Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Департамент научно-технологической политики и образования
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Волгоградский государственный аграрный университет

О.А. Заяц

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Часть 2

для подготовки
бакалавров направления «Прикладная информатика»

Учебно-методическое пособие

Волгоград
Волгоградский ГАУ
2019

ВВЕДЕНИЕ

Исследование операций – это научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами.

Управление любой системой реализуется как процесс, подчиняющийся определенным закономерностям. Их знание помогает определить условия, необходимые и достаточные для осуществления данного процесса. Для этого все параметры, характеризующие процесс и внешние условия, должны быть количественно определены. Следовательно, цель исследования операций – количественное обоснование принимаемых решений по организации управления.

При решении конкретной задачи управления применение методов исследования операций предполагает: построение экономических и математических моделей для задач принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределенности; изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действия. Ценность математических моделей для экономического анализа и оптимизации решений состоит в том, что они позволяют получить четкое представление об исследуемом объекте, охарактеризовать и количественно описать его внутреннюю структуру и внешние связи.

Исследование операций помогает лицу, принимающему решение, произвести критический анализ ситуации и в результате более обоснованно и последовательно проводить определенную политику или стратегию поведения при решении сложных, комплексных проблем.

Целью данного пособия является формирование у студентов теоретических знаний, необходимых для моделирования экономических систем и решения поставленных математических задач, а также практических навыков такого решения и анализа полученных результатов. Изучение дисциплины «Исследование операций и методы оптимизации» позволит ознакомиться с широким кругом задач организационно-экономического управления и освоить математические методы как инструмент их решения.

1. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Динамическое программирование (ДП) представляет собой математический аппарат, позволяющий быстро находить оптимальное решение, в случае, когда экономическая система не содержит факторов неопределенности, но имеется большое количество вариантов управления, приводящих к различным результатам, среди которых необходимо выбрать наилучший.

Методы динамического программирования основаны на возможности представления процесса принятия управляющих решений в виде цепочки последовательных действий или шагов, что позволяет находить оптимальное решение путем разложения исходной задачи на несколько небольших и менее сложных задач.

В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным методом решения, в динамическом программировании универсального метода не существует. Один из основных методов ДП – метод рекуррентных соотношений, который основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного американским математиком *Р. Беллманом*. Принцип состоит в том, что неважно, каким было первоначальное состояние системы и какие ранее применялись управления; на текущем шаге нужно выбрать такое управление, чтобы оно в совокупности с оптимальными управлениями на последующих шагах приводило к наилучшему результату.

1.1. Постановка задачи динамического программирования

С помощью методов динамического программирования решаются задачи календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию, распределения инвестиций между возможными направлениями их использования, составления календарных планов ремонта или замены оборудования, поиска кратчайших расстояний на транспортной сети, разработки правил управления спросом или запасами и др.

Каждая задача имеет свои особенности и требует разработки собственного подхода к ее решению. Приведем общую постановку задачи динамического программирования. Рассматривается некая система S, которая под воздействием управления переводится из состояния S_0 в состояние S_n. Предполагается, что управление можно разбить на n шагов, тогда переход из состояния S_0 в состояние S_n можно представить в виде графа (рис. 1.1), где X_k - управление на k-ом шаге (k = 1, 2,..., n), S_k - состояние системы после k-го шага управления.

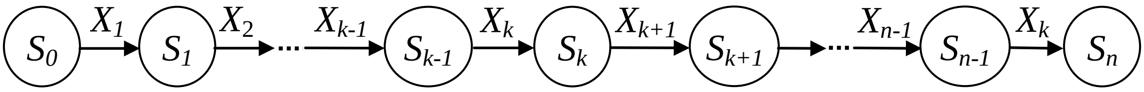

Рисунок 1.1 - Граф состояний системы при поэтапном управлении

В общем виде задачу динамического программирования можно сформулировать следующим образом: необходимо определить такое управление $X^* = (X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*)$, переводящее систему из состояния S_0 в состояние S_n, при котором целевая функция $Z = F(S_0, X^*)$ принимает максимальное (минимальное) значение. Особенности модели задачи динамического программирования следующие:

1) задача оптимизации формулируется как конечный многошаговый процесс управления;

2) выбор управления X_k на каждом шаге зависит только от состояния системы, сложившегося к этому шагу S_{k-1};

3) состояние системы S_k после каждого шага управления зависит только от предшествующего состояния системы S_{k-1} и управляющего воздействия на k-ом шаге X_k и может быть записано в виде уравнения состояния системы:

$$S_k = \varphi_k(S_{k-1}, X_k),\ k = \overline{1, n};$$

4) целевая функция является аддитивной от показателей эффективности каждого шага. Обозначим показатель эффективности каждого шага через $Z_k = f_k(S_{k-1}, X_k)$, тогда

$$Z = \sum_{k=1}^{n} Z_k = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}, X_k).$$

<u>Алгоритм решения задач динамического программирования</u>

1. Выбираем способ деления процесса управления на шаги.

2. Выбираем параметры, характеризующие состояние системы S_k, и переменные управления X_k на каждом шаге.

3. Составляем уравнения состояний.

4. Вводим целевые функции для каждого шага Z_k и суммарную целевую функцию Z.

5. Записываем уравнение Беллмана для Z_n и Z_k, $k = n-1, n-2, ..., 2, 1$.

$$Z_n(S_n) = \max_{X_k} f_n(S_{n-1}, X_n);$$

$$Z_k(S_k) = \max_{X_k} f_k(S_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}(\varphi_k(S_{k-1}, X_k)),$$

$$k = n-1, n-2, ..., 2, 1.$$

6. При движении от шага n к шагу 1 (условная оптимизация), делая предположения о возможных вариантах значений переменных, характеризующих состояние системы, и возможных вариантах управления, решаем предварительно уравнения Беллмана и получаем две последовательности функций $\{Z_k^*\}$ и $\{X_k^*\}$.

7. При движении от шага 1 к шагу n (безусловная оптимизация), используя результаты условной оптимизации, получаем оптимальное решение для конкретного начального состояния S_0:

$$Z_{\max} = Z_1^*, S_0 \Rightarrow X_1^* \to S_1 \Rightarrow X_2^* \to S_2 ... \Rightarrow X_{n-1}^* \to S_{n-1} \Rightarrow X_n^* \to S_n.$$

Стрелка «→» означает использование уравнений состояния, а стрелка «⇒» - последовательности условных оптимальных управлений.

1.2. Задача об оптимальном распределении инвестиций

Требуется распределить имеющиеся C ден. ед. среди n предприятий таким образом, чтобы после освоения инвестиций суммарная прибыль всех предприятий была максимальной. Прибыль предприятий в зависимости от количества вложенных в них средств x_i определяется функциями $f_k, k = \overline{1,n}$, представленными в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Объем инвестиций	Прибыль, ден. ед.			
$x_i, i = \overline{1,m}$	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	…	$f_n(x_i)$
x_1	$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$	…	$f_n(x_1)$
x_2	$f_1(x_2)$	$f_2(x_2)$	…	$f_n(x_2)$
...	…	…	…	…
x_m	$f_1(x_m)$	$f_2(x_m)$	…	$f_n(x_m)$

Математическая модель задачи выглядит следующим образом:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k^*) \to \max;$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_k^* = C; \\ x_k^* \in \{x_1, x_2, ..., x_m\}, \ k = \overline{1, n}; \\ x_i \geq 0, \ i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Представим эту задачу как задачу динамического программирования. В качестве системы S здесь выступает n предприятий. Состояние системы определяется количеством денежных средств, выделенных каждому предприятию - x_k^*. Управление системой заключается в распределении инвестиций в объеме C ден. ед. среди n предприятий. Разобьем процесс распределения инвестиций на несколько шагов.

Шаг 1. Выделяем инвестиции только одному предприятию (например, последнему или первому - последовательность не имеет значения).

Шаг 2. Выделяем инвестиции двум предприятиям (например, последнему и предпоследнему, первому и второму), и т.д.

Шаг *n*. Выделяем инвестиции всем n предприятиям.

Составим уравнение Беллмана для вычисления суммарной прибыли на каждом шаге:

$$Z_n = f_n(C_n),$$

где C_n – возможный объем инвестиций, который может быть выделен на шаге n (т.е. n-му предприятию);

$$Z_k = \max_{0 \leq x_k \leq C_k} (f_k(x_k) + Z_{k+1}(C_k - x_k)), \ k = n-1, n-2, ..., 2, 1.$$

где C_k - возможный объем инвестиций, который может быть выделен на k-м шаге (т.е. n-му, $n-1$-му, …, $n-k+1$-му предприятиям);

x_k - возможный объем инвестиций, который может быть выделен на k-м шаге k-му предприятию из суммы C_k, тогда для распределения на (k+1)-м шаге останется ($C_k - x_k$) ден. ед.

Оптимальное управление на k-м шаге x_k^* определяется соотношения

$$x_k^* = \arg \max_{0 \leq x_k \leq C_k} (f_k(x_k) + Z_{k+1}(C_k - x_k)), \ k = 1, 2, ..., n.$$

Пример 1. Для расширения четырех предприятий, принадлежащих одной организации, совет директоров выделяет средства в объеме 120 млн. руб. Зависимость прибыли предприятий от объема вложенных средств приведена в табл. 1.2. Найти распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальную прибыль.

Таблица 1.2

$x_i, i=\overline{1,6}$	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

Решение.

1-й этап. Условная оптимизация.

Шаг 1. k = 4. Предполагается, что все средства направляются на инвестирование одного предприятия (например, четвертого). Объем инвестиций для предприятия 4: $C_4 \in \{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120\}$. Запишем уравнение Беллмана для этого шага:

$$Z_4 = f_4(C_4),\ x_4^* = C_4. \tag{1.1}$$

В соответствии с формулой (1.1) в зависимости от начальной суммы C получаем с учетом табл. 1.2 значения Z_4 и x_4^*:

при C_4=20: $Z_4 = 11;\ x_4^* = 20;$

при C_4=40: $Z_4 = 23;\ x_4^* = 40;$

при C_4=60: $Z_4 = 30;\ x_4^* = 60;$

при C_4=80: $Z_4 = 37;\ x_4^* = 80;$

при C_4=100: $Z_4 = 51;\ x_4^* = 100;$

при C_4=120: $Z_4 = 63;\ x_4^* = 120.$

Результаты расчетов представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

C_4	x_4							Z_4	x_4^*
	0	20	40	60	80	100	120		
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
20	-	11	-	-	-	-	-	11	20
40	-	-	23	-	-	-	-	23	40
60	-	-	-	30	-	-	-	30	60
80	-	-	-	-	37	-	-	37	80
100	-	-	-	-	-	51	-	51	100
120	-	-	-	-	-	-	63	63	120

Шаг 2. k = 3. Предполагается, что все средства направляются на инвестирование двух предприятий (например, третьего и четвертого). Объем инвестиций для двух предприятий может составить: $C_3 \in \{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120\}$; при этом третьему предприятию из этой суммы можно выделить любое количество $x_3 \le C_3$. Запишем уравнение Беллмана для шага 2:

$$Z_3 = \max_{0 \le x_3 \le C_3} (\, f_3(x_3) + Z_4(C_3 - x_3)); \qquad (1.2)$$

$$x_3^* = \arg \max_{0 \le x_3 \le C_3} (\, f_3(x_3) + Z_4(C_3 - x_3)).$$

В соответствии с формулой (1.2):

при C_3=20:

$$Z_3 = \max_{0 \le x_3 \le 20} (\, f_3(x_3) + Z_4(20 - x_3)) =$$
$$= \max[\, f_3(0) + Z_4(20 - 0);\; f_3(20) + Z_4(20 - 20)] =$$
$$= \max[0 + 11; 12 + 0] = 12;$$

при C_3=40:

$$Z_3 = \max_{0 \le x_3 \le 40} (\, f_3(x_3) + Z_4(40 - x_3)) =$$
$$= \max[\, f_3(0) + Z_4(40 - 0);\; f_3(20) + Z_4(40 - 20);\; f_3(40) + Z_4(40 - 40)] =$$
$$= \max[0 + 23; 12 + 11; 21 + 0] = 23;$$

при C_3=60:

$$Z_3 = \max_{0 \le x_3 \le 60} (\, f_3(x_3) + Z_4(60 - x_3)) =$$
$$= \max[\, f_3(0) + Z_4(60 - 0);\; f_3(20) + Z_4(60 - 20);$$
$$f_3(40) + Z_4(60 - 40);\; f_3(60) + Z_4(60 - 60)] =$$
$$= \max[0 + 30; 12 + 23; 21 + 11; 27 + 0] = 35;$$

при C_3=80:

$$Z_3 = \max_{0 \le x_3 \le 80} (\, f_3(x_3) + Z_4(80 - x_3)) =$$
$$= \max[\, f_3(0) + Z_4(80 - 0);\; f_3(20) + Z_4(80 - 20);\; f_3(40) + Z_4(80 - 40);$$
$$f_3(60) + Z_4(80 - 60);\; f_3(80) + Z_4(80 - 80)] =$$
$$= \max[0 + 37; 12 + 30; 21 + 23; 27 + 11; 38 + 0] = 44;$$

при C_3=100:

$$Z_3 = \max_{0 \le x_3 \le 100} (f_3(x_3) + Z_4(100 - x_3)) =$$
$$= \max[f_3(0) + Z_4(100-0);\ f_3(20) + Z_4(100-20);\ f_3(40) + Z_4(100-40);$$
$$f_3(60) + Z_4(100-60);\ f_3(80) + Z_4(100-80);\ f_3(100) + Z_4(100-100)] =$$
$$= \max[0+51; 12+37; 21+30; 27+23; 38+11; 50+0] = 51;$$

при C_3=120:

$$Z_3 = \max_{0 \le x_3 \le 120} (f_3(x_3) + Z_4(120 - x_3)) =$$
$$= \max[f_3(0) + Z_4(120-0);\ f_3(20) + Z_4(120-20);\ f_3(40) + Z_4(120-40);$$
$$f_3(60) + Z_4(120-60);\ f_3(80) + Z_4(120-80);\ f_3(100) + Z_4(120-100);$$
$$f_3(120) + Z_4(120-120)] =$$
$$= \max[0+63; 12+51; 21+37; 27+30; 38+23; 50+11; 63+0] = 63.$$

Результаты расчетов на шаге 2 представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

C_3	x_3							Z_3	x_3^*
	0	20	40	60	80	100	120		
0	**0+0**							0	0
20	0+11	**12+0**						12	20
40	**0+23**	**12+11**	21+0					23	0/20
60	0+30	**12+23**	21+11	27+0				35	20
80	0+37	12+30	**21+23**	27+11	38+0			44	**40**
100	**0+51**	12+37	**21+30**	27+23	38+11	50+0		51	0/40
120	**0+63**	**12+51**	21+37	27+30	38+23	50+11	**63+0**	63	0/20/120

Для каждого значения (20, 40, 60, 80, 100, 120) начальной суммы *C* распределяемых средств в таблице предусмотрена отдельная строка, а для каждого возможного значения x_k (0, 20, 40, 60, 80, 100, 120) распределяемой суммы - столбец. Некоторые клетки таблицы останутся незаполненными, так как соответствуют недопустимым сочетаниям *C* и x_k. Такой, например, будет клетка, отвечающая строке C_3=40 и столбцу x_3=80, так как при наличии 40 млн. руб. естественно отпадает вариант, при котором одному из предприятий выделяется 80 млн. руб.

Каждая клетка таблицы 1.4 содержит значение суммы $f_3(x_3) + Z_4(C_3 - x_3)$. Первое слагаемое берется из условий задачи (табл. 1.2), второе – из табл. 1.3. Так, например, при распределении суммы C_3=80 млн. руб. одним из вариантов может быть следующий: третьему предприятию выделяется 60 млн. руб. (x_3=60), тогда четвертому – $80-60=20$ млн. руб. При таком распределении на третьем предприятии будет обеспечена прибыль в 27 млн. руб. (табл. 1.2), на четвертом - 11 млн. руб. (табл. 1.3). Общая прибыль составит (27+11) млн. руб., что и записано в соответствующей клетке табл. 1.4.

В двух последних столбцах таблицы проставлены максимальная по строке прибыль (в столбце Z_3) и соответствующая ей оптимальная сумма средств, выделенная третьему предприятию (столбец x_3^*). Так, при начальной сумме C_3=100 млн. руб. максимальная прибыль составит 51 млн. руб. и это достигается выделением третьему предприятию 40, а четвертому - $100-40=60$ млн. руб. или всех 100 млн. руб. четвертому предприятию.

Шаг 3. k=2. Инвестиции распределяем между тремя предприятиями (например, между вторым, третьим и четвертым). Объем инвестиций для трех предприятий может составить: $C_2 \in \{0, 20, 40, 60, 80, 100, 120\}$; при этом второму предприятию из этой суммы можно выделить любое количество $x_2 \le C_2$. Запишем уравнение Беллмана для шага 3:

$$Z_2 = \max_{0 \le x_2 \le C_2} (f_2(x_2) + Z_3(C_2 - x_2)); \tag{1.3}$$

$$x_2^* = \arg\max_{0 \le x_2 \le C_2} (f_2(x_2) + Z_3(C_2 - x_2)).$$

Найдем значения функции (1.3) для всех допустимых комбинаций C_2 и x_2:

при C_2=20:

$$Z_2 = \max_{0 \le x_2 \le 20} (f_2(x_2) + Z_3(20 - x_2)) =$$
$$= \max[f_2(0) + Z_3(20-0);\ f_2(20) + Z_3(20-20)] =$$
$$= \max[0+12; 10+0] = 12;$$

при C_2=40:

$$Z_2 = \max_{0 \le x_2 \le 40} (f_2(x_2) + Z_3(40 - x_2)) =$$
$$= \max[f_2(0) + Z_3(40-0);\ f_2(20) + Z_3(40-20);\ f_2(40) + Z_3(40-40)] =$$
$$= \max[0+23; 10+12; 20+0] = 23;$$

при C_2=60:

$$Z_2 = \max_{0 \le x_2 \le 60} (f_2(x_2) + Z_3(60 - x_2)) =$$
$$= \max[f_2(0) + Z_3(60-0);\ f_2(20) + Z_3(60-20);$$
$$f_2(40) + Z_3(60-40);\ f_2(60) + Z_3(60-60)] =$$
$$= \max[0+35; 10+23; 20+12; 28+0] = 35;$$

при C_2=80:

$$Z_2 = \max_{0 \le x_2 \le 80} (f_2(x_2) + Z_3(80 - x_2)) =$$
$$= \max[f_2(0) + Z_3(80-0);\ f_2(20) + Z_3(80-20);\ f_2(40) + Z_3(80-40);$$
$$f_2(60) + Z_3(80-60);\ f_2(80) + Z_3(80-80)] =$$
$$= \max[0+44; 10+35; 20+23; 28+12; 40+0] = 45;$$

при C_2=100:

$$Z_2 = \max_{0 \le x_2 \le 100} (f_2(x_2) + Z_3(100 - x_2)) =$$
$$= \max[f_2(0) + Z_3(100-0);\ f_2(20) + Z_3(100-20);\ f_2(40) + Z_3(100-40);$$
$$f_2(60) + Z_3(100-60);\ f_2(80) + Z_3(100-80);\ f_2(100) + Z_3(100-100)] =$$
$$= \max[0+51; 10+44; 20+35; 28+23; 40+12; 48+0] = 55;$$

при C_2=120:

$$Z_2 = \max_{0 \le x_2 \le 120} (f_2(x_2) + Z_3(120 - x_2)) =$$
$$= \max[f_2(0) + Z_3(120-0);\ f_2(20) + Z_3(120-20);\ f_2(40) + Z_3(120-40);$$
$$f_2(60) + Z_3(120-60);\ f_2(80) + Z_3(120-80);$$
$$f_2(100) + Z_3(120-100);\ f_2(120) + Z_3(120-120)] =$$
$$= \max[0+63; 10+51; 20+44; 28+35; 40+23; 48+12; 62+0] = 64.$$

Результаты расчетов на шаге 3 представлены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

C_2	x_2							Z_2	x_2^*
	0	20	40	60	80	100	120		
0	**0+0**							0	0
20	**0+12**	10+0						12	0
40	**0+23**	10+12	20+0					23	0
60	**0+35**	10+23	20+12	28+0				35	0
80	0+44	**10+35**	20+23	28+12	40+0			45	20
100	0+51	10+44	**20+35**	28+23	40+12	48+0		55	40
120	0+63	10+51	**20+44**	28+35	40+23	48+12	62+0	64	**40**

Каждая клетка таблицы содержит значение суммы $f_2(x_2)+Z_3(C_2-x_2)$. Первое слагаемое берется из условий задачи (табл. 1.2), второе – из табл. 1.4. В двух последних столбцах таблицы проставлены максимальная по строке прибыль (в столбце Z_2) и соответствующая ей оптимальная сумма средств, выделенная второму предприятию (столбец x_2^*). Так, при начальной сумме C_2=80 млн. руб. максимальная прибыль составляет 45 млн. руб. и это достигается выделением второму предприятию 20, а третьему и четвертому - $80-20=60$ млн. руб.

Шаг 4. k=1. Инвестиции распределяем между всеми предприятиями. Между ними нужно распределить все имеющиеся денежные средства, поэтому C_1=120, при этом первому предприятию из этой суммы можно выделить любое количество: $x_1 \le C_1$.

Уравнение Беллмана для шага 4 запишется следующим образом:

$$Z_1 = \max_{0\le x_1\le C_1} (f_1(x_1)+Z_2(C_1-x_1)); \qquad (1.4)$$

$$x_1^* = \arg\max_{0\le x_1\le C_1} (f_1(x_1)+Z_2(C_1-x_1)).$$

Найдем значения функции (1.4) для C_1 = 120:

$$Z_1 = \max_{0\le x_1\le 120} (f_1(x_1)+Z_2(120-x_1)) =$$

$$= \max[f_1(0)+Z_2(120-0); f_1(20)+Z_2(120-20); f_1(40)+Z_2(120-40);$$
$$f_1(60)+Z_2(120-60); f_1(80)+Z_2(120-80);$$
$$f_1(100)+Z_2(120-100); f_1(120)+Z_2(120-120)] =$$
$$= \max[0+64; 8+55; 16+45; 25+35; 36+23; 44+12; 62+0] = 64.$$

Результаты расчетов на шаге 4 (для всех возможных значений C_1) представлены в табл. 1.6.

Таблица 1.6

C_1	x_1							Z_1	x_1^*
	0	20	40	60	80	100	120		
0	0+0							0	0
20	0+12	8+0						12	0
40	0+23	8+12	16+0					23	0
60	0+35	8+23	16+12	25+0				35	0
80	0+45	8+35	16+23	25+12	36+0			45	0
100	0+55	8+45	16+35	25+23	36+12	44+0		55	0
120	**0+64**	8+55	16+45	25+35	36+23	44+12	62+0	64	0

2-й этап. Безусловная оптимизация.

Шаг 1. По данным табл. 1.6 максимальная прибыль при распределении 120 млн. руб. между четырьмя предприятиями составит Z_1=64 млн. руб., при этом первому предприятию нужно выделить $x_1^* = 0$ млн. руб.

Шаг 2. Определим величину оставшихся денежных средств, приходящихся на долю второго, третьего и четвертого предприятий:

$$C_2 = C_1 - x_1^* = 120 - 0 = 120 \text{ млн. руб.}$$

По данным табл. 1.5 находим, что при C_2 = 120: Z_2 = 64, x_2* = 40. Это означает, что второму предприятию следует выделить 40 млн. руб.

Шаг 3. Определим величину оставшихся денежных средств, приходящихся на долю третьего и четвертого предприятий:

$$C_3 = C_2 - x_2^* = 120 - 40 = 80 \text{ млн. руб.}$$

По данным табл. 1.4 находим, что при C_3 = 80: Z_3 = 44, x_3* = 40. Это означает, что третьему предприятию следует выделить 40 млн. руб. При этом максимальная прибыль второго предприятия составит:

$$Z_2 - Z_3 = 64 - 44 = 20 = f_2(x_2^*) = f_2(40) \text{ млн. руб.}$$

Шаг 4. Определим величину оставшихся денежных средств, приходящихся на долю четвертого предприятия:

$$C_4 = C_3 - x_3^* = 80 - 40 = 40 \text{ млн. руб.}$$

По данным табл. 1.3 находим, что при C_4 = 40: Z_4 = 23, x_4* = 40.

Максимальная прибыль третьего предприятия составит:

$$Z_3 - Z_4 = 44 - 23 = 21 = f_3(x_3^*) = f_3(40) \text{ млн. руб.,}$$

а четвертого предприятия соответственно:

$$Z_4 = 23 = f_4(x_4^*) = f_4(40) \text{ млн. руб.}$$

Оптимальная стратегия распределения инвестиций: $\bar{x}^* = (0, 40, 40, 40)$ дает возможность получить максимальную суммарную прибыль:

$$Z^* = f_1(0) + f_2(40) + f_3(40) + f_4(40) = 0 + 20 + 21 + 23 = 64 \text{ млн. руб.}$$

Таким образом, максимальная прибыль на четырех предприятиях при распределении между ними 120 млн. руб. составит 64 млн. руб.

и будет получена, если первому предприятию средств не выделять, а второму, третьему и четвертому выделить по 40 млн. руб.

В результате условной оптимизации получаются две последовательности функций: $\{Z_k\}$ и $\{x_k^*\}$ (табл. 1.7). Используя эти последовательности можно найти решение задачи динамического программирования при данных *n* и *C*.

Таблица 1.7

C	x_4^*	Z_4	x_3^*	Z_3	x_2^*	Z_2	x_1^*	Z_1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	20	11	20	12	0	12	0	12
40	40	23	0/20	23	0	23	0	23
60	60	30	20	35	0	35	0	35
80	80	37	40	44	20	45	0	45
100	100	51	0/40	51	40	55	0	55
120	120	63	0/20/120	63	40	64	0	64

Предположим, нужно распределить оптимально между тремя предприятиями 100 млн. руб.

Из табл. 1.7 находим Z_2 = 55 млн. руб., прирост продукции на такую сумму может быть получен при $x_2^*(100) = 40$, т. е. если второму предприятию выделить 40 млн. руб., а двум другим $100 - 40 = 60$ млн. руб. Эти средства при оптимальном их распределении между двумя другими предприятиями обеспечат прирост выпуска продукции на сумму Z_3 = 35 млн. руб. Но это возможно лишь в случае, если $x_3^* = 20$, т. е. если третьему предприятию будет выделено 20 млн. руб. Из табл. 1.7 видно, что оставшиеся $60 - 20 = 40$ млн. руб. следует выделить четвертому предприятию, так как Z_4 = 23 при $x_4^* = 40$.

Таким образом, оптимальная стратегия распределения инвестиций в размере 100 млн. руб. дает возможность получить максимальную суммарную прибыль: $Z^* = 20 + 12 + 23 = 55$ млн. руб.

1.3. Задача выбора оптимальной стратегии обновления оборудования

К началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет некоторое количество лет. С течением времени из-за физического и морального износа растут затраты на обслуживание и ремонт оборудования, при этом снижается его производительность и ликвидационная стоимость. Задача заключается в определении оптимальных сроков замены оборудования в течение некоторого периода времени. Критерием оптимальности может быть либо максимум дохода от эксплуатации, либо минимум затрат на эксплуатацию оборудования в течение рассматриваемого периода.

Введем следующие обозначения:

n - продолжительность периода, для которого определяется стратегия обновления оборудования ($k = \overline{1,n}$);

t_k - возраст оборудования к началу k- го года;

t_0 - возраст оборудования к началу рассматриваемого периода ($t_0=t_1$);

$d(t_k)$ - доход, получаемый от эксплуатации оборудования через t_k лет;

$s(t_k)$ - остаточная стоимость оборудования через t_k лет;

$p(k)$ - стоимость нового оборудования в k-м году.

Представим задачу об определении оптимальной стратегии обновления оборудования как задачу динамического программирования. В качестве системы здесь выступает оборудование. Состояние системы определяется возрастом оборудования в году $k - t_k$. Управление заключается в принятии в начале каждого года решения либо о сохранении, либо о замене оборудования.

Пусть $x^{с}$ – решение о сохранении оборудования, $x^{з}$ – решение о замене оборудования. На первом этапе решения задачи, при движении от года n к году 1, для каждого допустимого состояния оборудования $t_k \in \{1, 2, ..., t_0 + k - 1\}$ находим условно-оптимальное управление x_k^*, для определения которого используем уравнение Беллмана:

$$Z_n(t_n) = \max \begin{cases} d(t_n) \text{ при } x^{c}; \\ s(t_n) - p(n) + d(0) \text{ при } x^{з}; \end{cases}$$

$$Z_k(t_k) = \max \begin{cases} d(t_k) + Z_{k+1}(t_k + 1) \text{ при } x^{c}; \\ s(t_k) - p(k) + d(0) + Z_{k+1}(1) \text{ при } x^{з}, \end{cases}$$

$$k = n-1, n-2, ..., 2, 1.$$

где $d(0)$ - доход, получаемый от эксплуатации нового оборудования;

$Z_n(t_n)$ – максимально возможный доход за последний год;

$Z_k(t_k)$ – максимально возможный доход за последние n-k+1 лет.

На втором этапе при движении от года 1 к году n, учитывая возраст оборудования к началу рассматриваемого периода t_0, из условно-оптимальных управлений $\{x_k*\}$ составляем оптимальную стратегию обновления оборудования:

$$t_1 = t_0 \Rightarrow x_1^* \to t_2 \Rightarrow x_2^* \to t_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_{n-1}^* \to t_n.$$

Пример 2. К началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование. Определить оптимальную стратегию обновления оборудования в течение шести лет, используя начальные условия, представленные в табл. 1.8.

Таблица 1.8

t	0	1	2	3	4	5	6
$d(t)$	16	15	14	12	10	8	6
$s(t)$	19	17	14	10	7	4	2
$p(t)$	-	20	21	22	23	24	25

Решение.

1-й этап. Условная оптимизация.

Шаг 1. k = 6. Для шага 1 возможные состояния системы $t_6 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_6(t_6) = \max \begin{cases} d(t_6) \text{ при } x^c; \\ s(t_6) - p(6) + d(0) \text{ при } x^з. \end{cases} \qquad (1.5)$$

В соответствии с формулой (1.5) определим максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t_6 за последний (шестой) год:

$$t_6 = 1:\ Z_6(1) = \max \begin{cases} d(1) \text{ при } x^c \\ s(1) - p(6) + d(0) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 15 \text{ при } x^c \\ 17 - 25 + 16 \text{ при } x^з \end{cases} = \max \begin{cases} 15 \\ 8 \end{cases} = 15; \quad x_6^* = x^c.$$

$$t_6 = 2:\ Z_6(2) = \max \begin{cases} d(2) \text{ при } x^c \\ s(2) - p(6) + d(0) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 14 \text{ при } x^c \\ 14 - 25 + 16 \text{ при } x^з \end{cases} = \max \begin{cases} 14 \\ 5 \end{cases} = 14; \quad x_6^* = x^c.$$

$$t_6 = 3: \; Z_6(3) = \max \begin{cases} d(3) \text{ при } x^c \\ s(3) - p(6) + d(0) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 12 \text{ при } x^c \\ 10 - 25 + 16 \text{ при } x^з \end{cases} = \max \begin{cases} 12 \\ 1 \end{cases} = 12; \quad x_6^* = x^c.$$

$$t_6 = 4: \; Z_6(4) = \max \begin{cases} d(4) \text{ при } x^c \\ s(4) - p(6) + d(0) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 10 \text{ при } x^c \\ 7 - 25 + 16 \text{ при } x^з \end{cases} = \max \begin{cases} 10 \\ -2 \end{cases} = 10; \quad x_6^* = x^c.$$

$$t_6 = 5: \; Z_6(5) = \max \begin{cases} d(5) \text{ при } x^c \\ s(5) - p(6) + d(0) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 8 \text{ при } x^c \\ 4 - 25 + 16 \text{ при } x^з \end{cases} = \max \begin{cases} 8 \\ -5 \end{cases} = 8; \quad x_6^* = x^c.$$

Шаг 2. k = 5. Для шага 2 возможные состояния системы $t_5 \in \{1, 2, 3, 4\}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_5(t_5) = \max \begin{cases} d(t_5) + Z_6(t_5 + 1) \text{ при } x^c; \\ s(t_5) - p(5) + d(0) + Z_6(1) \text{ при } x^з. \end{cases} \tag{1.6}$$

В соответствии с формулой (1.6) определим максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t_5 за последние два года:

$$t_5 = 1: \; Z_5(1) = \max \begin{cases} d(1) + Z_6(2) \text{ при } x^c \\ s(1) - p(5) + d(0) + Z_6(1) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 15 + 14 \text{ при } x^c \\ 17 - 24 + 16 + 15 \text{ при } x^з \end{cases} = \max \begin{cases} 29 \\ 24 \end{cases} = 29; \quad x_5^* = x^c.$$

$$t_5 = 2: \; Z_5(2) = \max \begin{cases} d(2) + Z_6(3) \text{ при } x^c \\ s(2) - p(5) + d(0) + Z_6(1) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 14 + 12 \text{ при } x^c \\ 14 - 24 + 16 + 15 \text{ при } x^з \end{cases} = \max \begin{cases} 26 \\ 21 \end{cases} = 26; \quad x_5^* = x^c.$$

$$t_5 = 3: \; Z_5(3) = \max\begin{cases} d(3) + Z_6(4) \text{ при } x^c \\ s(3) - p(5) + d(0) + Z_6(1) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 12 + 10 \text{ при } x^c \\ 10 - 24 + 16 + 15 \text{ при } x^з \end{cases} = \max\begin{cases} 22 \\ 17 \end{cases} = 22; \quad x_5^* = x^c.$$

$$t_5 = 4: \; Z_5(4) = \max\begin{cases} d(4) + Z_6(5) \text{ при } x^c \\ s(4) - p(5) + d(0) + Z_6(1) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 10 + 8 \text{ при } x^c \\ 7 - 24 + 16 + 15 \text{ при } x^з \end{cases} = \max\begin{cases} 18 \\ 14 \end{cases} = 18; \quad x_5^* = x^c.$$

Шаг 3. k = 4. Для шага 3 возможные состояния системы $t_4 \in \{1, 2, 3\}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_4(t_4) = \max\begin{cases} d(t_4) + Z_5(t_4 + 1) \text{ при } x^c; \\ s(t_4) - p(4) + d(0) + Z_5(1) \text{ при } x^з. \end{cases} \quad (1.7)$$

В соответствии с формулой (1.7) определим максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t_4 за последние три года:

$$t_4 = 1: \; Z_4(1) = \max\begin{cases} d(1) + Z_5(2) \text{ при } x^c \\ s(1) - p(4) + d(0) + Z_5(1) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 15 + 26 \text{ при } x^c \\ 17 - 23 + 16 + 29 \text{ при } x^з \end{cases} = \max\begin{cases} 41 \\ 39 \end{cases} = 41; \quad x_4^* = x^c.$$

$$t_4 = 2: \; Z_4(2) = \max\begin{cases} d(2) + Z_5(3) \text{ при } x^c \\ s(2) - p(4) + d(0) + Z_5(1) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 14 + 22 \text{ при } x^c \\ 14 - 23 + 16 + 29 \text{ при } x^з \end{cases} = \max\begin{cases} 36 \\ 36 \end{cases} = 36; \quad x_4^* = x^c / x^з.$$

$$t_4 = 3: \; Z_4(3) = \max\begin{cases} d(3) + Z_5(4) \text{ при } x^c \\ s(3) - p(4) + d(0) + Z_5(1) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 12 + 18 \text{ при } x^c \\ 10 - 23 + 16 + 29 \text{ при } x^з \end{cases} = \max\begin{cases} 30 \\ 32 \end{cases} = 32; \quad x_4^* = x^з.$$

Шаг 4. k = 3. Для шага 4 возможные состояния системы $t_3 \in \{1, 2\}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_3(t_3) = \max \begin{cases} d(t_3) + Z_4(t_3 + 1) \text{ при } x^c; \\ s(t_3) - p(3) + d(0) + Z_4(1) \text{ при } x^з. \end{cases} \quad (1.8)$$

В соответствии с формулой (1.8) определим максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t_3 за последние 4 года:

$$t_3 = 1: \; Z_3(1) = \max \begin{cases} d(1) + Z_4(2) \text{ при } x^c \\ s(1) - p(3) + d(0) + Z_4(1) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 15 + 36 \text{ при } x^c \\ 17 - 22 + 16 + 41 \text{ при } x^з \end{cases} = \max \begin{cases} 51 \\ 52 \end{cases} = 52; \quad x_3^* = x^з.$$

$$t_3 = 2: \; Z_3(2) = \max \begin{cases} d(2) + Z_4(3) \text{ при } x^c \\ s(2) - p(3) + d(0) + Z_4(1) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 14 + 32 \text{ при } x^c \\ 14 - 22 + 16 + 41 \text{ при } x^з \end{cases} = \max \begin{cases} 46 \\ 49 \end{cases} = 49; \quad x_3^* = x^з.$$

Шаг 5. k = 2. Для шага 5 возможные состояния системы $t_2 \in \{1\}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_2(t_2) = \max \begin{cases} d(t_2) + Z_3(t_2 + 1) \text{ при } x^c; \\ s(t_2) - p(2) + d(0) + Z_3(1) \text{ при } x^з. \end{cases} \quad (1.9)$$

В соответствии с формулой (1.9) определим максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t_2 за последние пять лет:

$$t_2 = 1: \; Z_2(1) = \max \begin{cases} d(1) + Z_3(2) \text{ при } x^c \\ s(1) - p(2) + d(0) + Z_3(1) \text{ при } x^з \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 15 + 49 \text{ при } x^c \\ 16 - 21 + 16 + 52 \text{ при } x^з \end{cases} = \max \begin{cases} 64 \\ 64 \end{cases} = 64; \quad x_2^* = x^c.$$

Шаг 6. k = 1. Для шага 6 возможные состояния системы $t_1 \in \{0\}$, а уравнение Беллмана имеет вид:

$$Z_1(t_1) = \max \begin{cases} d(t_1) + Z_2(t_1 + 1) \text{ при } x^c; \\ s(t_1) - p(1) + d(0) + Z_2(1) \text{ при } x^з. \end{cases} \quad (1.10)$$

В соответствии с формулой (1.10) определим максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t_1 за последние шесть лет:

$$t_1 = 0: \; Z_1(0) = d(0) + Z_2(1) = 16 + 64 = 80; \quad x_1^* = x^c.$$

На этом шаге не рассматривается случай замены оборудования, так как установлено новое оборудование и его менять не целесообразно.

Результаты условной оптимизации сведены в табл. 1.9.

Таблица 1.9

t_6	Z_6	x_6*	t_5	Z_5	x_5*	t_4	Z_4	x_4*	t_3	Z_3	x_3*	t_2	Z_2	x_2*
1	15	x^c	1	29	x^c	1	41	x^c	1	52	$x^з$	1	64	x^c
2	14	x^c	2	26	x^c	2	36	$x^c/x^з$	2	49	$x^з$	-	-	-
3	12	x^c	3	22	x^c	3	32	x^c	-	-	-	-	-	-
4	10	x^c	4	18	x^c	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	8	x^c	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

2-й этап. Безусловная оптимизация.

Шаг 1. k = 1. t_1 =0. Максимальный доход от эксплуатации оборудования за шесть лет составит:

$$Z_1(0) = d(0) + Z_2(1) = 16 + 64 = 80; \quad x_1^* = x^c.$$

К началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование t_1=t_0=0, его целесообразно сохранить, тогда к началу второго года возраст оборудования будет равен одному году, т.е. t_2=1.

Шаг 2. k = 2. t_2 =1. Из табл. 1.9 следует, что нужно сохранить оборудование, так как $x_2^* = x^c$, тогда к началу третьего года его возраст составит два года, т.е. t_3=2.

Шаг 3. k = 3. t_3 =2. Оборудование следует заменить, так как $x_3^* = x^з$ (табл. 1.9). К началу четвертого года возраст оборудования составит один год, т.е. t_4 =1.

Шаг 4. k = 4. t_4 =1. Оборудование нужно сохранить, так как $x_4^* = x^c$. К началу пятого года возраст оборудования составит два года, т.е. t_5 =2.

Шаг 5. k = 5. t_5 = 2. Оборудование следует сохранить, так как $x_5^* = x^c$. К началу шестого года возраст оборудования составит три года, т.е. t_6 =3.

Шаг 6. k = 6. t_6 =3. Оборудование сохраняем, так как $x_6^* = x^c$.

Оптимальная стратегия обновления оборудования в течение шести лет: $\overline{x}^* = (x^c, x^c, x^з, x^c, x^c, x^c)$ дает возможность получить максимальный доход:

$$Z^* = d(0) + d(1) + (s(2) - p(3) + d(0)) + d(1) + d(2) + d(3) =$$
$$= 16 + 15 + (14 - 22 + 16) + 15 + 14 + 12 = 80 \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, для получения максимального дохода от использования оборудования его необходимо заменить новым в начале 3-го года.

Пример 3. Разработать оптимальную стратегию относительно оборудования возраста не старше 10 лет при следующих условиях: стоимость $v(t)$ продукции, произведенной с использованием оборудования за год, и расходы $r(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования, заданы в табл. 1.10; ликвидационная стоимость оборудования не зависит от его возраста и равна 4 ден. ед.; цена единицы нового оборудования со временем не меняется и равна 13 ден. ед.

Таблица 1.10

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v(t)$	27	26	26	25	24	23	23	22	21	21	20
$r(t)$	15	15	16	16	16	17	18	18	19	20	20
$d(t)$	12	11	10	9	8	6	5	4	2	1	0

Решение.

1-й этап. Условная оптимизация.

Запишем уравнения Беллмана для числовых данных нашего примера ($s(t)=4,\ p(t)=13,\ d(0)=27-15=12$):

$$Z_n(t_n)=\max\begin{cases} d(t_n) \text{ при } x^c \\ 4-13+12 \text{ при } x^з \end{cases}=\max\begin{cases} d(t_n) \text{ при } x^c; \\ 3 \text{ при } x^з \quad ; \end{cases} \tag{1.11}$$

$$Z_k(t_k)=\max\begin{cases} d(t_k)+Z_{k+1}(t_k+1) \text{ при } x^c; \\ 3+Z_{k+1}(1) \text{ при } x^з, \end{cases} \tag{1.12}$$

$$k=n-1,\ n-2,\ ...,\ 2,\ 1.$$

По формуле $d(t)=v(t)-r(t)$ определим доход, получаемый от эксплуатации оборудования через t лет (табл. 1.11).

Таблица 1.11

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d(t)$	12	11	10	9	8	6	5	4	2	1	0

Используя формулы (1.11) и (1.12), будем последовательно вычислять значения максимального дохода $Z_k(t)$ при различных k и t и полученные величины записывать в таблицу 1.12.

Первую строку таблицы будем заполнять, придавая параметру t в формуле (1.11) значения 0, 1, …, 10 и пользуясь данными табл. 1.10

и 1.11. Определим максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t за последний (десятый) год:

$$t=0:\ Z_{10}(0)=\max\begin{cases} d(0) \text{ при } x^c \\ 3 \text{ при } x^з \end{cases}=\max\begin{cases} 12 \\ 3 \end{cases}=12;\quad x_{10}^*=x^c,$$

$$t=1:\ Z_{10}(1)=\max\begin{cases} d(1) \text{ при } x^c \\ 3 \text{ при } x^з \end{cases}=\max\begin{cases} 11 \\ 3 \end{cases}=11;\quad x_{10}^*=x^c,$$

$$\ldots$$

$$t=7:\ Z_{10}(7)=\max\begin{cases} d(7) \text{ при } x^c \\ 3 \text{ при } x^з \end{cases}=\max\begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}=4;\quad x_{10}^*=x^c,$$

$$t=8:\ Z_{10}(8)=\max\begin{cases} d(8) \text{ при } x^c \\ 3 \text{ при } x^з \end{cases}=\max\begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}=3;\quad x_{10}^*=x^з,$$

$$t=9:\ Z_{10}(9)=\max\begin{cases} d(9) \text{ при } x^c \\ 3 \text{ при } x^з \end{cases}=\max\begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}=3;\quad x_{10}^*=x^з,$$

$$t=10:\ Z_{10}(10)=\max\begin{cases} d(10) \text{ при } x^c \\ 3 \text{ при } x^з \end{cases}=\max\begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}=3;\quad x_{10}^*=x^з.$$

Из табл. 1.11 видно, что $d(t)$ с ростом t убывает, поэтому, если при t=8 $d(t)$=2 < 3, то при t > 8 тем более $d(t)$ < 3. Так что при t > 8 оптимальной будет стратегия замены оборудования.

Таблица 1.12

Шаг	$Z_k(t)$	t										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$Z_{10}(t)$	12	11	10	9	8	6	5	4	3	3	3
2	$Z_9(t)$	23	21	19	17	14	14	14	14	14	14	14
3	$Z_8(t)$	33	30	27	24	24	24	24	24	24	24	24
4	$Z_7(t)$	42	38	34	33	33	33	33	33	33	33	33
5	$Z_6(t)$	50	45	43	42	41	41	41	41	41	41	41
6	$Z_5(t)$	57	54	52	50	49	48	48	48	48	48	48
7	$Z_4(t)$	66	63	60	58	57	57	57	57	57	57	57
8	$Z_3(t)$	75	71	68	66	66	66	66	66	66	66	66
9	$Z_2(t)$	83	79	76	75	74	74	74	74	74	74	74
10	$Z_1(t)$	91	87	85	83	82	82	82	82	82	82	82

Чтобы в таблице 1.12 различать, в результате какой стратегии получается то или иное значение максимального дохода, разграничим жирной чертой элементы таблицы, соответствующие различным стратегиям.

Вторую строку таблицы 1.12 заполняем на основе формулы (1.12) или

$$Z_9(t) = \max\begin{cases} d(t) + Z_{10}(t+1) \text{ при } x^c; \\ 3 + Z_{10}(1) \text{ при } x^з, \end{cases} = \max\begin{cases} d(t) + Z_{10}(t+1) \text{ при } x^c; \\ 14 \text{ при } x^з, \end{cases}$$

полученной из (1.12) для двухлетнего периода (n=2). При этом учтено, что $Z_{10}(1) = 11$ (см. первую строку табл. 1.12).

Придавая параметру t значения 0, 1, …, 10, последовательно находим

$$t = 0: \quad Z_9(0) = \max\begin{cases} d(0) + Z_{10}(1) \text{ при } x^c; \\ 14 \text{ при } x^з; \end{cases} = \max\begin{cases} 12 + 11 \text{ при } x^c; \\ 14 \text{ при } x^з; \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 23; \\ 14; \end{cases} = 23; \quad x_9^* = x^c,$$

$$t = 1: \quad Z_9(1) = \max\begin{cases} d(1) + Z_{10}(2) \text{ при } x^c; \\ 14 \text{ при } x^з; \end{cases} = \max\begin{cases} 11 + 10 \text{ при } x^c; \\ 14 \text{ при } x^з; \end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases} 21; \\ 14; \end{cases} = 21; \quad x_9^* = x^c \quad \text{и т. д.}$$

При этом значения $d(t)$ берем из табл. 1.11, а значения $Z_{10}(t+1)$ – из первой строки таблицы 1.12.

При t=4 получаем

$$Z_9(4) = \max\begin{cases} d(4) + Z_{10}(5) \text{ при } x^c; \\ 14 \text{ при } x^з; \end{cases} = \max\begin{cases} 8 + 6 \text{ при } x^c; \\ 14 \text{ при } x^з; \end{cases} = \max\begin{cases} 14; \\ 14. \end{cases}$$

Здесь обе стратегии обеспечивают одинаковый доход в 14 ден. ед. Выбрать целесообразней все же стратегию сохранения, так как имеющееся оборудование нам хорошо известно и мы к нему привыкли.

Поскольку $d(t)$ и $Z_{10}(t+1)$ с ростом t убывают, что видно из табл. 1.11 и 1.12 (да и экономически понятно: чем старее оборудование, тем меньший доход оно дает), то при $t > 5$ оптимальной будет стратегия замены оборудования и $Z_9(t) = 14$.

Третья строка табл. 1.12, отвечающая трехлетнему периоду (n=3), заполняется на основе формулы

$$Z_8(t) = \max \begin{cases} d(t) + Z_9(t+1) \text{ при } x^c; \\ 3 + Z_9(1) \text{ при } x^з, \end{cases} = \max \begin{cases} d(t) + Z_{10}(t+1) \text{ при } x^c; \\ 24 \text{ при } x^з, \end{cases}$$

при этом значения $Z_9(t+1)$ следует брать из второй строки табл. 1.12.

Продолжая вычисления описанным способом, мы постепенно заполним всю табл. 1.12. Данные этой таблицы можно использовать для решения ряда задач.

Предположим, например, что в начале десятилетнего периода имеется оборудование четырехлетнего возраста и требуется выработать оптимальную стратегию в отношении этого оборудования.

В табл. 1.12 на пересечении строки n=10 и столбца t=4 стоит значение максимального дохода, равное 82. Найдем оптимальную стратегию, обеспечивающую этот доход. Значение $Z_1(4)$=82 записано слева от жирной линии, в области «стратегий сохранения». Это означает, что для достижения в плановом периоде из 10 лет максимального дохода в 82 ден. ед. надо в первом году оборудование сохранить.

В течение первого года оборудование постареет на один год, так что к концу года его возраст составит 4+1=5 лет. Теперь надо действовать оптимально в оставшемся периоде из девяти лет с оборудованием возраста 5 лет. На пересечении строки n=9 и столбца t=5 записано значение $Z_2(5)$=74, расположенное справа от жирной линии, т. е. в области «стратегий замен». Заменив оборудование и проработав на нем очередной год, за 8 лет до конца планового периода будем иметь оборудование возраста 1 год.

Далее последовательно находим: $Z_3(1)$=71, $Z_4(2)$=60, $Z_5(3)$=50, $Z_6(4)$=41 в области «стратегий сохранения», что означает, что в третьем, четвертом, пятом и шестом годах имеющееся оборудование надо сохранять. Так как $Z_7(5)$=33 находится в области «стратегий замен», на седьмом году оборудование надо заменить новым. Далее находим $Z_8(1)$=30, $Z_9(2)$=19 и $Z_{10}(3)$=9, расположенные в области «стратегий сохранения». Значит, на восьмом, девятом и десятом годах планового периода оборудование заменяться не будет.

Рассмотренный процесс формирования оптимальной стратегии можно изобразить символически следующим образом:

$$Z_1(4) \xrightarrow[\textit{сохранение}]{\text{1-й год}} Z_2(5) \xrightarrow[\textit{замена}]{\text{2-й год}} Z_3(1) \xrightarrow[\textit{сохранение}]{\text{3-й год}} Z_4(2) \xrightarrow[\textit{сохранение}]{\text{4-й год}} Z_5(3) \xrightarrow[\textit{сохранение}]{\text{5-й год}}$$

$$Z_6(4) \xrightarrow[\textit{сохранение}]{\text{6-й год}} Z_7(5) \xrightarrow[\textit{замена}]{\text{7-й год}} Z_8(1) \xrightarrow[\textit{сохранение}]{\text{8-й год}} Z_9(2) \xrightarrow[\textit{сохранение}]{\text{9-й год}} Z_{10}(3) \xrightarrow[\textit{сохранение}]{\text{10-й год}}$$

Пусть, например, в начале семилетнего периода имеется оборудование пятилетнего возраста и необходимо сформулировать стратегию в отношении этого оборудования. Рассуждая, как и выше, последовательно находим:

$$Z_4(5)\underset{\text{замена}}{\overset{\text{1-й год}}{\rightarrow}} Z_5(1)\underset{\text{замена}}{\overset{\text{2-й год}}{\rightarrow}} Z_6(1)\underset{\text{сохранение}}{\overset{\text{3-й год}}{\rightarrow}} Z_7(2)\underset{\text{сохранение}}{\overset{\text{4-й год}}{\rightarrow}}$$

$$Z_8(3)\underset{\text{замена}}{\overset{\text{5-й год}}{\rightarrow}} Z_9(1)\underset{\text{сохранение}}{\overset{\text{6-й год}}{\rightarrow}} Z_{10}(2)\underset{\text{замена}}{\overset{\text{7-й год}}{\rightarrow}}$$

Таким образом, максимальный доход $Z_4(5)=57$ ден. ед. и достигается за счет стратегии, состоящей в том, что в первом году оборудование заменяется, затем в течение трех лет оно эксплуатируется, и после чего (на пятом году) вновь заменяется и в оставшиеся два года планового периода сохраняем.

1.4. Задача выбора наивыгоднейшего пути между двумя пунктами

Пример 4. Требуется проложить путь (трубопровод, шоссе) между двумя пунктами *A* и *B* таким образом, чтобы суммарные затраты на его сооружение были минимальными. Пункт *B* находится к северо-востоку от пункта *A*.

Для простоты допустим, что прокладка пути состоит из ряда шагов (отрезков), и на каждом шаге мы можем двигаться либо строго на восток (по оси *X*), либо строго на север (по оси *Y*). Тогда путь от *A* в *B* представляет собой ступенчатую ломаную линию, отрезки которой параллельны одной из координатных осей.

Сооружаемый путь можно рассматривать как управляемую систему *S*, перемещающуюся под влиянием управления из начального состояния *A* в конечное *B*. Состояние этой системы перед началом каждого шага будет характеризоваться двумя целочисленными координатами x и y. Для каждого из состояний системы (узловой точки) найдем условное оптимальное управление: идти нам из этой точки на север (управление «с») или на восток (управление «в»). Оно выбирается так, чтобы стоимость всех оставшихся до конца шагов (включая данный) была минимальна. Эту стоимость мы будем называть «условным оптимальным минимумом» для данного состояния системы *S* перед началом очередного шага.

Решение. Разделим расстояние от A до B в восточном направлении на 4 части ($0 \leq x \leq 4$), а в северном - на 3 части ($0 \leq y \leq 3$). Тогда любой путь из A в B состоит из 4 + 3= 7 отрезков, направленных на восток или на север. Затраты (ден. ед.) на сооружение каждого из отрезков пути известны (рис. 1.2).

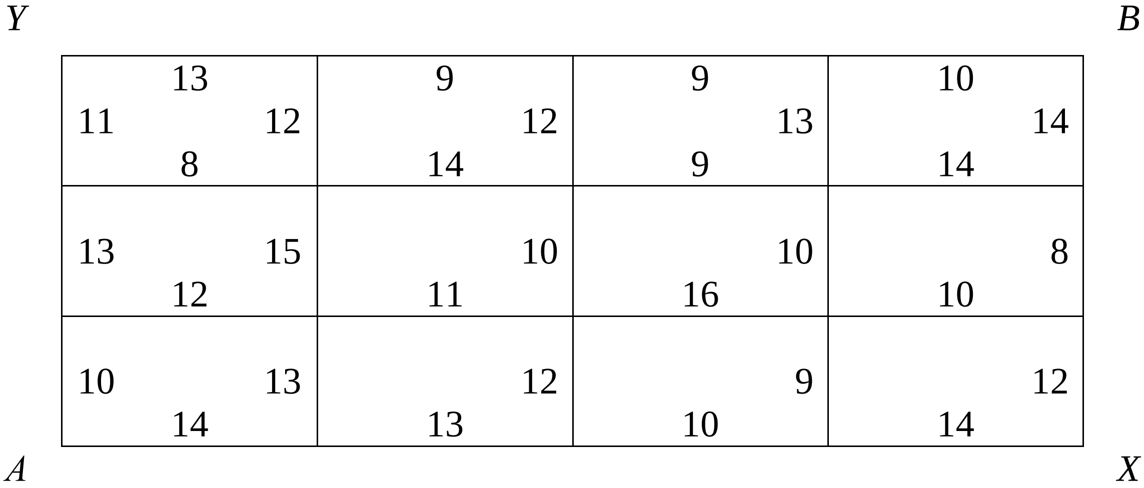

Рисунок 1.2

Процедуру условной оптимизации выполним в обратном направлении, т.е. от точки B к точке A.

Произведем условную оптимизацию последнего шага, для этого рассмотрим отдельно правый верхний угол нашей прямоугольной сетки (рис. 1.3). В точку B можно попасть из B_1 или B_2. Если мы находимся в точке B_1 у нас нет выбора (управление вынужденное): надо идти на восток, и это обойдется нам в 10 ден. ед. Запишем это число 10 в кружке у точки B_1, а оптимальное управление покажем стрелкой, исходящей из B_1 и направленной на восток. Для точки B_2 управление тоже вынужденное (север), затраты до конца равны 14, мы их запишем в кружке у точки B_2.

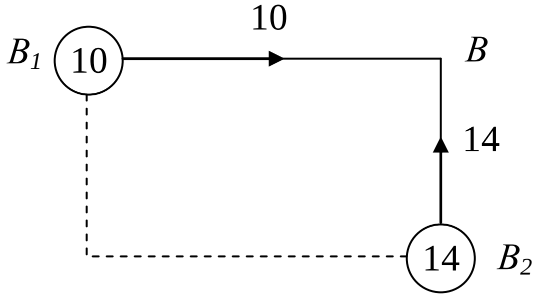

Рисунок 1.3

Рассмотрим предпоследний шаг. После предпредпоследнего шага мы могли оказаться в одной из точек B_3, B_4, B_5 (рис. 1.4). Найдем для каждой из них условное оптимальное управление и условный оптимальный минимум. Для точки B_3 управление вынужденное: идти на восток; затраты до конца равны 19 ден. ед. (9 на данном шаге, плюс 10, записанных в кружке при B_1). Число 19 записываем в кружке при точке B_3. Для точки B_4 управление уже не вынужденное: мы можем идти как на восток, так и на север. В первом случае мы затратим на данном шаге 14 ден. ед. и от B_2 до конца - еще 14, всего 28 ден. ед. Если пойдем на север, затратим 13 + 10 = 23 ден. ед. Значит, условное оптимальное управление в точке B_4 - идти на север: $min\{23; 28\} = 23$. Отмечаем это стрелкой, а число 23 записываем в кружке у B_4. Для точки B_5 управление снова вынужденное («с»), затраты до конца - 22 ден. ед. Ставим стрелку на север, число 22 записываем в кружке у B_5.

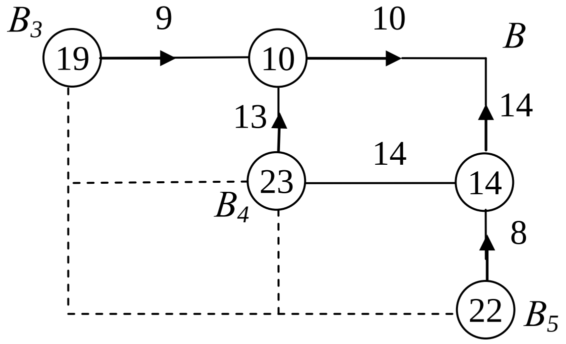

Рисунок 1.4

Условную оптимизацию проводим для всех остальных узловых точек. Конечный результат процедуры оптимизации показан на рис. 1.5.

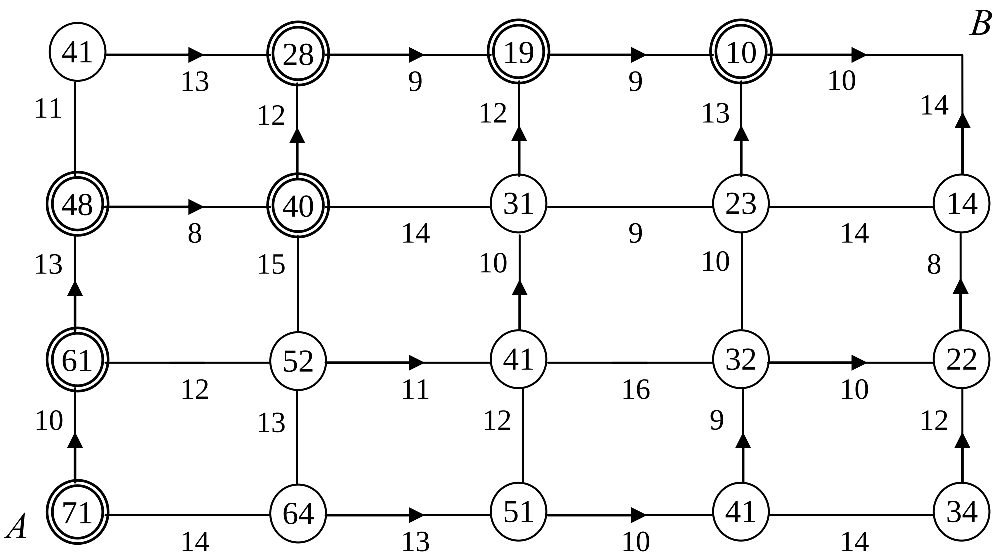

Рисунок 1.5

Таким образом, условная оптимизация выполнена: в какой бы из узловых точек мы ни находились, мы знаем, куда идти (стрелка) и во что нам обойдется путь до конца (число в кружке).

Если в ходе условной оптимизации оба управления для какой-то точки на плоскости являются оптимальными, т.е. приводят к одинаковому расходу средств от этой точки до конца, из них мы произвольно выбираем любое.

Построим безусловное оптимальное управление - траекторию, ведущую из A и B самым дешевым способом. Такая оптимальная траектория отмечена на рис. 1.5 дважды обведенными кружками. Соответствующее безусловное оптимальное управление будет:

$$x^* = (\text{с, с, в, с, в, в, в}),$$

т.е. первые два шага мы должны делать на север, следующий - на восток, затем опять на север и остальные три - на восток.

В кружке при точке A записан оптимальный минимум на все сооружение пути из A в B. Минимальные затраты составят:

$$Z^* = 10 + 13 + 8 + 12 + 9 + 9 + 10 = 71 \text{ ден. ед.}$$

В решенной задаче в каждой точке мы выбирали только из двух управлений: «с» или «в». Можно было бы вместо двух возможных направлений ввести их несколько и, кроме того, взять шаги помельче.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Решить задачу оптимального распределения инвестиций методом динамического программирования.

1-5. Составить оптимальный план распределения инвестиций между четырьмя предприятиями (1,2,3,4), обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в табл. 1.13.

Таблица 1.13

Вариант	Объем инвестиций, ден. ед., x_i	Прирост выпуска продукции предприятия в зависимости от объема инвестиций, ден. ед., $f_j(x_i)$			
		1	2	3	4
1	0	0	0	0	0
	20	12	14	13	18
	40	33	28	38	39
	60	44	38	47	48
	80	64	56	62	65
	100	78	80	79	82
2	0	0	0	0	0
	200	100	150	100	150
	400	300	250	400	350
	600	400	300	450	450
	800	600	500	650	650
	1000	700	800	750	850
3	0	0	0	0	0
	200	100	150	100	150
	400	300	350	400	250
	600	400	450	600	550
	800	600	500	750	850
4	0	0	0	0	0
	200	120	150	100	50
	400	200	250	300	350
	600	450	350	450	450
	800	600	700	650	750
	1000	700	850	700	950
5	0	0	0	0	0
	20	10	15	10	15
	40	30	25	40	35
	60	40	30	45	45
	80	60	50	65	65
	100	70	80	75	85

6-10. Составить оптимальный план распределения инвестиций между тремя предприятиями (1,2,3), обеспечивающий максимальное увеличение выпуска продукции. Исходные данные приведены в табл. 1.14.

Таблица 1.14

Вариант	Объем инвестиций, ден. ед., x_i	Прирост выпуска продукции предприятия в зависимости от объема инвестиций, ден. ед., $f_i(x_i)$		
		1	2	3
6	0	0	0	0
	200	100	140	200
	400	300	280	400
	600	400	380	500
	800	600	560	600
7	0	0	0	0
	100	10	40	50
	200	50	150	100
	300	100	220	250
	400	200	300	350
	500	250	350	400
	600	400	450	500
8	0	0	0	0
	100	60	40	50
	200	50	150	100
	300	150	200	250
	400	250	300	300
	500	350	350	450
	600	500	450	550
9	0	0	0	0
	200	10	40	50
	400	150	250	100
	600	300	300	450
	800	600	500	650
10	0	0	0	0
	100	10	40	50
	200	250	150	100
	300	300	350	250
	400	400	450	350
	500	450	450	550
	600	750	600	800

11-20. В табл. 1.15 приведены значения $f_i(x_i)$ возможного прироста прибыли на четырех предприятиях в зависимости от выделенной на реконструкцию и модернизацию производства суммы x_i. Распределить между предприятиями имеющиеся 100 ден. ед., чтобы общий прирост прибыли был максимальным.

Таблица 1.15

Вариант	Выделяемые средства, ден. ед., x_i	Прирост прибыли предприятия в зависимости от объема выделяемых средств, ден. ед., $f_i(x_i)$			
		1	2	3	4
11	0	0	0	0	0
	20	9	11	16	13
	40	18	19	32	27
	60	24	30	40	44
	80	38	44	57	69
	100	50	59	70	73
12	0	0	0	0	0
	20	9	11	13	12
	40	17	34	28	35
	60	29	46	37	40
	80	38	53	49	54
	100	47	75	61	73
13	0	0	0	0	0
	20	7	9	17	16
	40	29	19	27	30
	60	37	28	37	42
	80	41	37	48	65
	100	59	46	66	81
14	0	0	0	0	0
	20	9	12	11	14
	40	20	25	20	23
	60	35	34	32	40
	80	44	46	48	50
	100	57	57	61	58
15	0	0	0	0	0
	20	9	8	12	7
	40	18	19	25	15
	60	29	30	51	52
	80	41	47	58	59
	100	60	58	69	60

продолжение табл. 1.15

Вариант	Выделяемые средства, ден. ед., x_i	Прирост прибыли предприятия в зависимости от объема выделяемых средств, ден. ед., $f_j(x_i)$			
		1	2	3	4
16	0	0	0	0	0
	20	11	13	12	10
	40	21	20	22	27
	60	40	42	34	33
	80	54	45	55	57
	100	62	61	60	69
17	0	0	0	0	0
	20	12	16	9	15
	40	26	21	17	25
	60	40	36	35	51
	80	60	49	51	62
	100	72	63	65	76
18	0	0	0	0	0
	20	14	12	13	7
	40	24	30	25	33
	60	37	42	45	46
	80	45	58	62	60
	100	58	71	70	68
19	0	0	0	0	0
	20	16	10	15	17
	40	28	29	27	23
	60	36	42	46	38
	80	49	50	58	53
	100	60	74	65	67
20	0	0	0	0	0
	20	12	14	11	16
	40	28	26	24	21
	60	39	40	43	36
	80	47	51	51	49
	100	69	68	68	72

Задание 2. Решить задачу выбора оптимальной стратегии обновления оборудования

1. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 8 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования, ежегодных затратах на производство и остаточной стоимости оборудования приведены в табл. 1.16.

Таблица 1.16

Возраст оборудования, лет, t	0	1	2	3	4	5	6	7
Годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, ден. ед., $v(t)$	25	24	24	23	23	23	22	21
Ежегодные затраты на производство, ден. ед., $r(t)$	15	15	16	16	17	17	18	19
Остаточная стоимость оборудования, ден. ед., $s(t)$	-	4	3	2	1	1	1	1

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование, стоимость нового оборудования равна 10 ден. ед.

2. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 7 лет, при котором общая прибыль за данный период будет максимальной. Данные о производительности оборудования и ежегодных затратах на его содержание приведены в табл. 1.17.

Таблица 1.17

Возраст оборудования, лет, t	0	1	2	3	4	5	6	7
Ежегодный доход от производства, ден. ед., $d(t)$	25	24	24	23	23	23	22	21
Стоимость нового оборудования, ден. ед., $p(t)$	15	15	16	16	17	17	18	19

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование, а ликвидационная стоимость оборудования равна 3 ден. ед.

3. Составьте оптимальный план замены оборудования в течение 8 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования и ежегодных затратах на производство приведены в табл. 1.18.

Таблица 1.18

Возраст оборудования, лет, t	0	1	2	3	4	5	6	7
Годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, ден. ед., $v(t)$	55	50	45	40	35	30	25	22
Ежегодные затраты на производство, ден. ед., $r(t)$	5	5	10	10	15	15	20	20

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет два года, стоимость нового оборудования - 30 ден. ед., ликвидационная стоимость оборудования - 2 д. е.

4. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 7 лет, при котором общий доход предприятия за данный период был бы максимальным. Данные о доходе предприятия, остаточной стоимости и стоимости нового оборудования приведены в табл. 1.19.

Таблица 1.19

Возраст оборудования, лет, t	0	1	2	3	4	5	6	7
Ежегодный доход от производства, ден. ед., $d(t)$	35	32	30	28	25	23	22	20
Остаточная стоимость оборудования, ден. ед., $s(t)$	-	12	10	8	6	4	2	2
Стоимость нового оборудования, ден. ед., $p(t)$		40	41	42	43	44	45	46

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование.

5. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 7 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования, ежегодных затратах на производство, остаточной стоимости и стоимости нового оборудования приведены в табл. 1.20.

Таблица 1.20

Возраст оборудования, лет, t	0	1	2	3	4	5	6	7
Годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, ден. ед., $v(t)$	75	70	65	60	55	50	45	40
Ежегодные затраты на производство, ден. ед., $r(t)$	15	20	20	25	25	30	35	36
Остаточная стоимость оборудования, ден. ед., $s(t)$	-	10	8	6	4	2	1	1
Стоимость нового оборудования, ден. ед., $p(t)$	-	40	41	42	43	44	45	46

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет 1 год.

6. Составьте оптимальный план замены оборудования в течение 7 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования, ежегодных затратах на производство и остаточной стоимости оборудования приведены в табл. 1.21.

Таблица 1.21

Возраст оборудования, лет, t	0	1	2	3	4	5	6	7
Годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, ден. ед., $v(t)$	50	45	45	40	40	35	35	30
Ежегодные затраты на производство, ден. ед., $r(t)$	10	10	15	15	20	20	20	25
Остаточная стоимость оборудования, ден. ед., $s(t)$	-	10	8	6	4	2	1	1

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет 1 год, стоимость нового оборудования равна 30 ден. ед.

7. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 7 лет, при котором общий доход предприятия за данный период был бы максимальным. Данные о доходе предприятия, остаточной стоимости и стоимости нового оборудования приведены в табл. 1.22.

Таблица 1.22

Возраст оборудования, лет, t	0	1	2	3	4	5	6	7
Ежегодный доход от производства, ден. ед., $d(t)$	40	38	36	34	32	30	28	26
Остаточная стоимость оборудования, ден. ед., $s(t)$	-	10	8	6	4	2	1	1
Стоимость нового оборудования, ден. ед., $p(t)$	-	30	31	32	33	34	35	36

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет 1 год.

8. Составьте оптимальный план замены оборудования в течение 8 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования и ежегодных затратах на производство приведены в табл. 1.23.

Таблица 1.23

Возраст оборудования, лет, t	0	1	2	3	4	5	6	7
Годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, ден. ед., $v(t)$	65	60	60	55	55	50	45	40
Ежегодные затраты на производство, ден. ед., $r(t)$	10	15	15	20	25	30	35	40

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование, стоимость нового оборудования - 40 ден. ед., ликвидационная стоимость оборудования - 5 ден. ед.

9. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 6 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования и ежегодных затратах на его содержание приведены в табл. 1.24.

Таблица 1.24

Возраст оборудования, лет, t	0	1	2	3	4	5	6	7
Ежегодный доход от производства, ден. ед., $d(t)$	85	75	65	55	45	35	25	20
Стоимость нового оборудования, ден. ед., $p(t)$	60	62	64	66	68	70	72	74

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого возраст оборудования составляет 2 года, а ликвидационная стоимость оборудования равна 5 ден. ед.

10. Составить оптимальный план замены оборудования в течение 6 лет, при котором общая прибыль за данный период была бы максимальной. Данные о производительности оборудования, ежегодных затратах на производство, остаточной стоимости и стоимости нового оборудования приведены в табл. 1.25.

Таблица 1.25

Возраст оборудования, лет, t	0	1	2	3	4	5	6	7
Годовой выпуск продукции в стоимостном выражении, ден. ед., $v(t)$	25	24	24	23	23	23	22	21
Ежегодные затраты на производство, ден. ед., $r(t)$	15	15	16	16	17	17	18	19
Остаточная стоимость оборудования, ден. ед., $s(t)$	-	10	8	6	4	2	1	1
Стоимость нового оборудования, ден. ед., $p(t)$	-	20	21	22	23	24	25	26

Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода возраст оборудования составляет 2 года.

11-20. Разработать оптимальную стратегию относительно оборудования возраста не старше 10 лет если известны: стоимость $v(t)$ продукции, производимой в течение года с использованием данного оборудования; ежегодные расходы $r(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования; его остаточная стоимость $s(t)$; стоимость $p(t)$ нового оборудования (сюда же включены расходы, связанные с установкой, наладкой и запуском оборудования).

После составления матрицы максимальных доходов сформировать оптимальные стратегии в отношении оборудования данного возраста t в плановом периоде данной продолжительности N.

Все числовые данные приведены в табл. 1.26 и 1.27

Таблица 1.26

Вариант	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	$v(t)$	20	20	20	19	19	18	18	17	17	16	15
	$r(t)$	10	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15
12	$v(t)$	22	22	21	21	21	20	20	19	19	19	18
	$r(t)$	12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	18
13	$v(t)$	25	24	24	23	22	22	21	21	21	20	20
	$r(t)$	13	13	14	15	15	16	16	17	18	19	20
14	$v(t)$	28	27	27	26	25	25	24	23	23	22	21
	$r(t)$	16	16	17	17	17	18	18	19	20	20	21
15	$v(t)$	21	20	19	19	18	18	17	16	16	15	15
	$r(t)$	11	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15
16	$v(t)$	24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20
	$r(t)$	13	14	15	16	17	17	17	18	19	19	20
17	$v(t)$	28	27	26	25	24	24	23	22	22	22	21
	$r(t)$	15	15	16	17	17	18	19	20	20	21	21
18	$v(t)$	20	20	19	18	17	16	16	15	15	14	13
	$r(t)$	8	9	9	10	10	10	11	11	12	13	13
19	$v(t)$	26	25	25	24	24	23	23	23	22	21	21
	$r(t)$	15	15	16	16	17	17	18	19	19	20	21
20	$v(t)$	23	23	22	22	21	20	20	20	19	18	18
	$r(t)$	11	12	13	14	14	15	16	17	17	17	18

Таблица 1.27

Вариант	Продолжительность периода N		Возраст t оборудования		Остаточная стоимость $s(t)$	Стоимость $p(t)$ нового оборудования
11	10	8	7	1	0	10
12	10	6	7	4	2	11
13	10	7	8	5	2	14
14	10	8	6	5	0	10
15	10	6	8	4	3	10
16	10	9	7	6	0	8
17	10	8	6	5	5	17
18	10	7	9	4	2	12
19	10	9	6	8	0	6
20	10	6	9	3	1	13

Задание 3. Для газификации поселка необходимо проложить трубопровод между двумя пунктами *A* и *B* так, чтобы суммарные затраты на его сооружение были минимальны (рис. 1.6). Исходные данные по затратам (млн. руб.) приведены на рис. 1.6 и в табл. 1.28.

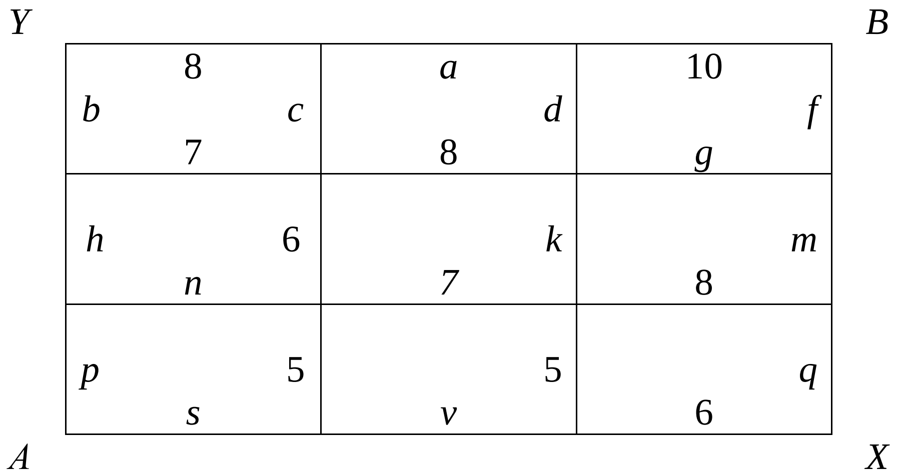

Рисунок 1.6

Таблица 1.28

Вариант	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*	*n*	*p*	*q*	*s*	*v*
1	9	5	6	7	8	8	4	6	7	6	3	7	4	4
2	8	6	5	8	7	9	3	7	6	7	2	8	3	5
3	8	4	7	6	7	9	3	5	8	5	2	8	3	3
4	10	4	7	6	9	7	5	5	8	5	4	6	5	3
5	10	6	5	8	9	7	5	7	6	7	4	6	5	5
6	7	7	4	9	6	10	3	8	5	8	3	9	4	6
7	7	3	8	5	6	10	4	8	9	4	5	9	4	4
8	11	3	8	5	10	6	6	4	9	4	5	5	6	3
9	11	7	4	9	10	6	6	8	5	8	5	5	6	6
10	10	6	7	6	9	9	5	5	8	7	4	6	5	5
11	10	6	7	6	7	9	5	7	6	5	4	8	5	3
12	10	6	7	6	7	7	5	7	8	5	3	6	5	4
13	8	4	5	8	7	7	3	7	6	5	4	8	3	3
14	8	4	5	8	9	7	3	7	8	7	2	6	5	5
15	8	4	5	8	9	9	3	5	6	7	4	8	3	3
16	11	7	4	5	10	10	4	4	9	8	3	5	6	6
17	11	7	8	5	6	6	4	8	9	4	3	5	6	6
18	7	3	8	9	6	7	6	8	5	4	5	9	2	4
19	7	3	4	9	10	10	4	4	5	8	5	9	4	8
20	7	4	3	5	6	7	8	9	3	5	4	6	7	9

2 МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИТ-ПРОЕКТОВ

2.1 Метод чистого дисконтированного дохода

Метод предназначен для оценки экономического эффекта, а также выбора из нескольких альтернативных вариантов наиболее выгодного для инвестирования. Он позволяет учитывать фактор времени за счет приведения всех денежных потоков экономической жизни проекта к их современной величине, оценить возможности достижения заданной нормы доходности, обеспечиваемой по другим успешным проектам инвестирования или по процентной ставке надежного банка, и некоторого резерва (сверхприбыли).

Для анализа эффективности проводится расчет следующих показателей:

1. *Чистый дисконтированный (приведенный) доход*

$$NPV = PV_n - I_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - I_0, \tag{2.4}$$

где I_0 - сумма затрат (инвестиций) на начало проекта;

PV_n - современная стоимость денежного потока на протяжении экономической жизни проекта;

CF_t – поток платежей в периоде t;

r - ставка дисконтирования (норма дисконта);

n – число периодов реализации проекта.

Если NPV > 0, то в течение жизненного цикла инвестиционные затраты окупятся, проект обеспечит получение прибыли согласно заданной норме дисконта r и ее некоторый резерв (сверхприбыль), равный NPV; при NPV=0 проект окупается, но сверхприбыли нет; если NPV < 0, заданная норма прибыли не обеспечивается и проект убыточен.

В формуле (2.5) инвестиции рассматриваются с учетом дисконтирования за весь расчетный период:

$$NPV = \sum_{t=0}^{T} (R_t - Z_t) \cdot \frac{1}{(1+r)^t}, \tag{2.5}$$

где R_t – результаты, достигаемые на t-ом шаге;

Zt – затраты, осуществляемые на t-ом шаге;

$P_t = (R_t - Z_t)$ – эффект, достигаемый на t-ом шаге;

T – горизонт расчета, равный номеру шага расчета, на котором производится ликвидация объекта;

$K_d = \dfrac{1}{(1+r)^t}$ – коэффициент дисконтирования.

Также на практике применяют модифицированную формулу для определения NPV, в которой из состава Z_t исключают капиталовложения K_t на t-ом шаге:

$$NPV = \sum_{t=0}^{T} (R_t - Z_t^{'}) \cdot \frac{1}{(1+r)^t} - K, \qquad (2.6)$$

где $K = \sum_{t=0}^{T} K_t \cdot \dfrac{1}{(1+r)^t}$ – дисконтированные капитальные вложения;

$Z_t^{'}$ – затраты на t-ом шаге при условии, что в них не входят капиталовложения. (В формулах для K убыток входит со знаком «+», а доход со знаком «-»).

Формула (2.6) показывает разницу между суммой приведенных эффектов и приведенной к тому же моменту времени величиной капиталовложений.

Затраты, осуществляемые участниками проекта, подразделяются на первоначальные (капиталообразующие), текущие и ликвидационные. При определении эффективности оценка будущих затрат и результатов осуществляется в пределах расчетного периода, продолжительность которого (горизонт расчета) принимается с учетом: продолжительности создания, эксплуатации и ликвидации объекта; достижения заданных характеристик прибыли; нормативного срока службы технологического оборудования; требований инвестора. Горизонт расчета измеряется количеством шагов расчета (месяцев, кварталов или лет).

Для стоимостной оценки результатов и затрат могут использоваться текущие (цены заложенные в проекте без учета инфляции), прогнозные (цены ожидаемые с учетом инфляции на будущих шагах расчета) и дефлированные (прогнозные цены, приведенные к уровню цен фиксированного момента времени путем деления на общий базисный индекс инфляции) цены.

Денежные потоки могут выражаться в разных валютах. Рекомендуется учитывать денежные потоки в тех валютах, в которых они реализуются.

2. *Индекс доходности (прибыльности, рентабельности)* показывает, сколько единиц современной величины денежного потока приходится на единицу предполагаемых первоначальных затрат:

$$PI = PV_n / I_0 = NPV / I_0 + 1. \qquad (2.7)$$

В случае необходимости учета инвестиций, распределенных по расчетным периодам, индекс представляет собой отношение суммы приведенных эффектов к величине дисконтированных капиталовложений:

$$PI = \frac{1}{K}\sum_{t=0}^{T}(R_t - Z_t^{'}) \cdot \frac{1}{(1+r)^t}. \qquad (2.8)$$

Если PI > 1, то современная стоимость денежного потока превышает первоначальные инвестиций, и проект следует принять. При PI=1 величина NPV=0, и инвестиции не приносят дохода. Если PI<1, проект убыточен. При сравнительном анализе нескольких проектов, если компания располагает достаточным первоначальным капиталом, получение большего значения NPV приоритетнее получения большего значения PI.

3. *Внутренняя норма доходности* (*IRR*) - это норма дисконтирования, при которой чистая дисконтированная стоимость инвестиционного проекта равна 0. IRR определяется решением уравнения:

$$NPV = \sum_{t=1}^{n}\frac{CF_t}{(1+IRR)^t} - I_0 = 0. \qquad (2.9)$$

При NPV=0 современная стоимость проекта *PV* равна первоначальным инвестициям I_0, т.е. инвестиции окупаются, хотя проект и не приносит прибыль.

Уравнение (2.9) решается относительно IRR каким-либо итерационным методом, один из которых реализован в MS Excel (функция **ВСД**). Также IRR можно рассчитать с помощью инструмента MS Excel «Подбор параметра».

Внутренняя норма доходности представляет собой ту норму дисконта, при которой величина приведенных эффектов равна приведенным капиталовложениям:

$$\sum_{t=0}^{T}\frac{(R_t - Z_t^{+})}{(1+IRR)^t} = \sum_{t=0}^{T}\frac{K_t}{(1+IRR)^t}. \qquad (2.10)$$

При расчете IRR существуют следующие нюансы: во-первых, она не всегда существует; во-вторых, уравнение может иметь больше одного решения.

IRR определяется в процессе расчета и затем сравнивается с требуемой инвестором нормой дохода на вкладываемый капитал. Если IRR>*r*, проект принимается (при этом проект обеспечивает положительную NPV и доходность, равную (IRR-*r*)).

4. *Модифицированная внутренняя норма доходности* (*MIRR*) - данная характеристика дает более пессимистичный прогноз, чем внутренняя норма доходности, поскольку учитывает ставку реинвестирования. В Excel реализована функция **МВСД**.

5. *Срок возврата инвестиций* (*срок окупаемости*) – минимальный временной интервал (от начала осуществления проекта), за пределами которого интегральный эффект становится и в дальнейшем остается неотрицательным (т.е. это период, начиная с которого первоначальные вложения и другие затраты, связанные с инвестиционным проектом, покрываются суммарными результатами его осуществления).

Результаты и затраты, связанные с осуществлением проекта, можно вычислять с дисконтированием или без него. Соответственно, получится два различных срока окупаемости. Так дисконтированный срок окупаемости определяется путем последовательного суммирования членов ряда дисконтированных доходов до тех пор, пока не будет получена сумма, равная или превышающая сумму дисконтированных инвестиций.

5. *Средняя норма рентабельности* представляет доходность проекта как отношение между среднегодовыми поступлениями от его реализациями и величиной начальных инвестиций:

$$ARR = \left(\sum_{t=1}^{n} CF_t\right) \Big/ \left(\frac{n}{12}\right) \Big/ \sum_{t=1}^{n} I_{t-1}. \qquad (2.11)$$

Показатель ARR интерпретируется как средний годовой доход, который можно получить от реализации проекта.

2.2 Расчет показателей коммерческой эффективности

Для количественной оценки эффективности ИТ применяется также *метод анализа денежных потоков* (коммерческая эффективность). Коммерческая эффективность определяется соотношением финансовых затрат и результатов, обеспечивающих требуемую норму доходности. В качестве эффекта на t-ом шаге выступает поток реальных денег.

Денежный поток - разность между притоком и оттоком денежных средств от одного из видов деятельности (инвестиционной, операционной и финансовой) в каждом периоде осуществления проекта (на каждом шаге расчета).

Сальдо реальных денег – разность между притоком и оттоком денежных средств от всех трех видов деятельности.

Поток реальных денег от операционной деятельности $\boldsymbol{F_{1,t}}$ (аналог (R_t - $Z_t^{'}$)) включает в себя следующие виды доходов и затрат, распределенных по периодам (таблица 2.4).

Таблица 2.4 - Расчет потока реальных денег от операционной деятельности

Наименование показателя	Условное обозначение, формула
Выручка	$b_{1,t}$
Внереализационные доходы	$b_{2,t}$
Переменные затраты	$b_{3,t}$
Постоянные затраты	$b_{4,t}$
Амортизация зданий	$b_{5,t}$
Амортизация оборудования	$b_{6,t}$
Проценты по кредитам	$b_{7,t}$
Прибыль до вычета налогов	$b_{8,t} = b_{1,t} + b_{2,t} - b_{3,t} - b_{4,t} - b_{5,t} - b_{6,t} - b_{7,t}$
Налоги и сборы	$b_{9,t}$
Проектируемый чистый доход	$b_{10,t} = b_{8,t} - b_{9,t}$
Амортизация	$b_{11,t} = b_{5,t} + b_{6,t}$
Чистый приток от операции	$F_{1,t} = b_{10,t} + b_{11,t}$

Поток реальных денег от инвестиционной деятельности $\boldsymbol{F_{2,t}}$ (аналог K_t) включает в себя следующие виды доходов и затрат, распределенных по периодам (таблица 2.5). Затраты учитываются со знаком минус, поступления - со знаком плюс.

Поток реальных денег от финансовой деятельности $\boldsymbol{F_{3,t}}$ включает в себя следующие виды доходов и затрат, распределенных по периодам (таблица 2.6).

Таблица 2.5 - Расчет потока реальных денег от инвестиционной деятельности

Наименование показателя	Условное обозначение, формула
Земля	$a_{1,t}$
Здания, сооружения	$a_{2,t}$
Машины, оборудование, передаточ. устр.	$a_{3,t}$
Нематериальные активы	$a_{4,t}$
Итого вложения в основной капитал	$a_{5,t} = a_{1,t} + a_{2,t} + a_{3,t} + a_{4,t}$
Прирост оборотного капитала	$a_{6,t}$
Всего инвестиций	$F_{2,t} = a_{5,t} + a_{6,t}$

Таблица 2.6 - Расчет потока реальных денег от финансовой деятельности

Наименование показателя	Условное обозначение, формула
Собственный капитал	$d_{1,t}$
Краткосрочные кредиты	$d_{2,t}$
Долгосрочные кредиты	$d_{3,t}$
Погашение задолженности по кредитам	$d_{4,t}$
Выплата дивидендов	$d_{5,t}$
Сальдо финансовой деятельности	$F_{3,t} = d_{1,t} + d_{2,t} + d_{3,t} - d_{4,t} - d_{5,t}$

Критерием принятия инвестиционного проекта является положительное сальдо накопленных денег в любом временном интервале, где участник осуществляет затраты или получает доходы. Отрицательная величина сальдо указывает на необходимость привлечения дополнительных собственных или заемных средств.

Алгоритм расчета сальдо реальных денег (таблица 2.7).

Таблица 2.7 - Расчет сальдо реальных денег

Наименование показателя	Условное обозначение, формула
Поток реальных денег от операционной деятельности	$F_{1,t}$
Поток реальных денег от инвестиционной деятельности	$F_{2,t}$
Поток реальных денег от финансовой деятельности	$F_{3,t}$
Излишек средств (если значение отрицательное - то это потребность в средствах)	$F_{4,t} = F_{1,t} + F_{2,t} + F_{3,t}$,
Сальдо на конец года	$F_{5,0} = F_{4,0}$, $F_{5,t} = F_{5,t-1} + F_{4,t}$.

2.3 Определение точки безубыточности

На основе анализа безубыточности можно определить минимальное количество услуг, при котором достигается нулевое значение прибыли, т.е. для получения прибыли число оказываемых услуг должно превосходить значение точки безубыточности.

Анализ безубыточности основан на выявленной теоретической зависимость совокупного дохода от продаж, издержек и прибыли от объема производства.

Переменные издержки - издержки, общая величина которых на данный период времени находится в непосредственной зависимости от объема и реализации производства, а также их структуры при производстве и реализации нескольких видов продукции.

С*редние переменные издержки* (переменные издержки, приходящиеся на единицу продукции) определяются отношением величины переменных издержек на величину производства и реализации и остаются неизменными при изменении объемов производства и реализации.

Постоянные издержки - издержки, сумма которых в данный период времени не зависит непосредственно от величины и структуры производства и реализации (амортизационные отчисления по зданиям, содержание административно-управленческого персонала, арендная плата и т.п.).

Средние постоянные издержки (постоянные издержки, приходящиеся на единицу продукции) определяются отношением постоянных издержек на объем произведенной и реализованной продукции и снижаются при увеличении объемов производства.

Точка безубыточности – это уровень реализации (продаж) в натуральных единицах, при котором выручка от реализации равна затратам на производство и реализацию продукции (осуществление и реализацию услуг), т.е. прибыль равна нулю.

Для определения точки безубыточности используется теоретическая модель поведения затрат, дохода и прибыли в зависимости от объема реализованной продукции (выполненных услуг). Соотношение между затратами и объемом производства выражается функцией:

$$C = C_{\text{пост}} + C_{\text{пер.ед}} \cdot \mathrm{Q}, \tag{2.12}$$

где C - общая сумма затрат;

$C_{\text{пост.}}$ - постоянные затраты;

$C_{\text{пер.ед.}}$ - переменные затраты на единицу продукции;

Q - объем производства.

Уравнение (1.12) верно при допущениях:

- принцип линейности (постоянные и переменные затраты выражаются прямой линией);

- принцип достаточных пределов (затраты изменяются прямолинейно при любых изменениях объема производства (от нуля до бесконечности).

Выручка определяется формулой

$$V = Z_{\text{ед}} \cdot Q, \qquad (2.13)$$

где $Z_{\text{ед}}$ - цена единицы продукции.

Точка безубыточности определяется из соотношения $V = C$, т.е. $Z_{\text{ед}} \cdot Q = C_{\text{пост}} + C_{\text{пер.ед}} \cdot Q$, следовательно, точка безубыточности равна

$$Q_{\text{без}} = \frac{C_{\text{пост}}}{Z_{\text{ед}} - C_{\text{пер.ед}}}. \qquad (2.14)$$

График определения точки безубыточности приведен на рисунке 1.3.

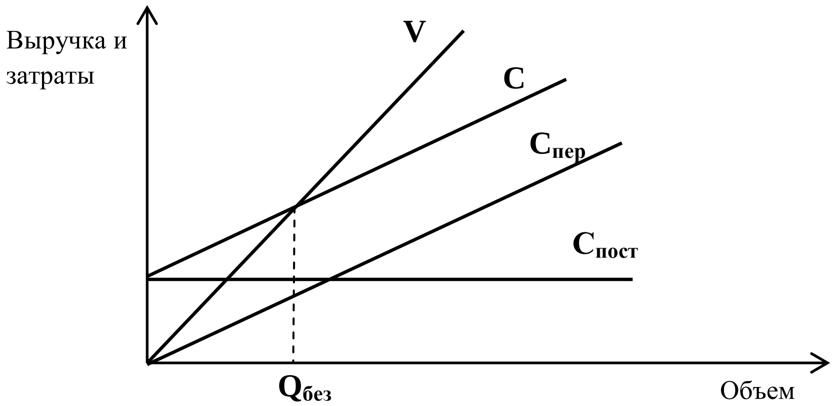

Рисунок 1.3 - Определение точки безубыточности

Кромка безопасности - показывает, насколько может сократиться объем реализации продукции (услуг), прежде чем компания понесет убытки, т.е. это разность между объемом ожидаемой реализации и объемом безубыточной реализации.

Маржинальная прибыль - разность между продажной ценой и переменными затратами на единицу продукции:

$$P_{\text{марж.ед}} = Z_{\text{ед}} - C_{\text{пер.ед}}. \qquad (2.15)$$

Общая сумма прибыли выражается следующим уравнением

$$P_{\text{общ}} = (Z_{\text{ед}} - C_{\text{пер.ед}}) \cdot Q - C_{\text{пост}}. \qquad (2.16)$$

Точка безубыточности может быть определена как

$$Q_{\text{без}} = \frac{C_{\text{пост}}}{P_{\text{марж.ед}}}, \qquad (2.17)$$

или с помощью нормы маржинальной прибыли

$$N_{\text{марж}} = \frac{P_{\text{марж.ед}}}{Z_{\text{ед}}} \cdot 100\,\%. \qquad (2.18)$$

Чем выше норма маржинальной прибыли, тем сильнее влияние изменений объема продаж на прибыль до налогообложения, и наоборот.

Точка безубыточности может быть выражена величиной выручки, т.е. в стоимостных единицах:

$$Q_{\text{без.ст}} = \frac{C_{\text{пост}}}{N_{\text{марж}}} \cdot 100\%. \qquad (2.19)$$

Маржинальная прибыль - это прежде всего взнос на покрытие постоянных затрат, а затем, когда достигнута точка безубыточности, получаем прибыль.

Для многономенклатурного производства $N_{\text{марж}}$ показывает, сколько процентов составляет маржинальный доход (суммарный по всем видам продуктов (работ, услуг)) в выручке от реализации (выручке от продаж) всего объема продукции (работ, услуг). При определении в этом случае точки безубыточности в стоимостном выражении постоянные затраты берутся для всей организации в целом по смете.

Определение точки безубыточности ИТ-услуг

Согласно общепринятой российской классификации затрат, можно выделить следующие виды затрат на ИТ-услуги:

- основная и дополнительная заработная плата персонала, обеспечивающего функционирование ИТ-проекта (с учетом начислений на социальные нужды);
- стоимость электроэнергии, потребляемой вычислительной техникой;
- амортизационные отчисления;
- стоимость бумаги, носителей информации, вспомогательных материалов, картриджей и т.п.;
- затраты на аренду помещения, оборудования и т.п. (если это имеется);
- затраты на текущий и профилактический ремонт технических средств ИТ-проекта;
- затраты на управление системой (управление приложениями, имуществом и миграциями);
- затраты на сетевое управление;
- затраты на управление устройствами хранения данных;
- затраты, связанные с оплатой действий, напрямую не являющихся рабочими функциями (оплата конторского и административного персонала; контроль, телефонные и почтовые расходы; ввод информации; расходы на помещение; потери от плановых и внеплановых ремонтов; коммунальные услуги);

- и другие.

Перечисленные выше затраты необходимо отнести к постоянным или переменным. Точку безубыточности, по представленным выше формулам можно определить для одного вида услуг (работ) в натуральном и стоимостном выражении, если он многократно повторяется. Если в ИТ-организации выполняются разнообразные виды услуг (работ) можно определить точку безубыточности в стоимостном выражении (так же, как и для многономенклатурного производства).

Определение объема окупаемости затрат на разработку ИТ-проектов при их продаже (тиражировании).

Для компаний, занимающихся разработкой ИТ-проектов, можно определить количество ИТ-проектов, которые они должны продать для того, чтобы окупились затраты на разработку данного проекта.

Затраты разработчика ИТ-проекта складываются из следующих составляющих:

1) Единовременные затраты на ИТ-проект, включающие затраты на процесс разработки, процесс документирования, процесс обеспечения качества системы и другие.

2. Текущие затраты разработчика при продаже ИТ-проектов, определяемые на каждый ИТ-проект отдельно и включающие затраты на процесс поставки, процесс сопровождения, процесс верификации, процесс совместной оценки, процесс аудита, процесс разрешения проблем, процесс обучения пользователей и другие затраты.

Объем окупаемости - количество ИТ-проектов, которое нужно продать, чтобы окупить единовременные затраты разработчика, - определяют по формуле:

$$Q_{окуп} = С_{един} / (Ц_{пр}-С_{тек}), \qquad (2.20)$$

где $Q_{окуп}$ - объем окупаемости;

$С_{един}$ - единовременные затраты разработчика на один ИТ-проект;

$Ц_{пр}$ - продажная цена одного ИТ-проекта;

$С_{тек}$ - текущие затраты разработчика при продаже одного ИТ-проекта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Васильева, Е.В Оценка экономической эффективности конкурирующих ИТ-проектов: подходы и математический инструментарий / Е.В. Васильева, Е.А. Деева. – Текст: электронный // Управление. - 2017. - №4 (18). - URL: https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-ekonomicheskoy-effektivnosti-konkuriruyuschih-it-proektov-podhody-i-matematicheskiy-instrumentariy.

2. Васильева, Е.В. Оценка эффективности информационных технологий/информационных систем: учебное пособие [для студентов специальностей «Информационный менеджмент» - 080508, «Прикладная информатика в управлении» - 080801] / Е.В. Васильева, О.М. Данилина, Н.М. Лобанова; Федеральное агентство по образованию, Гос. образовательное учреждение высш. проф. образования «Гос. ун-т упр.», Ин-т информ. систем упр. Москва: ГУУ, 2006. – 163 с. – Текст: непосредственный.Васюхин, О.В. Экономическая оценка инвестиций: учебное пособие / О.В. Васюхин, Е.А. Павлова – Санкт-Петербург: СПб НИУ ИТМО, 2013. – 98 с. – Текст: непосредственный.

4. Вентцель, Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология: учебное пособие / Е.С. Вентцель. – 5-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2010. – 192 с.

5. Глухов, В.В. Математические методы и модели для менеджмента: учебное пособие / В.В. Глухов, М.Д. Медников, С.Б. Коробко. – 3-е изд., стер. – Спб.: Издательство «Лань», 2007. – 528 с.

6. Голицына, О. Л. Информационные системы: учебное пособие / О.Л. Голицына, Н.В. Максимов, И.И. Попов. - 2-е изд. - Москва: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 448 с. – Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/435900.

7. Горбунов, В. Л. Бизнес-планирование с оценкой рисков и эффективности проектов: Научно-практическое пособие / Горбунов В. Л. - Москва: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 248 с. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/924762.

8. Давыдов, Е.Г. Элементы исследования операций: учебное пособие / Давыдов Е.Г. – М.: КНОРУС, 2010. – 160 с.

9. Дубровин, И. А. Бизнес-планирование на предприятии / Дубровин И.А., - 2-е изд. - Москва :Дашков и К, 2017. - 432 с. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/411352.

10. Есипов, Б.А. Методы исследования операций: учебное пособие / Б.А. Есипов. – Спб.: Издательство «Лань», 2010. – 256 с.

11. Ильченко, А.Н. Практикум по экономико-математическим методам: учебное пособие / А.Н. Ильченко, О.Л. Ксенофонтова, Г.В.

Канакина. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2009. – 288 с.
12. Информационные технологии: учебное пособие / Л.Г. Гагарина, Я.О. Теплова, Е.Л. Румянцева, А.М. Баин / под ред. Л.Г. Гагариной. - М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2019. - 320 с. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1018534.
13. Исследование операций в экономике: учебное пособие / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин и др.; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2005. – 407 с.
14. Исследование операций: учебник / О.А. Косоруков, А.В. Мищенко; под ред. Н.П. Тихомирова. – М.: Издательство «Экзамен», 2003. – 448 с.
15. Костевич, Л.С. Математическое программирование: Информационные технологии оптимальных решений: учебное пособие / Л.С. Костевич. – М.: Новое знание, 2003. – 424 с.
16. Красс, М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.
17. Лобанова, Н.М. Эффективность информационных технологий: учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. М. Лобанова, Н. Ф. Алтухова. - Москва: Издательство Юрайт, 2016. - 237 с. – Текст: непосредственный.
18. Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов. – Текст: электронный. // Электронный фонд правовой и нормативно-технической документации «Техэксперт»: [сайт]. - Москва: Экономика, 2000. - 421 с. - URL: http://docs.cntd.ru/document/1200005634.
19. Одинцов, Б. Е. Современные информационные технологии в управлении экономической деятельностью (теория и практика): учеб. пособие / Б.Е. Одинцов, А.Н. Романов, С.М. Догучаева. - Москва: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2017. - 373 с. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/557915.
20. Сироткин, С. А. Экономическая оценка инвестиционных проектов : учебник / С.А. Сироткин, Н.Р. Кельчевская. - Москва : ИНФРА-М, 2020. - 274 с. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1014648.
21. Скрипкин, К.Г. Экономическая эффективность информационных систем в России: монография. - М.: МАКС Пресс, 2014. - 156 с. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/533938.
22. Управление инвестиционной привлекательностью организации: учебник / Г.Д. Антонов, О.П. Иванова, В.М. Тумин, И.С. Анто-

нова. - Москва: ИНФРА-М, 2018. - 223 с. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/915925.

23. Шикин, Е.В. Исследование операций: учебник / Е.В. Шикин, Г.Е. Шикина. – М.: ТК Велби, Издательство «Проспект», 2006. – 280 с.

24. Шкурко, В.Е. Управление рисками проекта: учебное пособие для вузов / В. Е. Шкурко; под научной редакцией А.В. Гребенкина. - 2-е изд. - Москва: Издательство Юрайт, 2020. – 182 с. - Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. - URL: https://urait.ru/bcode/454911.

25. Экономика информационных систем: учебное пособие. / А.Л. Рыжко, Н.М. Лобанова, Н.А. Рыжко, Е.О. Кучинская. - Москва: Финансовый университет, 2014. – 204 с. – Текст: непосредственный.