

Лабораторная работа №3

Численное дифференцирование

Присылаемый на проверку архив должен содержать 2 файла:

- файл отчета, содержащий титульный лист, условие задачи, результаты аналитических расчетов, формулы используемых методов, исходный текст программы (с указанием языка реализации) и результаты работы программы (можно в виде скриншотов);
- файл с исходным текстом программы (программу можно писать на любом языке программирования).

Задание на лабораторную работу

1. Рассчитать оптимальный шаг для построения таблицы значений функции, которая позволит с наименьшей погрешностью вычислить значения $f'(x)$ по приближенной формуле центральной разностной производной, если табличные значения функции вычислены с точностью 0.0001.
2. Найти погрешность, с которой можно найти $f'(x)$ с вычисленным в пункте а) оптимальным шагом.
3. Написать программу, которая
 - а) выводит таблицу значений функции с рассчитанным оптимальным шагом h на интервале $[c-h, c+16h]$ (таблица должна содержать 2 столбца: значения аргумента и соответствующее ему округленное до 0.0001 значение функции);
 - б) По составленной таблице вычисляет приближенные значения $f'(x)$ в точках $x_i = c + ih$, $i = 1, 2, \dots, 15$ по формуле центральной разностной производной;
 - в) выводит таблицу точных и приближенных значений производной (таблица должна содержать 3 столбца: значения x_i из пункта б) и соответствующие им приближенные и точные значения производной).

В качестве функции взять $f(x) = \frac{1}{c} \sin cx$, $c = N + 1$, где N – последняя цифра пароля.

Методические указания к выполнению лабораторной работы №3

Рассчитаем оптимальный шаг дифференцирования для приближенной формулы центральной разностной производной функции $f(x) = \frac{1}{576} \cos 24x$, если значения функции с точностью 0.001.

Известно, что оптимальный шаг для приближенной формулы центральной разностной производной оценивается по следующему равенству:

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}}, \text{ где } M_3 = \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f'''(x)|.$$

Найдем производные

$$f'(x) = \left(\frac{1}{576} \cos 24x \right)' = \frac{1}{576} (-24 \sin 24x) = -\frac{1}{24} \sin 24x$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{24} \sin 24x \right)' = -\frac{1}{24} (24 \cos 24x) = -\cos 24x$$

$$f'''(x) = (-\cos 24x)' = 24 \sin 24x$$

Так как функция синус может принимать значения от -1 до 1, то $|\sin 24x| \leq 1$ для любого x . Следовательно, $M_3 = \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |24 \sin 24x| = 24$.

По условию задачи погрешность значений функции равна $\varepsilon = 0.001$.

$$\text{Получаем } h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0.001}{24}} = \sqrt[3]{0.000125} \approx 0.05.$$

При выбранном шаге оптимальном шаге $h_{\text{опт}} = 0.05$ погрешность дифференцирования оценивается по формуле:

$$R \leq \frac{h^2 M_3}{6} + \frac{\varepsilon}{h} = \frac{0.05^2 \cdot 24}{6} + \frac{0.001}{0.05} = 0.01 + 0.02 = 0.03 < 0.1$$