

Индивидуальное домашнее задание по теории вероятностей для НКНбд-01-19 (2 модуль).

Вариант №11

8. В наборе 6 шара белого цвета, 4 шара синего и 5 шаров красного цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 6 шаров. Случайная величина ξ – число вынутых белых шаров. Найдите:

а) Ряд распределения случайной величины ξ .

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

$(1; 5), [1; 5); (1; 5], [1; 5]$.

в) Найдите ряд распределения случайных величин $\eta = \xi^2 - 3\xi, \mu = (5 - \xi^3) + 4$.

Решение:

ξ может принимать значение от 0 до 6,

$$P(\xi = k) = \frac{C_6^k C_9^{6-k}}{C_{15}^6}$$

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{6! 9!} = 1287$$

Число способов $C_6^k C_9^{6-k}$:

k	0	1	2	3	4	5	6
$C_6^k C_9^{6-k}$	84	756	1890	1680	540	54	1

а) Ряд распределения случайной величины ξ .

ξ	0	1	2	3	4	5	6
p	0,016783	0,151049	0,377622	0,335664	0,107892	0,010789	0,000200

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

$$P(\xi \in (1; 5)) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0.821179$$

$$P(\xi \in [1; 5)) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0.972228$$

$$P(\xi \in (1; 5]) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.831968$$

$$P(\xi \in [1; 5]) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.983017$$

в) Ряд распределения случайных величин $\eta = \xi^2 - 3\xi, \mu = (5 - \xi)^3 + 4$

Вычислим значения случайных величин η и μ :

ξ	0	1	2	3	4	5	6
η	0	-2	-2	0	4	10	18
μ	129	68	31	12	5	4	3
p	0,016783	0,151049	0,377622	0,335664	0,107892	0,010789	0,000200

Составим ряд распределения η и μ , упорядочив значения случайных величин по возрастанию и, если надо, складывая вероятности при одинаковых значениях:

η	-2	0	4	10	18
p	0,528671	0,352448	0,107892	0,010789	0,000200

μ	3	4	5	12	31	68	129
p	0,000200	0,010789	0,107892	0,335664	0,377622	0,151049	0,016783

9. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$.

$$p(x) = \begin{cases} A(|x^3| + 1), & -2 \leq x \leq 3 \\ 0, & x \leq -2, x > 3 \end{cases}.$$

Найдите:

а) Константу A

По условию нормировки

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx &= 1 \\ A \int_{-2}^0 (1 - x^3) dx + A \int_0^3 (x^3 + 1) dx &= A \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-2}^0 + A \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \Big|_0^3 = 6A + \frac{93A}{4} = \\ &= \frac{117}{4} \Rightarrow A = \frac{4}{117} \end{aligned}$$

б) Функцию распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

Найдём функцию распределения:

При $-2 < x \leq 0$:

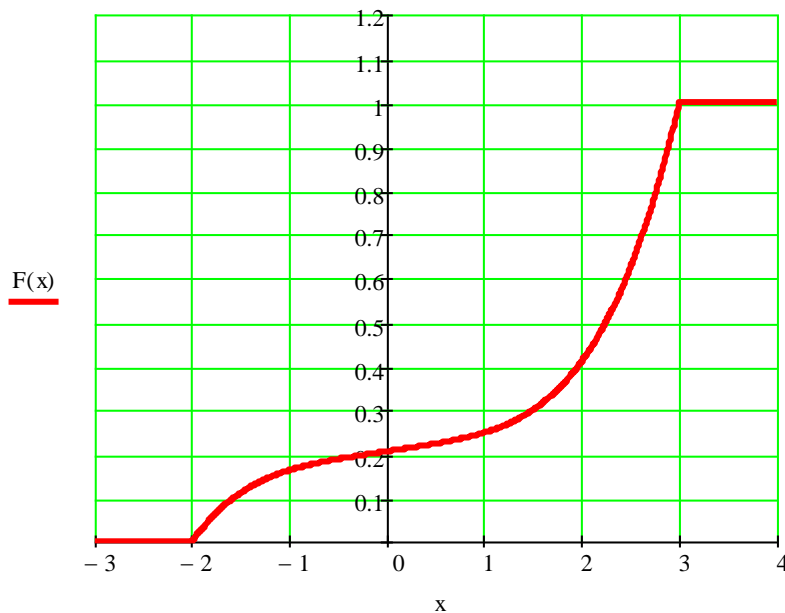
$$F_{\xi}(x) = \frac{4}{117} \int_{-2}^x (1 - x^3) dx = \frac{4}{117} \left(x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-2}^x = \frac{4x - x^4 + 24}{117}$$

$$F_{\xi}(0) = \frac{8}{39}$$

При $0 < x \leq 3$:

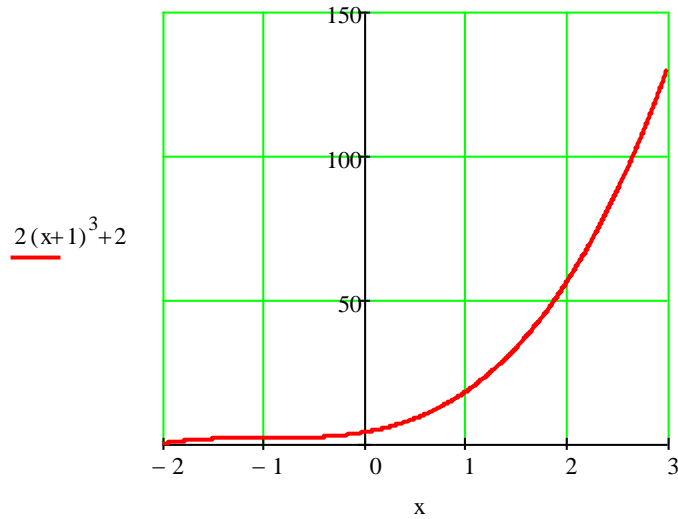
$$F_{\xi}(x) = \frac{8}{39} + \frac{4}{117} \int_0^x (x^3 + 1) dx = \frac{8}{39} + \frac{4}{117} \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \Big|_0^x = \frac{x(x^3 + 4) + 24}{117}$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{4x - x^4 + 24}{117}, & -2 < x \leq 0 \\ \frac{x(x^3 + 4) + 24}{117}, & 0 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



в) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = 2(\xi + 1)^3 + 2$.

$$\begin{aligned} F_{\eta}(y) &= P(\eta < y) = P(2(\xi + 1)^3 + 2 < y) = P\left((\xi + 1)^3 < \frac{y}{2} - 1\right) = \\ &= P\left(\xi < \sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1\right) = F_{\xi}\left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1\right) \end{aligned}$$



$$x = -2 \Rightarrow y = 0, \quad x = 0 \Rightarrow y = 4, \quad x = 3 \Rightarrow y = 130$$

При $-2 < x \leq 0, 0 < y \leq 4$:

$$F_{\eta}(y) = \frac{4 \left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right) - \left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right)^4 + 24}{117}$$

При $0 < x \leq 3, 4 < y \leq 130$:

$$F_{\eta}(y) = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right) \left(\left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right)^3 + 4 \right) + 24}{117}$$

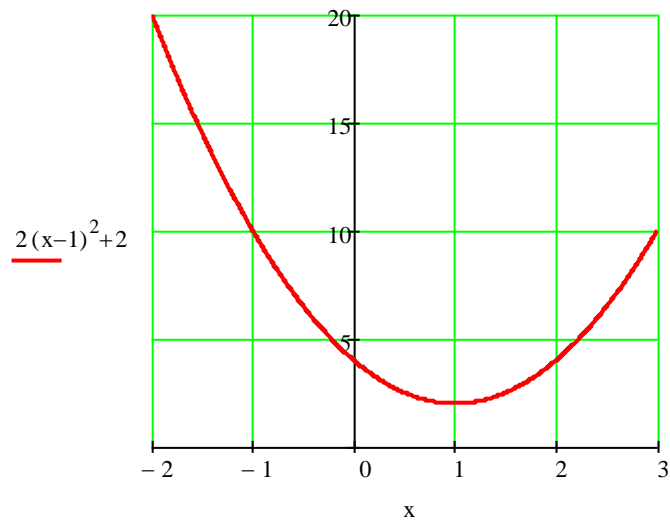
Итак

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{4 \left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right) - \left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right)^4 + 24}{117}, & 0 < y \leq 4 \\ \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right) \left(\left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right)^3 + 4 \right) + 24}{117}, & 4 < y \leq 130 \\ 1, & y > 130 \end{cases}$$

$$p_{\eta}(y) = F'_{\eta}(y)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{4 \left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right) - \left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right)^4 + 24}{117} \right)' = \\
& = \frac{4 \sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} \left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 2 \right) \left(\left(\frac{y}{2} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} + 1 \right)}{351(2 - y)}; \\
& \left(\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right) \left(\left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 1 \right)^3 + 4 \right) + 24}{117} \right)' = \\
& = \frac{4 \left(\frac{y}{2} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} \left(\left(\frac{y}{2} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} - 3 \sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} + 3 \right)}{351(y - 2)} \\
p_{\eta}(y) = & \begin{cases} \frac{4 \sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} \left(\sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} - 2 \right) \left(\left(\frac{y}{2} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} + 1 \right)}{351(2 - y)}, & 0 < y \leq 4 \\ \frac{4 \left(\frac{y}{2} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} \left(\left(\frac{y}{2} - 1 \right)^{\frac{2}{3}} - 3 \sqrt[3]{\frac{y}{2} - 1} + 3 \right)}{351(y - 2)}, & 4 < y \leq 130 \\ 0, & y \leq 0, y > 130 \end{cases}
\end{aligned}$$

г) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\mu = 2(\xi - 1)^2 + 2$



$$y = 2(x - 1)^2 + 2$$

$$p_{\mu}(y) = p_{\xi}(g(y))|g'(y)|$$

$$(x - 1)^2 = \frac{y - 2}{2}, \quad x = 1 \pm \sqrt{\frac{y - 2}{2}}$$

$$g(y) = 1 - \sqrt{\frac{y - 2}{2}} \text{ при } x \geq 1$$

$$g(y) = 1 - \sqrt{\frac{y - 2}{2}} \text{ при } x < 1$$

$$|g'(y)| = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y - 2}}$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 20, \quad x = -1, x = 3 \Rightarrow y = 10, \quad x = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 0, y = 4$$

$$y \in [2; 20]$$

При $-2 \leq x \leq -1, 10 \leq y \leq 20$:

$$p_{\mu}(y) = \frac{4}{117} \left(1 - \left(1 - \sqrt{\frac{y - 2}{2}} \right)^3 \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y - 2}} = \frac{y}{234} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{y - 2}}{78} + \frac{2}{117}$$

При $-1 \leq x \leq 0$ и $2 \leq x \leq 3$ $4 \leq y \leq 10$:

$$p_{\mu}(y) = \frac{4}{117} \left(1 - \left(1 - \sqrt{\frac{y-2}{2}} \right)^3 + 1 + \left(1 + \sqrt{\frac{y-2}{2}} \right)^3 \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y-2}} =$$

$$= \frac{y}{117} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y-2}} + \frac{4}{117}$$

При $0 \leq x \leq 2$ $2 \leq y \leq 4$:

$$p_{\mu}(y) = \frac{4}{117} \left(1 + \left(1 - \sqrt{\frac{y-2}{2}} \right)^3 + 1 + \left(1 + \sqrt{\frac{y-2}{2}} \right)^3 \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y-2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(3y-2)}{117\sqrt{y-2}}$$

Итак,

$$p_{\mu}(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}(3y-2)}{117\sqrt{y-2}}, & 2 < y \leq 4 \\ \frac{y}{117} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y-2}} + \frac{4}{117}, & 4 < y \leq 10 \\ \frac{y}{234} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{y-2}}{78} + \frac{2}{117}, & 10 < y \leq 20 \\ 0, & y \notin [2, 20] \end{cases}$$

Найдём $F_{\mu}(y)$:

При $2 \leq y \leq 4$:

$$F_{\mu}(y) = \int_2^y \frac{\sqrt{2}(3y-2)}{117\sqrt{y-2}} dy = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{y-2}(y+2)}{117}$$

$$F_{\mu}(4) = \frac{8}{39}$$

При $4 \leq y \leq 10$:

$$F_{\mu}(y) = \frac{8}{39} + \int_4^y \left(\frac{y}{117} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y-2}} + \frac{4}{117} \right) dy = \frac{4y}{117} + \frac{y^2}{234} + \frac{4\sqrt{2}\sqrt{y-2}}{117} - \frac{8}{117}$$

$$F_{\mu}(10) = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{8}}{117} + \frac{82}{117}$$

При $10 \leq y \leq 20$:

$$\begin{aligned} F_{\mu}(y) &= \frac{4\sqrt{2}\sqrt{8}}{117} + \frac{82}{117} + \int_{10}^y \left(\frac{y}{234} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{y-2}}{78} + \frac{2}{117} \right) dy \\ &= \frac{2y}{117} + \frac{y^2}{468} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{y-2})^3}{117} + \frac{85}{117} \end{aligned}$$

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 2 \\ \frac{2\sqrt{2}\sqrt{y-2}(y+2)}{117}, & 2 < y \leq 4 \\ \frac{4y}{117} + \frac{y^2}{234} + \frac{4\sqrt{2}\sqrt{y-2}}{117} - \frac{8}{117}, & 4 < y \leq 10 \\ \frac{2y}{117} + \frac{y^2}{468} - \frac{\sqrt{2}(y-2)^{\frac{3}{2}}}{117} + \frac{85}{117}, & 10 < y \leq 20 \\ 1, & y > 20 \end{cases}$$

10. В условиях задачи 8 выбирают $m = 6$ шаров. (В наборе 6 шаров белого цвета, 4 шаров синего и 5 шаров красного цвета). Пусть ξ число вынутых белых шаров, а через η – красных.

Найдите:

а) Совместное распределение случайных величин ξ и η (ряд распределения).

ξ может принимать значение от 0 до 6, η может принимать значение от 0 до 5. Всего 15 шаров, извлекаем 6.

$$P(\xi = k, \eta = m) = \frac{C_6^k C_5^m C_4^{6-k-m}}{C_{15}^6}; C_{15}^6 = \frac{15!}{6! 9!} = 5005$$

Число способов $C_6^k C_5^m C_4^{6-k-m}$:

$k \setminus m$	0	1	2	3	4	5
0			10	40	30	4
1		30	240	360	120	6
2	15	300	900	600	75	
3	80	600	800	200		
4	90	300	150			
5	24	30				
6	1					

Совместное распределение случайных величин ξ и η

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3	4	5	Сумма
0			0,001998	0,007992	0,005994	0,000799	0,016783
1		0,005994	0,047952	0,071928	0,023976	0,001199	0,151049
2	0,002997	0,05994	0,17982	0,11988	0,014985		0,377622
3	0,015984	0,11988	0,15984	0,03996			0,335664
4	0,017982	0,05994	0,02997				0,107892
5	0,004795	0,005994					0,010789
6	0,000200						0,000200
Сумма	0,041958	0,251748	0,41958	0,23976	0,044955	0,001998	1

б) Ряды распределения случайных величин ξ и η .

ξ	0	1	2	3	4	5	6
$P(\xi)$	0,016783217	0,151049	0,377622	0,335664	0,107892	0,010789	0,000200

η	0	1	2	3	4	5
$P(\eta)$	0,041958	0,251748	0,41958	0,23976	0,044955	0,001998

в) Условные распределения случайной величины ξ при условии η , случайной величины η при условии ξ , проверить случайные величины на независимость

Условные распределения:

$$P(\xi = k | \eta = m) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\eta = m)}$$

Условный закон распределения $P(\xi = k | \eta = 0)$:

ξ	P
2	0,071429
3	0,380952
4	0,428571
5	0,114286
6	0,004762
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k | \eta = 1)$:

ξ	P
1	0,02381
2	0,238095
3	0,47619
4	0,238095
5	0,02381
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 2)$:

ξ	P
0	0,004762
1	0,114286
2	0,428571
3	0,380952
4	0,071429
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 3)$:

ξ	P
0	0,033333
1	0,3
2	0,5
3	0,166667
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 4)$:

ξ	P
0	0,133333
1	0,533333
2	0,333333
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 5)$:

ξ	P
0	0,4
1	0,6
Сумма	1

$$P(\eta = m|\xi = k) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\xi = k)}$$

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 0)$:

η	2	3	4	5	Сумма
P	0,119048	0,47619	0,357143	0,047619	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 1)$:

η	1	2	3	4	5	Сумма
P	0,039683	0,31746	0,47619	0,15873	0,007937	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 2)$:

η	0	1	2	3	4	Сумма
P	0,007937	0,15873	0,47619	0,31746	0,039683	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 3)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,047619	0,357143	0,47619	0,119048	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 4)$:

η	0	1	2	Сумма
P	0,166667	0,555556	0,277778	1

Условный закон распределения $P(\eta = 0|\xi = 5)$:

η	0	1	Сумма
P	0,444444	0,555556	1

$$P(\eta = 0|\xi = 6) = 1$$

Для независимых случайных величин

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y)$$

Например

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = 0$$

$$P(\xi < 1)P(\eta < 1) = 0.016783 \cdot 0.041958 \neq 0$$

Равенство

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = P(\xi < 1)P(\eta < 1) - \text{неверно}$$

Следовательно, ξ и η зависимы.

г) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ в заданных точках $(x, y) = (7; 3), (5; 6), (3; 3)$,

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}(7, 3) &= P(\xi < 7, \eta < 3) = P(\eta < 3) = P(\eta = 0) + P(\eta = 1) + P(\eta = 2) = \\ &= 0.713287 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}(5, 6) &= P(\xi < 5, \eta < 6) = P(\xi < 5) = 1 - P(\xi = 5) + P(\eta = 6) = \\ &= 0.989011 \end{aligned}$$

$$F_{\xi\eta}(3, 3) = P(\xi < 3, \eta < 3) = \frac{15 + 30 + 300 + 10 + 240 + 900}{5005} \approx 0.298701$$

д) Ряд распределения новой случайной величины $\mu = |\xi - 2| \cdot \cos \pi \eta$

Составим таблицу значений случайной величины μ :

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0			2	-2	2	-2
1		-1	1	-1	1	-1
2	0	0	0	0	0	
3	1	-1	1	-1		
4	2	-2	2			
5	3	-3				
6	4					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ :

μ	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(\mu)$	0,005994	0,068731	0,238961	0,377622	0,247752	0,055944	0,004795	0,0002

е) Ряд распределения новой двумерной дискретной случайной величины $(\mu_1; \mu_2)$

$$\mu_1 = 2\xi + 3\eta - 5, \mu_2 = \eta - 2(\xi - 3)$$

Составим таблицу значений случайной величины μ_1 :

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0			1	4	7	10
1		0	3	6	9	12
2	-1	2	5	8	11	
3	1	4	7	10		
4	3	6	9			
5	5	8				
6	7					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ :

μ_1	-1	0	1	2	3	4	5
$P(\mu)$	0,002997003	0,005994	0,017982	0,05994	0,065934	0,127872	0,184615
μ_1	6	7	8	9	10	11	12
$P(\mu)$	0,131868	0,166034	0,125874	0,053946	0,040759	0,014985	0,001199

Составим таблицу значений случайной величины μ_2 :

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0			8	9	10	11
1		5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	
3	0	1	2	3		
4	-2	-1	0			
5	-4	-3				
6	-6					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ :

μ_2	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2	
$P(\mu)$	0,0001998	0,004795	0,005994	0,017982	0,05994	0,045954	0,11988	0,162837	
μ_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P(\mu)$	0,0999	0,17982	0,125874	0,062937	0,071928	0,025974	0,009191	0,005994	0,000799

Совместное распределение случайных величин μ_1 и μ_2

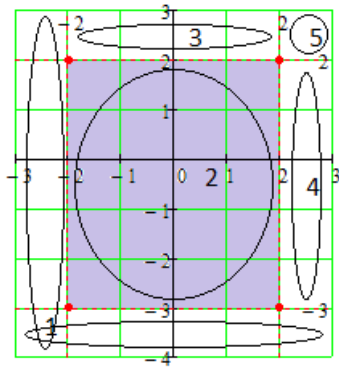
$\mu_1 \setminus \mu_2$	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
-1								0,002997	
0									
1						0,015984			
2									0,05994
3				0,017982					
4							0,11988		
5		0,004795							
6					0,05994				
7	0,0002							0,15984	
8			0,005994						
9						0,02997			
10									0,03996
11									
12									

$\mu_1 \setminus \mu_2$	4	5	6	7	8	9	10	11
-1								
0		0,005994						
1					0,001998			
2								
3			0,047952					
4						0,007992		
5	0,17982							
6				0,071928				
7							0,005994	
8		0,11988						
9					0,023976			
10								0,000799
11			0,014985					
12						0,001199		

11. В четырехугольник с вершинами в точках $(-2; -3), (-2; 2), (2; -3), (2; 2)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси X и Y точки падения частицы.

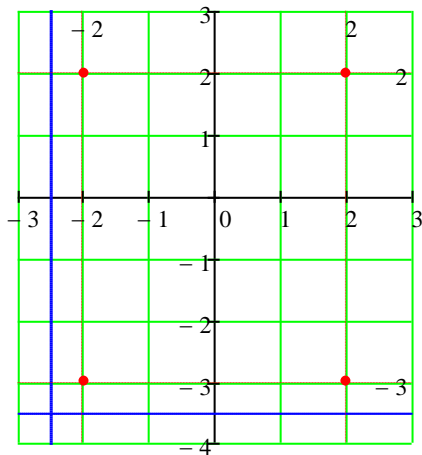
Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ случайной величины (ξ, η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ, η) .



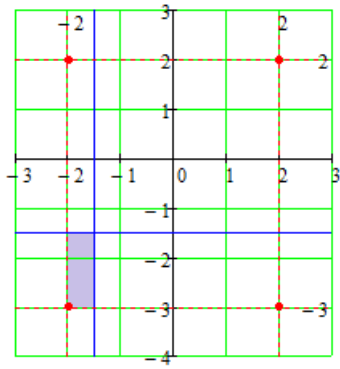
Всего имеем 5 различных областей.

Область 1: $(x < -3)$ или $(y < -2)$:



Пересечения с четырехугольником нет, $F_{\xi\eta}(x, y) = 0$.

Область 2: $(x, y) \in D$:

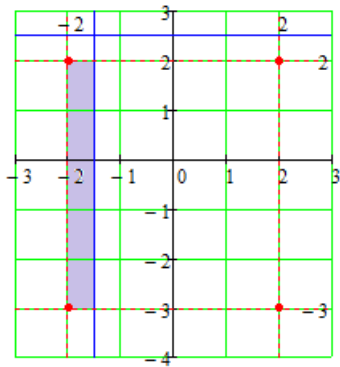


$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{S_D} \int_{-4}^x \int_{-1}^y dx dy$$

$S_D = 20$ – площадь области.

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{20} \int_{-2}^x dx \int_{-3}^y dy = \frac{(x+2)(y+3)}{20}.$$

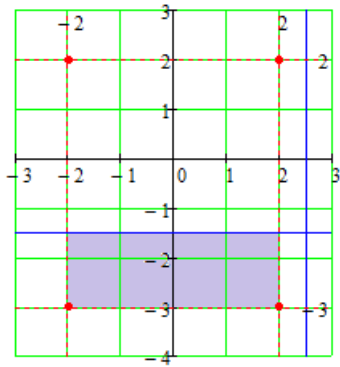
Область 3: $(-2 < x \leq 2)$ и $(y > 2)$:



$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{S_D} \int_{-4}^x \int_{-1}^5 dx dy$$

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{20} \int_{-2}^x dx \int_{-3}^2 dy = \frac{(x+2)}{4}.$$

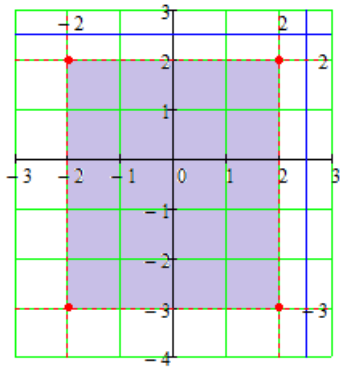
Область 4: $(x > 2)$ и $(-3 < y \leq 2)$:



$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{S_D} \int_{-4}^1 \int_{-1}^y dx dy$$

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{20} \int_{-2}^2 dx \int_{-3}^y dy = \frac{y+3}{5}.$$

Область 5: $(x > 2) \text{ и } (y > 2)$:



$$F_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{S_D} \int_{-2}^2 \int_{-3}^2 dx dy = \frac{1}{20} \int_{-2}^2 dx \int_{-3}^2 dy = 1.$$

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x < -2) \text{ или } (y < -3) \\ \frac{(x+2)(y+3)}{20}, & (x, y) \in D \\ \frac{x+2}{4}, & (-2 < x \leq 2) \text{ и } (y > 2) \\ \frac{y+3}{5}, & (x > 2) \text{ и } (-3 < y \leq 2) \\ 1, & (x > 2) \text{ и } (y > 2) \end{cases}$$

Поскольку площадь четырёхугольника D равна 20, и точки распределены в соответствии с принципом геометрической вероятности то совместная плотность распределения имеет равномерное распределение внутри D :

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}.$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η .

$$p_{\xi}(x) = \int_{-3}^2 p_{\xi\eta}(x, y) dy = \frac{1}{20} \int_{-3}^2 1 dy = \frac{1}{4}$$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [-2; 2] \\ 0, & x \notin [-2; 2] \end{cases}.$$

$$F_{\xi}(x) = \int_{-2}^x p_{\xi}(x) dx = \frac{x+2}{4}, \quad -2 < x \leq 2$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{x+2}{4}, & -2 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$p_{\eta}(y) = \int_{-2}^2 p_{\xi\eta}(x, y) dx = \frac{1}{20} \int_{-2}^2 1 dy = \frac{1}{5}$$

$$p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & y \in [-3; 2] \\ 0, & y \notin [-3; 2] \end{cases}.$$

$$F_{\eta}(y) = \int_{-3}^y p_{\eta}(y) dy = \frac{y+3}{5}, \quad -3 < y \leq 2$$

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -3 \\ \frac{y+3}{5}, & -3 < y \leq 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η , и случайной величины η при условии ξ . Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_{\xi}(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\eta}(y)} = \frac{1}{4} \text{ при } (x, y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_{\eta}(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\xi}(x)} = \frac{1}{5} \text{ при } (x, y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

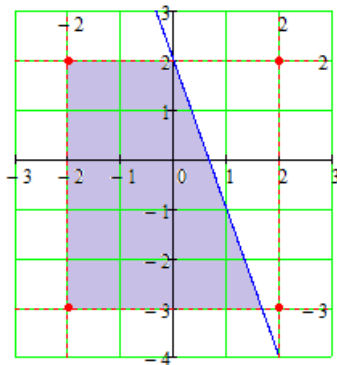
$$p_{\xi}(x|y) = p_{\xi}(x) - \text{верно}$$

Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_{\xi}(x|y) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{x+2}{4}, & -2 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$F_{\eta}(y|x) = \begin{cases} 0, & y \leq -3 \\ \frac{y+3}{5}, & -3 < y \leq 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu = 3\xi + \eta$ в точке $z = 2$.



$$y = 2 - 3x, \quad 2 - 3x = -3, \quad x = 1\frac{2}{3}$$

$$F_{\mu}(2) = P(3\xi + \eta < 2) = P(\eta < 2 - 3\xi) = \frac{S_D}{S} = \frac{\left(2 + 3\frac{2}{3}\right) \cdot 5}{20} = \frac{17}{24}$$

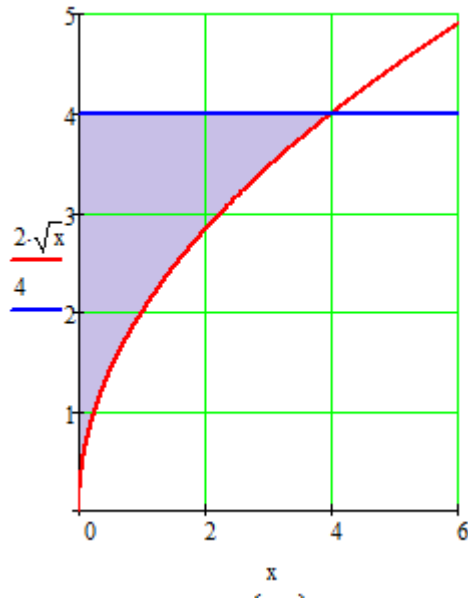
12. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x, y) = C(2x + 2y^2), (x, y) \in D,$$

где область $D = \{(x, y): x = 0, y = 4, y = 2\sqrt{x}\}$

Найдите:

а) Постоянную C .



По закону нормировки

$$\iint_D p_{\xi\eta}(x, y) dx dy = 1,$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^4 C(2x + 2y^2) dy &= C \int_0^4 \left(2xy + \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_{2\sqrt{x}}^4 dx = \\ &= C \int_0^4 \left(8x - \frac{28x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{128}{3} \right) dx = C \left(4x^2 + \frac{128x}{3} - \frac{56}{15} x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^4 = \frac{576}{5} C \end{aligned}$$

$$C = \frac{5}{576}$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ в заданных точках $(x, y) = (4; 3)$

$$y = 2\sqrt{x}; x = \frac{y^2}{4}$$

$$F_{\xi\eta}(4, 3) = P(\eta < 3) = \frac{5}{576} \int_0^3 dy \int_0^{\frac{y^2}{4}} (2x + 2y^2) dx =$$

$$\begin{aligned} F_{\xi\eta}(4, 3) &= \frac{5}{576} \int_0^3 (x^2 y + 2y^2 x) \Big|_0^{\frac{y^2}{4}} dy = \frac{5}{576} \int_0^3 \frac{9y^4}{16} dx = \\ &= \frac{5}{576} \left(\frac{9y^5}{16 \cdot 5} \right) \Big|_0^3 = \frac{243}{1024} \approx 0.2373 \end{aligned}$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η .

$$\begin{aligned} p_{\xi}(x) &= \int_{2\sqrt{x}}^4 p_{\xi\eta}(x, y) dy = \frac{5}{576} \int_{2\sqrt{x}}^4 (2x + 2y^2) dy = \frac{5}{576} \left(2xy + \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_{2\sqrt{x}}^4 = \\ &= \frac{5}{576} \left(8x - \frac{28x\sqrt{x}}{3} + \frac{128}{3} \right) \end{aligned}$$

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{5}{576} \left(8x - \frac{28x\sqrt{x}}{3} + \frac{128}{3} \right), & x \in [0; 4] \\ 0, & x \notin [0; 4] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x) &= \int_0^x \left(\frac{5}{576} \left(8x - \frac{28x\sqrt{x}}{3} + \frac{128}{3} \right) \right) dx = \frac{5}{576} \left(4x^2 - \frac{56x^2\sqrt{x}}{15} + \frac{128x}{3} \right) \Big|_0^x = \\ &= \frac{5}{576} \left(4x^2 - \frac{56x^2\sqrt{x}}{15} + \frac{128x}{3} \right) \end{aligned}$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{5}{576} \left(4x^2 - \frac{56x^2\sqrt{x}}{15} + \frac{128x}{3} \right), & 0 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$y = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = \frac{y^2}{4}$$

$$p_{\eta}(y) = \int_0^{\frac{y^2}{4}} p_{\xi\eta}(x, y) dx = \frac{5}{576} \int_0^{\frac{y^2}{4}} (2x + 2y^2) dx = \frac{5}{576} (x^2 + 2y^2 x) \Big|_0^{\frac{y^2}{4}} = \frac{5y^4}{1024}$$

$$p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{5y^4}{1024}, & y \in [0; 4] \\ 0, & y \notin [0; 4] \end{cases}$$

$$F_{\eta}(y) = \int_0^y p_{\eta}(y) dy = \int_0^y \frac{5y^4}{1024} dy = \left(\frac{y^5}{1024} \right) \Big|_0^y = \frac{y^5}{1024}$$

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 4 \\ \frac{y^5}{1024}, & 0 < y \leq 4 \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η , и случайной величины η при условии ξ . Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_{\xi}(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\eta}(y)}$$

$$p_{\xi}(x|y) = \frac{\frac{5}{576}(2x + 2y^2)}{\frac{5y^4}{1024}} = \frac{32(y^2 + x)}{9y^4} \text{ при } (x, y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_{\eta}(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_{\xi}(x)}$$

$$p_{\eta}(y|x) = \frac{\frac{5}{576}(2x + 2y^2)}{\frac{5}{576} \left(8x - \frac{28x\sqrt{x}}{3} + \frac{128}{3} \right)} = \frac{3(y^2 + x)}{2(6x - 7x\sqrt{x} + 32)} \text{ при } (x, y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

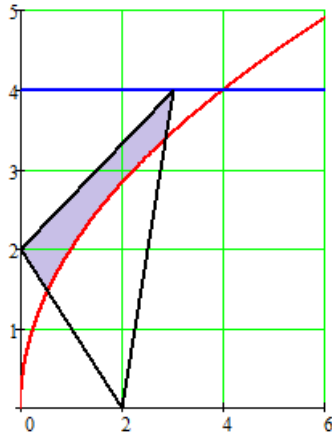
$$p_{\xi}(x|y) = p_{\xi}(x) - \text{неверно}$$

Следовательно, случайные величины зависимы.

$$F_{\xi}(x|y) = 32 \int_0^x \frac{32(y^2 + x)}{9y^4} dx = \frac{16x(2y^2 + x)}{9y^4} \text{ при } (x, y) \in D$$

$$F_{\eta}(y|x) = \int_0^y \frac{3(y^2 + x)}{2(6x - 7x\sqrt{x} + 32)} dy = \frac{y(y^2 + 3x)}{2(6x - 7x\sqrt{x} + 32)} \text{ при } (x, y) \in D$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ, η) в треугольник с вершинами в точках $(0; 2)$, $(3; 4)$, $(2; 0)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



Стороны треугольника:

$$y = 2 - x; y = \frac{2}{3}x + 2; y = 4x - 8$$

$$y = 2 - x = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.536$$

$$y = 4x - 8 = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{33}}{8} + \frac{17}{8}$$

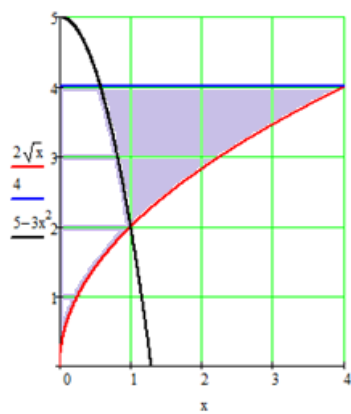
$$P = \frac{5}{576} \int_0^{4-2\sqrt{3}} dx \int_{2-x}^{\frac{2}{3}x+2} (2x + 2y^2) dy + \frac{5}{576} \int_{4-2\sqrt{3}}^{\frac{\sqrt{33}}{8} + \frac{17}{8}} dx \int_{2\sqrt{x}}^{\frac{2}{3}x+2} (2x + 2y^2) dy +$$

$$+ \frac{5}{576} \int_{\frac{\sqrt{33}}{8} + \frac{17}{8}}^3 dx \int_{4x-8}^{\frac{2}{3}x+2} (2x + 2y^2) dy$$

е)

Значение функции распределения $F_\mu(z)$ новой случайной величины $\mu = 5 - 3\xi^2 - \eta$ в точке $z = 0$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_\mu(0) = P(5 - 3\xi^2 - \eta < 0) = P(\eta > 5 - 3\xi^2)$$



$$y = 2\sqrt{x} = 5 - 3x^2 \Rightarrow x = 1$$

$$5 - 3x^2 = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$F_{\mu}(0) = \frac{5}{576} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 dx \int_{5-3x^2}^4 (2x + 2y^2) dy + \frac{5}{576} \int_1^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^4 (2x + 2y^2) dy$$