}76 + 36{,}8 \cdot 0{,}6}{0{,}8} = 278{,}6\text{Н}.$$

Из уравнения (3) находим реакцию $X_{в}$:

$$X_{в} = -X_a - F_1^{u} - F_2^{u} - F_3^{u} = -278{,}6 - 135 - 90 - 36{,}8 = -540{,}4\text{Н}.$$

Для проверки решения составим уравнения моментов относительно точки D:

$$\sum m_{д}(\vec{F}_k) = 0, X_{в} \cdot EA - Y_a \cdot ED \cdot \sin\alpha + P_1 \cdot \frac{l_1}{2} \sin\alpha + F_2^{u} \cdot C_2 D - Y_{в} \cdot l_1 \cdot$$
$$\sin\alpha + X_{в} \cdot (BE + l_1 \cdot \cos\alpha) + F_1^{u} \cdot \frac{l_1}{2} \cos\alpha + F_3^{u} \cdot l_2 = 0$$

.

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Принцип Даламбера для материальной точки.
2. Принцип Даламбера для системы.
3. Силы инерции для материальной точки.
4. Главный вектор и главный момент сил инерции.
5. Вычисление сил инерции при поступательном, вращательном и пллскопараллельном движениях.
6. Силы инерции однородного прямолинейного стержня при равномерном и равнопеременном вращениях.

Глава 13

Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики

13.1. Связи и их классификация

Понятие о связях, введенное в разделе статики, охватывает не все их виды. Рассматриваемые некоторые методы решения задач в динамике применимы к системам не с любыми связями. Поэтому вопрос о связях и их классификации следует уточнить.

Связи - любые ограничения, которые налагаются на положения и скорости точек механической системы. Связи, не изменяющиеся со временем, называются стационарными, а изменяющиеся со временем - нестационарными.

Связи, ограничивающие положение (координаты) точек системы, называются геометрическими, а ограничивающие еще и скорости - *кинематическими* или *дифференциальными.* Если, дифференциальную связь можно представить как геометрическую, то такая связь называется *интегрируемой,* если нет - то *неинтегрируемой.*

Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи называют *голономными,* а неинтегрируемые дифференциальные связи *неголономными.* Механические системы, имеющие голономные связи, называются *голономными системами,* в противном случае - *неголономными* системами.

Различают связи *удерживающие* (сохраняющиеся при любом положении системы) и *неудерживающие,* от которых система может «освобождаться».

Примеры:

1. Связи, рассмотренные в разделах статики, являются стационарными и притом геометрическими (голономными).

2. Качение колеса без скольжения и буксования определяется геометрической связью координатами: x_c - центр колеса и φ - угол поворота. При качении выполняется условие $x_c = R \cdot \varphi$ и $V_c = R \cdot \omega$. Это геометрическая, дифференциальная и интегральная связь. Такие наложенные связи называются голономными. При качении колеса со скольжением или буксованием связь будет не интегрируемая - неголономная.

Подробнее о классификации связей можно ознакомиться в учебной литературе [1,2,3,4 и др.].

13.2 . Возможные перемещения системы. Число степеней свободы

Эффект связей можно учитывать не только величиной их реакций, но и рассматривая те возможные перемещения, которые точки системы могут иметь при наложенных на них связях. Такой подход позволяет без определения неизвестных реакций получать уравнение равновесия или движения, что существенно упрощает решение многих задач динамики. Такие перемещения называются возможными или виртуальными. Они должны удовлетворять двум условиям: во-первых, быть бесконечно малыми, так как при конечных перемещениях система займет другое положение, где эффект связей будет другим; во-вторых, они должны быть допускаемы наложенными связями, иначе изменится вид рассматриваемой системы.

Следовательно, возможными (виртуальными) перемещениями называются бесконечно малые перемещения точек механической системы, допускаемые наложенными связями.

В дальнейшем следует различать действительное перемещение $d\vec{r}$ движущейся точки, которое она совершает за элементарное время dt, и возможное перемещение, которое точка не совершает, но могла бы совершить, не нарушая наложенные на нее в данный промежуток времени связи.

Чтобы учесть это различие, возможное перемещение обозначают символом $\delta\vec{r}$. Модуль $\delta\vec{r}$ будем обозначать δs, т.е. $\delta s = |\delta\vec{r}|$. При этом $\delta x, \delta y, \delta z$ - проекции вектора $\delta\vec{r}$ на координатные оси вычисляются так же, как дифференциалы.

Следуют отметить, что при стационарных связях действительные перемещения $d\vec{r}$ любой точки системы, также должны допускаться наложенными связями и совпадают с одним из возможных перемещений $\delta\vec{r}$. При нестационарных связях $d\vec{r}$ ни с одним из возможных перемещений не совпадает. В общем случае механическая система может иметь множество различных возможных перемещений. Однако, для любой системы можно определить некоторое число независимых между собой перемещений, через которые можно выразить всякие другие возможные перемещения.

Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называются числом степеней свободы этой системы.

Точка, находящаяся на плоскости, имеет две степени свободы. Это означает, что ее положение на плоскости определяется двумя независимыми координатами, например координатами *x и y.* Свободная материальная точка имеет три степени свободы (независимыми будут три возможных перемещения вдоль трех взаимно перпендикулярных осей). Одновременно положение такой точки определяется тремя независимыми координатами *x,* *y, z* и т.д.

Этот результат оказывается общим, т.е. *у механической системы с геометрическими связями число независимых координат, определяющих положение системы, совпадает с числом ее степеней свободы.* Поэтому у такой системы число степеней свободы можно определять как по числу независимых возможных перемещений, так и по числу независимых координат. Так, у кривошипно-ползунного механизма одна степень свободы (у него одно независимое возможное перемещение, например поворот кривошипа *OA,* и одна независимая координата, например угол φ *).* У свободного твердого тела шесть степеней свободы (независимых перемещений: три поступательных вдоль координатных осей и три поворота вокруг этих осей, а независимых координат - три координаты полюса и три угла Эйлера).

13.3. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия системы при наличии только стационарных связей.

Следует дать понятие о возможной работе, как об элементарной работе, которую могла бы совершить сила на возможном перемещении. Возможная (виртуальная) работа определяется так же, как и для действительных перемещений и обозначается символом $\sum \delta A_k^a = \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k$ - для активных сил и $\delta A_k^r = \vec{F}_k^r \delta \vec{r}_k$- для реакций связей.

В механике введено понятие об идеальных связях: *идеальными называются связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю,* т. е.

$$\sum \delta A_k^r = 0. \qquad (13.1)$$

Докажем, что если механическая система с идеальными связями находится под действием приложенных сил в равновесии, то при любом возможном перемещении системы должно выполняться равенство

$$\sum \delta A_k^a = 0 \qquad (13.2)$$

или

$$\sum \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k = \sum F_k^a \delta S_k \cos \alpha_k = 0, \qquad (13.2')$$

где α_k - угол между направлением силы и возможным перемещением.

Составив такие равенства для всех точек системы, на каждую из которых действуют $\vec{F}_k^a$ - активная сила и $\vec{F}_k^r$ - реакция связи, и сложив их почленно, получим:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0.$$

Это равенство с учетом уравнения (13.1) для идеальных связей подтверждает выражение (13.2).

Из доказанного вытекает следующий принцип возможных перемещений: *для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.* Математически сформулированное условие равновесия выражается равенством (13.2), которое называют также уравнением возможных работ. Это условие (13.2) можно еще представить в аналитической форме:

$$\sum \left(F_{k_x}^a \delta x_k + F_{k_y}^a \delta y_k + F_{k_z}^a \delta z_k \right) = 0. \qquad (13.3)$$

Решение задач

При решении задач вначале определяют число степеней свободы по числу независимых возможных перемещений или координат.

Для системы с одной степенью свободы (кривошипно-ползунный механизм, кулисный механизм привода строгального станка и т.п.) необходимо соблюдать следующий порядок:

1. Вычертить схему в заданном положении и изобразить все действующие на систему силы и моменты сил.
2. Дать системе возможное перемещение и показать на схеме линейные возможные перемещения точек приложения сил δS_k и угловые $\delta\varphi_k$ перемещения звеньев, к которым приложены моменты пар сил. Записать уравнения (13.2) возможных работ по формулам:

$$\sum \delta A_k^a = \sum(\vec{F}_k^a \cdot \delta\vec{r}_k) = \sum(F_k^a \cdot \delta S_k \cdot \cos\alpha_k + M_k \cdot \delta\varphi_k) = 0. \quad (13.4)$$

3. Установить зависимость между δS_k и $\delta\varphi_k$, выразив возможные перемещения через какое - либо одно, что всегда можно сделать, если система имеет одну степень свободы.
4. Определить искомую величину из полученного уравнения после сокращения δS_k или $\delta\varphi_k$.

Примечание: зависимость между δS_k и $\delta\varphi_k$ находят двумя способами: 1) из геометрических соотношений методами геометрии с тригонометрией или 2) из кинематических соотношений, принимая $\delta S_k = V \cdot dt$ и $\delta\varphi_k = \omega \cdot dt$, что справедливо, так как получаемые за время *dt* действительные перемещения будут при стационарных связях одними из возможных.

Пример: Найти зависимость между моментом *M* пары, действующей на кривошип кривошипно-ползунного механизма (рис. 13.1), и силой давления *P* на поршень при равновесии, если *OA*=*r*; *AB* = *l*, $\angle AOB = \varphi$.

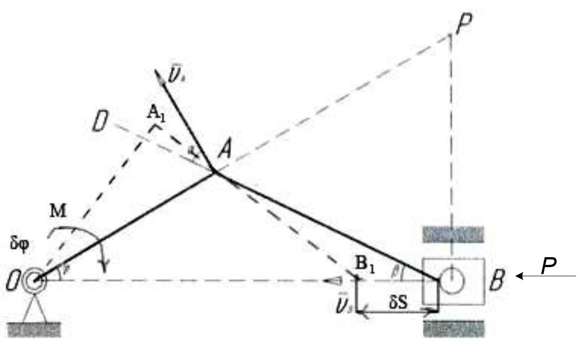


Рис.13.1

<u>Решение.</u> Механизм имеет одну степень свободы:

1. Изображаем схему механизма в заданном положении и прикладываем к кривошипу пару сил с моментом M и силу давления P;

2. Задаем системе возможное перемещение и показываем $\delta\varphi$ кривошипа и δS ползуна. Записываем уравнение возможных работ:

$$\sum \delta A_k^a = 0 \text{ или } P \cdot \delta S - M \cdot \delta\varphi = 0. \qquad (1)$$

3. Устанавливаем зависимость $\delta S = f(\delta\varphi)$ кинематическим способом: $\frac{\delta S}{V_B} = \frac{\delta\varphi}{\omega_{OA}}$, следовательно:

$$\delta S = \delta\varphi \cdot \frac{V_B}{\omega_{OA}}. \qquad (2)$$

4. Тогда из уравнения (1) с учетом уравнения (2) получим:

$$M = P \cdot \frac{V_B}{\omega_{OA}}. \qquad (3)$$

Скорость ползуна V_B в зависимости от ω_{OA} можно определить по теореме о проекциях скоростей: $V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta$ или при помощи мгновенного центра скоростей: $V_B = \omega \cdot BP$.

Произведем расчет $V_B = f(\omega_{OA})$ по теореме о проекциях скоростей. Поскольку угол *OAD*, как внешний угол треугольника *OAB*, равен $\varphi + \beta$, то $\alpha = 90° - (\varphi + \beta)$ и, следовательно:

$$V_B = \omega_{OA} r \frac{\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta} = \omega_{OA} r(\sin\varphi + \cos\varphi tg\beta). \qquad (4)$$

Исключим из этого равенства угол β. Из треугольника *OAB* по теореме синусов $r/\sin\beta = l/\sin\varphi$. Кроме того:

$$tg\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}. \qquad (5)$$

В результате находим

$$V_B = \omega_{OA} r\left(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi. \qquad (6)$$

Подставляя в формулу (3) значение V_B из уравнения (6), окончательно получим:

$$M = P \cdot r\left(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi. \qquad (7)$$

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА Д6

Определить величину крутящего момента, действующего на кривошип кривошипно-шатунного механизма, в зависимости от сил давления на поршень в условиях установившегося режима работы механизма, принимая давление сил на поршень как сосредоточенную силу. Схему кривошипно-шатунного механизма, геометрические размеры и кинематические параметры выбрать в соответствии с вариантом контрольного задания по кинематике К3.

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Виды связей: голономные и неголономные.
2. Возможные перемещения системы.
3. Принцип возможных перемещений.
4. Порядок решения задач с использованием принципа возможных перемещений.
5. Определение реакций связей при помощи принципа возможных перемещений.
6. Способы определения зависимости между линейными и угловыми возможными перемещениями.

13.4. Общее уравнение динамики

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. С другой стороны, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Следовательно, применяя эти два принципа одновременно, мы можем получить общий метод решения задач динамики.

Рассмотрим систему материальных точек, на которую наложены идеальные связи. Если ко всем точкам системы, кроме действующих на них активных сил $\vec{F}_k^a$ и реакций связей $\vec{F}_k^r$, прибавить соответствующие силы инерции $\vec{F}_k^u = -m_k\vec{a}_k$, то согласно принципу Даламбера полученная система сил будет находиться в равновесии. Тогда, применяя к этим силам принцип возможных перемещений, получим

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r + \sum \delta A_k^u = 0.$$

Но для идеальных связей по условию (13.1) $\sum \delta A_k^r$ равна нулю. Тогда окончательно получим:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0. \qquad (13.5)$$

Из полученного результата вытекает следующий принцип Даламбера-Лагранжа: *при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и возникающих при движении сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.*

Уравнение (13.5), выражающее этот принцип, *называют общим уравнением динамики.* В аналитической форме уравнение имеет вид:

$$\sum \left[(F_{k_x}^a + F_{k_x}^u)\delta x_k + (F_{k_y}^a + F_{k_y}^u)\delta y_k + (F_{k_z}^a + F_{k_z}^u)\delta z_k \right] = 0. \qquad (13.6)$$

Уравнения (13.5) или (13.6) позволяют составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы. Если при этом система представляет собой совокупность каких-нибудь твердых тел, то для составления уравнений нужно к действующим на каждое тело активным силам прибавить приложенную в любом центре силу, равную главному вектору сил инерции, и пару с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно этого центра (или одну из этих величин), а затем применить принцип возможных перемещений. Задачи решаются в том же порядке, как и в предыдущем параграфе, но с учетом возникающих сил инерции.

Примечание: Уравнение (13.5) используются в таком же виде и в случае наличия неидеальных связей, но в этом случае реакции неидеальных связей (как правило, это силы трения скольжения или качения) включаются в число активных сил.

Глава 14

Условия равновесия и уравнения движения системы в обобщенных координатах

14.1. Обобщенные координаты и обобщенные скорости

Независимые между собой параметры любой размерности, число которых равно числу степеней свободы системы и которые однозначно определяют ее положение, называют *обобщенными координатами системы.* Будем обозначать обобщенные координаты буквой q. Тогда положение системы, имеющей s степеней свободы, будет определяться s обобщенными координатами

$$q_1, q_2, \ldots, q_s. \tag{14.1}$$

Поскольку обобщенные координаты между собой независимы, то элементарные приращения этих координат

$$\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s \tag{14.2}$$

также между собой независимы. При этом *каждая из величин выражения*(14.2) *определяет соответствующее, независимое от других, возможное перемещение системы.*

Как при всяком переводе от одной системы координат к другой, декартовы координаты x_k, y_k, z_k любой точки рассматриваемой механической системы можно выразить через обобщенные координаты зависимостями вида: $x_k = x_k(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ и т.д. Следовательно, и для радиуса - вектора $\vec{r}_k$ этой точки, поскольку $\vec{r}_k = x_k\vec{\imath} + y_k\vec{\jmath} + z_k\vec{k}$, тоже будет

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s). \tag{14.3}$$

При движении системы ее обобщенные координаты будут с течением времени непрерывно изменяться. Закон этого движения определится уравнениями:

$$q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t), \ldots, q_s = f_s(t). \tag{14.4}$$

Уравнения (14.4) представляют собой кинематические *уравнения движения системы в обобщенных координатах.*

Производные от обобщенных координат по времени называются *обобщенными скоростями системы* и обозначаются обычными символами

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s,$$

где $\dot{q}_1 = dq_1/dt$ и т.д. Размерность обобщенной скорости зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Если q – линейная величина, то $\dot{q}$ - линейная скорость; если q-угол, то $\dot{q}$ - угловая скорость.

14.2. Обобщенные силы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, на которые действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. Пусть система имеет s степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами (14.1). Сообщим системе такое независимое возможное перемещение, при котором координата q_1 получает приращение δq_1, а остальные координаты не изменяются. Тогда каждый из радиусов- векторов $\vec{r}_k$ точек системы получит элементарное приращение $(\delta \vec{r}_k)_1$. Значение $(\delta \vec{r}_k)_1$ вычисляется, как *частный дифференциал,* так как при рассматриваемом перемещении изменяется только координата q_1 (остальные сохраняют постоянные значения). Следовательно:

$$(\delta \vec{r}_k)_1 = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1.$$

Найдем сумму элементарных работ всех действующих сил на рассматриваемом перемещении, которую обозначим δA_1:

$$\delta A_1 = \vec{F}_1 (\delta \vec{r}_1)_1 + \vec{F}_2 (\delta \vec{r}_2)_1 + \cdots + \vec{F}_n (\delta \vec{r}_n)_1 = \vec{F}_1 \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \vec{F}_2 \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \vec{F}_n \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_1} \delta q_1$$

Вынося общий множитель δq_1 за скобки, найдем окончательно

$$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1, \qquad (14.5)$$

где

$$Q_l = \sum \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}. \qquad (14.6)$$

По аналогии с равенством $\delta A = F_\tau \delta S$, определяющим элементарную работу силы $\vec{F}$, величину Q_1 называют обобщенной силой, соответствующей координате q_1.

Сообщая системе другое независимое возможное перемещение q_2, при котором изменяется только координата q_2 , получим аналогично для элементарной работы всех действующих сил на этом перемещении выражение

$$\delta A_2 = Q_2 \delta q_2, \qquad (14.7)$$

где

$$Q_2 = \sum \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}. \qquad (14.8)$$

Величина Q_2 представляет собой обобщенную силу, соответствующую координате q_2 и т. д.

Для возможного перемещения системы, при котором одновременно изменяются все ее обобщенные координаты, сумма элементарных работ приложенных сил на этом перемещении определится равенством

$$\sum \delta A_k = Q_l \delta q_l + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s. \qquad (14.9)$$

Формула (14.9) дает выражение полной элементарной работы всех действующих на систему сил в обобщенных координатах. Из этого равенства видно, что *обобщенные силы - это величины, равные коэффициентам при приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.*

Если все наложенные на систему связи являются идеальными, то работу при возможных перемещениях совершают только активные силы и величины $Q_l, Q_2, \dots, Q_s$ убудут представлять собой обобщенные активные силы системы.

Размерность обобщенной силы зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты:

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}, \qquad (14.10)$$

т.е. *размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты.* Отсюда видно, что если q - линейная величина, то Q имеет размерность обычной силы (в СИ измеряется в Н), если q - угол (величина безразмерная), то Q будет измеряться в Н·м и имеет размерность работы или момента; если q - объем (например, положение поршня в цилиндре можно определять объемом надпоршневого пространства), то Q будет измеряться в Н/ м^2 и имеет размерность давления и т. д.

Вычисление обобщенных сил будем производить по формулам вида (14.5), (14.7), что сводится к вычислению возможной элементарной работы. Сначала следует установить число степеней свободы системы, выбрать обобщенные координаты и изобразить на чертеже все приложенные к системе активные силы и силы трения (если они совершают работу). Затем для определения Q_1 надо сообщить системе такое возможное перемещение, при котором изменяется только координата q_1, получая положительное приращение δq_1 вычислить на этом перемещении сумму элементарных работ всех действующих сил по формулам (13.4) и представить полученное выражение в виде (14.5). Тогда коэффициент при δq_1 и дает искомую величину Q_1. Аналогично вычисляются $Q_2, Q_3, \dots, Q_s$.

Случай потенциальных сил. Если все действующие на систему силы являются потенциальными, то для системы, как известно, существует такая *силовая функция U*, зависящая от координат x_k, y_k, z_k точек системы, что сумма элементарных работ действующих сил равна полному дифференциалу этой функции, т.е. $\sum \delta A_k = \delta U$. Но при переходе к обобщенным координатам $\delta q_1, \delta q_2, .., \delta q_s$ все x_k, y_k, z_k могут быть выражены через эти координаты и тогда $U = U(q_1, q_2, ..., q_s)$. Следовательно, вычисляя δU *как* полный дифференциал от функции $U(q_1, q_2, ..., q_s)$, найдем, что

$$\sum \delta A_k = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_S}\delta q_s.$$

Сравнивая это выражение с равенством (11.9), заключаем, что в данном случае

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1};\ Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \ldots, Q_s = \frac{\partial U}{\partial s} \qquad (14.11)$$

или так как потенциальная энергия $\Pi = -U$, то

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1};\ Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \ldots, Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial s}. \qquad (14.12)$$

Следовательно, *если все действующие на систему силы потенциальны, то обобщенные силы равны частным производным от силовой функции (или взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии) по соответствующим обобщенным координатам.*

14.3. Условия равновесия системы в обобщенных координатах

Согласно принципу возможных перемещений необходимым и достаточным условием равновесия механической системы является равенство нулю суммы элементарных работ всех активных сил (и сил трения, если они совершают работу) на любом возможном перемещении системы, т.е. условие $\sum \delta A_k = 0$. В обобщенных координатах это условие, согласно равенству (14.9), дает

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_S \delta q_S = 0. \qquad (14.13)$$

Так как все величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ между собой независимы, то равенство (14.13) может выполняться тогда и только тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ в отдельности равен нулю, т.е.

$$Q_1 = 0;\ Q_2 = 0, \dots, Q_S = 0. \qquad (14.14)$$

Таким образом, для *равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, были равны нулю. Число условий равновесия (14.14) равно, как видим, числу обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы системы.*

При решении задач с помощью принципа возможных перемещений также вычисляются соответствующие обобщенные силы, а затем приравниваются к нулю.

Случай потенциальных сил. В этом случае условия равновесия (14.14), если учесть равенства (14.11) и (14.12), дают:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0;\ \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_x} = 0 \qquad (14.15)$$

или

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0;\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0. \qquad (14.15)$$

Отсюда следует, что при равновесии полный дифференциал функций U или Π равен нулю, т.е.

$$\delta U(q_1, q_2, \dots, q_x) = 0 \text{ или } \delta \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0 \quad .(14.16)$$

Равенства (14.15) или (14.16) выражают необходимые условия экстремума функции нескольких переменных. Следовательно, система, на которую действуют потенциальные силы, в тех положениях, для которых силовая функция или потенциальная энергия системы имеет экстремум (в частности, минимум или максимум), находится в равновесии.

14.4. Уравнения Лагранжа

Для нахождения уравнений движения механической системы в обобщенных координатах, обратимся к общему уравнению динамики, которое в общем случае можно записать:

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^u = 0. \quad (14.17)$$

Если среди наложенных на систему связей будут иметь место не идеальные, то первая сумма будет включать работу как активных сил, так и работу сил трения.

Пусть система имеет s степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_s$. Тогда по формуле (14.9)

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_s \delta q_s. \quad (14.18)$$

Очевидно, что для сил $\vec{F}_k^u$ аналогично, как и для сил, $\vec{F}_k$ можно по отношению к обобщенным координатам записать элементарную работу сил инерции:

$$\sum \delta A_k^u = Q_1^u \delta q_1 + Q_2^u \delta q_2 + \cdots + Q_s^u \delta q_s, \quad (14.19)$$

где $Q_1^u, Q_2^u, \dots, Q_s^u$ - *обобщенные силы инерции,* которые согласно формулам (14.6, 14.8) будут:

$$Q_1^u = \sum \vec{F}_k^u \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}, Q_2^u = \sum \vec{F}_k^u \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \dots, Q_s^u = \sum \vec{F}_k^u \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}. \quad (14.20)$$

Подставляя величины (14.18) и (14.19) в уравнение (14.17), получим

$$(Q_1 + Q_1^u)\delta q_1 = 0, (Q_2 + Q_2^u)\delta q_2 = 0, \dots, (Q_s + Q_s^u)\delta q_s = 0.$$

Так как все $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ между собой независимы, то полученное равенство может выполняться тогда и только тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ в отдельности равен нулю. Следовательно, должно быть

$$Q_1 + Q_1^u = 0, Q_2 + Q_2^u = 0, \dots, Q_s + Q_s^u = 0. \qquad (14.21)$$

Полученными уравнениями можно непосредственно пользоваться для решения задач динамики. Однако процесс составления этих уравнений значительно упростится, если выразить все входящие сюда обобщенные силы инерции через кинетическую энергию системы. Преобразуем сначала соответствующим образом величину Q_1^u[5]. Поскольку сила инерции любой из точек системы $\vec{F}_k^u = -m_k\vec{a}_k = -m_k\vec{V}_k/dt$, то первая из формул (14.20) дает

$$-Q_1^u = \sum m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}. \qquad (14.22)$$

Чтобы выразить Q_1^u через кинетическую энергию системы, надо преобразовать правую часть равенства (14.22) так, чтобы она содержала только скорости точек системы. С этой целью заметим, прежде всего, что

$$\frac{d\vec{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right) - \vec{V}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right). \qquad (14.23)$$

В справедливости равенства (14.23) легко убедиться, продифференцировав произведение, стоящее справа в скобках. Дальнейшее преобразование осуществляется с помощью следующих двух равенств:

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_1} \text{ и } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_1}. \qquad (14.24)$$

Докажем сначала справедливость первого из них. Так как согласно уравнению () $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$, то

$$\vec{V}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s, \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}.$$

Справедливость второго из равенств (14.24) следует из того, что операции полного дифференцирования по *t* и частного по q_1 переместительны, т.е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_1}\right).$$

Подставив теперь величины (14.24) в равенство (14.23), получим

$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_k \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_1}\right) - V_k \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}_k^2}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}_k^2}{\partial q_1}$$

и формула (14.22), если учесть, что сумма производных равна производной от суммы, а $\vec{V}_k^2 = V_k^2$, примет вид

$$-Q_1^u = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}(\sum \frac{m_k V_k^2}{2})\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}(\sum \frac{m_k V_k^2}{2}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}.$$

где $T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}$ - кинетическая энергия системы.

Аналогичные выражения получатся для всех остальных обобщенных сил инерции. В результате равенства (14.20) дадут окончательно

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s. \end{aligned} \qquad (14.25)$$

Уравнения (14.25) и представляют собой *дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа.* Число этих уравнений, как видим, равно числу степеней свободы системы.

Уравнения Лагранжа дают единый и притом достаточно простой метод решения задач динамики. Важное преимущество этих уравнений состоит в том, что их вид и число не зависят ни от количества тел (или точек), входящих в рассматриваемую систему, ни от того, как эти тела движутся. Определяется число уравнений Лагранжа числом степеней свободы системы. Кроме того, при идеальных связях в правые части уравнений (14.25) входят обобщенные активные силы, и, следовательно, эти уравнения позволяют заранее исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

Основная задача динамики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы, зная обобщенные силы $Q_1, Q_2, .., Q_s$ и начальные условия, найти закон движения системы в виде (14.4), т.е. определить обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$ как функции времени. Так как кинетическая энергия *T* зависит от обобщенных скоростей $\dot{q}_1$, то при дифференцировании первых членов уравнений (14.24) по *t* в левых частях этих уравнений появятся вторые производные по времени $\ddot{q}_1$ от искомых координат. Следовательно, уравнения Лагранжа представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

<u>Случай потенциальных сил</u>. Если действующие на систему силы потенциальные, то, используя формулы (14.12), можно первое из уравнений (14.24) представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0 \text{ или} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_1}\right] - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_1} = 0.$$

Последнее равенство справедливо потому, что потенциальная энергия Π зависит только от координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$, а от обобщенных скоростей не зависит и $\frac{\partial \Pi}{\dot{q}_1} = 0$.

Аналогично преобразуются все остальные уравнения системы (14.25). Введем функцию

$$L = T - \Pi. \tag{14.26}$$

Функция L от обобщенных координат и обобщенных скоростей, равная разности между кинетической и потенциальной энергиями системы, называется функцией Лагранжа или кинетическим потенциалом. Тогда в случае потенциальных сил уравнения Лагранжа примут вид:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0\ , \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0\ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0.
\end{gathered} \tag{14.27}$$

Из полученного результата следует, что состояние механической системы, на которую действуют потенциальные силы, определяется заданием одной только функции Лагранжа, так как, зная эту функцию, можно составить дифференциальные уравнения движения системы.

При соответствующем обобщении понятий функции, аналогичные функции Лагранжа описывают состояние других физических систем (непрерывной среды, гравитационного или электромагнитного поля и др.) Поэтому уравнения Лагранжа вида (14.27) играют важную роль в ряде областей физики.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ.
ЗАДАЧА Д7

Механическая система состоит из шкивов *1* и *2* веса P_1 и P_2 с радиусами ступеней $R_1 = R, r = 0{,}4R, R_2 = R, r_2 = 0{,}8R$ (массу каждого шкива считать равномерно распределённой по его внешнему ободу) и грузов 3 и 4 веса P_3 и P_4 (рис. Д7.0-Д7.9).

Грузы соединены нитями, намотанными на шкивы, участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Грузы скользят по плоскостям без трения. Кроме сил тяжести на один из грузов действует постоянная сила *F*, а на шкивы 1 и 2 при их вращении действуют постоянные моменты сил сопротивления M_1 и M_2.

Данные для различных вариантов приведены в таблице Д7.

Таблица Д7

Номер варианта	P_1, *Н*	P_2, *Н*	P_3, *Н*	P_4, *Н*	M_1, *Н·м*	M_2, *Н·м*	*F*, *Н*	*R*, *см*	*Найти*
0	P	3P	4P	4P	M	0	10	0,5	ε_1
1	2P	3P	3P	2P	2M	0	10	0,3	ε_2
2	P	2P	3P	4P	0	M	10	0,1	ε_1
3	4P	3P	2P	2P	3M	0	8	1,0	ε_2
4	3P	3P	3P	2P	0	2M	7	0,25	ε_1
5	P	P	2P	3P	3M	0	6	0,8	ε_2
6	4P	2P	2P	3P	0	M	9	0,7	ε_1
7	3P	2P	2P	P	4M	0	5	0,2	ε_2
8	5P	4P	3P	2P	5M	0	7	0,2	ε_1
9	P	2P	5P	P	0	3M	11	0,9	ε_2
10	P	4P	2P	6P	0	4M	6	1,0	ε_1

Рис. Д 6.0

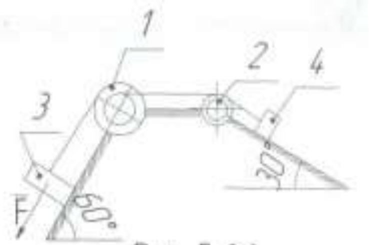


Рис. Д 6.1

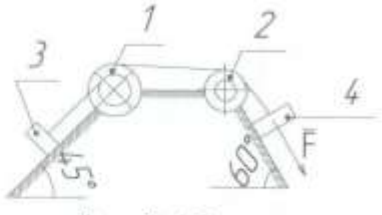


Рис. Д 6.2

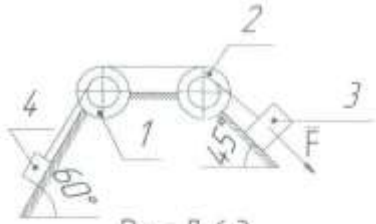


Рис. Д 6.3

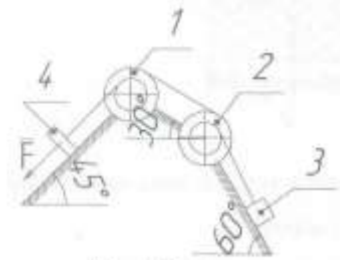


Рис. Д 6.4

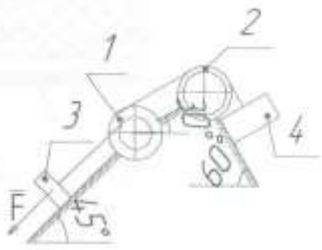


Рис. Д 6.5

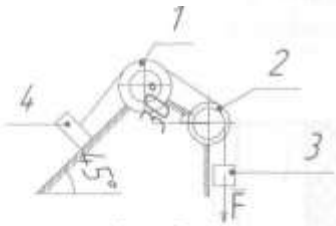


Рис. Д 6.6

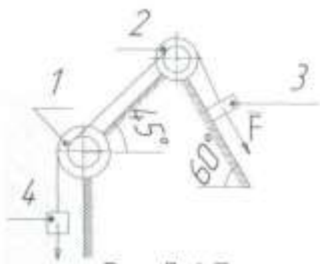


Рис. Д 6.7

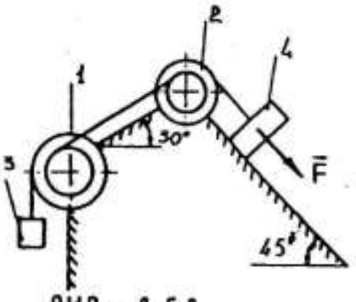


РИС. Д 6.8

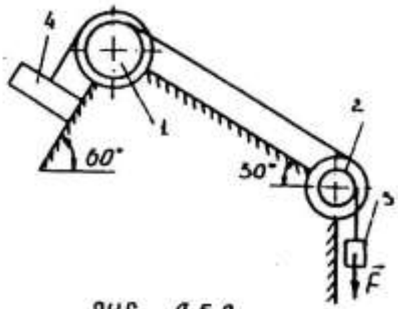


РИС. Д 6.9

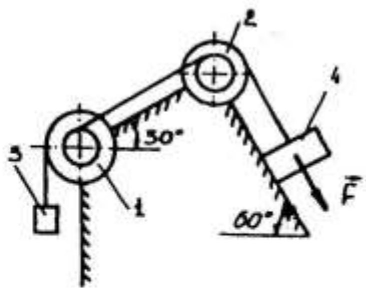


Рис. Д 6.10

Определить угловое ускорение ε согласно варианту задачи.

Решение: Задача Д7 на применение уравнений Лагранжа второго рода.

Данная система имеет одну степень свободы, так как положение данного механизма определяется одним параметром - углом поворота шкива φ. Этот угол примем за обобщённую координату q данной системы, т.е. положим $q = \varphi_1$. Тогда:

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} = \frac{d\varphi_1}{dt} = \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \tag{1}$$

где ω_1 - угловая скорость шкива *1*. Искомое угловое ускорение шкива *l* равно:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \ddot{\varphi}_1. \tag{2}$$

Данная система имеет одну степень свободы, поэтому необходимо составить одно уравнение Лагранжа. Для чего вычислим кинетическую энергию T системы и выразим все вошедшие в выражение T скорости через обобщённую скорость $\dot{\varphi}_1$, затем вычислим обобщённую силу Q.

Кинетическая энергия T системы.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \tag{3}$$

где T_1 - кинетическая энергия шкива *1*,
T_2 - кинетическая энергия шкива *2*,
T_3 - кинетическая энергия груза *3*,
T_4 - кинетическая энергия груза *4*.

$$T_1 = J_1\frac{\omega_1^2}{2} = \frac{P_1}{g}R^2\frac{\omega_1^2}{2} = \frac{P_1}{2g}R^2\omega_1^2, \tag{4}$$

$$T_2 = J_2\frac{\omega_2^2}{2} = \frac{P_2}{g}R^2\frac{\omega_2^2}{2} = \frac{P_2}{4g}R^2\omega_1^2, \tag{5}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{P_3}{g}V_3^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4P_3}{g}V_3^2 = \frac{2P_3}{g}V_3^2, \tag{6}$$

$$T_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{P_4}{g}V_4^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{6P_4}{g}V_4^2 = \frac{3P_4}{g}V_4^2. \tag{7}$$

Учитывая, что скорость точки на ободе шкива равна скорости соответствующего груза, и выражая, угловую скорость шкива 2 и скорости грузов *3* и 4 V_3 и V_4 через угловую скорость шкива *1* получим:

$$\frac{V_3}{R} = \omega_1, V_1' = \omega_1 r_1,$$

где V_1' - скорость на ободе шкива радиуса r_1,

$$\frac{V_1'}{r_2} = \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2};\ V_3 = R\omega_1;\ V_4 = R\omega_2 = R\frac{\omega_1 r_1}{r_2}. \quad (8)$$

С учётом этих выражений получим:

$$T_2 = \frac{P_2}{g}R^2(\frac{\omega_1 r_1}{r_2})^2 = \frac{P_2}{g}R^2(\frac{0{,}4R\omega_1}{0{,}8R})^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{P_2}{g}R^2\omega_1^2, \quad (9)$$

$$T_3 = \frac{2P_3}{g}R^2\omega_1^2, \quad (10)$$

$$T_4 = \frac{3P_4}{g}R^2(\frac{\omega_1 r_1}{r_2})^2 = \frac{3P_4}{g}R^2\omega_1^2. \quad (11)$$

$$T_{сист} = \frac{1}{2}\cdot\frac{P_1}{g}R^2\omega_1^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{P_2}{g}R^2\omega_1^2 + \frac{2P_3}{g}R^2\omega_1^2 + \frac{P_4}{g}\cdot\frac{3}{4}R^2\omega_1^2 = \frac{P}{g}R^2\omega_1^2\left(\frac{1}{2} + +\frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{P}{g}R^2\omega_1^2$$

$$. \quad (12)$$

Выразим кинетическую энергию системы через обобщённую скорость:

$$T = \frac{7}{2}\cdot\frac{P}{g}R^2\dot{\varphi}_1^2. \quad (13)$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1} = \frac{7}{2}\cdot\frac{P}{g}R^2\dot{\varphi}_1^2.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) = \frac{7PR^2}{2}\ddot{\varphi}.$$

Так как кинетическая энергия *T* не зависит от обобщённой координаты φ_1, то $\frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = 0.$

Определим обобщённую силу *Q*. Для этого сообщим системе возможное перемещение , соответствующее изменению обобщённой координаты φ_1 на весьма малую величину $\delta\varphi_1$, и вычислим сумму элементарных работ всех действующих сил на этом перемещении:

$$\sum\delta A = F\delta S_4 + P_4\sin 60^\circ\,\delta S_4 - M_2\delta\varphi_2 = P_3\delta S_3, \quad (14)$$

где $F\delta S_4$ - работа силы $\vec{F}$,

$P_4\sin 60^\circ\,\delta S_4$ - работа силы $\vec{P}_4$,

$P_3\delta S_3$ - работа силы $\vec{P}_3$.
$M_2\delta\varphi_2$ - работа момента M_2 сил сопротивления.
Выразим $\delta S_4, \delta S_3$ и $\delta\varphi_2$ через $\delta\varphi_1$.
Получим следующее выражение для элементарной работы:

$$\sum_i \delta A = FR\delta\varphi_2 + P_4 \sin 60^\circ \delta\varphi_2 - M_2\delta\varphi_2 - P_3 R\delta\varphi_1 \cdot \tag{15}$$

Эта сумма элементарных работ равна:

$$Q\delta q = Q\delta\varphi_1,$$
$$Q\delta\varphi_1 = FR\delta\varphi_2 + P_4 \sin 60^\circ \delta\varphi_2 - M_2\delta\varphi_2 - P_3 R\delta\varphi_1. \tag{16}$$

Так как углы поворота пропорциональны их угловым скоростям, то.

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1 r_2}{\omega_2 r_1} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Тогда

$$Q\delta\varphi_1 = (FR + P_4 \sin 60^\circ - M_2)\delta\varphi_1 \frac{r_1}{r_2} - P_3 R\delta\varphi_1.$$

Обобщённая сила:

$$Q = \frac{(FR + P_4 \sin 60^\circ - M_2)\delta\varphi_1 \frac{r_1}{r_2} - P_3 R\delta\varphi_1}{\delta\varphi_1} = (FR + P_4 \sin 60^\circ - M_2)\frac{r_1}{r_2} - P_3 R.$$

Подставив значения P_4, M_2, P_3, r_1 и r_2, будем иметь:

$$Q = \left(FR + 6PR\frac{\sqrt{3}}{2} - 4M_2\right)\frac{0{,}4R}{0{,}8R} - 4PR = \left(FR + 3PR\sqrt{3} - 4M\right)\frac{1}{2} - 4PR \tag{17}$$

Уравнение Лагранжа для данной системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = Q. \tag{18}$$

С учётом значений T и Q уравнение (18) принимает следующий вид:

$$\frac{7PR^2}{2}\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\left(FR + 3PR\sqrt{3} - 4M\right) - 4PR. \tag{19}$$

Из уравнения (19) найдём искомое угловое ускорение

$$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = \frac{g\left[\left(FR + 3PR\sqrt{3} - 4M\right) - 8PR\right]}{14PR^2} = 4{,}75\text{с}^{-2}. \tag{20}$$

Размерности в формуле (20) в левой и правой части одинаковы, следовательно, расчеты проведеныверно.

Вопросы для индивидуальной защиты задания:

1. Понятие об обобщенных координатах.
2. Обобщенные скорости и ускорения.
3. Обобщенные силы и их вычисление.
4. Равновесие и движение в обобщенных координатах.
5. Уравнение Лагранжа второго рода.
6. Вычисление кинетической энергии через обобщенные скорости.

Приложение

Паспорт формирования компетенций по направлению подготовки 1404000.62 "Электроэнергетика и электротехника" профиль подготовки "Электрооборудование и электрохозяйство предприятий, организаций и учреждений", "Электромеханика", квадификация выпускника -бакалавр

1. Определение/содержание и основные сущностные характеристики компетенций

№ п/п	Код и наименование формируемой компетенции	В результате изучения дисциплины, обучающие должны		
		Знать	Уметь	Владеть
1	ОК-1 Способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке целей и выбору путей ее достижения.	- основные естественно-научные явления и их практическое применение ; - основные понятия и термины, составляющие основу знаний по механике твердых тел и систем; - методы преобразования сил и взаимосвязи силовых	- применять методы теоретического анализа и математических расчетов при изучении и исследовании материальных тел и систем.	- методами математических расчетов и рационального подхода к решению производственно – технических задач применительно к отдельным телам, конструкциям, оборудованию и машинам

		факторов и параметров при взаимодействии и движении тел.		
2	ОК-7 Готовность к самостоятельной индивидуальной работе, принятию решений в рамках своей профессиональной деятельности.	- основные законы формальной логики, естественно-научные явления и их практическое применение; - основные понятия и термены механики тел и систем, методы преобразования сил и их влияние на параметры при движении и взаимодействии тел	- применять методы теоретического анализа и математических расчетов при изучении и исследовании объектов и процессов; - уметь работать с литературой разного уровня	- навыками применения и использования методов теоретического анализа и математических расчетов в инженерной практике
3	ПК-2 Способность демонстрировать базовые знания в области естественно-научных дисциплин и готовность использовать основные законы в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования,	- основные законы движения и взаимодействия материальных тел, общие теоремы и принципы динамики, однозначно определяющие взаимосвязи динамических параметров	- применять физическое и математическое моделирование при исследованиях равновесия и движения материальных тел и систем	- способностью применять знания классической механики для инновационного анализа и исследований технических систем и технологий

	теоретического и экспериментально го исследования			

2. Формы контроля, позволяющие оценить сформированность компетенций

№ п/п	Контролируемые разделы дисциплины	Код контролируемой компетенции	Наименование оценочного средства
1	Статика	ОК-1, ОК-7, ПК-2	РГР, тестирование
2	Кинематика	ОК-1, ОК-7, ПК-2	РГР, тестирование
3	Динамика	ОК-1, ОК-7, ПК-2	РГР, тестирование
4	Аналитическая механика	ОК-1, ОК-7, ПК-2	РГР, тестирование

3. Планируемые уровни сформированности компетенций, расчетно-графическая работа

Индекс компетенции	Уровни сформированности компетенции	Критерии оценки	Отличительные признаки
ОК-1 ОК-7 ПК-2	Базовый уровень	3	Содержание в целом соответствует теме задания, отражает достаточное владение и понимание сущности фактического материала. Но в расчетах встречаются ошибки, текст не всегда сопровождается пояснениями, имеют место неточности в употреблении и трактовке терминов, встречаются стилистические и орфографические ошибки, небрежное оформление текста и расчетных схем. При защите и ответах на вопросы есть затруднения, в том числе и при расшифровке обозначений и формул
ОК-1 ОК-7 ПК-2	Продвинутый уровень	4	Содержание полностью соответствует теме задания, отражает хорошее владение и понимание сущности

			фактического материала. Умело структурирован текст с достаточными пояснениями и практически без ошибок. При защите и ответах на вопросы продемонстрировано умение аргументированно излагать ответы, иногда допуская несущественные ошибки и неточности. Текст и расчетные схемы аккуратны и в основном соответствуют общепринятым нормам
ОК-1 ОК-7 ПК-2	Уровень высокой компетенции	5	В содержании работы отражены все условия, предусмотренные заданием. Показаны уверенные знания, полное владение программным материалом. При защите и ответах на вопросы продемонстрировано умение аргументированно излагать свою точку зрения, высокая степень самостоятельности, аккуратность при оформлении текста и расчетных схем, практически отсутствие ошибок в расчетах и ответах

4. Планируемые уровни сформированности компетенций, тестирование

Индекс компетенции	Уровни сформированности компетенции	Критерии оценки	Отличительные признаки
ОК-1 ОК-7 ПК-2	Базовый уровень	3	Результаты показывают что студент обладает необходимыми знаниями, способен понимать и интерпретировать усвоенную программу дисциплины и в основном владеет умениями применять знания для ответов

			на нестандартные вопросы тестов, однако в ряде случаев затрудняется, проявляет неуверенность и допускает ошибки. В целом правильные ответы составляют более 50 %
ОК-1 ОК-7 ПК-2	Продвинутый уровень	4	Студент показывает достаточно прочные знания и хорошие практические умения и навыки, может понимать и интерпретировать усвоенную информацию, правильно ориентироваться в обосновании решений и выборе ответов теста. Допускает сомнения по некоторым вопросам, но в целом правильные ответы составляют более 75%
ОК-1 ОК-7 ПК-2	Уровень высокой компетенции	5	Студент показывает уверенные знания программы. Правильно ориентируется практически по всем темам, обоснованно анализирует и оценивает вопросы тестов. В целом правильные ответы составляют более 90%

5. Комплекты оценочных средств - экзамен

Индекс компетенции	Критерии оценки	Отличительные признаки
ОК-1 ОК-7 ПК-2	Отлично	- показаны всесторонние знания учебного материала в рамках основной образовательной программы по данной дисциплине; - усвоение основной и ознакомление с дополнительной литературой, рекомендованной учебной программой дисциплины; - владение основными понятиями дисциплины;

		- проявление творческих способностей в изложении и использовании учебного материала
ОК-1 ОК-7 ПК-2	Хорошо	- показаны полный и систематический характер знаний в рамках программного материала; - усвоение основной и ознакомление с дополнительной литературой, рекомендованной учебной программой дисциплины; - проявление способностей к самостоятельному пополнению и обновлению знаний в ходе дальнейшей учебной и профессиональной деятельности
ОК-1 ОК-7 ПК-2	Удовлетворительно	- показаны знания основного учебного материала, необходимого для дальнейшей учебной и профессиональной деятельности, но допущены погрешности в ответе на экзамене, в заданиях, предусмотренных рабочей учебной программой дисциплины
ОК-1 ОК-7 ПК-2	Неудовлетворительно	- показаны значительные пробелы в знаниях основного учебного материала, допущены принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных учебной программой дисциплины

6. Вопросы к экзамену (зачету):

Статика:

1. Основные понятия, определения и аксиомы статики.
2. Связи и их реакции.
3. Система сходящихся сил: приведение к равнодействующей и разложение на составляющие.
4. Теорема о трех силах.
5. Аналитическое задание равнодействующей системы сходящихся сил (ССС).
6. Аналитические условия равновесия ССС.
7. Проекция силы на ось и на плоскость.
8. Моменты силы относительно центра.
9. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.
10. Пара сил на плоскости. Свойство пары сил. Сложение пар.
11. Метод Пуансо (теорема о параллельном переносе силы).
12. Приведение произвольной плоской системы сил к данному центру.
13. Главный вектор и главный момент произвольной системы сил.
14. Аналитические условия равновесия произвольной системы сил на плоскости и в пространстве.
15. Три формы условий равновесия произвольной плоской системы сил.
16. Расчет составных конструкций.
17. Расчет ферм методом вырезания узлов и методом Риттера.
18. Расчет при наличии трения скольжения и трения качения.
19. Момент силы как вектор.
20. Момент силы относительно оси.
21. Зависимость между моментом силы относительно оси и относительно центра.
22. Сложение моментов сил и моментов пар в пространстве.
23. Аналитические формулы определения момента силы относительно оси.
24. Центр параллельных сил и сил тяжести.
25. Определение координат центра тяжести.
26. Экспериментальные способы определения координат центра тяжести.

Кинематика:

1. Способы задания движения материальной точки.
2. Определение скорости и ускорения при векторном способе задания движения точки.
3. Определение траектории, скорости и ускорения при координатном способе задания движения точки.
4. Тангенциальное ускорение.
5. Нормальное ускорение.
6. Скорость и ускорение при естественном способе задания движения точки.
7. Частные случаи движения: равномерное и равнопеременное движения.
8. Поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.
9. Угловая скорость и угловое ускорение.
10. Скорость и ускорение отдельных точек при вращении.
11. Равномерное и равнопеременное вращения.
12. Зависимость между частотой вращения и числом оборотов в минуту.
13. Угловая скорость и угловое ускорение как векторы.
14. Плоскопараллельное движение. Разложение на поступательное и вращательное. Закон плоскопараллельного движения.
15. Определение скоростей и ускорений отдельных точек при плоскопараллельном движении.
16. Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей отдельных точек при помощи мгновенного центра скоростей.
17. Сложное движение материальной точки. Относительное, переносное и абсолютное движения.
18. Сложение скоростей при сложном движении точки.
19. Сложение ускорений при сложном движении точки.
20. Ускорение Кориолиса. Правило Жуковского.
21. Сложение поступательных движений.
22. Сложение вращательных движений.
23. Пара вращений.
24. Сложение поступательного и вращательного движений.
25. Винтовое движение.

Динамика:

1. Основные законы динамики.
2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
3. Две основные задачи динамики.
4. Решение первой и второй задач динамики.
5. Динамика относительного движения. Относительный покой.
6. Колебания материальной точки: свободные (без учета сил сопротивления и с учетом вязкого трения).
7. Вынужденные колебания. Явление резонанса.
8. Механическая система. Масса и центр масс системы.
9. Геометрия масс: момент инерции относительно оси и центра.Радиус инерции.
10. Моменты инерции однородных тел: кольца, круга, стержня, цилиндра.

11.. Теорема о движении центра масс. Следствия из теоремы.
12. Количество движения системы. Импульс силы. Момент количества движения (кинетический момент).
13.Теорема об изменении количества движения. Следствия из теоремы.
14. Теорема об изменении кинетического момента. Следствия из теоремы.
15. Кинетическая энергия системы. Работа и мощность силы.
16. Теорема об изменении кине ма тической энергии точки и системы. Частные случаи.
17. Дифференциальные уравнения движения системы при разных видах движения: поступательном, вращательном, плоскопараллельном.
18. Принцип Даламбера.
19. Главный вектор и главный момент сил инерции системы.
20. Динамические реакции подшипников.
21. Понятие о динамической балансировке при вращении.
22. Принцип возможных перемещений. Число степеней свободы.
23. Понятие об обобщенных координатах. Обобщенные скорости и обобщенные силы.
24. Условия равновесия в обобщенных координатах.
25. Дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа 2-го рода.
26. Понятие об устойчивости равновесия.
27. Малые свободные колебания механических систем.
28. Явление удара. Коэффициент восстановления при ударе.
29. Коэффициент восстановления при соударении двух тел.
30. Потеря кинетической энергии при ударе. Частные случаи.
31. Удар по вращающемуся телу. Центр удара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косолапова. М.А. Положение о методах интерактивного обучения студентов по ФГОС 3 в техническом университете/М.А.Косолапова, В.И.Ефанов, В.А.Корнилин, Л.А.Боков.- Томск: ТУСУР, 2012.- 87с.

2. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: Учебное пособие для вузов по техн. спец. /Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин; В 2-х томах. Т.1: Статика и кинематика.»: 6-е изд., испр; - СПб.: Лань, 2002.

3. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: Учебное пособие для вузов по техн. спец. /Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин; В 2-х томах. Т.2: Динамика. - 5-е изд. - СПб.: Лань, 2002.

4. Лачуга Ю.Ф. Теоретическая механика(Текст): учеб.;доп. М-вом с.-х. РФ /Ю.Ф. Лачуга, В.А. Ксендзов.- 3-е изд., перераб. и доп. -М.: Колос, 2010.- 576 с.

5. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для вузов.- / С.М. Тарг. - 13-е изд., стер. - М: Высшая школа, 2003.-416 с.

6. Яблонский, А.Л. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова, - М.; Высшая школа, - Ч.1 – 1992.

7. Яблонский. А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. - 13-е изд. - М.: Высшая школа, - Ч.2 - 2002.

8. Диевский , В.А. Теоретическая механика. Интернет-тестирование базовых знаний (Текст): Учеб. пособие; рек. ФГУ Росакредагенством /В.А. Диевский, А.В. Диевский.- СПб.: Лань,2010.- 144 с.

9. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах (Текст): Учеб. пособие / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. - 11-е изд., стер.-СПб.: Лань, 2010.- Т. 1: Статика и кинематика.- 672 с.

10. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебн. пособие для техн. вузов/ Под общ.ред. А.А. Яблонского. - 10-е изд.,стер.-М.: Интеграл-Пресс, 2003.-384 с.

11. Рябченко В.Н. Основы механики и контрольные задания. Статика и Кинематика: учебное пособие / В.Н. Рябченко.- Благовещенск: ДальГАУ, 2008.- 119 с.

12. Рябченко В.Н. Методические указания для выполнения контрольных работ по теоретической механике /В.Н. Рябченко, М.В. Канделя, Л.С. Силохина.- Благовещенск: ДальГАУ, 2009.- 71 с.

13. Канделя М.В. Основы теоретической механики для агроинженерных специальностей: Учебное пособие /М.В. Канделя.-Благовещенск: ДальГАУ, 2010. -178 с..

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, полужирный

СОДЕРЖАНИЕ

Рябченко Виктор Николаевич,
Канделя Михаил Васильевич

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
и
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Учебное пособие

Лицензия ЛР
Подписано к печати 10.03.2015 г. Формат 60×90/16.
Уч.-изд.л. – ____. Усл.-п.л. – ____
Тираж 1000 экз. Заказ 237.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ПГУ
679000, г. Биробиджан