Индивидуальное домашнее задание по теории вероятностей для НФИбд-02-19 (2 модуль).

Вариант №25

1. В наборе 4 шара белого цвета, 5 шара синего и 4 шара красного цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 6 шаров. Найдите вероятность события

$$A = \{\text{синих шаров достали больше, чем белых}\},$$

$$B = \{\text{достали одинаковое число синих и красных шаров}\}$$

Решение:

$$A = \{\text{синих шаров достали больше, чем белых}\}$$

Т.е.:

2 синих + 1 белый + 3 красных; 2 синих + 4 красных;

3 синих + 2 белых + 1 красный; 3 синих + 1 белый + 2 красный; 3 синих + 3 красных;

4 синих + 2 белых; 4 синих + 1 белый + 1 красный; 4 синих + 2 красных;(4 синих+2 любых)

5 синих + 1 белый; 5 синих + 1 красный; (5 синих + 1 любой)

$$P = \frac{m}{n},$$

Где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

Извлекаем 6 шаров из 13, следовательно:

$$n = \mathrm{C}_{13}^{6} = \frac{13!}{6!\,7!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1716$$

$$m = \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_4^3 + \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_4^4 + \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_4^1 + \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^1 \cdot \mathrm{C}_4^2 + \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_4^3 + \mathrm{C}_5^4 \cdot \mathrm{C}_8^2 + \mathrm{C}_5^5 \cdot \mathrm{C}_8^1 =$$

$$= 10 \cdot 4 \cdot 4 + 10 + 10 \cdot 6 \cdot 4 + 10 \cdot 4 \cdot 6 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 28 + 8 = 838$$

$$P(A) = \frac{838}{1716} = \frac{419}{858}$$

$$B = \{\text{достали одинаковое число синих и красных шаров}\}$$

Т.е.:

4 белых+1 синий+1 красный или 2 белых+2 синий+2 красных или 3 синих+3 красных

$$m = \text{С}_4^4 \cdot \text{С}_5^1 \cdot \text{С}_4^1 + \text{С}_4^2 \cdot \text{С}_5^2 \cdot \text{С}_4^2 + \text{С}_5^3 \cdot \text{С}_4^3 = 5 \cdot 4 + 6 \cdot 10 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 404$$

$$P(B) = \frac{404}{1716} = \frac{101}{429}$$

Ответ: $P(A) = \frac{404}{1716}$; $P(B) = \frac{101}{429}$.

2. Из колоды в 52 карты наугад (без возвращения) извлекаются четыре. Найти вероятность указанных в варианте событий.

Событие A={ровно три карты одного цвета},
событие B={хотя бы две карты разного цвета}

Решение:

Классическое определение вероятности

$$P = \frac{m}{n},$$

где n - число всевозможных исходов эксперимента, m – число благоприятных исходов.

$$n = \text{С}_{52}^4 \text{ (число способов выбрать 4 карты из 52)}$$

$$\text{С}_N^M = \frac{N!}{M!\,(N-M)!}$$

$$\text{С}_{52}^4 = \frac{52!}{4!\,48!} = \frac{52 * 51 * 50 * 49}{2 * 3 * 4} = 270725$$

а) A ={ровно три карты одного цвета}, т.е. или 3 красные карты из 26 + 1 чёрная из 36 или наоборот 3 чёрные + 1 красная.

$$m = 2 \cdot \text{С}_{26}^3 \text{С}_{26}^1 = 2 \cdot \frac{26!}{3!\,23!} \cdot 26 = 52 \cdot \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{2 \cdot 3} = 135200$$

$$P = \frac{135200}{270725} \approx 0.4994$$

б) B={хотя бы две карты разного цвета} Поскольку цвета всего два, то событие противоположно событию B - все цвета одинаковые (все 4 чёрные из 26 или все 4 красные из 26).

$$\overline{m} = 2 \cdot \text{С}_{26}^4 = 2 \cdot \frac{26!}{4!\,22!} = 2 \cdot \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 29900$$

$$m = n - \overline{m} = 270725 - 29900 = 240825$$

$$P = \frac{240825}{270725} \approx 0.8896$$

Ответ: $P(A) = 0.4994;\ P(B) = 0.8896.$

3. Консультация перед экзаменом должна начаться между 11.00 и 12.00. Преподаватель и студенты забыли уточнить время. Если преподаватель приходит первым в указанное время, а студентов еще нет, то преподаватель ждет студентов не более 20 минут. Если же студенты пришли первыми, то они ждут преподавателя не более 15 минут. Найти вероятность указанного в варианте события.

Решение:

Событие:

Преподаватель пришел первым, консультация началась после 11.20.

Пусть x - время прихода преподавателя, y – время прихода студентов. Для простоты будем считать время 11.00 нулевой точкой отсчёта времени. Тогда

$$x \in [0, 60], y \in [0, 60] \text{ (минут)}$$

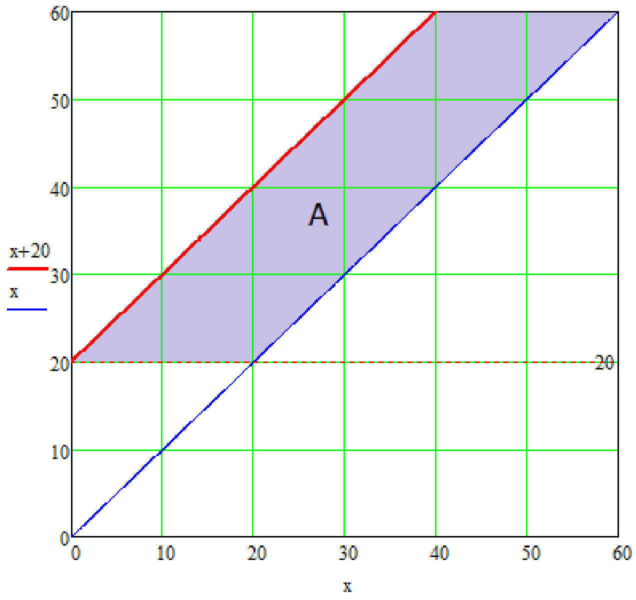
Если преподаватель приходит первым ($y > x$), то консультация начинается при

$$y - x \leq 20 \Rightarrow y \leq x + 20$$

При этом чтобы консультация началась после 11.20, т.е. студенты должны прийти после $y \geq 20$.

Изобразим область значений (x, y) на плоскости, отметим области, соответствующие условиям:

$$\begin{cases} y > x \\ y \leq x + 20 \\ y \geq 20 \end{cases}$$



Используем геометрическое определение вероятности на плоскости:

$$P = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Ω - квадрат $[0, 60] \times [0, 60]$, A - заштрихована на рисунке.

$$P = \frac{60 \cdot 40 - 40^2}{60^2} = \frac{2}{9}.$$

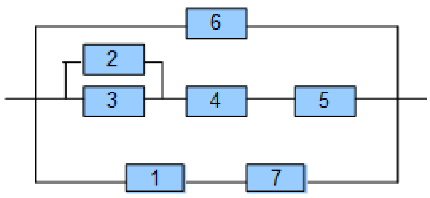
Ответ: $\frac{2}{9}$.

4. Система надежности состоит из 7 элементов и имеет схему, изображенную на рисунке. События A_i, $i=\overline{1,7}$,— отказы элементов за заданный промежуток времени.

1) Выразите через события A_i события A и $\overline{A}$, где A—отказ всей системы за заданный промежуток времени.

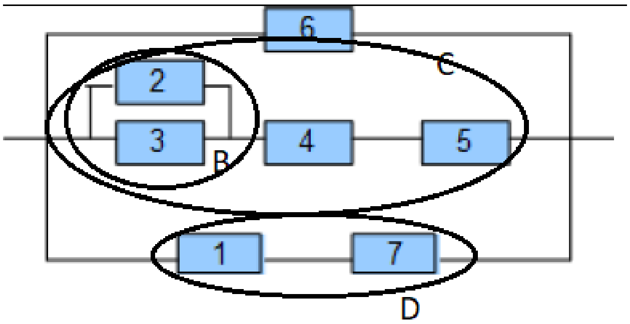
2) Считая, что события A_i независимы в совокупности и имеют вероятности $P(A_i)=p_i$, $i=\overline{1,7}$, вычислите вероятность события A.

$p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}3$, $p_4=0{,}2$, $p_5=0{,}6$, $p_6= p_7=0{,}3$.



Решение:

Выделим в системе подсистемы как показано на рисунке:



1) События B, C, D – отказ соответствующих подсистем

$$B = A_2A_3$$
$$C = B + A_4 + A_5 = A_2A_3 + A_4 + A_5$$
$$D = A_1 + A_7$$

A — отказ всей системы за заданный промежуток времени.

$$A = A_6 \cdot C \cdot D = A_6 \cdot (A_2A_3 + A_4 + A_5) \cdot (A_1 + A_7)$$

Противоположное событие:

$$\overline{A} = \overline{A_6 \cdot C \cdot D} = \overline{A_6} + \overline{C} + \overline{D} = \overline{A_6} + \overline{A_2A_3 + A_4 + A_5} + \overline{A_1 + A_7} =$$

$$= \overline{A_6} + \overline{A_4} \cdot \overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_5} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_7} = \overline{A_6} + \overline{A_4} \cdot \left(\overline{A_2} + \overline{A_3}\right) \cdot \overline{A_5} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_7}$$

2)

$$P(B) = P(A_2)P(A_3) = 0.1 \cdot 0.3 = 0.03$$

$$P(C) = 1 - \left(1 - P(B)\right)\left(1 - P(A_4)\right)\left(1 - P(A_5)\right) = 1 - 0.97 \cdot 0.8 \cdot 0.4 = 0.6896$$

$$P(D) = 1 - \left(1 - P(A_1)\right)\left(1 - P(A_7)\right) = 1 - 0.6 \cdot 0.7 = 0.58$$

$$P(A) = P(A_6) \cdot P(C) \cdot P(D) = 0.3 \cdot 0.6896 \cdot 0.58 = 0.1199904$$

Ответ: $P(A) = 0.1199904$.

5. В первой урне находятся 5 белых и 3 черных шаров, во второй урне — 3 белых и 3 черных шаров. Сначала из первой урны во вторую перекладывается наугад 4 шара, затем такое же число шаров так же наугад перекладывается из второй урны в первую.

а) Определите вероятность того, что после вскрытия первой урны в ней будет столько же черных шаров, сколько было до проведения опыта.

б) После вскрытия первой урны оказалось, что в ней столько же белых шаров, сколько было до проведения опыта. Вычислите вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили *2* черных шаров.

Решение:

Введём следующие гипотезы:

H_i – из первой урны во вторую переложили i чёрных шаров;

$$С_8^4 = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{8*7*6*5}{2*3*4} = 70$$

$$P(H_0) = \frac{С_5^4}{С_8^4} = \frac{1}{14}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 1б + 3ч, \text{во } 2-\text{ой } 7б + 3ч)$$

$$P(H_1) = \frac{С_3^1 С_5^3}{С_8^4} = \frac{3}{7}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 2б + 2ч, \text{во } 2-\text{ой } 6б + 4ч)$$

$$P(H_2) = \frac{С_3^2 С_5^2}{С_8^4} = \frac{3}{7}; (\text{в } 1-\text{ой урне } 3б + 1ч, \text{во } 2-\text{ой } 5б + 5ч)$$

$$P(H_3) = \frac{С_5^4}{С_8^4} = \frac{1}{14} (\text{в } 1-\text{ой урне } 4б + 0ч, \text{во } 2-\text{ой } 4б + 6ч)$$

Убеждаемся, что гипотезы образуют полную группу несовместных событий

$$\sum_i P(H_i) = 1.$$

а) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же черных шаров (3), сколько было до проведения опыта. Тогда при перекладке 2х шаров в первую урну во второй урне 10 шаров.

$$С_{10}^2 = \frac{10!}{2!\,8!} = 45$$

$$P(A|H_0) = \frac{С_7^2}{С_{10}^2} = \frac{7}{15};\ P(A|H_1) = \frac{С_6^1 С_4^1}{С_{10}^2} = \frac{8}{15};$$

$$P(A|H_2) = \frac{С_5^2}{С_{10}^2} = \frac{2}{9};\ P(A|H_3) = 0$$

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A) = \sum_i P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$P(A)=\frac{1}{14}\cdot\frac{7}{15}+\frac{3}{7}\cdot\frac{8}{15}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{9}=\frac{5}{14}$$

б) Пусть событие A – после вскрытия первой урны в ней будет столько же белых шаров (5), сколько было до проведения опыта. Тогда при перекладке 2х шаров в первую урну во второй урне 10 шаров.

$$P(A|H_0)=P(A|H_1)=0;\ P(A|H_2)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9};$$

$$P(A|H_3)=\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}.$$

Вероятность того, что при этом условии из первой урны во вторую переложили *2* черных шаров можно определить по формуле Байеса:

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)}$$

$$P(H_1|A)=\frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{9}+\frac{1}{14}\cdot\frac{8}{15}}=\frac{5}{7}$$

Ответ: а) $\frac{5}{14}$; б) $\frac{5}{7}$.

6. Вероятность попадания в цель при любом из 6 выстрелов равна 0,9. Найдите вероятность того, что произойдет:

а) Ровно 4 попаданий.

б) Не более 4 попаданий.

в) Не менее 4 попаданий.

г) От 1 до 4 попаданий.

Решение:

По формуле Бернулли вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

а) ровно 4 попаданий;

$$P_6(4)=C_6^4 0.9^4\cdot 0.1^2=\frac{6!}{4!\,2!}0.9^4\cdot 0.1^2=15\cdot 0.9^4\cdot 0.01=0.098415$$

б) Пусть событие А - не более 4 попаданий, тогда

$$P(A) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) + P_6(4)$$

$$P_6(0) = 0.1^6 = 0.000001$$

$$P_6(1) = C_6^1 0.9 \cdot 0.1^5 = 5.4 \cdot 0.00001 = 0.000054$$

$$P_6(2) = C_6^2 0.9^2 \cdot 0.1^4 = 15 \cdot 0.81 \cdot 0.0001 = 0.001215$$

$$P_6(3) = C_6^3 0.9^3 \cdot 0.1^3 = 20 \cdot 0.729 \cdot 0.001 = 0.01458$$

$$P(A) = 0.000001 + 0.000054 + 0.001215 + 0.01458 + 0.098415 = 0.114265$$

в) Не менее 4 попаданий.

Пусть событие В - не менее 4 попаданий, тогда $\overline{B} -$ менее 4 попаданий

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P_6(0) - P_6(1) - P_6(2) - P_6(3)$$

$$P(B) = 1 - 0.000001 - 0.000054 - 0.001215 - 0.01458 = 0.98415$$

г) Пусть событие В - от 1 до 4 попаданий включительно, тогда

$$P(B) = P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) + P_6(4)$$

$$P(B) = 0.000054 + 0.001215 + 0.01458 + 0.098415 = 0.114264$$

Ответ: а)0.098415; б)0.114265; в) 0.98415; г) 0.114264.

7. Определите вероятность того, что среди 100 изготовленных изделий бракованными окажутся:

а) ровно 5 изделий.

б) не более 6 изделий

если вероятность брака равна 0,04 и определите вероятность того, что среди 1000 изготовленных изделий бракованными окажутся

в) ровно 70 изделий.

г) от 55 до 90 изделий

если вероятность брака равна 0,065

Решение:

а) Поскольку вероятность «успеха» - брака изделия $p = 0.04$ достаточно мала, а число испытаний велико, то будем использовать формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

$$\lambda = np.$$

Итак, $n = 100$, $p = 0.04$, следовательно, $\lambda = 4$.

Ровно 5 изделий окажутся бракованными:

$$P_{100}(5) = \frac{4^5 e^{-4}}{5!} \approx 0.1563$$

б) А – бракованными окажутся не более 6 изделий

$$P(A) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) + P_{100}(4) + P_{100}(5) + P_{100}(6) =$$

$$= e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \frac{4^6}{6!}\right) = \frac{437}{9e^4} \approx 0.8893$$

в) Итак, $n = 1000$, $p = 0.065$, $np = 65$, $npq = 60.775$

По формуле Муавра-Лапласа вероятность m успехов в серии из n испытаний определяется по формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\varphi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. При этом считаем, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения функции находим из таблиц.

$$P_{1000}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{60.775}} \varphi\left(\frac{70 - 65}{\sqrt{60.775}}\right) = \frac{1}{\sqrt{60.775}} \varphi(0.641) \approx 0.0417$$

г) Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа (m – число успехов в серии из n испытаний):

$$P(a < m < b) = \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ – интегральная функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2}\, dx$. При этом считаем, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, При $x > 5$ принимаем $\Phi(x) \approx 0.5$. Значения функции находим из таблиц.

$$P(55 < m < 90) = \Phi\left(\frac{90-65}{\sqrt{60.775}}\right) - \Phi\left(\frac{55-65}{\sqrt{60.775}}\right) \approx \Phi(3.21) - \Phi(-1.28) =$$

$$= \Phi(3.21) + \Phi(1.28) \approx 0.49931 + 0.3997 = 0.89901\ (89.901\%)$$

8. В наборе 6 шаров белого цвета, 4 шаров синего и 6 шаров красного цвета. Из набора случайным образом без возвращения вынимают 5 шаров. Случайная величина ξ – число вынутых красных шаров. Найдите:

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

(2; 6), [2; 6); (2; 6], [2; 6].

в) Найдите ряд распределения случайных величин $\eta = (7-\xi)^2 - 10, \mu = |\xi^3 - 6\xi^2|$.

Решение:

ξ может принимать значение от 0 до 5,

$$P(\xi = k) = \frac{C_6^k C_{10}^{5-k}}{C_{18}^6}$$

$$C_{16}^5 = \frac{16!}{5!\,11!} = 4368$$

Число способов $C_6^k C_{10}^{5-k}$:

k	0	1	2	3	4	5
$C_6^k C_{10}^{5-k}$	252	1260	1800	900	150	6

а) Ряд распределения случайной величины ξ.

ξ	0	1	2	3	4	5
p	0,057692	0,288462	0,412088	0,206044	0,034341	0,001374

б) Вероятность попадания случайной величины ξ в интервалы

$$P(\xi \in (2;\ 6)) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.241758$$

$$P(\xi \in [2;\ 6)) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.653846$$

$$P(\xi \in\ (2; 6]) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.241758$$

$$P(\xi \in [2;\ 6]) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) = 0.653846$$

в) Ряд распределения случайных величин $\eta = (7-\xi)^2 - 10, \mu = |\xi^3 - 6\xi^2|$

Вычислим значения случайных величин η и μ:

ξ	0	1	2	3	4	5
η	39	26	15	6	-1	-6
μ	0	5	16	27	32	25
p	0,057692	0,288462	0,412088	0,206044	0,034341	0,001374

Составим ряд распределения η и μ, упорядочив значения случайных величин по возрастанию и, если надо, складывая вероятности при одинаковых значениях:

η	-6	-1	6	15	26	39
p	0,001374	0,034341	0,206044	0,412088	0,288462	0,057692

μ	0	5	16	25	27	32
p	0,057692	0,288462	0,412088	0,001374	0,206044	0,034341

9. Непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} A(2-x)^3, & -2 \le x \le 2 \\ 0, \quad x < -2, & x > 2 \end{cases}.$$

Найдите: а) Константу A

По условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$$A\int_{-2}^{2}(2-x)^3dx = -A\frac{(2-x)^4}{4}\Big|_{-2}^{2} = 64A \Rightarrow A = \frac{1}{64}$$

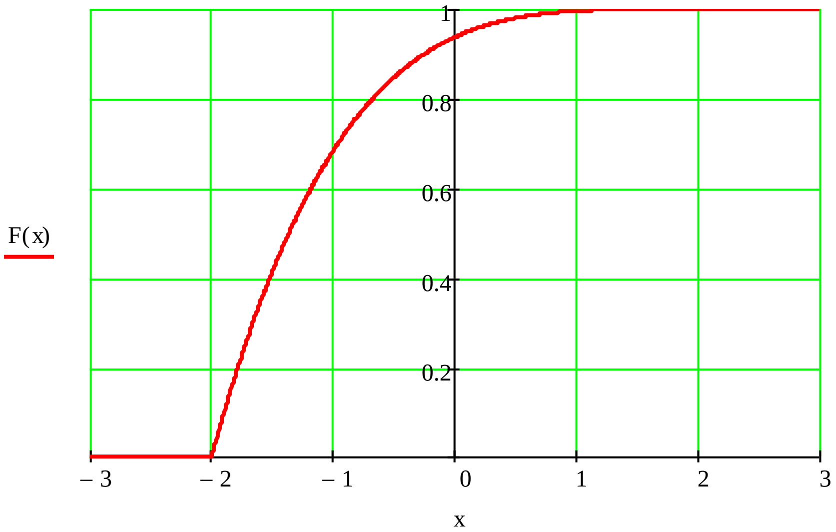
$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{(2-x)^3}{64}, & -2 \le x \le 2 \\ 0, \quad x < -2, & x > 2 \end{cases}.$$

б) Функцию распределения случайной величины ξ и постройте ее график.

Найдём функцию распределения:

$$F_\xi(x) = \frac{1}{64}\int_{-2}^{x}(2-x)^3dx = -\frac{(2-x)^4}{256}\Big|_{-2}^{x} = \frac{256-(2-x)^4}{256};$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ 1 - \dfrac{(2-x)^4}{256}, & x \in (-2, 2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



в) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = 2(\xi+1)^3 + 2$.

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(2(\xi+1)^3 + 2 < y) = P\left((\xi+1)^3 < \frac{y-2}{2}\right) =$$

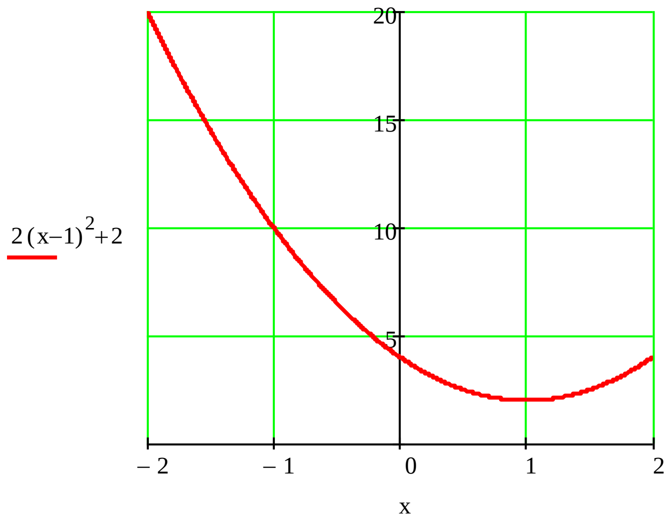
$$= P\left(\xi < \sqrt[3]{\frac{y-2}{2}} - 1\right) = F_\xi\left(\sqrt[3]{\frac{y-2}{2}} - 1\right)$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 1 - \dfrac{\left(3 - \sqrt[3]{\dfrac{y-2}{2}}\right)^4}{256}, & y \in (0, 56] \\ 1, & y > 56 \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = F'_\eta(y)$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{y-2}{2}}\left(3 - \sqrt[3]{\dfrac{y-2}{2}}\right)^3}{192(y-2)}, & y \in (0, 56] \\ 0, & y > 56 \end{cases}$$

г) Вычислите функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = 2(\xi - 1)^2 + 2$



$$p_\eta(y) = p_\xi(g(y))|g'(y)|$$

$$y = 2(x-1)^2 + 2, \qquad x = g(y) = 1 \pm \sqrt{\frac{y-2}{2}}$$

$$|g'(y)| = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y-2}}$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 20, \qquad x = 0 \Rightarrow y = 4, \quad x = 1 \Rightarrow y = 2, \quad x = 2 \Rightarrow y = 4$$

При $-1 < x < 2$, $y \in (2;4)$:

$$p_\eta(y) = \left(\frac{\left(2 - \left(1 + \sqrt{\frac{y-2}{2}}\right)\right)^3}{64} + \frac{\left(2 - \left(1 - \sqrt{\frac{y-2}{2}}\right)\right)^3}{64} \right) \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y-2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(3y-4)}{256\sqrt{y-2}};$$

При $y \in (4;20)$:

$$p_\eta(y) = \frac{1}{64} \cdot \left(2 - \left(1 - \sqrt{\frac{y-2}{2}}\right)\right)^3 \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{y-2}}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\notin(2,20)\\ \dfrac{\sqrt{2}(3y-4)}{256\sqrt{y-2}}, & y\in(2,4]\\ \dfrac{\sqrt{2}}{256\sqrt{y-2}}\left(1+\sqrt{\dfrac{y-2}{2}}\right)^3, & y\in(4,20)\end{cases}$$

При $y\in(2,4]$:

$$F_\eta(y)=\int_2^y\frac{\sqrt{2}(3y-4)}{256\sqrt{y-2}}dy=\frac{\sqrt{2}y(y-2)}{128\sqrt{y-2}}$$

$$F_\eta(4)=\frac{1}{16}$$

При $y\in(4,20]$:

$$F_\eta(y)=P(\eta<y)=P(2(\xi+1)^2+2<y)=P\left(\xi>1-\sqrt{\frac{y-2}{2}}\right)=$$

$$=1-F_\xi\left(1-\sqrt{\frac{y-2}{2}}\right)=1-\frac{\left(1+\sqrt{\frac{y-2}{2}}\right)^4}{256}$$

$$F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\le 2\\ \dfrac{\sqrt{2}y(y-2)}{128\sqrt{y-2}}, & y\in(2,4]\\ 1-\dfrac{\left(1+\sqrt{\frac{y-2}{2}}\right)^4}{256}, & y\in(4,20]\\ 1, & y>20\end{cases}$$

10. В условиях задачи 8 выбирают $m=5$ шаров. (В наборе 6 шаров белого цвета, 4 шаров синего и 6 шаров красного цвета). Пусть ξ число вынутых белых шаров, а через η – красных.

Найдите:

а) Совместное распределение случайных величин ξ и η (ряд распределения).

ξ может принимать значение от 0 до 5, η может принимать значение от 0 до 5. Всего 16 шаров, извлекаем 5.

$$P(\xi = k, \eta = m) = \frac{C_6^k C_6^m C_4^{5-k-m}}{C_{16}^5};\ C_{16}^5 = \frac{16!}{5!\,11!} = 4368$$

Число способов $C_6^k C_6^m C_4^{5-k-m}$:

$k \setminus m$	0	1	2	3	4	5
0		6	60	120	60	6
1	6	144	540	480	90	
2	60	540	900	300		
3	120	480	300			
4	60	90				
5	6					

Совместное распределение случайных величин ξ и η

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5	Сумма
0		0,001374	0,013736	0,027473	0,013736	0,001374	0,057692
1	0,001374	0,032967	0,123626	0,10989	0,020604		0,288462
2	0,013736	0,123626	0,206044	0,068681			0,412088
3	0,027473	0,10989	0,068681				0,206044
4	0,013736	0,020604					0,034341
5	0,001374						0,001374
Сумма	0,057692	0,288462	0,412088	0,206044	0,034341	0,001374	1

б) Ряды распределения случайных величин ξ и η.

ξ	0	1	2	3	4	5
$P(\xi)$	0,057692308	0,288462	0,412088	0,206044	0,034341	0,001374

η	0	1	2	3	4	5
$P(\eta)$	0,057692	0,288462	0,412088	0,206044	0,034341	0,001374

в) Условные распределения случайной величины ξ при условии η, случайной величины η при условии ξ, проверить случайные величины на независимость

Условные распределения:

$$P(\xi = k | \eta = m) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\eta = m)}$$

Условный закон распределения $P(\xi = k | \eta = 0)$:

ξ	P
1	0,02381
2	0,238095
3	0,47619
4	0,238095
5	0,02381
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 1)$:

ξ	P
0	0,004762
1	0,114286
2	0,428571
3	0,380952
4	0,071429
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 2)$:

ξ	P
0	0,033333
1	0,3
2	0,5
3	0,166667
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 3)$:

ξ	P
0	0,133333
1	0,533333
2	0,333333
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = k|\eta = 4)$:

ξ	P
0	0,4
1	0,6
Сумма	1

Условный закон распределения $P(\xi = 0|\eta = 5) = 1$.

$$P(\eta = m|\xi = k) = \frac{P(\xi = k, \eta = m)}{P(\xi = k)}$$

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 0)$:

η	1	2	3	4	5	Сумма
P	0,02381	0,238095	0,47619	0,238095	0,02381	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 1)$:

η	0	1	2	3	4	Сумма
P	0,004762	0,114286	0,428571	0,380952	0,071429	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 2)$:

η	0	1	2	3	Сумма
P	0,033333	0,3	0,5	0,166667	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 3)$:

η	0	1	2	Сумма
P	0,133333	0,533333	0,333333	1

Условный закон распределения $P(\eta = m|\xi = 4)$:

η	0	1	Сумма
P	0,4	0,6	1

Условный закон распределения $P(\eta = 0|\xi = 5) = 1$.

Для независимых случайных величин

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$$

Например

$$P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{144}{4368}$$

$$P(\xi = 1)P(\eta = 1) = 0.288462 \cdot 0.288462 = 0.08321 \neq \frac{144}{4368}$$

Равенство

$$P(\xi = 1, \eta = 1) = P(\xi = 1)P(\eta = 1) - \text{неверно}$$

Следовательно, ξ и η зависимы.

г) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$в заданных точках $(x, y) = (7; 3), (2; 5), (4; 4)$,

$$F_{\xi\eta}(7,3) = P(\xi < 7, \eta < 3) = P(\eta < 3) = 0.057692 + 0.288462 + 0.412088 \approx$$

$$\approx 0.758242$$

$$F_{\xi\eta}(2,5) = P(\xi < 2, \eta < 5) = P(\xi = 0, \eta = 1) + \dots + P(\xi = 0, \eta = 4) +$$

$$+P(\xi = 1, \eta = 1) + \dots + P(\xi = 1, \eta = 4) = 0.34478$$

$$F_{\xi\eta}(4,4) = P(\xi < 4, \eta < 4) = 1 - 2 \cdot (0.013736 + 0.001374 + 0.020604) \approx 0.928571$$

д) Ряд распределения новой случайной величины $\mu = |\xi^2 - \eta^2|$

Составим таблицу значений случайной величины μ:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0		1	4	9	16	25
1	1	0	3	8	15	
2	4	3	0	5		
3	9	8	5			
4	16	15				
5	25					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ	0	1	3	4	5	8	9	15
$P(\mu)$	0,239011	0,002747	0,247253	0,027473	0,137363	0,21978	0,054945	0,041209
μ	16	25						
$P(\mu)$	0,027473	0,002747						

е) Ряд распределения новой двумерной дискретной случайной величины (μ_1; μ_2)

$$\mu_1 = 2 - 2(\eta - \xi), \mu_2 = \eta - 2(\xi - 2)$$

Составим таблицу значений случайной величины μ_1:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0		0	-2	-4	-6	-8
1	4	2	0	-2	-4	
2	6	4	2	0		
3	8	6	4			
4	10	8				
5	12					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_1	-8	-6	-4	-2	0	2	4
$P(\mu)$	0,001373626	0,013736	0,048077	0,123626	0,193681	0,239011	0,193681
μ_1	6	8	10	12			
$P(\mu)$	0,123626	0,048077	0,013736	0,001374			

Составим таблицу значений случайной величины μ_2:

$\xi \setminus \eta$	0	1	2	3	4	5
0		5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	
2	0	1	2	3		
3	-2	-1	0			
4	-4	-3				
5	-6					

Далее определяем соответствующие вероятности, складывая вероятности при одинаковых значениях μ:

μ_2	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$P(\mu)$	0,001374	0,013736	0,020604	0,027473	0,10989	0,082418	0,123626	0,207418
μ_2	3	4	5	6	7	8	9	
$P(\mu)$	0,101648	0,123626	0,111264	0,034341	0,027473	0,013736	0,001374	

Совместное распределение случайных величин μ_1 и μ_2

$\mu_1 \setminus \mu_2$	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2
-8								
-6								
-4								
-2								
0								
2								0,206044
4						0,068681	0,123626	0,001374
6					0,10989	0,013736		
8			0,020604	0,027473				
10		0,013736						
12	0,001374							

$\mu_1 \setminus \mu_2$	3	4	5	6	7	8	9
-8							0,001374
-6						0,013736	
-4				0,020604	0,027473		
-2			0,10989	0,013736			
0	0,068681	0,123626	0,001374				
2	0,032967						
4							
6							
8							
10							
12							

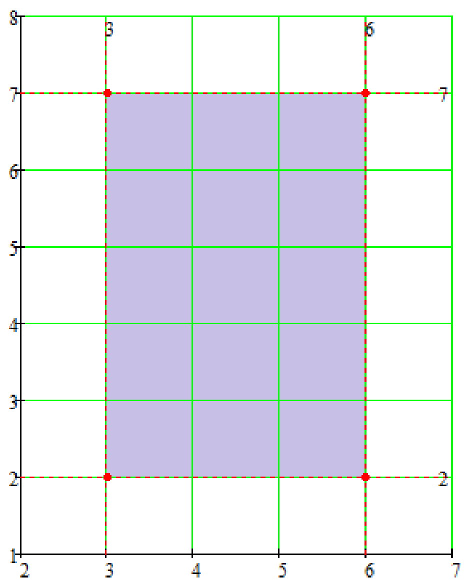
11. В четырехугольник с вершинами в точках $(3;2),(3;7),(6;7),(6;2)$ в соответствии с принципом геометрической вероятности падает частица. Пусть ξ и η - координаты по оси X и У точки падения частицы.

Найдите:

а) Совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ случайной величины (ξ,η) и совместную плотность распределения случайной величины (ξ,η).

Поскольку площадь прямоугольника (квадрата) D равна 25, то совместная плотность распределения имеет вид

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{25}, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}.$$



$$F_{\xi\eta}(x,y)=\int\limits_1^x dx\int\limits_1^y p_{\xi\eta}(x,y)dy=\frac{1}{25}\int\limits_1^x dx\int\limits_1^y dy=\frac{(x-1)(y-1)}{25},(x,y)\in D$$

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-1)}{25},(x,y)\in D\\ \dfrac{x-1}{5},(1<x\le 6)\wedge(y>6)\\ \dfrac{(y-1)}{5},(x>6)\wedge(1<y\le 6)\\ 1,\qquad (x>6)\wedge(y>6)\end{cases}$$

б) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_\xi(x)=\int\limits_1^6 p_{\xi\eta}(x,y)\,dy=\frac{1}{25}\int\limits_1^6 1\,dy=\frac{1}{5}$$

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{5},x\in[1;6]\\ 0,x\notin[1;6]\end{cases}.$$

$$F_\xi(x)=\int\limits_1^x p_\xi(x)\,dx=\frac{x-1}{5},1<x\le 6$$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x-1}{5}, & 1<x\le 6\\ 1, & x>6\end{cases}$$

$$p_\eta(y)=\int\limits_1^6 p_{\xi\eta}(x,y)\,dx=\frac{1}{25}\int\limits_1^6 1\,dy=\frac{1}{5}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{5},y\in[1;6]\\ 0,y\notin[1;6]\end{cases}.$$

$$F_\eta(y)=\int\limits_1^y p_\eta(y)\,dy=\frac{y-1}{5},\qquad 1<y\le 6$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \dfrac{y-1}{5}, & 1 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

в) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{1}{5} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)} = \frac{1}{5} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{верно}$$

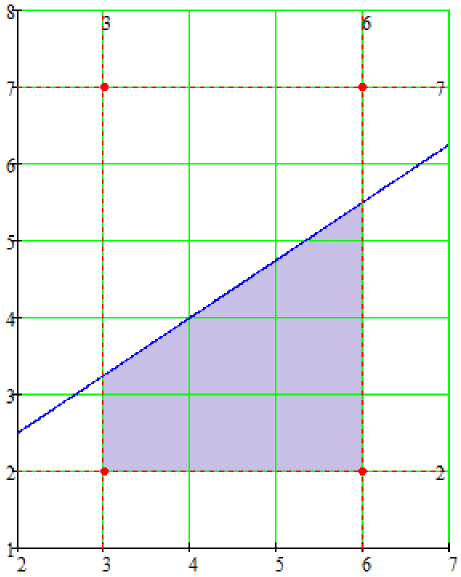
Следовательно, случайные величины независимы. Условные функции распределения совпадают с одномерными:

$$F_\xi(x|y) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{5}, & 1 < x \le 6; \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

$$F_\eta(y|x) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ \dfrac{y-1}{5}, & 1 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

г) Значение функции распределения случайной величины $\mu = -3\xi + 4\eta$ в точке $z = 4$.

$$4 = -3x + 4y \Longrightarrow y = 1 + 0.75x$$



$$y = 1 + 0.75x, \qquad y(3) = 3.25;, \qquad y(6) = 5.5$$

$$F_\mu(4) = P(-3\xi + 4\eta < 4) = P\left(\eta < \frac{4 + 3\xi}{4}\right) = \frac{S_D}{S} = \frac{\frac{1.25 + 3.5}{2} \cdot 3}{15} = 0.475$$

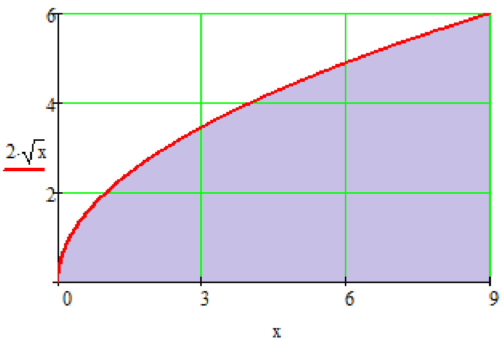
12. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η задана формулой

$$p_{\xi\eta}(x, y) = C(2x^2 + 3y), (x, y) \in D,$$

где область $D = \{(x; y): x = 9, y = 0, \ y = 2\sqrt{x}\}$.

Найдите:

а) Постоянную C.



По закону нормировки

$$\iint\limits_D p_{\xi\eta}(x, y) dxdy = 1,$$

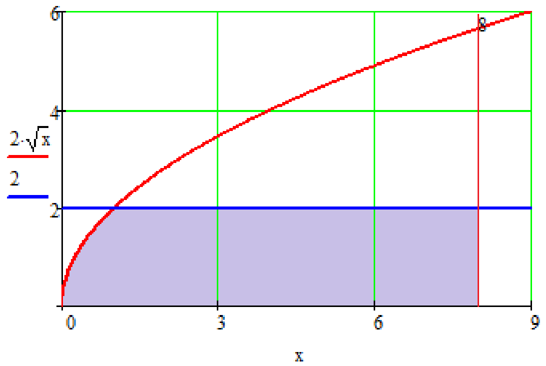
$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 9 \\ 0 \le y \le 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\int_0^9 dx \int_0^{2\sqrt{x}} C(2x^2 + 3y)\,dy = C\int_0^9 \left(2x^2y + \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{x}} dx = C\int_0^9 \left(6x + 4x^2\sqrt{x}\right)dx =$$

$$= C\left(3x^2 + \frac{8x^3\sqrt{x}}{7}\right)\Bigg|_0^9 = \frac{19197}{7}C$$

$$C = \frac{7}{19197}$$

б) Значения двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$ в заданных точках $(x,y) = (8;2)$



$$y = 2\sqrt{x} \Longrightarrow x = \frac{y^2}{4}$$

$$F_{\xi\eta}(8;2) = P(\xi < 8, \eta < 2) = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^8 p_{\xi\eta}(x,y)\,dx =$$

$$= \frac{7}{19197}\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^8 (2x^2 + 3y)\,dx = \frac{7}{19197}\int_0^2 \left(\frac{2x^3}{3} + 3yx\right)\Bigg|_{\frac{y^2}{4}}^8 dx =$$

$$= \frac{7}{19197}\int_0^2 \left(24y - \frac{3y^3}{4} - \frac{y^6}{96} + \frac{1024}{3}\right)dx =$$

$$= \frac{7}{19197}\left(12y^2 - \frac{3y^4}{16} - \frac{y^7}{672} + \frac{1024y}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{15277}{57591} \approx 0.2657.$$

в) Одномерные плотности и функции распределения случайных величин ξ и η.

$$p_\xi(x) = \int\limits_0^{2\sqrt{x}} p_{\xi\eta}(x,y)\,dy = \frac{7}{19197}\int\limits_0^{2\sqrt{x}} (2x^2+3y)\,dy = \frac{7}{19197}\left(2x^2y + \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{14x\left(2x\sqrt{x}+3\right)}{19197}$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{14x\left(2x\sqrt{x}+3\right)}{19197}, x \in [0;9] \\ 0, \qquad x \notin [0;9] \end{cases}.$$

$$F_\xi(x) = \frac{14}{19197}\int\limits_0^x \left(2x^2\sqrt{x}+3x\right)dx = \frac{14}{19197}\left(\frac{8x^3\sqrt{x}}{14} + \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^x = \frac{x^2\left(8x\sqrt{x}+21\right)}{19197}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \qquad x \le 0 \\ \dfrac{x^2\left(8x\sqrt{x}+21\right)}{19197}, \qquad 0 < x \le 9 \\ 1, \qquad x > 9 \end{cases}$$

Для случайной величины y:

$$y = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = \frac{y^2}{4}$$

$$p_\eta(y) = \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{9} p_{\xi\eta}(x,y)\,dx = \frac{7}{19197}\int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{9} (2x^2+3y)\,dx = \frac{7}{19197}\left(\frac{2x^3}{3} + 3yx\right)\Bigg|_{\frac{y^2}{4}}^{9} =$$

$$= \frac{7}{19197}\left(27y - \frac{3y^3}{4} - \frac{y^6}{96} + 486\right)$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{7}{19197}\left(27y - \dfrac{3y^3}{4} - \dfrac{y^6}{96} + 486\right), y \in [0;6] \\ 0, \qquad y \notin [0;6] \end{cases}.$$

$$F_\eta(y) = \int\limits_0^y p_\eta(y)\,dy = \frac{7}{19197}\int\limits_0^y \left(27y - \frac{3y^3}{4} - \frac{y^6}{96} + 486\right)dy =$$

$$= \frac{7}{19197}\left(\frac{27}{2}y^2 - \frac{3y^4}{16} - \frac{y^7}{672} + 486y\right)\Bigg|_0^y = \frac{7}{19197}\left(\frac{27}{2}y^2 - \frac{3y^4}{16} - \frac{y^7}{672} + 486y\right)$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{7}{19197}\left(\frac{27}{2}y^2 - \frac{3y^4}{16} - \frac{y^7}{672} + 486y\right), & 0 < y \le 6 \\ 1, & y > 6 \end{cases}$$

г) Условные функции распределения и условные плотности распределения случайной величины ξ при условии η, и случайной величины η при условии ξ. Проверьте, будут ли эти случайные величины независимыми

Условная плотность распределения

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}$$

$$p_\xi(x|y) = \frac{\frac{7}{19197}(2x^2+3y)}{\frac{7}{19197}\left(27y - \frac{3y^3}{4} - \frac{y^6}{96} + 486\right)} = \frac{2x^2+3y}{27y - \frac{3y^3}{4} - \frac{y^6}{96} + 486} \text{ при } (x,y) \in D$$

Условная плотность распределения

$$p_\eta(y|x) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}$$

$$p_\eta(y|x) = \frac{\frac{7}{19197}(2x^2+3y)}{\frac{14x\left(2x\sqrt{x}+3\right)}{19197}} = \frac{2x^2+3y}{2x\left(2x\sqrt{x}+3\right)} \text{ при } (x,y) \in D$$

Для независимых случайных величин должно выполняться равенство:

$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x) - \text{неверно}$$

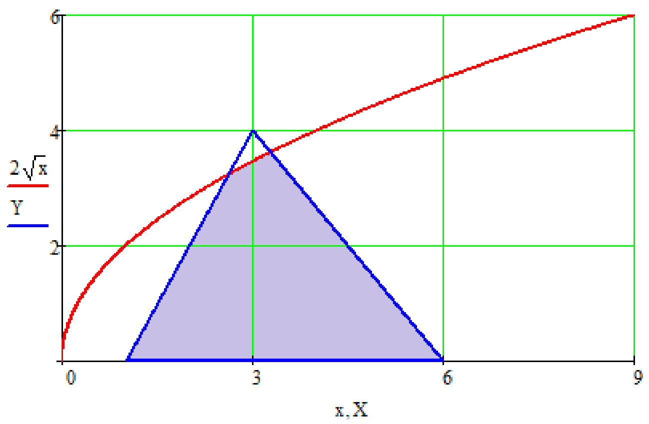
Следовательно, случайные величины зависимы.

$$F_\xi(x|y) = \frac{1}{27y - \frac{3y^3}{4} - \frac{y^6}{96} + 486}\int_0^x (2x^2+3y)\,dx = \frac{\left.\left(\frac{2x^3}{3} + 3yx\right)\right|_0^x}{27y - \frac{3y^3}{4} - \frac{y^6}{96} + 486} =$$

$$= \frac{32x(2x^2+9y)}{2592y - 72y^3 - y^6 + 46656} \text{ при } (x,y) \in D$$

$$F_\eta(y|x) = \int\limits_0^y \frac{2x^2+3y}{2x(2x\sqrt{x}+3)}dy = \frac{\left(2x^2y+\frac{3y^2}{2}\right)\Big|_0^y}{2x(2x\sqrt{x}+3)} = \frac{y(4x^2+3y)}{4x(2x\sqrt{x}+3)} \text{при } (x,y)\in D$$

д) Вычислите вероятность попадания вектора (ξ,η) в треугольник с вершинами в точках $(1;0),(3;4),(6;0)$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)



Стороны треугольника:

$$\text{от } (1;0) \text{ до } (3;4)\, ;y = 2x-2$$

$$2x-2 = 2\sqrt{x} \Longrightarrow x_1 = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$$

$$\text{от } (3;4) \text{ до } (6;0)\, ;y = -\frac{4x}{3}+8;$$

$$-\frac{4x}{3}+8 = 2\sqrt{x} \Longrightarrow x_2 = \frac{57}{8}-\frac{3\sqrt{105}}{8} \approx 3.282$$

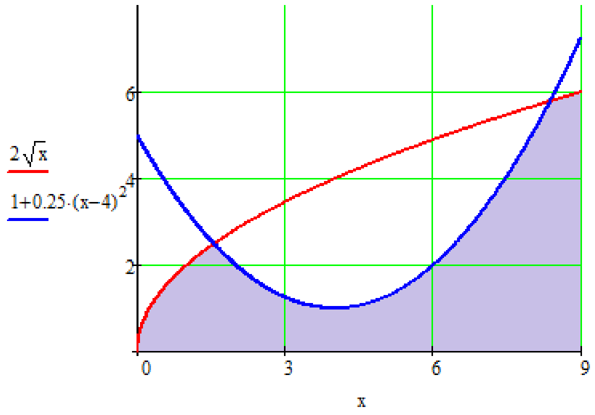
$$\frac{7}{19197}(2x^2+3y)$$

$$P = \frac{7}{19197}\int_1^{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} dx \int_0^{2x-2}(2x^2+3y)\,dy + \frac{7}{19197}\int_{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\frac{57}{8}-\frac{3\sqrt{105}}{8}} dx \int_0^{2\sqrt{x}}(2x^2+3y)\,dy +$$

$$+\frac{7}{19197}\int_{\frac{57}{8}-\frac{3\sqrt{105}}{8}}^{6} dx \int_0^{-\frac{4x}{3}+8}(2x^2+3y)\,dy$$

е) Значение функции распределения $F_\mu(z)$ новой случайной величины $\mu = \eta - 0.25(\xi - 4)^2$ в точке $z = 1$. (Записать интеграл, расставить пределы интегрирования, считать интеграл - не надо)

$$F_\mu(1) = P(\eta - 0.25(\xi - 4)^2 < 1) = P(\eta < 1 + 0.25(\xi - 4)^2)$$



$$y = 1 + \frac{(x-4)^2}{4} = 2\sqrt{x} \Longrightarrow x_1 \approx 1.55525;\ x_2 \approx 8.3765$$

$$F_\mu(1) = 1 - \frac{7}{19197} \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{1+\frac{(x-4)^2}{4}}^{2\sqrt{x}} (2x^2 + 3y)\, dy$$