Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Составители Г.К. Гордеева,
Т.А. Шалыгина,
Я.Д. Фахрутдинова

Томск 2013

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Сост. Г.К. Гордеева, Т.А. Шалыгина, Я.Д. Фахрутдинова. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2013. – 38 с.

Рецензент Р.И. Лазарева
Редактор О.А. Сергеева

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине Б2.Б.1 – «Математика» при изучении темы «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных» для студентов первого курса заочной формы обучения всех специальностей и всех направлений подготовки специалистов и бакалавров. Содержат теоретические сведения, решения типовых задач и варианты контрольных заданий.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № 4 от 10 декабря 2012 г.

Утверждены и введены в действие проректором по учебной работе В.В. Дзюбо

с 1.09. 2013
до 1.09.2018

Оригинал-макет подготовлен В.В. Макаровой .

Подписано в печать 18.06.13
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 2. Тираж 50 экз. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочного факультета в процессе выполнения контрольной работы по теме «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных».

Математическое содержание данного раздела направлено на формирование у студента общекультурных (ОК) и профессиональных компетенций (ПК):

ОК-1	Владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения.
ОК-9	Способность к целенаправленному применению базовых знаний в области математических, естественных, гуманитарных и экономических наук в профессиональной деятельности.
ПК-1	Способность использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач.

В результате освоения материала студент должен:

Знать:	понятие функции нескольких переменных.
Уметь:	использовать математические методы в технических приложениях.
Владеть:	методами математического анализа.

Основной задачей теории функций нескольких переменных является описание различных процессов в природе и производстве, когда изменение одной переменной зависит от изменения нескольких переменных. Например: при изучении тепловых процессов в котлах высокого давления важным является знание температуры T, которая изменяется в зависимости от времени t и пространственных координат, т. е. $T = \varphi(x, y, z, t)$.

Тема 1. **ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Основные сведения из теории

При изучении функций нескольких переменных остановимся на функциях двух или трех переменных.

Определение. Если каждой паре чисел (x, y) из множества D на плоскости OXY по некоторому закону сопоставлено значение переменной z, то z называется функцией двух независимых переменных x, y. При этом множество D называется областью определения функции z.

Функцию двух переменных обозначают так:

$$z = f(x, y). \qquad (1.1)$$

1.2. Определение функции трех и более переменных

Определение. Если каждой рассматриваемой совокупности значений переменной $x, y, z, ..., v, t$ соответствует определенное значение переменной u, то u называется функцией независимых переменных $x, y, z, ..., v, t$ и обозначается так:

$$u = f(x, y, z, ..., v, t).$$

Областью определения функции трех переменных является некоторая совокупность троек чисел (x, y, z). Поскольку каждая упорядоченная тройка чисел задает точку в пространстве, то область определения функции трех переменных можно представить как совокупность точек в пространстве.

Область определения функции четырех и большего числа переменных не допускает простого геометрического истолкования.

1.3. Определение графика функции двух переменных

В уравнении (1.1) каждой точке M на плоскости с координатами (x, y) ставится в соответствие определенное значение переменной z. Тройка чисел $(x, y, z = f(x, y))$ определяет в пространстве единственную точку $P(x, y, z = f(x, y))$, проекцией которой на плоскость XOY является точка $M(x, y)$.

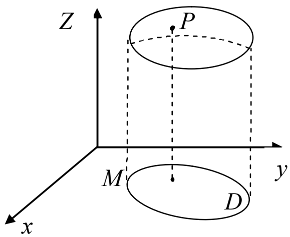


Рис. 1

Определение. Совокупность всех точек $P(x, y, z = f(x, y))$ называется графиком функции $z = f(x, y)$.

В простейших случаях графиком функции $z = f(x, y)$ является поверхность, проекция которой на плоскость XOY есть область D определения функции.

Уравнение (1.1.) может быть представлено в виде: $F(x, y, z) = 0$. Если это уравнение является уравнением первой степени, то оно представляет собой некоторую плоскость.

Поверхность, которую представляет уравнение второй степени, называется поверхностью второго порядка.

1.4. Определение предела функции двух переменных

Определение. Функция $f(x,y)$ имеет предел в точке $M_0(x_0,y_0)$ равный числу A, если она определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, за исключением, быть может, самой этой точки и если существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$, каким бы ни было направление движения от точки $M(x,y)$ к точке $M_0(x_0,y_0)$.

1.5. Определение непрерывной в данной точке функции двух переменных

Определение. Функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0,y_0)$, если выполняются три условия:

1) $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности и в самой точке;

2) существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$;

3) этот предел равен значению функции в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то точка M_0 является точкой разрыва функции.

1.6. Примеры решения задач

Задача 1. Выразить объем V цилиндра как функцию его высоты x и радиуса основания y.

Решение. Объем цилиндра равен $V = \pi r^2 H$. В нашем случае $H = x$; $r = y$. Получаем $V = \pi y^2 x$.

Задача 2. Найти значение функции $f(x, y) = xy + \dfrac{x}{y}$ при $x = 1$, $y = -1$ и при $x = 1$, $y = \dfrac{1}{2}$.

Решение. $f(1; -1) = 1 \cdot (-1) + \dfrac{1}{(-1)} = -1 - 1 = -2$.

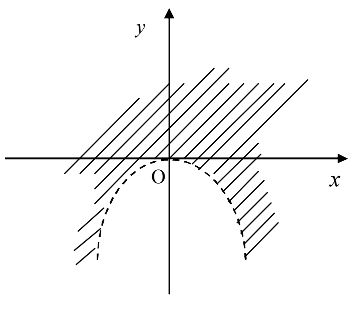
$$f\left(1; \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2} + 2 = 2{,}5.$$

Задача 3. Найти и изобразить область определения функций

а) $z = \ln(x^2 + y)$ б) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$ в) $z = \dfrac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$.

Решение. а) Так как логарифмы определены только для чисел положительных, то должно удовлетворяться неравенство $x^2 + y > 0$ или $y > -x^2$.

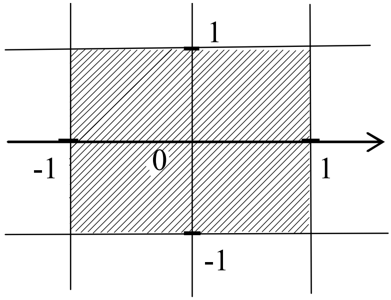
Построим график параболы $y = -x^2$ пунктирной линией. Неравенству $y > -x^2$ удовлетворяют точки плоскости, расположенные выше параболы, не включая самой параболы.



б) Чтобы z имело действительное значение, нужно чтобы под каждым корнем было неотрицательное число, т. е. нужно рассмотреть систему неравенств:

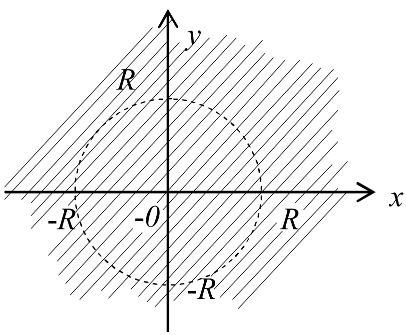
$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ y^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}.$$

Область определения: совокупность точек плоскости, расположенных внутри квадрата, включая границы.



в) Так как дробная функция не определена, если знаменатель равен нулю, то построим график окружности $x^2 + y^2 = R^2$ пунктирной линией.

Область определения функции: вся плоскость, за исключением точек окружности.



Задача 4. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

Решение.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2\sin^2\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \left(\begin{array}{c} \sin\alpha \sim \alpha \\ \text{при}\ \alpha \to 0 \end{array}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2(x^2+y^2)^2}{4(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2}.$$

Задача 5. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3}{x^3+y^3}$ не существует.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3}{x^3+y^3} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$ (пусть $y = kx$) $=$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3+k^3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3(1+k^3)} = \frac{1}{1+k^3}.$$

Предел зависит от значения углового коэффициента k, следовательно, предел не существует.

Задача 6. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}$.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = (y = kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+k^2x^2}{k^2x^4} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+k^2)x^2}{k^2x^4} = \dfrac{1+k^2}{k^2} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ при любом значении k.

Задача 7. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ не существует.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = (y = kx^2) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{kx^4}{x^4+k^2x^4} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{kx^4}{x^4(1+{}^2)} = \dfrac{k}{1+k^2}$.

Предел не существует, т. к. он зависит от направления движения.

Тема 2. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

2.1. Определение частных производных функции двух переменных

Пусть в некоторой области D задана функция двух переменных $z = f(x, y)$ и пусть $M_0(x_0, y_0)$ − некоторая внутренняя точка области D. Дадим независимому переменному x приращение $\Delta x = x - x_0$, тогда функция z получит частное приращение по x:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Определение. Частной производной от функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по независимой переменной x называется конечный предел отношения частного приращения

$\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю и обозначается одним из символов:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z(M_0)}{\partial x},\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\ z'_x.$$

Итак:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Понятия частных производных для функции другого числа переменных даются аналогично. Например: функция $u=f(x,y,z)$ будет иметь частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, а функция *n* переменных $F(x_1,x_2,...,x_n)$ будет иметь *n* частных производных первого порядка. При нахождении частной производной по одной переменной все остальные независимые переменные считаются постоянными.

2.2. Определение геометрического смысла частных производных

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в области D и точка $M_0(x_0,y_0)$ − внутренняя точка в D. Уравнение $z=f(x,y)$ задает некоторую поверхность. Если провести плоскость $y=y_0$, то сечение этой плоскости с поверхностью представляет собой некоторую линию, причем точка с координатами $P(x_0,y_0,z(x_0,y_0))$ принадлежит этой линии.

Определение. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ численно равна тангенсу угла наклона касательной к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$.

Определение. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ численно равна тангенсу угла наклона касательной к сечению поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $x = x_0$.

2.3. Определение механического смысла частных производных

Механический смысл частных производных следует из их определения.

$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ − скорость изменения функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении оси *ОХ*

$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ − скорость изменения функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении оси *ОУ*.

2.4. Определение дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в данной точке

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$, если в этой точке полное приращение функции можно представить в виде:

$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$, где

A и B − числа, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o(\rho)$ − бесконечно малая высшего порядка относительно ρ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

2.5. Определение полного дифференциала функции двух переменных

Определение. Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, т. е. $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$.

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Полный дифференциал вычисляется по формуле: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$.

2.6. Формула применения полного дифференциала к вычислению приближенного значения функции в точке

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ $\Delta z \cong dz$, т. е. $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = dz(x_0, y_0)$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \cong f(x_0, y_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y \quad (2.6)$$

2.7. Примеры решения задач

Задача 1. Найти частные производные функции двух переменных $z = x^2 + y^2 \cos x$.

Решение. Найдем частную производную по x, рассматривая y как постоянную величину:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + y^3 \cos x)'_x = (x^2)'_x + (y^3 \cos x)'_x = 2x + (y^3)'_x \cos x +$$

$$+ y^3 (\cos x)'_x = 2x + 0 \cdot \cos x + y^3(-\sin x) = 2x - y^3 \sin x .$$

В данном случае применили два правила нахождения производной для функции одной переменой:

1) $(u+v)' = u' + v'$ − производная от суммы равна сумме производных слагаемых;

2) производная от произведения: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

Кроме того $(y^3)'_x = 0$, т. к. переменную y рассматриваем, как постоянную величину.

Теперь найдем частную производную по y, рассматривая x, как постоянную величину.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + y^3 \cos x)'_y = (x^2)'_y + (y^3 \cos x)'_y = 0 + (y^3)'_y \cdot \cos x +$$

$$+ y^3 (\cos x)'_y = 0 + 3y^2 \cos x + y^3 \cdot 0 = 3y^2 \cos x .$$

Здесь применили те же правила для дифференцирования функции одной переменной.

$(x^2)'_y = 0$ и $(\cos x)'_y = 0$, т. к. переменную x рассматриваем как постоянную.

Задача 2. Найти частные производные функции двух переменных $z = \cos(2x + y^2)$.

Решение. Данная функция является сложной функцией. Здесь применимо правило отыскания производной сложной функции одной переменной:

$$(f(q(x))' = f'_q \cdot q'(x) .$$

Найдем производную по x, рассматривая y как постоянную величину.

$$(\cos(2x+y^2))'_x = -\sin(2x+y^2)\cdot(2x+y^2)'_x =$$
$$= -\sin(2x+y^2)\cdot((2x)'_x + ((y^2)'_x) = -\sin(2x+y^2)\cdot(2+0) =$$
$$= -2\sin(2x+y^2).$$

Теперь найдем производную по y, рассматривая x, как постоянную

$$(\cos(2x+y^2))'_y = -\sin(2x+y^2)\cdot(2x+y^2)'_y =$$
$$= -\sin(2x+y^2)\cdot((2x)'_y + ((y^2)'_y) = -\sin(2x+y^2)\cdot(0+2y) =$$
$$= -2y\sin(2x+y^2).$$

Задача 3. Найти частные производные функции трех переменных $u = 2x + 3y - 4z + x^4y^3z^2$.

Решение. Найдем частную производную по переменной x, считая y и z постоянными величинами $\frac{\partial u}{\partial x} = 2 + 4x^3y^3z^2$.

Найдем частную производную по y, считая x и z постоянными величинами $\frac{\partial u}{\partial y} = 3 + 3x^4y^2z^2$.

Найдем частную производную по z, считая x и y постоянными величинами $\frac{\partial u}{\partial z} = -4 + 2x^4y^3z$.

Задача 4. Для функции $z = f(x,y) = x^2 + y$ найти полное приращение и полный дифференциал в точке $(2;1)$; сравнить их, если $\Delta x = -0{,}1$; $\Delta y = 0{,}2$.

Решение. Найдем полное приращение функции Δz:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = [(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)] - (x^2+y) =$$
$$= x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 + y + \Delta y - x^2 - y = 2x\cdot\Delta x + \Delta y + \Delta x^2.$$

Линейная относительно Δx, Δy часть приращения функции называется полным дифференциалом и обозначается dz, т. е.

$$dz = 2x \cdot \Delta x + \Delta y .$$

Найдем численное значение Δz и dz:

$$\Delta z = 2x \cdot \Delta x + \Delta y + \Delta x^2 = 2 \cdot 2 \cdot (-0{,}1) + 0{,}2 + (-0{,}1)^2 =$$
$$= -0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}01 = -0{,}19 ;$$
$$dz = 2x \cdot \Delta x + \Delta y = 2 \cdot 2 \cdot (-0{,}1) + 0{,}2 = -0{,}4 + 0{,}2 = -0{,}2 .$$

С точностью до бесконечно малых высшего порядка можно написать приближенное равенство: $dz \approx \Delta z$, которое используется в приближенных вычислениях.

Задача 5. Найти полный дифференциал функции

$$z = y^3 \sin x^2 .$$

Решение. Вычислительная формула полного дифференциала имеет вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy .$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^3 \cos x^2 \cdot 2x , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \cdot \sin x^2 .$$

Полный дифференциал равен:

$$dz = 2y^3 x \cos(x^2)\, dx + 3y^2 \sin(x^2)\, dy .$$

Тема 3. **ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ, НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ, ПОВТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ**

3.1. Пусть $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Как найти производную функции $z = f[(\varphi(t), \psi(t)]$?

Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы, то производная вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}. \qquad (3.1)$$

3.2. Пусть $z=f(x,y)$, где $y=\varphi(x)$, тогда

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (3.2)$$

3.3. Пусть $z=f(x,y)$, где $x=x(u,v)$; $y=y(u,v)$, тогда:

$$\frac{dz}{du}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{dz}{dv}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (3.3)$$

3.4. Дифференцирование функций, заданных неявно

Теорема. Пусть выполнены условия:

1) $F(x,y,z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и некоторой ее окрестности;

2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$;

3) $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\neq 0$.

Тогда равенство $F(x,y,z)=0$ определяет неявную функцию $z=f(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

1) $z=f(x,y)$ однозначна и непрерывна в окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$;

2) $z(x_0,y_0)=z_0$;

3) имеет частные производные, которые вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} \qquad (3.4)$$

3.5. Определение частных производных второго порядка от функции $z = f(x, y)$

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в области D обе частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, которые сами являются функциями x, y. Поэтому от них снова можно находить частные производные.

Определение. Частные производные от $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ называют частными производными второго порядка от функции $z = f(x, y)$. Частные производные второго порядка обозначают так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ называют смешанными.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ имеет непрерывные вторые частные производные, то смешанные производные отличающиеся последовательностью дифференцирования, совпадают, т. е.

$$\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y\, \partial x}.$$

3.6. Определение частных производных высших порядков

Производные второго порядка можно снова дифференцировать по x и y.

Получим частные производные 3^го^ порядка.

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Определение. Частная производная n-го порядка от функции $z = f(x, y)$ есть производная от производной $(n-1)$-го порядка.

Например: $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right).$

Для функции любого числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

3.7. Примеры решения задач

Задача 1. Найти полную производную $\dfrac{dz}{dt}$ функции $z = e^{x-2y}$, если $x = \sin t$, $y = t^3$.

Решение. Используем правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-2y};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2e^{x-2y};\ \frac{dx}{dt} = \cos t;\ \frac{dy}{dt} = 3t^2.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{dz}{dt} = e^{x-2y} \cdot \cos t + (-2) \cdot e^{x-2y} \cdot 3t^2 \qquad \text{или}$$

$$\frac{dz}{dt} = e^{\sin t - 2t^3}(\cos t - 6t^2).$$

Задача 2. Найти частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = \ln(x+y)$ и полную производную $\dfrac{dz}{dx}$, если $y = x^3$.

Решение. Частная производная: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y}$. Полную производную найдем по формуле дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+y} \cdot y' = \frac{1}{x+x^3}\,(1+3x^2)\,.$$

Задача 3. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \operatorname{arctg}(xy)$, где $x = 2u + v$, $y = u - 3v$.

Решение. Найдем частные производные по формуле дифференцирования сложной функции: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+x^2y^2} \cdot y$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{1+x^2y^2} \cdot x$; $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 2$; $\dfrac{\partial y}{\partial u} = 1$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = 1$; $\dfrac{\partial y}{\partial v} = -3$.

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{y}{1+x^2y^2} \cdot 2 + \frac{x}{1+x^2y^2} \cdot 1 = \frac{2y+x}{1+x^2y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{y}{1+x^2y^2} \cdot 1 - 3 \cdot \frac{x}{1+x^2y^2} = \frac{y-3x}{1+x^2y^2}\,.$$

Задача 4. Найти частные производные функции z, заданной неявно:

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0\,.$$

Решение. Функция задана уравнением $F(x, y, z) = 0$. Искомые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z};\ F'_x=2x;\ F'_y=-4y-z+1;\ F'_z=6z-y.$$

Окончательно имеем: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{6z-y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1-4y-z}{6z-y}$.

Задача 5. Найти производную по x функции y, заданной неявно:

$$xy-\ln y=1.$$

Решение. Искомая производная $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$; $\frac{\partial F}{\partial x}=y$;

$\frac{\partial F}{\partial y}=x-\frac{1}{y}$, окончательно: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x-\frac{1}{y}}=-\frac{y^2}{xy-1}=\frac{y^2}{1-xy}$.

Задача 6. Найти все частные производные второго порядка функции:

$$z=x^3-4x^2y+5y^2.$$

Решение. Сначала найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-8xy;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-4x^2+10y.$$

Они являются функциями двух переменных, значит их можно еще дифференцировать по каждой переменной. Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=(3x^2-8xy)'_x=6x-8y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=(3x^2-8xy)'_y=-8x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (-4x^2 + 10y)'_y = 10\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (-4x^2 + 10y)'_x = -8x\,.$$

Задача 7. Найти полный дифференциал первого порядка функции

$$z = 2x^2 - 3xy + y^3\,.$$

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$; $\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 3y^2$.

Поэтому: $dz = (4x - 3y)\,dx + (3y^2 - 3x)\,dy$.

Тема 4. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1. Определение максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области D и точка $M_0(x_0, y_0)$ является внутренней точкой этой области.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 локальный максимум, если в некоторой окрестности этой точки функция удовлетворяет неравенству: $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ и в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет локальный минимум, если в ее окрестности выполняется неравенство: $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Максимум и минимум функции называются экстремумами функции.

4.2. Необходимые условия экстремума

Теорема. Если функция $z = f(x,y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то каждая частная производная первого порядка от z или обращается в нуль в этой точке или не существует. Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (или не существуют) называются критическими точками функции.

Теорема. Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой области D и точка $M_0(x_0, y_0)$ − ее критическая точка. Пусть при этом функция имеет частные производные второго порядка, непрерывные в точке M_0 и ее окрестности. Обозначим:

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \qquad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \qquad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

Тогда: 1) если $AC - B^2 > 0$, функция имеет в точке M_0 локальный экстремум, причем, если $A > 0$ − минимум, если $A < 0$ − максимум;

2) если $AC - B^2 < 0$, экстремума в точке M_0 нет;

3) если $AC - B^2 = 0$, то нужны дальнейшие исследования.

4.3. Примеры решения задач

Задача 1. Исследовать функцию $z = x^2 + y^3 - 3xy$ на экстремум.

Решение. 1) Найдем критические точки, пользуясь необходимыми условиями экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x^2 - y) = 0 \\ 3(y^2 - x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = x^4 \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \quad \Rightarrow x^4 - x = 0; \quad x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, т. е. $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$ − критические точки.

2) Найдем частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

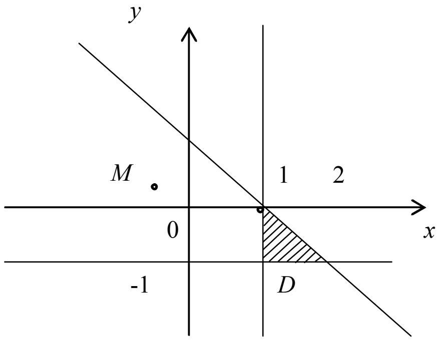
3) Используя достаточные условия экстремума, исследуем характер критических точек: $M_1(0, 0)$, $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$, $AC - B^2 = -9 < 0$, значит в точке $M_1(0, 0)$ экстремума нет.

$M_2(1, 1)$, $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$, $AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0$, значит, в точке $M_2(1, 1)$ экстремум есть, а т. к. $A > 0$, то точка $M_2(1, 1)$ − точка минимума.

$$z_{\min}(1; 1) = 1 + 1 - 3 = -1.$$

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в области D: $x \geq 1$, $y \geq -1$, $x + y \leq 1$.

Решение.



Область D − треугольник, заштрихованный на рисунке.

1) Найдем критические точки.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x+1=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1/2 \\ y=1/6 \end{cases} \Rightarrow \quad M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right).$$

Эта точка не принадлежит области D.

2) Исследуем функцию на границах области.

При $x=1$ имеем: $z=3y^2-y+2$ и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одного аргумента на отрезке $-1\le y\le 0$; $z'=6y-1$; $y=\dfrac{1}{6}\notin[-1;0]$. Найдем значения функции на концах отрезка: $z(-1)=6$, $z(0)=2$.

При $y=-1$ имеем: $z=x^2+x+4$ на отрезке $1\le x\le 2$; $z'=2x+1=0$, $x=-\dfrac{1}{2}\notin[1;2]$, $z(1)=6$, $z(2)=10$.

При $y = 1 - x$ имеем: $z = x^2 + 3(1-x)^2 + x + (x-1)$, $z = x^2 + 3 - 6x + 3x^2 + x + x - 1 = 4x^2 + 2 - 4x$ отрезке $1 \le x \le 2$, $z' = 8x - 4 = 0$; $x = \dfrac{1}{2} \notin [1;\,2]$; $z(1) = 2$, $z(2) = 10$.

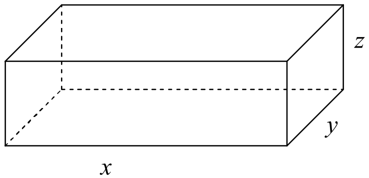
3) Из шести найденных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

$z_{\text{наибольшее}} = 10$ в точке $(2; -1)$;

$z_{\text{наименьшее}} = 2$ в точке $(1; 0)$.

Задача 3. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность?

Решение.



На рисунке обозначены размеры ванны:

$$V = x \cdot y \cdot z \Rightarrow z = \frac{V}{xy}.$$

Представим поверхность ванны (S) как функцию двух переменных x и y:

$$S = xy + 2yz + 2xz = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}.$$

Найдем экстремум данной функции $S(x, y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial x} = y - \dfrac{2V}{x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial y} = x - \dfrac{2V}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 y = 2V \\ xy^2 = 2V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = 2V \\ y^3 = 2V \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = y = \sqrt[3]{2V} \Rightarrow \text{ критическая точка } M(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}).$$

Найдем частные производные второго порядка

$$A = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3}\bigg|_M = \frac{4V}{2V} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 1, \quad C = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3}\Big|_M = 2.$$

$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$, $A > 0 \Rightarrow$ в точке M функция имеет минимум. Итак:

$$x = \sqrt[3]{2V}, \; y = \sqrt[3]{2V}, \; z = \frac{V}{\sqrt[3]{2V} \cdot \sqrt[3]{2V}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{4V^2}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V},$$

т. е. в основании – квадрат со стороной $\sqrt[3]{2V}$, а высота в два раза меньше стороны основания.

Тема 5. **ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ**

5.1. Определение производной функции $u = f(x, y, z)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *по направлению вектора* $\overline{S}$

Поместим начало вектора $\overline{S}$ в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. На векторе $\overline{S}$ возьмем точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ на расстоянии $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ от точки M_0, при этом функция $u = f(x, y, z)$ получит приращение

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Определение. Если существует конечный предел для отношения $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta S}$, то этот предел называется производной функции $u = f(x,y,z)$ по направлению $\bar{S}$ и обозначается: $\dfrac{\partial u}{\partial S}$.

Если функция $u = f(x,y,z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ − направляющие косинусы вектора $\bar{S}$.

5.2. Определение градиента функции $u = f(x,y,z)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Определение. Вектор, координаты которого в декартовой системе координат равны значениям частных производных функции в точке M_0, называется градиентом этой функции в заданной точке и обозначается:

$$\overline{\text{qrad}\, u} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Градиент функции в точке M_0 дает скорость (величину и направление) наибыстрейшего изменения функции в точке M_0.

5.3. Определение уравнений касательной плоскости и нормали к заданной поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, тогда, если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0, y_0)$, то уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$z - z_0 = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Уравнение нормали, т. е. прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно касательной плоскости, запишется в виде:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Если же поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функция $F(x, y, z)$ удовлетворяет условиям теоремы существования неявной функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$ (п. 3.4), то уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид:

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) +$$

$$+ \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Соответственно уравнение нормали запишется в виде:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}}.$$

5.4. Примеры решения задач

Задача 1. Найти производную функции $u = xy + yz + zx$ в точке $A(2,1,3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(5,5,15)$.

Решение. Найдем вектор $\overline{S} = \overline{AB}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{S} = \overline{AB} = \{5 - 2,\, 5 - 1,\, 15 - 3\} = \{3;\, 4;\, 12\}.$$

$$\left|\overline{S}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{13}, \quad \cos\beta = \frac{4}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{12}{13}.$$

Найдем частные производные функции u: $\frac{\partial u}{\partial x} = y + z$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = x + z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y + x$.

Найдем значения этих производных в точке A, подставив в выражения производных соответствующие координаты точки A.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_A = (1+3) = 4; \quad , \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_A = (2+3) = 5; \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A = (1+2) = 3.$$

Производная по направлению будет равна:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = 4\cdot\frac{3}{13} + 5\cdot\frac{4}{13} + 3\cdot\frac{12}{13} = \frac{12+20+36}{13} = \frac{68}{13}.$$

Задача 2. Найти величину и направление градиента функции $u = 3x^2 - 5y + 4z^3 + xy$ в точке $M_0(1, 0, -1)$.

Решение. Координаты вектора $\overline{\text{qrad}\, u}$ есть частные производные функции в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (6x + y)\Big|_{M_0} = 6, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (-5 + x)\Big|_{M_0} = -4, \ . \frac{\partial u}{\partial z} = 12z^2\Big|_{M_0} = 12,$$

$\overline{\text{qrad}}\, u = 6\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k}$.

Величина градиента равна:

$$\left|\overline{\text{qrad}}\, u\right| = \sqrt{6^2(-4)^2 + 12^2} = \sqrt{36+16+144} = \sqrt{196} = 14.$$

Найти направление вектора – значит найти его направляющие косинусы. Для $\overline{\text{qrad}\, u}$:

$$\cos\alpha = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}, \quad \cos\beta = \frac{-4}{14} = \frac{-2}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}.$$

Задача 3. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 + 4y^2$ в точке $M_0(2, 1, 12)$.

Решение. Поверхность $z = 2x^2 + 4y^2$ задана в явном виде. Найдем частные производные в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x\Big|_{M_0} = 8, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 8y\Big|_{M_0} = 8.$$

Уравнение касательной плоскости:

$z - 12 = 8(x-2) + 8(y-1)$ или

$8x + 8y - z - 16 - 8 + 12 = 0$

$8x + 8y - z - 12 = 0$.

Уравнение нормали: $\dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y-1}{8} = \dfrac{z-12}{-1}$.

Задача 4. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $3yxz - z^3 = 8$ в точке $M_0(0, 2, -2)$.

Решение. Поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, т.е. в неявном виде.

$F(x, y, z) = 3xyz - z^3 - 8$, поэтому уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеют вид:

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3yz\Big|_{M_0} = -12, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3xz\Big|_{M_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3xy - 3z^2\Big|_{M_0} = -12.$$

Запишем уравнение касательной плоскости:

$-12(x-0) + 0(y-2) - 12(z+2) = 0$ или

$-12x - 12(z+2) = 0$, т. е. $x + z + 2 = 0$.

Запишем уравнение нормали:

$$\frac{x-0}{-12} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+2}{-12} \quad \text{или} \quad \frac{x}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+2}{1}.$$

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Студент должен выполнять контрольное задание по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра).

I. В задачах 1 – 2 найти частные производные функций, в задачах 3 – 4 найти полные дифференциалы функций.

Вариант 1

1. $z = x^2 y + xy^2$
2. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3. $z = \dfrac{x}{y}$
4. $u = x^3 - 4x^2 y + 5z$

Вариант 2

1. $z = x + y + 2xy$
2. $u = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3}$
3. $z = \dfrac{y}{x}$
4. $u = x^2 - 3xy + yz$

Вариант 3

1. $z = x^2 \sin y$
2. $u = xy^2 z$
3. $z = e^{y/x}$
4. $u = \dfrac{yz}{x}$

Вариант 4

1. $z = y^2 \operatorname{tg} x$
2. $u = x^2 yz$
3. $z = e^{x/y}$
4. $u = \dfrac{xz}{y}$

Вариант 5

1. $z = e^{x^2 + y^2}$
2. $u = \ln(x + y + z^2)$
3. $z = \cos x \cdot \operatorname{arctg} y$
4. $u = x + y^2 + z^2$

Вариант 6

1. $z = e^{xy}$
2. $u = x \ln(yz)$
3. $z = \arcsin(xy)$
4. $u = x^2 + xy - xz$

Вариант 7

1. $z = x \cdot \cos y$
2. $u = \sqrt{xyz}$
3. $z = \ln \dfrac{x}{y}$
4. $u = \dfrac{y}{x+z}$

Вариант 8

1. $z = y \cdot \sin x$
2. $u = \dfrac{xy}{z}$
3. $z = \ln \dfrac{y}{x}$
4. $u = \dfrac{z}{x+y}$

Вариант 9

1. $z = x^y$
2. $u = xy + z$
3. $z = \sqrt{x+y}$
4. $u = z \ln (xy)$

Вариант 10

1. $z = y^x$
2. $u = x + yz$
3. $z = x \cdot 3^y$
4. $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

II. Вычислить частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

1. $z = x^3 - 4x^2 y + 5y^2$
2. $z = y \ln x - x \ln y$
3. $z = x^2 y + y^2 x$
4. $z = (xy)^2$
5. $z = \sin (x - y)$
6. $z = 2x^3 y^2$
7. $z = y^3 + 4xy^2$
8. $z = \cos (xy)$
9. $z = e^{x+y}$
10. $z = \ln (xy)$.

III. В задаче 1 вычислить частные производные функции $F(x, y) = 0$, заданной неявно; в задаче 2 вычислить полный дифференциал dz.

Вариант 1

1. $x^2 + y^2 = a^2$
2. $z = \sin(u - 7v)$, где
   $u = xy$, $v = x + y$

Вариант 2

1. $x^2 + y^2 - xy = 0$
2. $z = u^2 \cdot v$, где
   $u = x - y$, $v = \sin(xy)$

Вариант 3

1. $(y)^x - (x)^y = 0$
2. $z = e^u - e^v$, где
   $u = xy$, $v = y - x^2$

Вариант 4

1. $x - y \operatorname{tg} x = 0$
2. $z = u^2 \ln v$, где
   $u = \dfrac{x}{y}$, $v = 3y - 2x$

Вариант 5

1. $x^2 - \sqrt{y^2 + x^2} = 0$
2. $z = \operatorname{arctg}(uv)$, где
   $u = xy$, $v = y + x^2$

Вариант 6

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$
2. $z = (u - v)^2$, где
   $u = xy^3$, $v = x + y$

Вариант 7

1. $\sqrt{y^2 + x^2} - \dfrac{2}{x} = 0$
2. $z = u^3 - uv^2$, где
   $u = x \cos y$, $v = y \cdot \cos x$

Вариант 8

1. $x \cos y + y \cos x - 1 = 0$
2. $z = u^2 + 2v^2 + 1$, где
   $u = \dfrac{y}{x}$, $v = y \ln x$

Вариант 9

1. $\ln(y) + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$
2. $z = (u+v)^3$, где
   $u = x - y^2$, $v = y^2 x$

Вариант 10

1. $x^2 + 3y^2 + x - y = 0$
2. $z = \arcsin(u - v)$, где
   $u = 3xy$, $v = e^{xy}$

IV. Найти: *а*) $\overline{\text{qrad}\, z}$ функции $z = f(x, y)$ в точке $A(x, y)$, *б*) ее производную в направлении $\overline{AB}$.

1) $z = 2x^2 + xy$	$A(-1, 2)$; $B(2, 6)$
2) $z = x^2 + xy + y^2$	$A(1, 1)$; $B(3, 0)$
3) $z = x^3 y + xy^2$	$A(1, 3)$; $B(-4, 15)$
4) $z = \ln(2x + 3y)$	$A(2, 2)$; $B(-1, 4)$
5) $z = x^2 + xy$	$A(2, -1)$; $B(-3, 8)$
6) $z = x^2 + 2xy + 2y^2$	$A(1, 3)$; $B(-3, -5)$
7) $z = \ln(x^2 + xy^2)$	$A(1, 2)$; $B(4, -2)$
8) $z = x^2 + 2y^2 + 1$	$A(-3, 8)$; $B(7, -2)$
9) $z = x^2 y + xy^2$	$A(1, 1)$; $B(7, -7)$
10) $z = \text{arctg}(xy)$	$A(2, 3)$; $B(6, 6)$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для втузов/ Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс. 2008. − Т. 1. − 415 с.

2. Владимирский, Б.М., Горстко, А.Б., Ерусалимский, Я.М. Математика. Общий курс. Учебник. – СПб.: Лань, 2008. – 960 с.

3. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – СПб.: Лань, 2009. – 460 с.

Дополнительная литература

1. Письменный, Д.Г. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Г. Письменный. – М.: Айриспресс, 2007. – 288 с.

2. Данко, П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко. – М.: ОНИКС, 2008. – 816 с.