

Пример выполнения задания К-4

Дано: кинематическая схема дифференциального механизма (рис.4.5);
 $R_1 = 0,2 \text{ м}$; $R_2 = 0,1 \text{ м}$; $\omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon_{OA} = 2 \text{ с}^{-2}$; $\omega_I = 1 \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon_I = 1 \text{ с}^{-2}$.
Определить скорости и ускорения точек A и B , показанных на рисунке, если $\alpha = 90^\circ$.

Решение. Рассмотрим последовательно движение каждого из трех звеньев дифференциального механизма, начиная с одного из ведущих звеньев, то есть, начиная со звена, угловая скорость и угловое ускорение которого заданы.

1. Кривошип OA совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Определим скорость и ускорение точки A кривошипа, принадлежащей одновременно шестерне II. Величину скорости точки A (V_A) определим по формуле

$$V_A = \omega_{OA} \cdot |OA| = \omega_{OA} \cdot (R_1 + R_2) . \quad (1)$$

Для заданного положения механизма

$$V_A = 2 \cdot (0,1 + 0,2) = 0,6 \text{ м/с} . \quad (2)$$

Вектор скорости точки A (\vec{V}_A) направлен перпендикулярно радиусу вращения (OA) в направлении вращения кривошипа, указанному на рисунке 4.5 дуговой стрелкой ω_{OA} .

Ускорение точки A представим в виде геометрической суммы нормального и касательного ускорений

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau . \quad (3)$$

Величины нормального (a_A^n) и касательного (a_A^τ) ускорений определим соответственно по формулам:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot |OA| = \omega_{OA}^2 \cdot (R_1 + R_2) , \quad (4)$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot |OA| = \varepsilon_{OA} \cdot (R_1 + R_2) . \quad (5)$$

Для заданного положения механизма

$$a_A^n = 2^2 (0,2 + 0,1) = 1,2 \text{ м/с}^2 . \quad (6)$$

$$a_A^\tau = 2 \cdot (0,2 + 0,1) = 0,6 \text{ м/с}^2 . \quad (7)$$

При этом нормальное ускорение точки A (\vec{a}_A^n) направлено по радиусу окружности, описываемой точкой A , к центру этой окружности - к точке O , а касательное ускорение (\vec{a}_A^τ) - по касательной к этой окружности, перпендикулярно OA , в сторону, указанную дуговой стрелкой ε_{OA} .

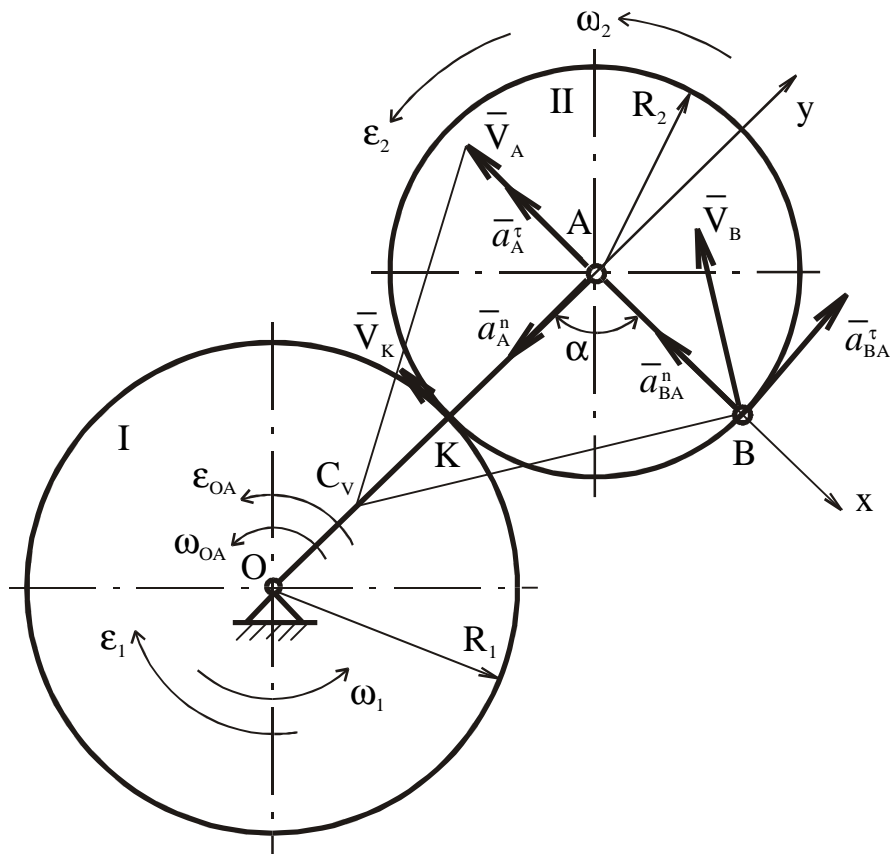


Рис. 4.7

Величина ускорения точки A в соответствии с (3) и с учетом (6) и (7) будет равна

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{1,2^2 + 0,6^2} = \sqrt{1,8} \text{ м/с}^2.$$

2.. Шестерня I совершает вращательное движение вокруг той же оси, что и кривошип OA .

Определим величину скорости точки K касания двух шестерен (V_K)

$$V_K = \omega_1 \cdot R_1. \quad (8)$$

Для указанного положения механизма

$$V_K = 1 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ м/с}. \quad (9)$$

Вектор скорости точки K (\vec{V}_K) направлен перпендикулярно радиусу вращения (R_1) в направлении вращения шестерни I, указанном на рисунке дуговой стрелкой ω_1 .

3. Шестерня II совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Для момента времени, соответствующего заданному положению механизма, выше определены скорости двух точек этой шестерни (точек A и K), а также ускорение точки A . Это позволяет определить скорость и ускорение любой точки шестерни II.

Прежде всего необходимо найти положение мгновенного центра скоростей (точку C_V) шестерни II. Так как скорости точек A и K параллельны друг другу и при этом линия AK перпендикулярна скоростям \vec{V}_A и \vec{V}_K , то мгновенный центр скоростей, находящийся в точке пересечения прямых,

проведенных через начала и концы векторов скоростей (рис.4.5). Здесь учтено, на основании сравнения (2) и (9), что $V_A > V_K$.

Величина угловой скорости шестерни II может быть определена на основании соотношения

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_K}{KC_V} . \quad (8)$$

Из свойств пропорции получим

$$\omega_2 = \frac{V_A - V_K}{AC_V - KC_V} = \frac{V_A - V_K}{R_2} . \quad (9)$$

Подставляя (1) и (8) в равенство (11), получим

$$\omega_2 = \frac{\omega_{OA} \cdot (R_1 + R_2) - \omega_1 \cdot R_1}{R_2} . \quad (12)$$

Для заданного положения механизма

$$\omega_2 = \frac{2 \cdot (0,2 + 0,1) - 1 \cdot 0,2}{0,1} = 4 \text{ с}^{-1} . \quad (13)$$

Направление вращения шестерни II вокруг мгновенного центра скоростей (точки C_V), определяемое направлением скоростей точек A и K, условно показано на рисунке дуговой стрелкой ω_2 .

Алгебраическую величину углового ускорения шестерни II определим на основании формулы

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 . \quad (14)$$

Учитывая (12), на основании (14) получим

$$\varepsilon_2 = \frac{\dot{\omega}_{OA} \cdot (R_1 + R_2) - \dot{\omega}_1 \cdot R_1}{R_2} . \quad (15)$$

По условию задачи кривошип OA вращается ускоренно. Это значит, что абсолютная величина угловой скорости кривошипа ω_{OA} возрастает. В этом случае $\dot{\omega}_{OA} > 0$, то есть

$$\dot{\omega}_{OA} = \varepsilon_{OA} , \quad (16)$$

где ε_{OA} - заданная абсолютная величина углового ускорения кривошипа.

Шестерня I вращается замедленно. При этом абсолютная величина угловой скорости шестерни I убывает и, следовательно, $\dot{\omega}_1 < 0$. Таким образом

$$\dot{\omega}_1 = -\varepsilon_1 , \quad (17)$$

где ε_1 - заданная величина углового ускорения шестерни I.

В результате подстановки (16) и (17) в (15) найдем

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{OA} \cdot (R_1 + R_2) + \varepsilon_1 \cdot R_1}{R_2} .$$

Для заданного положения механизма

$$\varepsilon_2 = \frac{2 \cdot (0,2 + 0,1) + 1 \cdot 0,2}{0,1} = 8 \text{ с}^{-2} . \quad (18)$$

Так как знаки ω_2 и ε_2 совпадают, шестерня II вращается ускоренно.

Направление ε_2 покажем на рисунке дуговой стрелкой в сторону ω_2 .

На основании (1), (10) и (12) нетрудно найти расстояние AC_V

$$AC_V = \frac{V_A}{\omega_2} .$$

Для заданного положения механизма, учитывая (2) и (13), получим

$$AC_V = \frac{0,6}{4} = 0,15 \text{ м.}$$

Величину скорости точки B (V_B) можно найти по формуле

$$V_B = \omega_2 \cdot BC_V , \quad (19)$$

$$\text{где } BC_V = \sqrt{AC_V^2 + AB^2} = \sqrt{0,15^2 + 0,1^2} = 0,18 \text{ м.} \quad (20)$$

Учитывая (13) и (20) на основании (19) найдем величину скорости точки B для заданного положения механизма

$$V_B = 4 \cdot 0,18 = 0,72 \text{ м/с.}$$

Вектор скорости (\vec{V}_B) направлен перпендикулярно прямой BC_V в сторону вращения шестерни II, указанную дуговой стрелкой ω_2 .

Ускорение точки B можно найти на основании теоремы об ускорениях точек плоской фигуры, приняв точку A за полюс

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau , \quad (21)$$

где \vec{a}_{BA}^n и \vec{a}_{BA}^τ - соответственно нормальное и касательное ускорения точки B при относительном вращательном движении шестерни II вокруг полюса A .

С учетом (3), (21) примет вид

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau . \quad (22)$$

Величины нормального (a_{BA}^n) и касательного (a_{BA}^τ) ускорений точки B при относительном вращательном движении шестерни II вокруг полюса A определяются по формулам

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot BA = \omega_2^2 \cdot R_2 , \quad (23)$$

$$a_{BA}^\tau = |\varepsilon_2| \cdot BA = |\varepsilon_2| \cdot R_2 . \quad (24)$$

Для заданного положения дифференциального механизма на основании (23) и (24) с учетом (13) и (18) получим

$$a_{BA}^n = 4^2 \cdot 0,1 = 1,6 \text{ м/с}^2 , \quad (25)$$

$$a_{BA}^\tau = 8 \cdot 0,1 = 0,8 \text{ м/с}^2 . \quad (26)$$

При этом нормальное ускорение \vec{a}_{BA}^n направлено вдоль BA к центру относительного вращения (к полюсу A), а касательное ускорение \vec{a}_{BA}^τ направлено перпендикулярно BA в сторону, указанную дуговой стрелкой ε_2 . Таким образом, в векторном равенстве (22) известны модули и направления всех четырех векторов, стоящих справа от знака равенства. Для определения ускорения точки B (\vec{a}_B) найдем его проекции на две оси координат x , y , показанные на рис. 4.5. Проекция \vec{a}_B на любую ось равна алгебраической

сумме проекций ускорений \vec{a}_A^n , \vec{a}_A^τ , \vec{a}_{BA}^n и \vec{a}_{BA}^τ на ту же ось. Проекции этих ускорений легко найти из чертежа. Таким образом

$$a_{Bx} = -a_A^\tau - a_{BA}^n = -0,6 - 1,6 = -2,2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{By} = a_{BA}^\tau - a_A^n = 0,8 - 1,2 = -0,4 \text{ м/с}^2.$$

По найденным двум проекциям ускорения точки B нетрудно найти его модуль и направление. Модуль ускорения точки B

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{2,2^2 + 0,4^2} = 2,24 \text{ м/с}^2.$$