**Контрольная работа**

**Тема: «Прогнозирование временных рядов на основе однофакторной регрессионной модели»**

**Цель работы:** получить навыки построения экспериментально-статистической модели объекта с использованием процедур регрессионного анализа.

**В контрольной работе необходимо выполнить:**

1. Рассчитать параметры уравнений линейной, степенной, экспоненциальной, параболической, показательной, гиперболической парной регрессии.
2. Для всех функций тренда рассчитать значения коэффициента детерминации R2.
3. Рассчитать значений сезонной компоненты.
4. Рассчитать точность построенных моделей.
5. Построить графики фактические и рассчитанные значения уровней ряда.

**Пример расчетов представлен в пунктах 2,3 данных методических указаний.**

**Расчеты проводить с использованием калькулятора, результаты расчетов вносить в таблицы, указанные в примере решения (пункт 3).**

Вариант контрольной работы определяется последней цифрой пароля студента из таблицы 4.1

Таблица 4.1 - Таблица исходных данных для контрольной работы

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вариант | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| январь | 13414 | 10956 | 9538 | 10428 | 11470 | 11409 | 8536 | 75851 | 67779 | 69578 |
| февраль | 11242 | 11624 | 10369 | 12863 | 12137 | 10609 | 9885 | 73348 | 75211 | 73558 |
| март | 12502 | 12551 | 12215 | 11539 | 12758 | 11744 | 10374 | 81651 | 78589 | 74019 |
| апрель | 12145 | 13415 | 13312 | 13301 | 11742 | 12458 | 13364 | 88967 | 83076 | 81783 |
| май | 13325 | 11499 | 13722 | 15009 | 15068 | 13258 | 12716 | 89007 | 86062 | 85281 |
| июнь | 11666 | 11997 | 13200 | 13439 | 13773 | 14564 | 12864 | 89111 | 94926 | 92109 |
| июль | 12098 | 12679 | 12388 | 12736 | 12873 | 16632 | 11129 | 96867 | 98216 | 89512 |
| август | 14139 | 12330 | 13036 | 13153 | 13609 | 14708 | 13011 | 96828 | 96909 | 97585 |
| сентябрь | 11310 | 14309 | 13995 | 13321 | 13301 | 15190 | 14145 | 99736 | 98870 | 95613 |
| октябрь | 11456 | 12359 | 12047 | 12604 | 12364 | 13776 | 13973 | 104231 | 101735 | 95188 |
| ноябрь | 12121 | 11471 | 14146 | 14456 | 13332 | 13040 | 13088 | 100808 | 97064 | 96332 |
| декабрь | 14214 | 12393 | 11366 | 13112 | 16314 | 13314 | 13699 | 105171 | 100433 | 96880 |
| январь | 12437 | 12739 | 11839 | 13281 | 15201 | 14446 | 12082 | 97481 | 102752 | 94790 |
| февраль | 13367 | 13992 | 12207 | 13354 | 13959 | 13695 | 14044 | 97717 | 102160 | 91392 |
| март | 13423 | 13213 | 12575 | 12293 | 13460 | 14519 | 15055 | 101416 | 95200 | 93788 |
| апрель | 13598 | 14459 | 14696 | 14075 | 14631 | 17707 | 12051 | 100888 | 103562 | 97352 |
| май | 12669 | 12207 | 14227 | 14731 | 12767 | 15024 | 14258 | 102402 | 101570 | 97293 |
| июнь | 14378 | 13162 | 15155 | 13731 | 13656 | 17653 | 13056 | 99776 | 99896 | 98092 |
| июль | 12702 | 12542 | 12846 | 14412 | 14600 | 14340 | 12165 | 100532 | 97049 | 100153 |
| август | 14510 | 13803 | 14661 | 16463 | 16712 | 15622 | 12994 | 101369 | 107908 | 100291 |
| сентябрь | 12864 | 15766 | 13657 | 15391 | 17657 | 16848 | 13162 | 102450 | 104549 | 107086 |
| октябрь | 14998 | 14751 | 14921 | 14424 | 17793 | 16101 | 14272 | 108493 | 103109 | 101706 |
| ноябрь | 14976 | 14329 | 15337 | 16517 | 17339 | 12928 | 14635 | 106553 | 105683 | 104552 |
| декабрь | 15718 | 15412 | 17258 | 16003 | 15765 | 13232 | 13834 | 107587 | 108532 | 105232 |
| январь | 20887 | 15110 | 16548 | 16887 | 16333 | 14654 | 13475 | 103955 | 106205 | 102090 |
| февраль | 19341 | 14412 | 15899 | 16884 | 17038 | 14159 | 11868 | 103806 | 99946 | 102763 |
| март | 21131 | 14346 | 14758 | 15935 | 15605 | 13007 | 13843 | 111964 | 103873 | 107334 |
| апрель | 17148 | 12798 | 14156 | 13786 | 16486 | 13831 | 12840 | 101773 | 105305 | 104105 |
| май | 16550 | 13780 | 15116 | 17147 | 15976 | 13502 | 13997 | 111740 | 104657 | 107760 |
| июнь | 15548 | 15082 | 13398 | 18111 | 14240 | 13107 | 13682 | 108648 | 109237 | 101507 |
| июль | 15989 | 14020 | 14957 | 16663 | 14449 | 14359 | 12409 | 113691 | 109251 | 106295 |
| август | 13692 | 15241 | 15829 | 16442 | 16344 | 14116 | 12237 | 112797 | 110244 | 110426 |
| сентябрь | 12149 | 14806 | 15771 | 16325 | 17314 | 12739 | 14325 | 108367 | 103566 | 106442 |
| октябрь | 16061 | 17599 | 15940 | 12145 | 17428 | 13476 | 11126 | 108432 | 111475 | 115649 |
| ноябрь | 15409 | 15073 | 13119 | 14933 | 17220 | 14188 | 14209 | 106282 | 102937 | 103951 |
| декабрь | 16390 | 14771 | 15190 | 15621 | 15932 | 14572 | 12754 | 105503 | 104489 | 101530 |

1. **Краткие теоретические сведения.**

Анализ временного ряда начинается с построения его графика, выявления наличия и характера тренда, наличия и характера сезонности.

Метод аналитического выравнивания позволяет определить проявляющуюся во времени тенденцию развития изучаемого явления. Развитие исследуемого процесса предстает перед исследователем как бы в зависимости только от течения времени. В ходе выравнивания временного ряда получают наиболее общий, суммарный, проявляющийся во времени результат действия всех причинных факторов. Отклонение конкретных уровней ряда от уровней, соответствующих общей тенденции, объясняют действием факторов, проявляющихся случайно или циклически

Математически временной ряд может быть представлен в следующем виде:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |

где  ** –неслучайная компонента процесса (тренд);

*St* – сезонная составляющая.

Тренд представляет собой общую систематическую линейную или нелинейную компоненту, которая может изменяться во времени, то есть это закономерная, неслучайная составляющая временного ряда, которая может быть вычислена по вполне определенному однозначному правилу. Поэтому обычно предполагают, что тренд - это некоторая функция простого вида (линейная, квадратичная и т.п.), описывающая “поведение в целом” ряда или процесса. В практических исследованиях в качестве модели тренда в основном используют следующие функции: линейную, полиноминальную, степенную, показательную, экспоненциальную. Выбор функции тренда осуществляется по целому ряду статистических критериев, например, по дисперсии, корреляционному отношению, коэффициенту детерминации. При этом критерии являются критериями аппроксимации, а не прогноза.

Таким образом, целью аналитического выравнивания динамического ряда является определение аналитической или графической зависимости *.* На практике по имеющемуся временному ряду задают вид и находят параметры функции *,* а затем анализируют отклонение от тенденции. Функцию ** выбирают таким образом, чтобы она давала содержательное объяснение изучаемого процесса.

Для выявления основной тенденции (тренда) необходимо рассчитать параметры функции, описывающей эмпирический ряд. Наиболее распространенными методами оценки параметров являются:

* метод наименьших квадратов и его модификации,
* метод экспоненциального сглаживания,
* метод вероятностного моделирования и метод адаптивного сглаживания.

Использование методов сглаживания рядов необходимо для того, чтобы исключить возможности «сглаживания» значимых моментов в поведении системы случайных выбросов и кратковременных изменений параметров.

Под сезонными колебаниями понимаются более или менее устойчивые внутригодовые колебания уровней развития со­циально-экономических явлений [2,6].

Большое практическое значение статистического изучения сезонных колебаний состоит в том, что получаемые при анали­зе рядов внутригодовой динамики количественные характеристики отображают специфику развития изучаемых явлений по месяцам и кварталам годового цикла. Это необходимо для по­знания закономерностей развития социально-экономических явлений во внутригодовой динамике, прогнозирования и разработки оперативных мер по своевременному управле­нию их развитием во времени.

При статистическом изучении в рядах внутригодовой дина­мики сезонных колебаний решаются следующие две взаимосвя­занные задачи: выявление специфики развития изучаемого яв­ления во внутригодовой динамике; измерение сезонных колеба­ний изучаемого явления с построением модели сезонной волны [6].

Существует ряд методов, позволяющих выявить и измерить сезонную волну (таблица 1.1).

Таблица 1.1 - Классификация методов выявления и измерения сезонных волн

|  |  |
| --- | --- |
| Методы измерения сезонных волн,  основанные на применении | Наименование методов вычисления сезонных волн |
| Средней арифметической | Метод абсолютных разностей  Метод переменной средней  Метод постоянной средней |
| Относительных величин | Метод относительных разностей  Метод относительных величин на основе медианы  Метод У. Пирсона (цепной метод) |
| Механического выравнивания | Метод скользящих средних  Метод скользящих сумм и  скользящих средних |
| Аналитического выравнивания | Выравнивание функцией  Выравнивание по ряду Фурье |

Метод абсолютных разностей и метод относительных разностей предполагают нахождение разностей фак­тических уровней и уровней, найденных при выявлении основ­ной тенденции развития.

Применяя способ абсолютных разностей, оперируют непос­редственно размерами этих разностей, а при использовании ме­тода относительных разностей определяют отношение абсолют­ных размеров указанных разностей к выровненному уровню. При выявлении основной тенденции используют либо метод сколь­зящей средней, либо аналитическое выравнивание. В некоторых случаях в стационарных рядах можно пользоваться разностью фактических уровней и средним месячным уровнем за год [11].

1. **Исходные данные для примера**

Рассмотрим временной ряд, состоящий из 60 результатов наблюдений.

Таблица 2.1 - Динамика запросов к телекоммуникационной услуге за 5 лет

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| год | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| месяц |
| Июль | 299 | 750 | 740 | 996 | 721 |
| август | 1000 | 1300 | 1000 | 3 028 | 2183 |
| сентябрь | 1250 | 1500 | 1300 | 3 505 | 2651 |
| октябрь | 800 | 1350 | 1000 | 4 820 | 2191 |
| ноябрь | 500 | 950 | 1010 | 2 706 | 1508 |
| декабрь | 510 | 1050 | 500 | 1500 | 1405 |
| январь | 300 | 600 | 600 | 1242 | 855 |
| февраль | 400 | 731 | 785 | 162 | 1112 |
| март | 410 | 818 | 948 | 818 | 1431 |
| апрель | 700 | 426 | 1 094 | 1002 | 1352 |
| май | 650 | 531 | 760 | 771 | 1231 |
| Июнь | 800 | 454 | 648 | 406 | 978 |

Для выравнивания исходного временного ряда воспользуемся следующими зависимостями:

* линейной;
* параболической;
* экспоненциальной;
* степенной;
* показательной;
* гиперболической.

Параметры уравнения (,  и ) найдем по методу наименьших квадратов.

Сущность метода наименьших квадратов состоит в отыскании параметров модели тренда, минимизирующих ее отклонение от точек исходного временного ряда, т. е.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2.1) |

где  – расчетные значения исходного ряда;

– фактические значения исходного ряда;

n – число наблюдений.

1. **Пример расчета**

3.1 Построение линейного тренда

Найдем параметры уравнения линейной регрессии.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.1) |

Для этого составим систему уравнений относительно и :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.2) |

Решая данную систему, найдем искомые оценки параметров:

Значения  и  нам известны, это данные наблюдений. Обозначив месяцы как ряд натуральных чисел – 1, 2, 3, … 60, рассчитаем параметры уравнения тренда. В таблице 3.1 представлен расчет вспомогательных величин (  
, ).

Таблица 3.1 - Расчет значений для нахождения параметров уравнения линейной регрессии.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| месяц |  |  |  |  |  | месяц |  |  |  |  |
| Июль | 1 | 299 | 299 | 1 |  | февраль | 32 | 785 | 25120 | 1024 |
| август | 2 | 1000 | 2000 | 4 |  | март | 33 | 948 | 31284 | 1089 |
| сентябрь | 3 | 1250 | 3750 | 9 |  | апрель | 34 | 1 094 | 37196 | 1156 |
| октябрь | 4 | 800 | 3200 | 16 |  | май | 35 | 760 | 26600 | 1225 |
| ноябрь | 5 | 500 | 2500 | 25 |  | Июнь | 36 | 648 | 23328 | 1296 |
| декабрь | 6 | 510 | 3060 | 36 |  | Июль | 37 | 996 | 36852 | 1369 |
| январь | 7 | 300 | 2100 | 49 |  | август | 38 | 1 500 | 115064 | 1444 |
| февраль | 8 | 400 | 3200 | 64 |  | сентябрь | 39 | 2 013 | 136695 | 1521 |
| март | 9 | 410 | 3690 | 81 |  | октябрь | 40 | 2 214 | 192800 | 1600 |
| апрель | 10 | 700 | 7000 | 100 |  | ноябрь | 41 | 1 820 | 110946 | 1681 |
| май | 11 | 650 | 7150 | 121 |  | декабрь | 42 | 1500 | 63000 | 1764 |
| Июнь | 12 | 800 | 9600 | 144 |  | январь | 43 | 1242 | 53406 | 1849 |
| Июль | 13 | 750 | 9750 | 169 |  | февраль | 44 | 162 | 7128 | 1936 |
| август | 14 | 1300 | 18200 | 196 |  | март | 45 | 818 | 36810 | 2025 |
| сентябрь | 15 | 1500 | 22500 | 225 |  | апрель | 46 | 1002 | 46092 | 2116 |
| октябрь | 16 | 1350 | 21600 | 256 |  | май | 47 | 771 | 36237 | 2209 |
| ноябрь | 17 | 950 | 16150 | 289 |  | Июнь | 48 | 406 | 19488 | 2304 |
| декабрь | 18 | 1050 | 18900 | 324 |  | Июль | 49 | 721 | 35329 | 2401 |
| январь | 19 | 600 | 11400 | 361 |  | август | 50 | 2183 | 109150 | 2500 |
| февраль | 20 | 731 | 14620 | 400 |  | сентябрь | 51 | 2651 | 135201 | 2601 |
| март | 21 | 818 | 17178 | 441 |  | октябрь | 52 | 2191 | 113932 | 2704 |
| апрель | 22 | 426 | 9372 | 484 |  | ноябрь | 53 | 1508 | 79924 | 2809 |
| май | 23 | 531 | 12213 | 529 |  | декабрь | 54 | 1405 | 75870 | 2916 |
| Июнь | 24 | 454 | 10896 | 576 |  | январь | 55 | 855 | 47025 | 3025 |
| Июль | 25 | 740 | 18500 | 625 |  | февраль | 56 | 1112 | 62272 | 3136 |
| август | 26 | 1000 | 26000 | 676 |  | март | 57 | 1431 | 81567 | 3249 |
| сентябрь | 27 | 1300 | 35100 | 729 |  | апрель | 58 | 1352 | 78416 | 3364 |
| октябрь | 28 | 1000 | 28000 | 784 |  | май | 59 | 1231 | 72629 | 3481 |
| ноябрь | 29 | 1010 | 29290 | 841 |  | Июнь | 60 | 978 | 58680 | 3600 |
| декабрь | 30 | 500 | 15000 | 900 |  |  |  |  |  |  |
| январь | 31 | 600 | 18600 | 961 |  | сумма | 1830 | 60526 | 2092041 | 73810 |

Тогда параметры уравнения (3.1):

Соответственно уравнение имеет следующий вид:

* 1. **Построение уравнения параболы второй степени**

Найдем параметры уравнения регрессии:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.3) |

Система уравнений для расчета параметров параболы второй степени имеет следующий вид:

Таблица 3.2 - Расчет значений для нахождения параметров параболы второй степени.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 299 | 299 | 1 | 1 | 1 | 299 |  | 32 | 785 | 25120 | 1024 | 32768 | 1048576 | 803840 |
| 2 | 1000 | 2000 | 4 | 8 | 16 | 4000 |  | 33 | 948 | 31284 | 1089 | 35937 | 1185921 | 1032372 |
| 3 | 1250 | 3750 | 9 | 27 | 81 | 11250 |  | 34 | 1094 | 37196 | 1156 | 39304 | 1336336 | 1264664 |
| 4 | 800 | 3200 | 16 | 64 | 256 | 12800 |  | 35 | 760 | 26600 | 1225 | 42875 | 1500625 | 931000 |
| 5 | 500 | 2500 | 25 | 125 | 625 | 12500 |  | 36 | 648 | 23328 | 1296 | 46656 | 1679616 | 839808 |
| 6 | 510 | 3060 | 36 | 216 | 1296 | 18360 |  | 37 | 996 | 36852 | 1369 | 50653 | 1874161 | 1363524 |
| 7 | 300 | 2100 | 49 | 343 | 2401 | 14700 |  | 38 | 1500 | 57000 | 1444 | 54872 | 2085136 | 2166000 |
| 8 | 400 | 3200 | 64 | 512 | 4096 | 25600 |  | 39 | 2013 | 78507 | 1521 | 59319 | 2313441 | 3061773 |
| 9 | 410 | 3690 | 81 | 729 | 6561 | 33210 |  | 40 | 2214 | 88560 | 1600 | 64000 | 2560000 | 3542400 |
| 10 | 700 | 7000 | 100 | 1000 | 10000 | 70000 |  | 41 | 1820 | 74620 | 1681 | 68921 | 2825761 | 3059420 |
| 11 | 650 | 7150 | 121 | 1331 | 14641 | 78650 |  | 42 | 1500 | 63000 | 1764 | 74088 | 3111696 | 2646000 |
| 12 | 800 | 9600 | 144 | 1728 | 20736 | 115200 |  | 43 | 1242 | 53406 | 1849 | 79507 | 3418801 | 2296458 |
| 13 | 750 | 9750 | 169 | 2197 | 28561 | 126750 |  | 44 | 162 | 7128 | 1936 | 85184 | 3748096 | 313632 |
| 14 | 1300 | 18200 | 196 | 2744 | 38416 | 254800 |  | 45 | 818 | 36810 | 2025 | 91125 | 4100625 | 1656450 |
| 15 | 1500 | 22500 | 225 | 3375 | 50625 | 337500 |  | 46 | 1002 | 46092 | 2116 | 97336 | 4477456 | 2120232 |
| 16 | 1350 | 21600 | 256 | 4096 | 65536 | 345600 |  | 47 | 771 | 36237 | 2209 | 103823 | 4879681 | 1703139 |
| 17 | 950 | 16150 | 289 | 4913 | 83521 | 274550 |  | 48 | 406 | 19488 | 2304 | 110592 | 5308416 | 935424 |
| 18 | 1050 | 18900 | 324 | 5832 | 104976 | 340200 |  | 49 | 721 | 35329 | 2401 | 117649 | 5764801 | 1731121 |
| 19 | 600 | 11400 | 361 | 6859 | 130321 | 216600 |  | 50 | 2183 | 109150 | 2500 | 125000 | 6250000 | 5457500 |
| 20 | 731 | 14620 | 400 | 8000 | 160000 | 292400 |  | 51 | 2651 | 135201 | 2601 | 132651 | 6765201 | 6895251 |
| 21 | 818 | 17178 | 441 | 9261 | 194481 | 360738 |  | 52 | 2191 | 113932 | 2704 | 140608 | 7311616 | 5924464 |
| 22 | 426 | 9372 | 484 | 10648 | 234256 | 206184 |  | 53 | 1508 | 79924 | 2809 | 148877 | 7890481 | 4235972 |
| 23 | 531 | 12213 | 529 | 12167 | 279841 | 280899 |  | 54 | 1405 | 75870 | 2916 | 157464 | 8503056 | 4096980 |
| 24 | 454 | 10896 | 576 | 13824 | 331776 | 261504 |  | 55 | 855 | 47025 | 3025 | 166375 | 9150625 | 2586375 |
| 25 | 740 | 18500 | 625 | 15625 | 390625 | 462500 |  | 56 | 1112 | 62272 | 3136 | 175616 | 9834496 | 3487232 |
| 26 | 1000 | 26000 | 676 | 17576 | 456976 | 676000 |  | 57 | 1431 | 81567 | 3249 | 185193 | 10556001 | 4649319 |
| 27 | 1300 | 35100 | 729 | 19683 | 531441 | 947700 |  | 58 | 1352 | 78416 | 3364 | 195112 | 11316496 | 4548128 |
| 28 | 1000 | 28000 | 784 | 21952 | 614656 | 784000 |  | 59 | 1231 | 72629 | 3481 | 205379 | 12117361 | 4285111 |
| 29 | 1010 | 29290 | 841 | 24389 | 707281 | 849410 |  | 60 | 978 | 58680 | 3600 | 216000 | 12960000 | 3520800 |
| 30 | 500 | 15000 | 900 | 27000 | 810000 | 450000 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 31 | 600 | 18600 | 961 | 29791 | 923521 | 576600 | сумма | 1830 | 60526 | 2092041 | 73810 | 3348900 | 1,62E+08 | 89594893 |

Исходя из итоговой строки таблицы 3.2 система имеет вид:

Решая систему уравнений, найдем параметры уравнения тренда

Соответственно уравнение (3.3) имеет следующий вид:

* 1. **Расчет параметров показательной функции**

Найдем параметры уравнения регрессии:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.4) |

Метод наименьших квадратов применим для оценки параметров показательной функции, так как для расчетов уравнение с помощью метода логарифмирования приводят к виду

Тогда система уравнений имеет вид:

Таблица 3.3 - Расчет значений для нахождения параметров тренда

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 299 | 5,70 | 1 | 5,70 |  | 32 | 785 | 6,67 | 1024 | 213,30 |
| 2 | 1000 | 6,91 | 4 | 13,82 |  | 33 | 948 | 6,85 | 1089 | 226,19 |
| 3 | 1250 | 7,13 | 9 | 21,39 |  | 34 | 1094 | 7,00 | 1156 | 237,92 |
| 4 | 800 | 6,68 | 16 | 26,74 |  | 35 | 760 | 6,63 | 1225 | 232,17 |
| 5 | 500 | 6,21 | 25 | 31,07 |  | 36 | 648 | 6,47 | 1296 | 233,06 |
| 6 | 510 | 6,23 | 36 | 37,41 |  | 37 | 996 | 6,90 | 1369 | 255,44 |
| 7 | 300 | 5,70 | 49 | 39,93 |  | 38 | 1500 | 7,31 | 1444 | 277,90 |
| 8 | 400 | 5,99 | 64 | 47,93 |  | 39 | 2013 | 7,61 | 1521 | 296,69 |
| 9 | 410 | 6,02 | 81 | 54,15 |  | 40 | 2214 | 7,70 | 1600 | 308,10 |
| 10 | 700 | 6,55 | 100 | 65,51 |  | 41 | 1820 | 7,51 | 1681 | 307,77 |
| 11 | 650 | 6,48 | 121 | 71,25 |  | 42 | 1500 | 7,31 | 1764 | 307,16 |
| 12 | 800 | 6,68 | 144 | 80,22 |  | 43 | 1242 | 7,12 | 1849 | 306,35 |
| 13 | 750 | 6,62 | 169 | 86,06 |  | 44 | 162 | 5,09 | 1936 | 223,85 |
| 14 | 1300 | 7,17 | 196 | 100,38 |  | 45 | 818 | 6,71 | 2025 | 301,81 |
| 15 | 1500 | 7,31 | 225 | 109,70 |  | 46 | 1002 | 6,91 | 2116 | 317,85 |
| 16 | 1350 | 7,21 | 256 | 115,33 |  | 47 | 771 | 6,65 | 2209 | 312,44 |
| 17 | 950 | 6,86 | 289 | 116,56 |  | 48 | 406 | 6,01 | 2304 | 288,30 |
| 18 | 1050 | 6,96 | 324 | 125,22 |  | 49 | 721 | 6,58 | 2401 | 322,45 |
| 19 | 600 | 6,40 | 361 | 121,54 |  | 50 | 2183 | 7,69 | 2500 | 384,42 |
| 20 | 731 | 6,59 | 400 | 131,89 |  | 51 | 2651 | 7,88 | 2601 | 402,02 |
| 21 | 818 | 6,71 | 441 | 140,84 |  | 52 | 2191 | 7,69 | 2704 | 399,99 |
| 22 | 426 | 6,05 | 484 | 133,20 |  | 53 | 1508 | 7,32 | 2809 | 387,88 |
| 23 | 531 | 6,27 | 529 | 144,32 |  | 54 | 1405 | 7,25 | 2916 | 391,38 |
| 24 | 454 | 6,12 | 576 | 146,83 |  | 55 | 855 | 6,75 | 3025 | 371,31 |
| 25 | 740 | 6,61 | 625 | 165,17 |  | 56 | 1112 | 7,01 | 3136 | 392,78 |
| 26 | 1000 | 6,91 | 676 | 179,60 |  | 57 | 1431 | 7,27 | 3249 | 414,17 |
| 27 | 1300 | 7,17 | 729 | 193,59 |  | 58 | 1352 | 7,21 | 3364 | 418,14 |
| 28 | 1000 | 6,91 | 784 | 193,42 |  | 59 | 1231 | 7,12 | 3481 | 419,82 |
| 29 | 1010 | 6,92 | 841 | 200,61 |  | 60 | 978 | 6,89 | 3600 | 413,13 |
| 30 | 500 | 6,21 | 900 | 186,44 |  |  |  |  |  |  |
| 31 | 600 | 6,40 | 961 | 198,30 | сумма | 1830 | 60526 | 406,79 | 73810 | 12647,91 |

Исходя из итоговой строки таблицы 3.3 система имеет вид:

Решая данную систему уравнения, найдем параметры

Тогда параметры показательного уравнения 3.4:

Соответственно уравнение имеет следующий вид:

Рассматриваемое уравнение тренда может быть записано в виде экспоненты:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.5) |

Логарифмируя его получим:

Тогда система уравнений имеет вид:

Исходя из итоговой строки таблицы 3 система имеет вид:

Решая данную систему уравнений, найдем параметры

Соответственно уравнение 3.5 имеет следующий вид:

* 1. **Расчет параметров степенной функции**

Найдем параметры уравнения регрессии:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.6) |

Метод наименьших квадратов применим для оценки параметров степенной функции, так как для расчетов уравнение, с помощью метода логарифмирования, приводят к виду

Тогда система уравнений имеет вид:

Таблица 3.4 - Расчет значений для нахождения параметров тренда

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 299 | 5,70 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |  | 32 | 785 | 6,67 | 3,47 | 12,01 | 23,10 |
| 2 | 1000 | 6,91 | 0,69 | 0,48 | 4,79 |  | 33 | 948 | 6,85 | 3,50 | 12,23 | 23,97 |
| 3 | 1250 | 7,13 | 1,10 | 1,21 | 7,83 |  | 34 | 1094 | 7,00 | 3,53 | 12,44 | 24,68 |
| 4 | 800 | 6,68 | 1,39 | 1,92 | 9,27 |  | 35 | 760 | 6,63 | 3,56 | 12,64 | 23,58 |
| 5 | 500 | 6,21 | 1,61 | 2,59 | 10,00 |  | 36 | 648 | 6,47 | 3,58 | 12,84 | 23,20 |
| 6 | 510 | 6,23 | 1,79 | 3,21 | 11,17 |  | 37 | 996 | 6,90 | 3,61 | 13,04 | 24,93 |
| 7 | 300 | 5,70 | 1,95 | 3,79 | 11,10 |  | 38 | 1500 | 7,31 | 3,64 | 13,23 | 26,60 |
| 8 | 400 | 5,99 | 2,08 | 4,32 | 12,46 |  | 39 | 2013 | 7,61 | 3,66 | 13,42 | 27,87 |
| 9 | 410 | 6,02 | 2,20 | 4,83 | 13,22 |  | 40 | 2214 | 7,70 | 3,69 | 13,61 | 28,41 |
| 10 | 700 | 6,55 | 2,30 | 5,30 | 15,08 |  | 41 | 1820 | 7,51 | 3,71 | 13,79 | 27,88 |
| 11 | 650 | 6,48 | 2,40 | 5,75 | 15,53 |  | 42 | 1500 | 7,31 | 3,74 | 13,97 | 27,33 |
| 12 | 800 | 6,68 | 2,48 | 6,17 | 16,61 |  | 43 | 1242 | 7,12 | 3,76 | 14,15 | 26,80 |
| 13 | 750 | 6,62 | 2,56 | 6,58 | 16,98 |  | 44 | 162 | 5,09 | 3,78 | 14,32 | 19,25 |
| 14 | 1300 | 7,17 | 2,64 | 6,96 | 18,92 |  | 45 | 818 | 6,71 | 3,81 | 14,49 | 25,53 |
| 15 | 1500 | 7,31 | 2,71 | 7,33 | 19,80 |  | 46 | 1002 | 6,91 | 3,83 | 14,66 | 26,45 |
| 16 | 1350 | 7,21 | 2,77 | 7,69 | 19,98 |  | 47 | 771 | 6,65 | 3,85 | 14,82 | 25,59 |
| 17 | 950 | 6,86 | 2,83 | 8,03 | 19,43 |  | 48 | 406 | 6,01 | 3,87 | 14,99 | 23,25 |
| 18 | 1050 | 6,96 | 2,89 | 8,35 | 20,11 |  | 49 | 721 | 6,58 | 3,89 | 15,15 | 25,61 |
| 19 | 600 | 6,40 | 2,94 | 8,67 | 18,84 |  | 50 | 2183 | 7,69 | 3,91 | 15,30 | 30,08 |
| 20 | 731 | 6,59 | 3,00 | 8,97 | 19,76 |  | 51 | 2651 | 7,88 | 3,93 | 15,46 | 30,99 |
| 21 | 818 | 6,71 | 3,04 | 9,27 | 20,42 |  | 52 | 2191 | 7,69 | 3,95 | 15,61 | 30,39 |
| 22 | 426 | 6,05 | 3,09 | 9,55 | 18,71 |  | 53 | 1508 | 7,32 | 3,97 | 15,76 | 29,06 |
| 23 | 531 | 6,27 | 3,14 | 9,83 | 19,67 |  | 54 | 1405 | 7,25 | 3,99 | 15,91 | 28,91 |
| 24 | 454 | 6,12 | 3,18 | 10,10 | 19,44 |  | 55 | 855 | 6,75 | 4,01 | 16,06 | 27,05 |
| 25 | 740 | 6,61 | 3,22 | 10,36 | 21,27 |  | 56 | 1112 | 7,01 | 4,03 | 16,20 | 28,23 |
| 26 | 1000 | 6,91 | 3,26 | 10,62 | 22,51 |  | 57 | 1431 | 7,27 | 4,04 | 16,35 | 29,38 |
| 27 | 1300 | 7,17 | 3,30 | 10,86 | 23,63 |  | 58 | 1352 | 7,21 | 4,06 | 16,49 | 29,27 |
| 28 | 1000 | 6,91 | 3,33 | 11,10 | 23,02 |  | 59 | 1231 | 7,12 | 4,08 | 16,63 | 29,01 |
| 29 | 1010 | 6,92 | 3,37 | 11,34 | 23,29 |  | 60 | 978 | 6,89 | 4,09 | 16,76 | 28,19 |
| 30 | 500 | 6,21 | 3,40 | 11,57 | 21,14 |  |  |  |  |  |  |  |
| 31 | 600 | 6,40 | 3,43 | 11,79 | 21,97 | сумма | 1830 | 60526 | 406,79 | 188,63 | 640,88 | 1290,57 |

Исходя из итоговой строки таблицы 3.4 система имеет вид:

Решая данную систему уравнений, найдем параметры

Соответственно уравнение 3.6 имеет следующий вид:

**3.5 Расчет параметров для полулогарифмической функции**

Найдем параметры уравнения регрессии:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.7) |

Cистема уравнений имеет вид:

Таблица 3.5 - Расчет значений для нахождения параметров тренда

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 299 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |  | 32 | 785 | 3,47 | 12,01 | 2720,60 |
| 2 | 1000 | 0,69 | 0,48 | 693,15 |  | 33 | 948 | 3,50 | 12,23 | 3314,69 |
| 3 | 1250 | 1,10 | 1,21 | 1373,27 |  | 34 | 1094 | 3,53 | 12,44 | 3857,84 |
| 4 | 800 | 1,39 | 1,92 | 1109,04 |  | 35 | 760 | 3,56 | 12,64 | 2702,06 |
| 5 | 500 | 1,61 | 2,59 | 804,72 |  | 36 | 648 | 3,58 | 12,84 | 2322,12 |
| 6 | 510 | 1,79 | 3,21 | 913,80 |  | 37 | 996 | 3,61 | 13,04 | 3596,47 |
| 7 | 300 | 1,95 | 3,79 | 583,77 |  | 38 | 1500 | 3,64 | 13,23 | 5456,38 |
| 8 | 400 | 2,08 | 4,32 | 831,78 |  | 39 | 2013 | 3,66 | 13,42 | 7374,75 |
| 9 | 410 | 2,20 | 4,83 | 900,86 |  | 40 | 2214 | 3,69 | 13,61 | 8167,18 |
| 10 | 700 | 2,30 | 5,30 | 1611,81 |  | 41 | 1820 | 3,71 | 13,79 | 6758,70 |
| 11 | 650 | 2,40 | 5,75 | 1558,63 |  | 42 | 1500 | 3,74 | 13,97 | 5606,50 |
| 12 | 800 | 2,48 | 6,17 | 1987,93 |  | 43 | 1242 | 3,76 | 14,15 | 4671,41 |
| 13 | 750 | 2,56 | 6,58 | 1923,71 |  | 44 | 162 | 3,78 | 14,32 | 613,04 |
| 14 | 1300 | 2,64 | 6,96 | 3430,77 |  | 45 | 818 | 3,81 | 14,49 | 3113,85 |
| 15 | 1500 | 2,71 | 7,33 | 4062,08 |  | 46 | 1002 | 3,83 | 14,66 | 3836,30 |
| 16 | 1350 | 2,77 | 7,69 | 3742,99 |  | 47 | 771 | 3,85 | 14,82 | 2968,46 |
| 17 | 950 | 2,83 | 8,03 | 2691,55 |  | 48 | 406 | 3,87 | 14,99 | 1571,71 |
| 18 | 1050 | 2,89 | 8,35 | 3034,89 |  | 49 | 721 | 3,89 | 15,15 | 2806,00 |
| 19 | 600 | 2,94 | 8,67 | 1766,66 |  | 50 | 2183 | 3,91 | 15,30 | 8539,95 |
| 20 | 731 | 3,00 | 8,97 | 2189,88 |  | 51 | 2651 | 3,93 | 15,46 | 10423,27 |
| 21 | 818 | 3,04 | 9,27 | 2490,42 |  | 52 | 2191 | 3,95 | 15,61 | 8657,17 |
| 22 | 426 | 3,09 | 9,55 | 1316,78 |  | 53 | 1508 | 3,97 | 15,76 | 5987,20 |
| 23 | 531 | 3,14 | 9,83 | 1664,95 |  | 54 | 1405 | 3,99 | 15,91 | 5604,52 |
| 24 | 454 | 3,18 | 10,10 | 1442,84 |  | 55 | 855 | 4,01 | 16,06 | 3426,27 |
| 25 | 740 | 3,22 | 10,36 | 2381,97 |  | 56 | 1112 | 4,03 | 16,20 | 4476,19 |
| 26 | 1000 | 3,26 | 10,62 | 3258,10 |  | 57 | 1431 | 4,04 | 16,35 | 5785,61 |
| 27 | 1300 | 3,30 | 10,86 | 4284,59 |  | 58 | 1352 | 4,06 | 16,49 | 5489,72 |
| 28 | 1000 | 3,33 | 11,10 | 3332,20 |  | 59 | 1231 | 4,08 | 16,63 | 5019,45 |
| 29 | 1010 | 3,37 | 11,34 | 3400,97 |  | 60 | 978 | 4,09 | 16,76 | 4004,27 |
| 30 | 500 | 3,40 | 11,57 | 1700,60 |  |  |  |  |  |  |
| 31 | 600 | 3,43 | 11,79 | 2060,39 | сумма | 1830 | 60526 | 188,63 | 640,88 | 201416,78 |

Исходя из итоговой строки таблицы 3.5 система имеет вид:

Решая систему уравнений, найдем параметры уравнения тренда

Соответственно уравнение 3.7 имеет следующий вид:

* 1. **Расчет параметров для гиперболических функций**

Найдем параметры уравнения регрессии:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.8) |

Cистема уравнений имеет вид:

Таблица 3.6 - Расчет значений для нахождения параметров тренда

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 299 | 1,00 | 1,000 | 299,00 |  | 32 | 785 | 0,03 | 0,0010 | 24,53 |
| 2 | 1000 | 0,50 | 0,250 | 500,00 |  | 33 | 948 | 0,03 | 0,0009 | 28,73 |
| 3 | 1250 | 0,33 | 0,111 | 416,67 |  | 34 | 1094 | 0,03 | 0,0009 | 32,18 |
| 4 | 800 | 0,25 | 0,063 | 200,00 |  | 35 | 760 | 0,03 | 0,0008 | 21,71 |
| 5 | 500 | 0,20 | 0,040 | 100,00 |  | 36 | 648 | 0,03 | 0,0008 | 18,00 |
| 6 | 510 | 0,17 | 0,028 | 85,00 |  | 37 | 996 | 0,03 | 0,0007 | 26,92 |
| 7 | 300 | 0,14 | 0,020 | 42,86 |  | 38 | 1500 | 0,03 | 0,0007 | 39,47 |
| 8 | 400 | 0,13 | 0,016 | 50,00 |  | 39 | 2013 | 0,03 | 0,0007 | 51,62 |
| 9 | 410 | 0,11 | 0,012 | 45,56 |  | 40 | 2214 | 0,03 | 0,0006 | 55,35 |
| 10 | 700 | 0,10 | 0,010 | 70,00 |  | 41 | 1820 | 0,02 | 0,0006 | 44,39 |
| 11 | 650 | 0,09 | 0,008 | 59,09 |  | 42 | 1500 | 0,02 | 0,0006 | 35,71 |
| 12 | 800 | 0,08 | 0,007 | 66,67 |  | 43 | 1242 | 0,02 | 0,0005 | 28,88 |
| 13 | 750 | 0,08 | 0,006 | 57,69 |  | 44 | 162 | 0,02 | 0,0005 | 3,68 |
| 14 | 1300 | 0,07 | 0,005 | 92,86 |  | 45 | 818 | 0,02 | 0,0005 | 18,18 |
| 15 | 1500 | 0,07 | 0,004 | 100,00 |  | 46 | 1002 | 0,02 | 0,0005 | 21,78 |
| 16 | 1350 | 0,06 | 0,004 | 84,38 |  | 47 | 771 | 0,02 | 0,0005 | 16,40 |
| 17 | 950 | 0,06 | 0,003 | 55,88 |  | 48 | 406 | 0,02 | 0,0004 | 8,46 |
| 18 | 1050 | 0,06 | 0,003 | 58,33 |  | 49 | 721 | 0,02 | 0,0004 | 14,71 |
| 19 | 600 | 0,05 | 0,003 | 31,58 |  | 50 | 2183 | 0,02 | 0,0004 | 43,66 |
| 20 | 731 | 0,05 | 0,003 | 36,55 |  | 51 | 2651 | 0,02 | 0,0004 | 51,98 |
| 21 | 818 | 0,05 | 0,002 | 38,95 |  | 52 | 2191 | 0,02 | 0,0004 | 42,13 |
| 22 | 426 | 0,05 | 0,002 | 19,36 |  | 53 | 1508 | 0,02 | 0,0004 | 28,45 |
| 23 | 531 | 0,04 | 0,002 | 23,09 |  | 54 | 1405 | 0,02 | 0,0003 | 26,02 |
| 24 | 454 | 0,04 | 0,002 | 18,92 |  | 55 | 855 | 0,02 | 0,0003 | 15,55 |
| 25 | 740 | 0,04 | 0,002 | 29,60 |  | 56 | 1112 | 0,02 | 0,0003 | 19,86 |
| 26 | 1000 | 0,04 | 0,001 | 38,46 |  | 57 | 1431 | 0,02 | 0,0003 | 25,11 |
| 27 | 1300 | 0,04 | 0,001 | 48,15 |  | 58 | 1352 | 0,02 | 0,0003 | 23,31 |
| 28 | 1000 | 0,04 | 0,001 | 35,71 |  | 59 | 1231 | 0,02 | 0,0003 | 20,86 |
| 29 | 1010 | 0,03 | 0,001 | 34,83 |  | 60 | 978 | 0,02 | 0,0003 | 16,30 |
| 30 | 500 | 0,03 | 0,001 | 16,67 |  |  |  |  |  |  |
| 31 | 600 | 0,03 | 0,001 | 19,35 | сумма | 1830 | 60526 | 4,68 | 1,63 | 3579,14 |

Исходя из итоговой строки таблицы 3.6 система имеет вид:

Решая систему уравнений, найдем параметры уравнения тренда

Соответственно уравнение 3.8 имеет следующий вид:

Для обратной функции:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.9) |

Cистема уравнений имеет вид:

Таблица 3.7 - Расчет значений для нахождения параметров тренда

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 299 | 1,00 | 0,003 | 0,00 |  | 32 | 785 | 1024,00 | 0,0013 | 0,04 |
| 2 | 1000 | 4,00 | 0,001 | 0,00 |  | 33 | 948 | 1089,00 | 0,0011 | 0,03 |
| 3 | 1250 | 9,00 | 0,001 | 0,00 |  | 34 | 1094 | 1156,00 | 0,0009 | 0,03 |
| 4 | 800 | 16,00 | 0,001 | 0,01 |  | 35 | 760 | 1225,00 | 0,0013 | 0,05 |
| 5 | 500 | 25,00 | 0,002 | 0,01 |  | 36 | 648 | 1296,00 | 0,0015 | 0,06 |
| 6 | 510 | 36,00 | 0,002 | 0,01 |  | 37 | 996 | 1369,00 | 0,0010 | 0,04 |
| 7 | 300 | 49,00 | 0,003 | 0,02 |  | 38 | 1500 | 1444,00 | 0,0007 | 0,03 |
| 8 | 400 | 64,00 | 0,003 | 0,02 |  | 39 | 2013 | 1521,00 | 0,0005 | 0,02 |
| 9 | 410 | 81,00 | 0,002 | 0,02 |  | 40 | 2214 | 1600,00 | 0,0005 | 0,02 |
| 10 | 700 | 100,00 | 0,001 | 0,01 |  | 41 | 1820 | 1681,00 | 0,0005 | 0,02 |
| 11 | 650 | 121,00 | 0,002 | 0,02 |  | 42 | 1500 | 1764,00 | 0,0007 | 0,03 |
| 12 | 800 | 144,00 | 0,001 | 0,02 |  | 43 | 1242 | 1849,00 | 0,0008 | 0,03 |
| 13 | 750 | 169,00 | 0,001 | 0,02 |  | 44 | 162 | 1936,00 | 0,0062 | 0,27 |
| 14 | 1300 | 196,00 | 0,001 | 0,01 |  | 45 | 818 | 2025,00 | 0,0012 | 0,06 |
| 15 | 1500 | 225,00 | 0,001 | 0,01 |  | 46 | 1002 | 2116,00 | 0,0010 | 0,05 |
| 16 | 1350 | 256,00 | 0,001 | 0,01 |  | 47 | 771 | 2209,00 | 0,0013 | 0,06 |
| 17 | 950 | 289,00 | 0,001 | 0,02 |  | 48 | 406 | 2304,00 | 0,0025 | 0,12 |
| 18 | 1050 | 324,00 | 0,001 | 0,02 |  | 49 | 721 | 2401,00 | 0,0014 | 0,07 |
| 19 | 600 | 361,00 | 0,002 | 0,03 |  | 50 | 2183 | 2500,00 | 0,0005 | 0,02 |
| 20 | 731 | 400,00 | 0,001 | 0,03 |  | 51 | 2651 | 2601,00 | 0,0004 | 0,02 |
| 21 | 818 | 441,00 | 0,001 | 0,03 |  | 52 | 2191 | 2704,00 | 0,0005 | 0,02 |
| 22 | 426 | 484,00 | 0,002 | 0,05 |  | 53 | 1508 | 2809,00 | 0,0007 | 0,04 |
| 23 | 531 | 529,00 | 0,002 | 0,04 |  | 54 | 1405 | 2916,00 | 0,0007 | 0,04 |
| 24 | 454 | 576,00 | 0,002 | 0,05 |  | 55 | 855 | 3025,00 | 0,0012 | 0,06 |
| 25 | 740 | 625,00 | 0,001 | 0,03 |  | 56 | 1112 | 3136,00 | 0,0009 | 0,05 |
| 26 | 1000 | 676,00 | 0,001 | 0,03 |  | 57 | 1431 | 3249,00 | 0,0007 | 0,04 |
| 27 | 1300 | 729,00 | 0,001 | 0,02 |  | 58 | 1352 | 3364,00 | 0,0007 | 0,04 |
| 28 | 1000 | 784,00 | 0,001 | 0,03 |  | 59 | 1231 | 3481,00 | 0,0008 | 0,05 |
| 29 | 1010 | 841,00 | 0,001 | 0,03 |  | 60 | 978 | 3600,00 | 0,0010 | 0,06 |
| 30 | 500 | 900,00 | 0,002 | 0,06 |  |  |  |  |  |  |
| 31 | 600 | 961,00 | 0,002 | 0,05 | сумма | 1830 | 60526 | 73810,00 | 0,08 | 2,17 |

Исходя из итоговой строки таблицы 3.7 система имеет вид:

Решая систему уравнений, найдем параметры уравнения тренда

Соответственно уравнение 3.9 имеет следующий вид:

* 1. **Расчет коэффициента детерминации**

Одним из критериев точности описания фактических значений функцией тренда, служит коэффициент детерминации. Для его определения составляются суммы квадратов отклонений:

- фактических значений от их среднего;

- фактических от теоретических значений.

Тогда коэффициент детерминации есть отношение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.10) |

Чем больше значение коэффициента детерминации, тем выше степень адекватности уравнения регрессии. Однако у коэффициента детерминации есть недостаток, состоящий в том, что большие значения коэффициента могут достигаться благодаря малому числу наблюдений. Мерой адекватности модели, призванной исправить этот недостаток, является скорректированный коэффициент детерминации, который задается формулой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.11) |

где n – число наблюдений;

k – число переменных.

Полученные уравнения для различных функций тренда сведем в одну таблицу (таблица 3.8).

Таблица 3.8 – Уравнения тренда в зависимости от функции

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Функция тренда | Уравнение тренда |  |
| 1 | Параболическая |  | (3.12) |
| 2 | Линейная |  | (3.13) |
| 3 | Экспоненциальная |  | (3.14) |
| 4 | Показательная |  | (3.15) |
| 5 | Полулогарифмическая |  | (3.16) |
| 6 | Степенная |  | (3.17) |
| 7 | Гиперболическая |  | (3.18) |
| 8 | Обратная гиперболическая |  | (3.19) |

Вспомогательные расчеты для вычисления коэффициента детерминации с помощью линейного тренда приведены в таблице 3.9. При расчете теоретических значений в уравнение 3.13 подставляют соответствующее значение *ti*

Таблица 3.9 – Расчет коэффициента детерминации

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 299 | 605,51 | 93948,38 | 503768,7 |  | 33 | 948 | 1042,95 | 9015,503 | 3692,59 |
| 2 | 1000 | 619,18 | 145023,9 | 76,85444 |  | 34 | 1094 | 1056,62 | 1397,264 | 7264,72 |
| 3 | 1250 | 632,85 | 380874,1 | 58193,52 |  | 35 | 760 | 1070,29 | 96279,88 | 61884,85 |
| 4 | 800 | 646,52 | 23556,11 | 43583,52 |  | 36 | 648 | 1083,96 | 190061,1 | 130152,59 |
| 5 | 500 | 660,19 | 25660,84 | 258843,5 |  | 37 | 996 | 1097,63 | 10328,66 | 162,99 |
| 6 | 510 | 673,86 | 26850,1 | 248768,2 |  | 38 | 1500 | 1111,3 | 151087,7 | 241310,19 |
| 7 | 300 | 687,53 | 150179,5 | 502350,2 |  | 39 | 2013 | 1124,97 | 788597,3 | 1008484,59 |
| 8 | 400 | 701,2 | 90721,44 | 370596,9 |  | 40 | 2214 | 1138,64 | 1156399 | 1452587,39 |
| 9 | 410 | 714,87 | 92945,72 | 358521,5 |  | 41 | 1820 | 1152,31 | 445809,9 | 658099,52 |
| 10 | 700 | 728,54 | 814,5316 | 95336,85 |  | 42 | 1500 | 1165,98 | 111569,4 | 241310,19 |
| 11 | 650 | 742,21 | 8502,684 | 128713,5 |  | 43 | 1242 | 1179,65 | 3887,522 | 54397,79 |
| 12 | 800 | 755,88 | 1946,574 | 43583,52 |  | 44 | 162 | 1193,32 | 1063621 | 717013,79 |
| 13 | 750 | 769,55 | 382,2025 | 66960,19 |  | 45 | 818 | 1206,99 | 151313,2 | 36391,92 |
| 14 | 1300 | 783,22 | 267061,6 | 84816,85 |  | 46 | 1002 | 1220,66 | 47812,2 | 45,79 |
| 15 | 1500 | 796,89 | 494363,7 | 241310,2 |  | 47 | 771 | 1234,33 | 214674,7 | 56532,99 |
| 16 | 1350 | 810,56 | 290995,5 | 116440,2 |  | 48 | 406 | 1248 | 708964 | 363327,65 |
| 17 | 950 | 824,23 | 15818,09 | 3453,521 |  | 49 | 721 | 1261,67 | 292324 | 82809,65 |
| 18 | 1050 | 837,9 | 44986,41 | 1700,188 |  | 50 | 2183 | 1275,34 | 823846,7 | 1378823,92 |
| 19 | 600 | 851,57 | 63287,46 | 167090,2 |  | 51 | 2651 | 1289,01 | 1855017 | 2696930,32 |
| 20 | 731 | 865,24 | 18020,38 | 77154,32 |  | 52 | 2191 | 1302,68 | 789112,4 | 1397675,65 |
| 21 | 818 | 878,91 | 3710,028 | 36391,92 |  | 53 | 1508 | 1316,35 | 36729,72 | 249233,92 |
| 22 | 426 | 892,58 | 217696,9 | 339617 |  | 54 | 1405 | 1330,02 | 5622 | 157000,85 |
| 23 | 531 | 906,25 | 140812,6 | 228261 |  | 55 | 855 | 1343,69 | 238817,9 | 23644,19 |
| 24 | 454 | 919,92 | 217081,4 | 307766,1 |  | 56 | 1112 | 1357,36 | 60201,53 | 10657,12 |
| 25 | 740 | 933,59 | 37477,09 | 72235,52 |  | 57 | 1431 | 1371,03 | 3596,401 | 178280,99 |
| 26 | 1000 | 947,26 | 2781,508 | 76,85444 |  | 58 | 1352 | 1384,7 | 1069,29 | 117809,12 |
| 27 | 1300 | 960,93 | 114968,5 | 84816,85 |  | 59 | 1231 | 1398,37 | 28012,72 | 49387,65 |
| 28 | 1000 | 974,6 | 645,16 | 76,85444 |  | 60 | 978 | 1412,04 | 188390,7 | 946,59 |
| 29 | 1010 | 988,27 | 472,1929 | 1,521111 |  |  |  |  |  |  |
| 30 | 500 | 1001,94 | 251943,8 | 258843,5 | сумма |  | 60526 | 60526,5 | 12929491 | 16292370,73 |
| 31 | 600 | 1015,61 | 172731,7 | 167090,2 |  |  | 1008,77 |  |  |  |

Вычисляем коэффициент детерминации по формуле 3.10:

Скорректированный коэффициент детерминации (формула 3.11):



Аналогично рассчитаем коэффициенты детерминации скорректированный коэффициент детерминации и для различных функций тренда. Результаты представлены в таблице 3.10.

Таблица 3.10 – Коэффициенты детерминации для различных функций тренда

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Функция | коэффициент детерминации | Скорректированный коэффициент детерминации |
| Параболическая | 0,21 | 0,19 |
| Линейная | 0,21 | 0,19 |
| Экспоненциальная | 0,18 | 0,17 |
| Показательная\* | - | - |
| Полулогарифмическая | 0,16 | 0,15 |
| Степенная | 0,12 | 0,10 |
| Гиперболическая | 0,06 | 0,04 |
| Обратная гиперболическая\* | - | - |
| \* для рассматриваемого примера вычислить коэффициента детерминации для этих функций невозможно. | | |

Как видно из таблицы 3.10 однозначно выбрать уравнение тренда достаточно сложно.

Во-первых, известно чем «ближе» коэффициент детерминации к «единице», тем лучше подобранная модель.

Во-вторых, полученные результаты показывают, линейный и параболический тренд имеют равные значения и описывают только 21% дисперсии исходного ряда. Поэтому, с целью уточнения модели, дальнейшие расчеты проведем для нескольких функций тренда.

Кроме того, коэффициент детерминации это только один из критериев выбора функции тренда и не определяет точность всей модели. Следовательно, проводят дальнейшие расчеты с целью уточнения точности модели, описывающей исходные данные.

# 3.8 Расчет сезонной компоненты с использованием средней арифмической

При расчете величин сезонной компоненты необходимо учитывать ошибки сезонных колебаний (S), которые характеризуются суммой средних величин сезонной компоненты. Чем дальше от «нуля» значение суммы колебаний сезонной компоненты, тем больше ошибка параметра S. Таким образом, после выбора линии тренда, характеризующего общую тенденцию развития изучаемого явления, необходимо рассчитать сезонную компоненту (S) и проанализировать, насколько сильно сумма средних значений S отклоняется от «нуля». Если эта величина близка к «нулю», то можно утверждать, что исходные данные действительно имеют сезонный характер.

В таблице 3.11 представлены результаты расчета сезонной компоненты при использовании данных за 5 лет с использованием линейного трендов. Сначала рассчитаем среднее арифметическое разности фактических данных и значений линии тренда для каждого месяца:

Затем, для расчета сезонной компоненты необходимо итоговую сумму средних () (см. таблицу 3.11) разделить на количество периодов в сезоне (в году 12 месяцев) (). Полученный результат отнять от среднего значения () .

Из анализа таблицы 3.11 видно, что сумма средних величин отклонение сезонных колебаний модели для представленного тренда существенно отличается от «нуля», что говорит о невыраженной сезонности модели.

Таблица 3.11 - Расчет сезонной составляющей для моделей с линейным трендом

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Исходные данные | | | | | Линейный тренд | | | | |  | | | | | Среднее | Сезон. компонента |
| Месяц | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| июль | 299 | 750 | 740 | 996 | 721 | 605,51 | 769,55 | 933,59 | 1097,63 | 1261,67 | -306,51 | -19,55 | -193,59 | -101,63 | -540,67 | -232,39 | -232,38 |
| август | 1000 | 1300 | 1000 | 1500 | 2183 | 619,18 | 783,22 | 947,26 | 1111,3 | 1275,34 | 380,82 | 516,78 | 52,74 | 388,7 | 907,66 | 449,34 | 449,35 |
| сентябрь | 1250 | 1500 | 1300 | 2013 | 2651 | 632,85 | 796,89 | 960,93 | 1124,97 | 1289,01 | 617,15 | 703,11 | 339,07 | 888,03 | 1361,99 | 781,87 | 781,88 |
| октябрь | 800 | 1350 | 1000 | 2214 | 2191 | 646,52 | 810,56 | 974,6 | 1138,64 | 1302,68 | 153,48 | 539,44 | 25,4 | 1075,36 | 888,32 | 536,4 | 536,41 |
| ноябрь | 500 | 950 | 1010 | 1820 | 1508 | 660,19 | 824,23 | 988,27 | 1152,31 | 1316,35 | -160,19 | 125,77 | 21,73 | 667,69 | 191,65 | 169,33 | 169,34 |
| декабрь | 510 | 1050 | 500 | 1500 | 1405 | 673,86 | 837,9 | 1001,94 | 1165,98 | 1330,02 | -163,86 | 212,1 | -501,94 | 334,02 | 74,98 | -8,94 | -8,93 |
| январь | 300 | 600 | 600 | 1242 | 855 | 687,53 | 851,57 | 1015,61 | 1179,65 | 1343,69 | -387,53 | -251,57 | -415,61 | 62,35 | -488,69 | -296,21 | -296,20 |
| февраль | 400 | 731 | 785 | 162 | 1112 | 701,2 | 865,24 | 1029,28 | 1193,32 | 1357,36 | -301,2 | -134,24 | -244,28 | -1031,32 | -245,36 | -391,28 | -391,27 |
| март | 410 | 818 | 948 | 818 | 1431 | 714,87 | 878,91 | 1042,95 | 1206,99 | 1371,03 | -304,87 | -60,91 | -94,95 | -388,99 | 59,97 | -157,95 | -157,94 |
| апрель | 700 | 426 | 1094 | 1002 | 1352 | 728,54 | 892,58 | 1056,62 | 1220,66 | 1384,7 | -28,54 | -466,58 | 37,38 | -218,66 | -32,7 | -141,82 | -141,81 |
| май | 650 | 531 | 760 | 771 | 1231 | 742,21 | 906,25 | 1070,29 | 1234,33 | 1398,37 | -92,21 | -375,25 | -310,29 | -463,33 | -167,37 | -281,69 | -281,68 |
| июнь | 800 | 454 | 648 | 406 | 978 | 755,88 | 919,92 | 1083,96 | 1248 | 1412,04 | 44,12 | -465,92 | -435,96 | -842 | -434,04 | -426,76 | -426,75 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Σ/12 (средняя) | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | -0,00833 | 0 |

Пример расчета сезонной компоненты (последний столбик).

Для июля сезонная компонента вычисляется следующим образом: -232,39-(-0,00833)= -232,38

Для августа: 449,34-(-0,00833)= 449,35 и т.д.

Рассчитаем сезонную компоненту для остальных функций тренда. Полученные данные сведем в таблицу 3.12.

Из таблицы 3.12 видно, что отклонение сезонных колебаний модели с экспоненциальным и степенным трендом существенно отличается от нуля, что говорит о невыраженной сезонности модели. Таким образом, возникает противоречие, заключающееся в том, что исходные данные обладают выраженным сезонным колебанием. Следовательно, выбор экспоненциальной и степенной модели, приведет к ошибочному прогнозу.

Таблица 3.12 – Расчет сезонной компоненты для каждого из уравнений тренда.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Функция тренда | Среднее |
| 1 | Экспоненциальная | 116,83 |
| 2 | Полулогарифмическая | 0,42 |
| 3 | Степенная | 110,48 |
| 4 | Линейная | -0,00833 |
| 5 | Полиномиальная | -0,02893 |

Из таблицы 3.12 видно, что сумма средних величин сезонных колебаний близка к нулю только для модели линейного, полиномиального и полулогарифмического тренда. Следовательно, для адекватной работы модели, необходимо дальнейшее исследование перечисленных функций тренда.

Вычисленная сезонная компонента для рассматриваемых трендов представлена в таблице 3.13 (пример расчета сезонной компоненты приведен в таблице 3.11)

Таблица 3.13 – Сезонная компонента для трех моделей

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| месяц | Линейная функция | Полиномиальная функция | Полулогарифмическая функция |
| июль | -232,382 | -232,934 | -194,394 |
| август | 449,3483 | 449,1005 | 461,3027 |
| сентябрь | 781,8783 | 781,8737 | 781,5423 |
| октябрь | 536,4083 | 536,5857 | 529,5815 |
| ноябрь | 169,3383 | 169,6365 | 159,3111 |
| декабрь | -8,93167 | -8,57387 | -19,999 |
| январь | -296,202 | -295,845 | -306,761 |
| февраль | -391,272 | -390,978 | -400,145 |
| март | -157,942 | -157,772 | -164,196 |
| апрель | -141,812 | -141,827 | -144,683 |
| май | -281,682 | -281,944 | -280,53 |
| июнь | -426,752 | -427,321 | -421,03 |

Далее необходимо рассчитать точность построенных моделей. Для этого рассчитаем ошибку () и среднеквадратическое отклонение для построенных моделей:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Пример расчета представлен в таблице в таблицу 3.14

Таблица 3.14 – Расчет СКО и ошибки для полиномиальной модели.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Сезон. Компонента (St) |  | Ошибка | СКО |  |  |  |  | Сезон. Компонента (St) |  | Ошибка | СКО |
| 1 | 299 | 622,9356 | -194,394 | 428,5412 | -129,541 | 0,091376 |  | 31 | 600 | 1006,462 | -306,761 | 699,7009 | -99,7009 | 0,020304 |
| 2 | 1000 | 634,8324 | 461,3027 | 1096,135 | -96,1351 | 0,007692 |  | 32 | 785 | 1020,194 | -400,145 | 620,0495 | 164,9505 | 0,070771 |
| 3 | 1250 | 646,7904 | 781,5423 | 1428,333 | -178,333 | 0,015588 |  | 33 | 948 | 1033,988 | -164,196 | 869,7928 | 78,20721 | 0,008085 |
| 4 | 800 | 658,8096 | 529,5815 | 1188,391 | -388,391 | 0,106812 |  | 34 | 1094 | 1047,844 | -144,683 | 903,1609 | 190,8391 | 0,044648 |
| 5 | 500 | 670,89 | 159,3111 | 830,2011 | -330,201 | 0,158194 |  | 35 | 760 | 1061,76 | -280,53 | 781,2301 | -21,2301 | 0,000738 |
| 6 | 510 | 683,0316 | -19,999 | 663,0326 | -153,033 | 0,053272 |  | 36 | 648 | 1075,738 | -421,03 | 654,7071 | -6,70712 | 0,000105 |
| 7 | 300 | 695,2344 | -306,761 | 388,4737 | -88,4737 | 0,051869 |  | 37 | 996 | 1089,776 | -194,394 | 895,382 | 100,618 | 0,012628 |
| 8 | 400 | 707,4984 | -400,145 | 307,3535 | 92,64649 | 0,090862 |  | 38 | 1500 | 1103,876 | 461,3027 | 1565,179 | -65,1791 | 0,001734 |
| 9 | 410 | 719,8236 | -164,196 | 555,628 | -145,628 | 0,068694 |  | 39 | 2013 | 1118,038 | 781,5423 | 1899,58 | 113,4201 | 0,003565 |
| 10 | 700 | 732,21 | -144,683 | 587,5273 | 112,4727 | 0,036647 |  | 40 | 2214 | 1132,26 | 529,5815 | 1661,841 | 552,1585 | 0,110395 |
| 11 | 650 | 744,6576 | -280,53 | 464,1277 | 185,8723 | 0,160381 |  | 41 | 1820 | 1146,544 | 159,3111 | 1305,855 | 514,1453 | 0,155018 |
| 12 | 800 | 757,1664 | -421,03 | 336,1359 | 463,8641 | 1,904371 |  | 42 | 1500 | 1160,888 | -19,999 | 1140,889 | 359,1106 | 0,099076 |
| 13 | 750 | 769,7364 | -194,394 | 575,342 | 174,658 | 0,092156 |  | 43 | 1242 | 1175,294 | -306,761 | 868,5337 | 373,4663 | 0,184897 |
| 14 | 1300 | 782,3676 | 461,3027 | 1243,67 | 56,32966 | 0,002051 |  | 44 | 162 | 1189,762 | -400,145 | 789,6167 | -627,617 | 0,631766 |
| 15 | 1500 | 795,06 | 781,5423 | 1576,602 | -76,6023 | 0,002361 |  | 45 | 818 | 1204,29 | -164,196 | 1040,094 | -222,094 | 0,045596 |
| 16 | 1350 | 807,8136 | 529,5815 | 1337,395 | 12,60491 | 8,88E-05 |  | 46 | 1002 | 1218,88 | -144,683 | 1074,197 | -72,1969 | 0,004517 |
| 17 | 950 | 820,6284 | 159,3111 | 979,9395 | -29,9395 | 0,000933 |  | 47 | 771 | 1233,53 | -280,53 | 953,0005 | -182,001 | 0,036472 |
| 18 | 1050 | 833,5044 | -19,999 | 813,5054 | 236,4946 | 0,084513 |  | 48 | 406 | 1248,242 | -421,03 | 827,2119 | -421,212 | 0,259279 |
| 19 | 600 | 846,4416 | -306,761 | 539,6809 | 60,31905 | 0,012492 |  | 49 | 721 | 1263,016 | -194,394 | 1068,621 | -347,621 | 0,105819 |
| 20 | 731 | 859,44 | -400,145 | 459,2951 | 271,7049 | 0,349954 |  | 50 | 2183 | 1277,85 | 461,3027 | 1739,153 | 443,8473 | 0,065132 |
| 21 | 818 | 872,4996 | -164,196 | 708,304 | 109,696 | 0,023985 |  | 51 | 2651 | 1292,746 | 781,5423 | 2074,288 | 576,7121 | 0,0773 |
| 22 | 426 | 885,6204 | -144,683 | 740,9377 | -314,938 | 0,18067 |  | 52 | 2191 | 1307,702 | 529,5815 | 1837,284 | 353,7161 | 0,037064 |
| 23 | 531 | 898,8024 | -280,53 | 618,2725 | -87,2725 | 0,019925 |  | 53 | 1508 | 1322,72 | 159,3111 | 1482,032 | 25,96845 | 0,000307 |
| 24 | 454 | 912,0456 | -421,03 | 491,0151 | -37,0151 | 0,005683 |  | 54 | 1405 | 1337,8 | -19,999 | 1317,801 | 87,19944 | 0,004379 |
| 25 | 740 | 925,35 | -194,394 | 730,9556 | 9,044449 | 0,000153 |  | 55 | 855 | 1352,94 | -306,761 | 1046,179 | -191,179 | 0,033394 |
| 26 | 1000 | 938,7156 | 461,3027 | 1400,018 | -400,018 | 0,081638 |  | 56 | 1112 | 1368,142 | -400,145 | 967,9967 | 144,0033 | 0,022131 |
| 27 | 1300 | 952,1424 | 781,5423 | 1733,685 | -433,685 | 0,062576 |  | 57 | 1431 | 1383,404 | -164,196 | 1219,209 | 211,7912 | 0,030176 |
| 28 | 1000 | 965,6304 | 529,5815 | 1495,212 | -495,212 | 0,109692 |  | 58 | 1352 | 1398,728 | -144,683 | 1254,046 | 97,95431 | 0,006101 |
| 29 | 1010 | 979,1796 | 159,3111 | 1138,491 | -128,491 | 0,012738 |  | 59 | 1231 | 1414,114 | -280,53 | 1133,584 | 97,41628 | 0,007385 |
| 30 | 500 | 992,79 | -19,999 | 972,791 | -472,791 | 0,236211 |  | 60 | 978 | 1429,56 | -421,03 | 1008,53 | -30,5295 | 0,000916 |
|  |  |  |  |  |  |  |  | Σ/60 (среднее) | | | |  |  | 0,1 |

Аналогично рассчитаем СКО для линейной и полулогарифмической модели. Результаты представлены в таблице 3.15

Рассчитав среднее значение СКО для каждой из моделей, рассчитаем точность модели:

|  |  |
| --- | --- |
| ) |  |

Таблица 3.15 – Точность рассчитанных моделей

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| модель | линейный | логарифмический | полиномиальной |
|  | 0,11 | 0,19 | 0,1 |
| точность модели, % | (1-0,11)\*100=89 | (1-0,19)\*100=81 | (1-0,1)\*100=90 |

Таким образом, модель с логарифмической функцией тренда является наиболее точной, следовательно, прогноз, сделанный на основании данных этой модели, будет наиболее достоверным (рисунок 3.1).

Рисунок 3.1 – Фактические и рассчитанные значения

Литература

1. [Афанасьев В.Н.](http://1945.zone-x.ru/index.asp?GrID=ba275696), [Юзбашев М.М.](http://1945.zone-x.ru/index.asp?GrID=ba275701)Анализ временных рядов и прогнозирование: Учебник.- М.:Финансы и статистика,  2001 – 228 с.
2. Дуброва Т.А. Статистические методы прогнозирования: Учеб. пособие для вузов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. - 206с.
3. Елисеева И.И. Общая теория статистики: Учебник для вузов / И.И. Елисеева, М.М. Юзбашев; Под ред. И.И. Елисеевой. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Финансы и статистика, 2002. 480 с.
4. Общая теория статистики: Учебник/ Т.В.Рябушкин, М.Р.Ефимова, И.М.Ипатова, Н.И.Яковлева –М.:Финансы и статистика,  1981 – 279 с.
5. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / Под ред. В.А. Колемаева. – М.: ИНФРА-М, 1997.- 302 с. – (Серия «Высшее образование»).
6. Теория статистики: Учебник/ Под ред. Р. А. Шмойловой. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 576 с.