



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Составители Т.С.Куницына,
Р.И. Лазарева,
М.В. Зголич.

Томск 2019

Интегральное исчисление. / Сост. Т.С. Куницына, Р.И. Лазарева, М.В. Зголич – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2019. – 40 с.

Методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Математика» при изучении темы «Интегральное исчисление» студентами заочной формы обучения всех специальностей и всех профилей подготовки специалистов и бакалавров.

Печатаются по решению методического семинара кафедры высшей математики, протокол № 7 от 6 апреля 2019 г.

Оригинал-макет подготовлен Т.С. Куницыной и Р.И. Лазаревой.

Подписано в печать 6.04.2019 г.
Формат 60×90/16. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 1,9.
Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

Введение	4
Тема 1. Неопределенный интеграл	5
1.1. Первообразная и неопределенный интеграл	5
1.2. Простейшие свойства неопределенного интеграла	5
1.3. Таблица основных интегралов	6
Тема 2. Основные методы интегрирования	6
2.1. Непосредственное интегрирование	6
2.2. Интегрирование методом замены переменной	7
2.3. Метод подведения функции под знак дифференциала	7
2.4. Интегрирование по частям	8
2.5. Интегрирование простейших рациональных дробей	9
2.6. Интегрирование рациональных дробей	10
2.7. Интегрирование тригонометрических выражений	13
Тема 3. Определенный интеграл	15
3.1. Основные понятия	15
3.2. Методы вычислений определенных интегралов	17
3.2.1. Подведение под знак дифференциала	17
3.2.2. Замена переменной в определенном интеграле	17
3.2.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле	18
3.3. Приложения определенного интеграла	18
3.4. Несобственные интегралы	20
Тема 4. Кратные интегралы	22
4.1. Двойной интеграл	22
4.2. Криволинейные интегралы	26
4.2.1. Криволинейные интегралы 1-го рода	26
4.2.2. Криволинейные интегралы 2-го рода	28
Задачи для контрольных заданий	30
Контрольные задания	39
Список рекомендуемой литературы	40

Введение

Предлагаемые методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов заочного факультета. Методические указания являются руководством для решения задач, содержат теоретические сведения, решения типовых задач, а также варианты контрольных заданий и дают ряд практических рекомендаций по выполнению контрольной работы по теме «Интегральное исчисление».

Данные указания рекомендуются для самостоятельной работы студентов в процессе изучения следующих разделов: неопределенный интеграл, определенный интеграл, кратные интегралы. В виду объемности материала для выполнения контрольного задания рекомендуется использование учебников и методических указаний из списка литературы. Решение заданий способствует успешному освоению предмета и позволяет подготовиться к итоговой аттестации по разделу «Интегральное исчисление».

Тема 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на данном промежутке, если в каждой точке этого промежутка $F'(x) = f(x)$, или, что то же, $dF(x) = f(x)dx$.

Пример. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной на всей оси Ox для функции $f(x) = \cos x$, так как для любого x $(\sin x)' = \cos x$.

Теорема. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке $[a, b]$, то любая другая первообразная для $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ может быть записана в виде $F(x) + C$, где C – некоторая константа.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на данном промежутке, называют неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначают символом $\int f(x)dx$ (читается: интеграл от эф от икс де икс).

Функция $f(x)$ называется при этом подынтегральной функцией, выражение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, символ $\int$ – знаком интеграла.

Пример. $\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, так как $\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)' = e^{-2x}$.

1.2. Простейшие свойства неопределенного интеграла

1. Постоянный множитель k ($k \neq 0$) можно выносить за знак неопределенного интеграла: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.

2. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций (если каждый из них существует):

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx.$$

1.3. Таблица основных интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$
2. $\int dx = x + C;$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1;$
5. $\int e^x dx = e^x + C;$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0;$
11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0;$
12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0;$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a \neq 0.$

Тема 2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1. Непосредственное интегрирование

Пример. Произведя тождественные преобразования подынтегральной функции, а также пользуясь свойствами неопределенного интеграла и формулами 1, 8 таблицы интегралов, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2(4+x^2)} &= \frac{1}{4} \int \frac{4dx}{x^2(4+x^2)} = \frac{1}{4} \int \frac{4+x^2-x^2}{x^2(4+x^2)} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{4+x^2} = -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

2.2. Интегрирование методом замены переменной

Если функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на некотором промежутке, а функция $f(x)$ непрерывна на соответствующем промежутке изменения x , то справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \quad (1)$$

которая называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле [1-5].

Пример. Требуется найти $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2}$. Обозначим $x = t + 1$,

тогда $dx = dt$, $t = x - 1$,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2} &= \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^2} dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \\ &= \frac{t^2}{2} + 3t + 3 \ln|t| - \frac{1}{t} + C = \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C. \end{aligned}$$

2.3. Метод подведения функции под знак дифференциала

Замена переменной в неопределенном интеграле чаще производится по формуле (1), прочитанной справа налево:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(t)dt, \quad (2)$$

где $t = \varphi(x)$.

Формула (2) позволяет вычислять неопределенные интегралы с помощью приема подведения функции под знак дифференциала.

Пример.
$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d(\ln x) = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

где $t = \ln x$.

2.4. Интегрирование по частям

Пусть $u(x)$, $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые на некотором промежутке функции, тогда справедлива формула

$\int u dv = uv - \int v du$, которая называется формулой интегрирования по частям. К числу интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, относятся интегралы вида

$\int P(x) \sin \alpha x dx$, $\int P(x) \cos \alpha x dx$, $\int P(x) e^{\alpha x} dx$, где $P(x)$ – многочлен, $\alpha \neq 0$. Здесь удобнее положить $u = P(x)$, а оставшиеся множители взять за dv . После однократного интегрирования по частям получатся интегралы того же типа, но степень многочлена $P(x)$ понизится на единицу. После n -кратного интегрирования по частям, где n – степень $P(x)$, останутся интегралы $\int \sin \alpha x dx$, $\int \cos \alpha x dx$, $\int e^{\alpha x} dx$, сводящиеся к табличным.

Пример. $\int (x^2 - 2x) e^{-x} dx$. Пусть $u = x^2 - 2x$, $dv = e^{-x} dx$, тогда $du = 2(x - 1) dx$, $v = \int dv = -e^{-x}$, то есть

$$\int (x^2 - 2x) e^{-x} dx = -(x^2 - 2x) e^{-x} + 2 \int (x - 1) e^{-x} dx.$$

Полагаем $u = x - 1$, $dv = e^{-x} dx$, тогда $du = dx$, $v = -e^{-x}$,

$$\int (x - 1) e^{-x} dx = -(x - 1) e^{-x} + \int e^{-x} dx = -(x - 1) e^{-x} - e^{-x} + C_1.$$

Окончательно получим:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x) e^{-x} dx &= (-x^2 + 2x) e^{-x} + (-2x + 2) e^{-x} - 2e^{-x} + C = \\ &= -x^2 e^{-x} + C, \text{ где } C = 2C_1. \end{aligned}$$

Интегралы вида $\int P(x) f(x) dx$, где $P(x)$ – любой многочлен; $f(x)$ – одна из следующих функций: $\ln x$, $\arcsin \alpha x$, $\arccos \alpha x$, $\arctg \alpha x$, $\text{arcctg} \alpha x$ при $\alpha \neq 0$ также вычисляются ме-

тодом интегрирования по частям, если положить $u = f(x)$, $dv = P(x)dx$.

Пример. Вычислить $\int (3x^2 + 2x) \ln x dx$.

Пусть $u = \ln x$, $dv = (3x^2 + 2x)dx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x^3 + x^2$, тогда $\int (3x^2 + 2x) \ln x dx = (x^3 + x^2) \ln x - \int (x^2 + x) dx =$
 $= (x^3 + x^2) \ln x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$.

Нахождение некоторых интегралов методом интегрирования по частям сводится к решению алгебраического уравнения относительно искомого интеграла. Интегралы этого вида, например, $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$ ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$), называются круговыми или циклическими или кольцевыми интегралами [1-5].

2.5. Интегрирование простейших рациональных дробей

Рассмотрим дроби вида(1-4). Они называются простейшими дробями.

$$1) \frac{1}{ax+b}, 2) \frac{1}{(ax+b)^m}, 3) \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}, 4) \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n},$$

где M, N, a, b, c – действительные числа; m, n – натуральные числа ($m \geq 2$, $n \geq 2$) и $b^2 - 4ac < 0$, то есть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет сопряженные комплексные корни.

Выясним, как интегрируются простейшие дроби.

$$1. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

2.

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a} \int (ax+b)^{-m} d(ax+b) = \frac{(ax+b)^{-m+1}}{a(-m+1)} + c$$

Дроби 3 и 4 интегрируются путем выделения из квадратного трехчлена полного квадрата и последующей подстановки.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{(7x-2)dx}{3x^2-5x+4} &= 12 \int \frac{(7x-2)dx}{3(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{4}{3})} = \int \frac{(7x-2)dx}{3\left(x^2-2\cdot\frac{5}{6}x+\frac{25}{36}-\frac{25}{36}+\frac{4}{3}\right)} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x - \frac{5}{6}, \quad du = dx, \\ x = u + 5/6 \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int \frac{(7(u+5/6)-2)du}{u^2 + \frac{23}{36}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{7udu}{u^2 + \frac{23}{36}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{23}{6} \int \frac{du}{u^2 + \frac{23}{36}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| u^2 + \frac{23}{36} \right| + \\ &+ \frac{23}{18} \frac{1}{\sqrt{23}/6} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{23}/6} + C_1 = \\ &= \frac{7}{6} \ln \left| \frac{36x^2 - 60x + 48}{36} \right| + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C_1 = \\ &= \frac{7}{6} \ln \left| \frac{3x^2 - 5x + 4}{3} \right| + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C \end{aligned}$$

2.6. Интегрирование рациональных дробей

Определение. Рациональной дробью или дробно-рациональной функцией относительно переменной x называется функция $R(x)$, представленная в виде $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно.

Определение. Дробь, у которой степень числителя строго меньше степени знаменателя ($n < m$) называется правильной рациональной дробью.

В противном случае дробь называется неправильной ($n \geq m$). Если дробь неправильная, необходимо поделить числитель на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен. В результате получим целую часть и остаток в виде правильной дроби [1-3].

Теорема. Если $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная

дробь, знаменатель $Q_m(x)$ которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (с действительными коэффициентами)

$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\lambda \dots (x^2+rx+s)^\mu$, то эта дробь может быть разложена на простейшие дроби по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \\ & + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \dots + \\ & + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \dots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $A_1, \dots, A_\alpha, \dots, B_1, \dots, B_\beta, M_1, N_1, \dots, M_\lambda, N_\lambda, \dots, R_1, S_1, \dots, R_\mu, S_\mu$ – некоторые действительные числа.

Пример. $R(x) = \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)}$ – правильная рациональная дробь. Разложим знаменатель на множители:

$(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4) = (x-2)(x-4)(x^2 + 4)$.

Представим дробь в виде суммы простейших дробей по схеме (3):

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4},$$

где A, B, C, D – пока неопределенные коэффициенты. Приводя дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравнивая многочлен, получившийся в числителе, к многочлену $9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$, получим

$$\begin{aligned} 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88 &= A(x-4)(x^2 + 4) + B(x-2)(x^2 + 4) + \\ &+ (Cx + D)(x^2 - 6x + 8), \text{ или} \\ 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88 &= (A + B + C)x^3 + (-4A - 2B - 6C + D)x^2 + \\ &+ (4A + 4B + 8C - 6D)x + (-16A - 8B + 8D). \end{aligned}$$

Для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x у них были равны. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получая тем самым систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов [1, 4, 5]:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + B + C = 9, \\ x^2 & -4A - 2B - 6C + D = -30, \\ x^1 & 4A + 4B + 8C - 6D = 28, \\ x^0 & -16A - 8B + 8D = -88. \end{array}$$

Решая эту систему линейных уравнений, находим $A = 5, B = 3, C = 1, D = 2$, тогда, получим:

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} = \frac{5}{x-2} + \frac{3}{x-4} + \frac{x+2}{x^2 + 4}.$$

Пример. $R(x) = \frac{x-7}{(x-1)(x^2+x-6)}$ – правильная рациональ-

ная дробь. Трехчлен $x^2 + x - 6$ имеет корни $x = 2, x = -3$, поэтому $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$. Тогда

$$\frac{x-7}{(x-1)(x^2+x-6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}.$$

В результате приведения к общему знаменателю будем иметь $x-7 = A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)$.

Покажем еще один способ нахождения неопределенных коэффициентов. Подставляя поочередно в левую и правую части равенства корни знаменателя $x = 1, x = 2, x = -3$, получим $-6 = -4A, -5 = 5B, -10 = 20C$ или $A = 3/2, B = -1, C = -1/2$.

Тогда
$$\frac{x-7}{(x-1)(x^2+x-6)} = \frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2(x+3)}.$$

Замечание. Используемые в примерах способы нахождения коэффициентов можно комбинировать [1-2].

2.7. Интегрирование тригонометрических выражений

Пример. $\frac{\sin^3 x + \cos x}{2 \sin x \cos^2 x + 3}$ – рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Универсальная подстановка

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, которая называется универсальной, приводится к интегралу от рациональной функции t , который всегда выражается в элементарных функциях. При такой подстановке $x = 2 \operatorname{arctg} t$;

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример. Вычислить

$$\int \frac{dx}{9 + 8 \cos x + \sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(9 + 8 \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 17} =$$

$$= 2 \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + 16} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{4} + C.$$

Частные подстановки

В указанных ниже случаях предпочтительными являются частные подстановки, которые также приводят к интегралам от рациональных функций [1-5].

1. Если подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x)$ является нечетной относительно $\sin x$, то есть если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применима подстановка $t = \cos x$. При этом $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$, $x = \arccos t$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$.

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ является нечетной относительно $\cos x$, то есть если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применима подстановка $t = \sin x$. При этом $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$, $x = \arcsin t$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$.

3.) Если $R(\sin x, \cos x)$ является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$, то есть если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применима подстановка $t = \operatorname{tg} x$. При этом $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1 + t^2}$.

Пример. Вычислить. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x - 3}$.

Подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3}$ является нечетной относительно $\sin x$, так как $R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x)^3}{\cos x - 3} = -\frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} = -R(\sin x, \cos x)$. Поэтому применим подстановку $t = \cos x$:

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x - 3} = - \int \frac{(\sqrt{1-t^2})^3}{t-3} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^2-1}{t-3} dt = \int \left(t+3 + \frac{8}{t-3} \right) dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + 8 \ln|t-3| + C = \frac{\cos^2 x}{2} + 3 \cos x + 8 \ln|\cos x - 3| + C.$$

Пример. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x}$. Здесь подынтегральная функция $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x}$ является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$, так как

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\sin x)^2 + 6(-\sin x)(-\cos x) - 16(-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x}.$$

Подставим $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(\frac{t^2}{1+t^2} + 6 \frac{t}{1+t^2} - 16 \frac{1}{1+t^2} \right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{d(t+3)}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{t+3-5}{t+3+5} \right| + c = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8} \right| + c$$

Тема 3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1. Основные понятия

На рис.1 приведен график непрерывной функции $f(x)$, определенный на интервале $[a, b]$. Производится разбиение интервала $[a, b]$ точками $a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_{n-1} = b$ на n частей.

Внутри каждого интервала осуществляется выбор точки $x = c_i$ (произвольным образом), и вычисляется значение функции

$f(c_i)$. Составляется сумма вида $\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \Delta x_i$, которая называется

интегральной суммой, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Если потребовать, что-

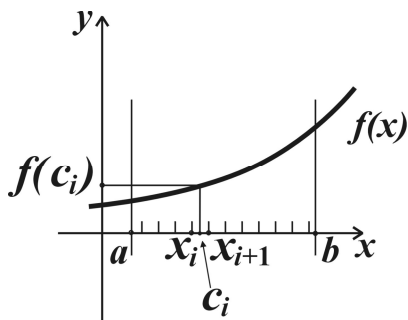


Рис. 1.

бы $\lambda = \max |\Delta x_i| \rightarrow 0$, тогда число слагаемых в интегральной сумме неограниченно возрастает.

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм $\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \Delta x_i$, то

он называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \Delta x_i. \quad (4)$$

Фигура (рис.1), ограниченная графиком функции $f(x)$, вертикальными прямыми $x=a$, $x=b$ и осью X , называется криволинейной трапецией. Для непрерывных функций $f(x)$ предел интегральных сумм совпадает с площадью криволинейной трапеции [1, 6, 7]. Таким образом, площадь криволинейной трапеции есть $S = \int_a^b f(x) dx$. Вычисление определенного интеграла произ-

водится по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (5)$$

Свойства определенного интеграла [1,6,7]: 1). Определенный интеграл от суммы функций равен сумме определенных интегралов. 2). Постоянный множитель можно выносить за знак

интеграла. 3). $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ при условии, что $f(x)$ интегрируема на большем из промежутков: $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{10} (2x^2 - 3x + 2)dx$. Используем

формулу Ньютона – Лейбница: $\int_0^{10} (2x^2 - 3x + 2)dx = \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^{10} -$

$$- \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_0^{10} = \frac{2}{3}10^3 - \frac{3}{2}10^2 + 2 \cdot 10 - \left(\frac{3}{2}0^3 - \frac{3}{2}0^2 + 2 \cdot 0 \right) = 536 \frac{2}{3}$$

3.2. Методы вычислений определенных интегралов

3.2.1. Подведение под знак дифференциала

Пример. Вычислить интеграл: $\int_1^3 \sqrt{1+x^2} x dx$. Воспользуемся операцией подведения под знак дифференциала [1, 5, 6], т.е. $x dx = \frac{1}{2} d(x^2 + 1)$.

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{1+x^2} x dx &= \left\{ \begin{aligned} d(1+x^2) &= 2x dx \\ x dx &= \frac{1}{2} d(1+x^2) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \int_1^3 \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_1^3 = \frac{1}{3} (10^{3/2} - 2^{3/2}). \end{aligned}$$

3.2.2. Замена переменной в определенном интеграле

Пример. Найти интеграл: $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$,

В подынтегральной функции выделим полный квадрат в знаменателе: $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 5 = (x+1)^2 + 2^2$.

Произведем замену переменных

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2 + 2^2} = \left\{ \begin{aligned} x+1 &= t, \Rightarrow dx = dt \\ \alpha &= 1+1 = 2, \\ \beta &= 3+1 = 4. \end{aligned} \right\} =$$

$$\int_2^4 \frac{dt}{t^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \Big|_2^4 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{4}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{8}$$

3.2.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Применим формулу интегрирования по частям. Тогда

$$\int_a^b U(x) dV(x) = U(x)V(x) \Big|_a^b - \int_a^b V(x) dU(x). \quad (6)$$

Пример. Найти интеграл: $\int_1^3 x e^x dx$.

Применим к интегралу формулу (6):

$$\int_1^3 x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} U(x) = x, \Rightarrow dU(x) = dx, \\ dV(x) = e^x dx, \Rightarrow \int dV(x) = \int e^x dx \\ V(x) = e^x. \end{array} \right\} = x e^x \Big|_1^3 - \int_1^3 e^x dx =$$

$$= 3e^3 - 3e - e^x \Big|_1^3 = 3e^3 - 3e - e^3 + e^1.$$

3.3. Приложения определенного интеграла

Вычисления площадей плоских фигур

В соответствии с геометрическим смыслом определенный интеграл может быть использован для вычисления площадей

плоских фигур $[1, 5, 6] \quad S = \int_a^b f(x) dx$.

Если уравнение линии, ограничивающей плоскую фигуру, задано в полярной системе координат, тогда площадь определяется

по формуле $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$, где $r(\varphi)$ – уравнение линии в

полярной системе координат.

Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = 4x - x^2$ и осью OX .

Решение. Данная кривая, $y = 4x - x^2$, есть парабола, ветви которой направлены «вниз», т.е. в противоположную сторону от на-

правления оси OY , рис. 2. Координаты вершины параболы $(x_0; y_0)$ найдем вычисляя $x_0 = -b/2a$ и $y_0 = 4x_0 - x_0^2$. Таким

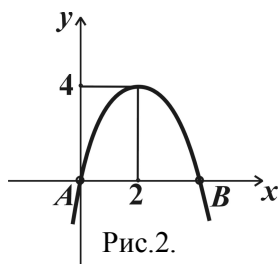


Рис.2.

образом, вершина расположена в точке с координатами $(2, 4)$. Найдем точки пересечения с осью OX , решая уравнение $4x - x^2 = 0$, получим $x = 0$ и $x = 4$. Парабола пересекает ось OX в двух точках с координатами $A(0,0)$, $B(4,0)$ (рис.2). Найдем площадь ограниченную параболой и осью OX [5, 6]. Из построения сле-

дует, что $x \in [A; B]$. Тогда площадь равна

$$S = \int_0^4 (4x - x^2) dx = 2x^2 \Big|_0^4 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^4 = 2(16 - 0) - \frac{1}{3}(48 - 0) = 16$$

Вычисление площадей поверхности и объемов тел вращения

Пусть дуга AB кривой $y=f(x)$, $x \in [a, b]$ вращается вокруг оси OX [6]. Площадь поверхности вращения и объем пространственного тела, полученного в результате вращения дуги AB , при условии, что $y=f(x)$ непрерывна вместе со своей производной, вычисляются по следующим формулам [1, 5, 6]:

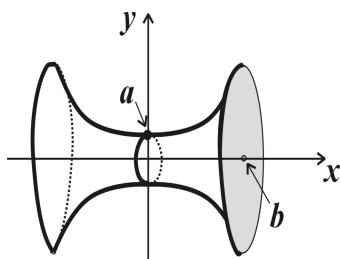


Рис. 3

$$S_{\text{поверхности}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (7)$$

Пример . Найти объем тела вращения, образуемого цепной линией

нией $f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ вокруг

оси OX на промежутке $x \in [0, b]$ где a – параметр цепной линии.

Решение: Объем тела вращения определим используя формулу (7). Подставим уравнение цепной линии, получим:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^b \left[\frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}) \right]^2 dx = \pi \int_0^b \frac{a^2}{4} (e^{x/a} + e^{-x/a})^2 dx = \\
 &= \pi \frac{a^2}{4} \int_0^b (e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}) dx = \pi \frac{a^2}{4} \int_0^b e^{2x/a} dx + \pi \frac{a^2}{4} 2x + \\
 &+ \pi \frac{a^2}{4} \int_0^b e^{-2x/a} dx =
 \end{aligned}$$

интегралы вычисляются заменой переменных

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ 2x/a = t, \Rightarrow dx = 0,5adt, \right\} + \left\{ -2x/a = t, \Rightarrow dx = -0,5adt, \right\} = \\
 &= \left\{ \alpha = 0, \Rightarrow \beta = 2b/a. \right\} + \left\{ \alpha = 0, \Rightarrow \beta = -2b/a. \right\} = \\
 &= \pi \frac{a^3}{8} \int_0^{2b/a} e^t dt - \pi \frac{a^3}{8} \int_0^{-2b/a} e^t dt + \frac{\pi b a^2}{2} = \pi \frac{a^3}{8} e^t \Big|_0^{2b/a} - \\
 &- \pi \frac{a^3}{8} (e^t \Big|_0^{-2b/a}) + \frac{\pi b a^2}{2} = \pi \frac{a^3}{8} (e^{2b/a} - e^{-2b/a}) + \frac{\pi b a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

3.4. Несобственные интегралы

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ ранее рассматривался на конечном промежутке $[a, b]$ и для ограниченной функции. Если промежуток неограничен, тогда несобственный интеграл 1-го рода определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \int_a^\infty f(x)dx &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^a f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^a f(x)dx \\
 \int_{-\infty}^\infty f(x)dx &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A f(x)dx.
 \end{aligned} \tag{8}$$

На любом из промежутков $[a; A]$, $[b; B]$ или $[A; B]$ функция $f(x)$ конечна и интегрируема.

Если $c \in (a, b)$ – внутренняя точка, и в точке c функция $f(c)$ неограниченна, тогда точка называется особой точкой. Несобственный интеграл 2-го рода определяется как

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx. \quad (9)$$

Если особая точка c совпадает с границей интервала $[a, b]$, т.е. $c=a$, (или $c=b$) тогда

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx. \quad (10)$$

Предполагается, что на любом промежутке $[c+\delta, b]$ (или $[a, b-\delta]$) функция $f(x)$ конечна и интегрируема.

Если предел в выражениях (8–10) конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится. Если предел бесконечен или не существует – интеграл расходится [3, 4].

Пример. Вычислить несобственный интеграл: $\int_2^{\infty} \frac{xdx}{x^2 - 2}$.

или доказать его расходимость. Согласно определению несобственного интеграла 1-го рода

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{xdx}{x^2 - 2} &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_2^B \frac{xdx}{x^2 - 2} = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2| \Big|_2^B = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\ln |B^2 - 2| - \ln |2^2 - 2|) = \infty. \end{aligned}$$

Интеграл расходится.

Пример. Вычислить несобственный интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{или доказать его расходимость}$$

Интеграл относится к несобственным интегралам 2-го рода. Особая точка совпадает с верхней границей интервала $[0, 1]$.

При $x=1$ подынтегральная функция имеет разрыв. Воспользуемся определением (10).

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\arcsin(x)|_0^{1-\delta}] =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} [\arcsin(1-\delta) - \arcsin(0)] = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Предел равен $\pi/2$ – конечное число, интеграл сходится.

Тема 4. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Если область интегрирования есть некоторая плоскость (функция двух переменных), тогда вычисляется двойной интеграл, в случае пространственного тела – тройной интеграл, для кривой – криволинейный интеграл.

4.1. Двойной интеграл

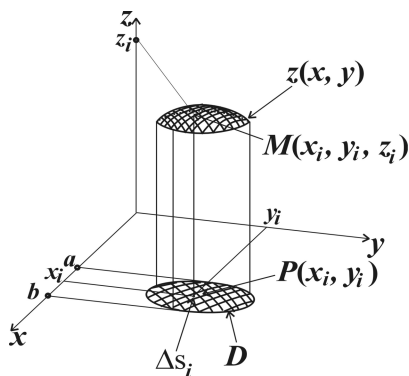


Рис. 4

На рис.4 приведен график функции $z = f(x, y)$, определенной в области интегрирования D . Функция является непрерывной в области определения. Для формулирования понятия двойного интеграла произведем разбиение области интегрирования D на n элементарных площадей двумя системами взаимно пересекающихся линий, которые обозначены через $\Delta s_1, \Delta s_2,$

$\Delta s_3, \dots, \Delta s_i, \dots, \Delta s_n$ (рис. 4). Системы линий располагаются произвольным образом. Внутри каждого интервала Δs_i осуществляется выбор точки $P(x_i, y_i)$ (произвольным образом), в которой вычисляется функция $z_i = f(x_i, y_i)$. Составим сумму ви-

да $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \Delta s_i$, которая называется интегральной суммой. Если потребовать, чтобы $\lambda = \max |\Delta d_i| \rightarrow 0$ (d_i диаметр i – элементарной площадки), тогда число слагаемых в интегральной сумме неограниченно возрастает.

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \Delta s_i$ при $\lambda = \max |\Delta d_i| \rightarrow 0$, причем предел не зависит от способа разбиения области D на n площадок, а также выбора точек $P(x_i, y_i)$, внутри Δs_i , тогда $\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \Delta s_i$ называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается символом

$$\iint_D f(x, y) ds \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \Delta s_i. \quad (11)$$

Объем цилиндрического тела (рис. 3), является геометрическим смыслом двойного интеграла от функции $f(x, y)$.

Свойства двойных интегралов:

- 1). В случае, если подынтегральная функция $f(x, y) = 1$, тогда двойной интеграл равен площади области интегрирования D (рис.6).
- 2). $\iint_D (f_1(x, y) + f_2(x, y)) ds = \iint_D f_1(x, y) ds + \iint_D f_2(x, y) ds$
- 3). Если область D разбита на части, не имеющие общих внутренних точек ($D = D_1 + D_2$), тогда

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_{D_1} f(x, y) ds + \iint_{D_2} f(x, y) ds.$$

Вычислительная формула двойного интеграла.

Пусть задана функция $f(x, y)$, непрерывная в области интегрирования D . График функции $z = f(x, y)$ приведен на рис. 5, а. В соответствии с геометрическим смыслом объем про-

пространственного тела равен $V = \iint_D f(x, y) ds$. Рассмотрим сечение пространственного тела плоскостью $x = \text{const}$. На рис. 5, а эта плоскость указана штриховкой. На рис. 5, б приведен ее след.

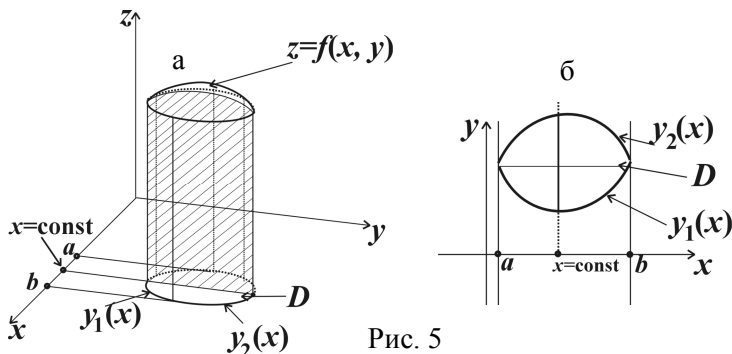


Рис. 5

Заштрихованная плоскость есть криволинейная трапеция, множество точек которой имеет одинаковую координату x ($x = \text{const}$). Ее площадь может быть вычислена с помощью опре-

деленного интеграла $S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, поскольку подынте-

гральная функция – это функция только переменной y . Очевидно, что пределы интегрирования меняются в зависимости от выбора сечения, т.е. от значения $x \in [a, b]$ (рис. 5, б). Объем пространственного тела равен

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (12)$$

Формула (12) связывает двойной интеграл с определенным. Таким образом, двойной интеграл записанный через повторные

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (13)$$

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x - y) dx dy$, если область D ограничена прямыми $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$.

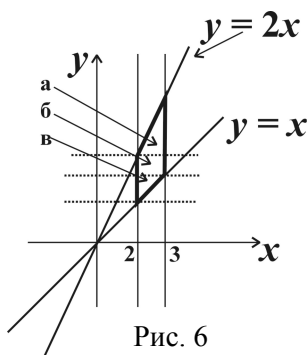


Рис. 6

Решение: Область интегрирования D двойного интеграла обладает некоторой особенностью (рис 6). Лучи, пересекающие область D параллельно оси OY и OX , не являются эквивалентными. В самом деле, точки входа луча в первом случае расположены на прямой $y = x$, а выхода — $y = 2x$. А во втором случае (лучи параллельны OX) точки входа в D расположены на двух прямых, $x = 2$, и

$x = 3/2 y$. Точки выхода луча также расположены на двух прямых, $x = 3$, и $x = y$. Для записи повторных интегралов необходимо, чтобы точки входа и выхода были расположены на общей прямой. Поэтому запишем внутренний интеграл по переменной y [6]. Если выбирается внутренний интеграл по переменной x , тогда область D должна быть разделена на 3 области (на рис. 6 области отмечены как а, б, в), в которых точки входа принадлежат одной прямой, точки выхода также принадлежат одной прямой. Вычислить необходимо три двойных интеграла [6]. Таким образом, для вычисления двойного интеграла внутренний интеграл определим по y .

$$\begin{aligned} \iint_D (x - y) dx dy &= \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x - y) dy = \int_2^3 \left[\int_x^{2x} x dy - \int_x^{2x} y dy \right] dx = \\ &= \int_2^3 \left[xy \Big|_x^{2x} - \frac{y^2}{2} \Big|_x^{2x} \right] dx = \int_2^3 \left[x(2x - x) - \frac{(4x^2 - x^2)}{2} \right] dx = \\ &= \int_2^3 \left(x^2 - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 - \frac{3x^3}{2 \cdot 3} \Big|_2^3 = -\frac{x^3}{6} \Big|_2^3 = -\left(\frac{3^3}{6} - \frac{2^3}{6} \right) = -\frac{19}{6}. \end{aligned}$$

4.2. Криволинейные интегралы.

4.2.1. Криволинейные интегралы 1-го рода

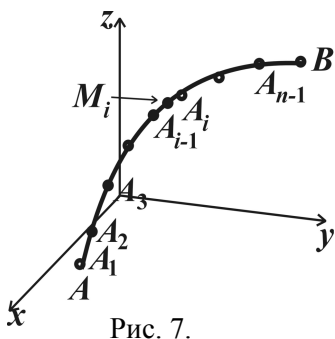


Рис. 7.

Дуга AB (рис. 7) задана функцией трех переменных $f(x, y, z)$. Разобьем дугу AB произвольным способом на n частичных дуг длиной Δl_i (где $i=1, \dots, n$). Внутри каждой дуги Δl_i выбирается произвольным образом точка $M(x_i, y_i, z_i)$, в которой вычисляется значение функции $f(x_i, y_i, z_i)$ и составляется интегральная сумма вида

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i.$$

Если потребовать чтобы $\lambda = \max |\Delta l_i| \rightarrow 0$,

тогда число слагаемых в сумме неограниченно возрастает.

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при $\lambda = \max |\Delta l_i| \rightarrow 0$, причем этот предел не зависит от способа разбиения дуги AB на n частичных дуг, а также произвольного выбора точек $M(x_i, y_i, z_i)$, тогда

$$\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i$$

называется криволинейным интегралом

1-го рода функции $f(x, y, z)$ по дуге AB и обозначается символом

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{AB} f(x, y, z) dl,$$

где dl – дифференциал дуги,

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Если на дуге AB , заданной на плоскости XOY , определена функция $f(x, y)$, тогда криволинейный интеграл 1-го рода определяется следующим образом: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \Delta l_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_{AB} f(x, y) dl$, а

$$\text{дифференциал дуги} - dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

К основным свойствам криволинейных интегралов 1-го рода относятся следующие. 1). Криволинейный интеграл не зависит от направления пути интегрирования

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl.$$

2). Криволинейный интеграл от суммы интегрируемых функций равен сумме интегралов от каждой функции.

$$\int_{AB} k \cdot f(x, y) dl = k \int_{AB} f(x, y) dl.$$

$$4). \int_{AB} f(x, y) dl = \int_{A\tilde{N}} f(x, y) dl + \int_{\tilde{N}B} f(x, y) dl.$$

Вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению определенного интеграла. Рассмотрим вычисление криволинейных интегралов 1-го рода для различных случаев задания уравнения дуги AB на плоскости XOY и в пространстве.

1). Пусть дуга AB задана на плоскости XOY : $y = \varphi(x)$,

где $a \leq x \leq b$, тогда $dl = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$, следовательно

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx. \quad (14)$$

2. Пусть кривая L задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \text{ где } \alpha \leq t \leq \beta. \text{ Тогда дифференциал дуги примет вид}$$

$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$, и криволинейный интеграл можно представить следующим выражением:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (15)$$

3. Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Тогда, используя формулы

$$\text{перехода к полярной системе координат} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \text{ диффе-}$$

ренцируем их и получаем выражение для дифференциала дуги $dl = \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$ и криволинейного интеграла

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (16)$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (x - y) ds$,

где L отрезок прямой от $A(0,0)$ до $B(4,3)$.

Решение: В задании указан криволинейный интеграл 1-го рода по отрезку прямой. Запишем уравнение прямой, проходящей через две точки $A(0,0)$ и $B(4,3)$. Каноническое уравнение

прямой имеет вид $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где (x_1, y_1) и (x_2, y_2) коор-

динаты известных точек. Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точки $A(0,0)$ и $B(4,3)$, имеет вид

$\frac{x}{4} = \frac{y}{3}, \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$. Воспользуемся формулой (14) для случая за-

дания линии на координатной плоскости

$$\begin{aligned} \int_L (x - y) ds &= \int_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right) \sqrt{1 + \left(\left(\frac{3}{4}x\right)'\right)^2} dx = \int_0^4 \frac{1}{4}x \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx = \\ &= \int_0^4 \frac{1}{4}x \frac{5}{4} dx = \frac{5}{16} \int_0^4 x dx = \frac{5}{16} \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{5}{32} 16 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

4.2.2. Криволинейные интегралы 2-го рода

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм (11) при $\lambda = \max |\Delta l_i| \rightarrow 0$, причем этот предел не зависит от способа разбиения дуги AB на n частичных дуг, а также произвольного выбора точек $M(x_i, y_i, z_i)$, тогда он называется криволинейным интегралом 2-го рода и обозначается символом

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i) \Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i) \Delta z_i = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (17)$$

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода.

1.) Из определения следует, что при изменении направления интегрирования криволинейный интеграл 2-го рода изменяет знак.

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = - \int_{BA} P dx + Q dy + R dz.$$

Остальные свойства криволинейного интеграла 2-го рода аналогичны свойствам криволинейных интегралов 1-го рода.

Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода также сводится к вычислению определенного интеграла. Для этого необходимо знать уравнение дуги AB (рис. 7).

Пример 2. Вычислить интеграл

$\oint_L 2xy dx + x dy$ в положительном направлении обхода по замкнутому контуру L фигуры, образованной линиями $y = 0$, $x = 1$, $y = x^2$.

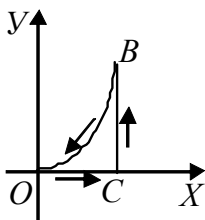


Рис. 8

Решение. Построим линии $y = 0$, это уравнение оси OX (прямая OC), $x = 1$ –

уравнение прямой BC , $y = x^2$ – уравнение параболы (кривая OB) и найдем точки пересечения линий (рис. 8), стрелками указано направление обхода. Из решения системы $y = 0$, $x = 1$ найдем точку пересечения $C(1; 0)$. Из решения системы $x = 1$, $y = x^2$ найдем точку $B(1; 1)$ и аналогично точку $O(0; 0)$. Поскольку замкнутый контур $OCBO$ (рис. 8) состоит из трех отрезков, то криволинейный интеграл по замкнутому контуру будет вычисляться как сумма интегралов по отрезкам OC , CB и

$BO \quad \int_{OCBO} = \int_{OC} + \int_{CB} + \int_{BO}$, где $\int_{OC} = \int_{OC} 2xydx + xdy$, $\int_{CB} = \int_{CB} 2xydx + xdy$,
и $\int_{BO} = \int_{BO} 2xydx + xdy$.

Уравнение OC есть $y=0$, тогда $dy=0$ и криволинейный интеграл на отрезке OC равен $\int_{OC} = 0$. Уравнение CB

есть $x=1$, тогда $dx=0$ и криволинейный интеграл на отрезке CB равен $\int_{CB} = \int_0^1 1dy = 1$. Уравнение BO есть $y=x^2$, тогда

$dy=2xdx$ и криволинейный интеграл на отрезке BO равен

$$\int_{BO} = \int_1^0 (2x^3 + 2x^2)dx = \left(\frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_1^0 = -\frac{7}{6}.$$

Следовательно, $\int_{OCBO} = \int_{OC} + \int_{CB} + \int_{BO} = 1 - \frac{7}{6} = \frac{1}{6}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1-10. Вычислить интегралы, применяя различные методы интегрирования:

1. $\int \left(\sqrt{2} + \frac{3}{4} \sqrt{x} + \frac{5}{x^2} \right) dx$
2. $\int \frac{(3e)^x + e^{2x}}{e^x} dx$
3. $\int \left(e^{-2x} + \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}} \right) dx$
4. $\int \cos x \sin^5 x dx$
5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(5x+2)^3}} dx$
6. $\int x^2 e^{-x} dx$
7. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2 (x+1)} dx$
8. $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+3} dx$
9. $\int \sin^7 x \cos^6 x dx$
10. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x}$

- 2.
- $\int \left(\pi^2 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x} + \frac{4}{x^3} \right) dx$
 - $\int (x-5)^2 \cdot x^3 dx$
 - $\int \left(\frac{1}{\cos^2 3x} - \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 4}} \right) dx$
 - $\int e^{2x} \sin e^{2x} dx$
 - $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx$
 - $\int x \operatorname{arctg} x dx$
 - $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 6}{(x+1)^2 (x^2 + 2)} dx$
 - $\int \frac{2x+3}{x^2 + 2x + 10} dx$
 - $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$
 - $\int \frac{dx}{4 - 2 \cos^2 x}$
- 3.
- $\int \left(e + \frac{7}{x} - \sqrt[4]{x} \right) dx$
 - $\int \frac{(2x+3)^2}{x} dx$
 - $\int \left(\cos 3x - \frac{1}{9+x^2} \right) dx$
 - $\int x^2 e^{x^3} dx$
 - $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x+1}}$
 - $\int x^4 \ln x dx$
 - $\int \frac{x^2 + 1}{x(x-1)^2} dx$
 - $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} dx$
 - $\int \cos^4 3x \sin^3 3x dx$
 - $\int \frac{dx}{2 \sin^2 x - \cos^2 x}$
- 4.
- $\int \left(\frac{1}{9} - \frac{3}{x^2} + \sqrt[5]{x} \right) dx$
 - $\int \frac{(\sin 2x + e^x \sin x)}{\sin x} dx$
 - $\int \ln(x+9) dx$
 - $\int \frac{x dx}{(x+1)(x^2 + 1)}$

$$3. \int \left(\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 1}} \right) dx$$

$$4. \int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$$

$$8. \int \frac{(x-1)}{x^2 + x + 1} dx$$

$$9. \int \sin^5 x \cos^3 x dx$$

$$10. \int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}$$

5.

$$1. \int \left(7 - \frac{6}{x^4} + \sqrt[3]{x} \right) dx$$

$$2. \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$$

$$3. \int \left(\frac{1}{\sin^2 8x} + \frac{5}{\sqrt{2x^2 + 4}} \right) dx$$

$$4. \int \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$5. \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$$

$$6. \int (15-x) \cdot 3^x dx$$

$$7. \int \frac{7x-22}{(x-1)(x^2-4)} dx$$

$$8. \int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+6}} dx$$

$$9. \int \cos^7 x \sin^3 x dx$$

$$10. \int \frac{dx}{2 + \sin x}$$

6.

$$1. \int \left(\sqrt{3} - \frac{2}{x} + 3 \sqrt{x} \right) dx$$

$$2. \int 2^{3x} \cdot 3^x dx$$

$$3. \int \left(e^{x/7} + \frac{1}{3x^2 - 4} \right) dx$$

$$4. \int \frac{5^{\operatorname{arctg} x}}{2(1+x^2)} dx$$

$$6. \int \frac{6x+1}{\cos^2 x} dx$$

$$7. \int \frac{3x-1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

$$8. \int \frac{2x-1}{x^2 + 2x + 10} dx$$

$$9. \int \cos^5 x dx$$

$$5. \int \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{3 \cos x}$$

$$7. \quad 1. \int \left(\sqrt[3]{x^2} - 4 - \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$6. \int (x - 4) \sin 2x dx$$

$$2. \int (2x + 3)x^3 dx$$

$$7. \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2} dx$$

$$3. \int \left(\cos\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{2}{\sqrt{7 - 2x^2}} \right) dx$$

$$8. \int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} dx$$

$$4. \int \sqrt[6]{1 - 2x^3} \cdot x^2 dx$$

$$9. \int \sin^2 6x dx$$

$$5. \int \frac{x - 1}{\sqrt{2x - 1}} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$$

$$8. \quad 1. \int \left(5x - \sqrt[7]{x} + \frac{3}{x^3} \right) dx$$

$$6. \int \frac{7x - 3}{\sin^2 x} dx$$

$$2. \int \frac{(x^3 - 3)}{x} dx$$

$$7. \int \frac{x - 4}{(x - 2)(x - 3)} dx$$

$$3. \int \left(\sin 6x + \frac{3}{5x^2 - 3} \right) dx$$

$$8. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$$

$$4. \int \sqrt[4]{\cos x} \cdot \sin x dx$$

$$9. \int \sin^3 2x \cdot \cos^6 2x dx$$

$$5. \int \frac{x + 1}{x \sqrt{x - 2}} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}$$

$$9. \quad 1. \int \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{5} \right) dx$$

$$6. \int \frac{3x}{\cos^2 5x} dx$$

$$2. \int \frac{x^4 - 1}{x - 1} dx$$

$$3. \int \left(e^{-3x} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 7}} \right) dx$$

$$4. \int \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$$

$$7. \int \frac{1}{(2x - 3)(4x + 1)} dx$$

$$8. \int \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 5} dx$$

$$9. \int \sin^9 x \cdot \cos^3 x dx$$

$$10. \int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}$$

$$10. \quad 1. \int \left(\frac{x^4}{2} - 7\sqrt{x} + 9 \right) dx$$

$$2. \int \frac{1 - x}{x^2 - x} dx$$

$$3. \int \left(\sin \frac{x}{9} - \frac{3}{\sqrt{4 - 3x^2}} \right) dx$$

$$4. \int \frac{dx}{\cos^2 x (\operatorname{tg} x - 7)}$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x + 1} - 1}$$

$$6. \int x \cdot 2^{x+5} dx$$

$$7. \int \frac{x^2 + x + 2}{(x - 1)^2 (2x + 3)} dx$$

$$8. \int \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 5} dx$$

$$9. \int \sin^4 3x \cdot \cos^3 3x dx$$

$$10. \int \frac{dx}{2 \cos^2 x + \sin^2 x}$$

11-20. Вычислить определенные интегралы:

а) методом подведения под знак дифференциала; б) замены переменной; в) интегрированием по частям;

$$11. \text{ а). } \int_0^{\pi/6} e^{\sin(x)} \cos(x) dx; \quad \text{ б). } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}; \quad \text{ в). } \int_1^e x^2 \ln(x) dx.$$

12. а). $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos(x)} \sin(x) dx$; б). $\int \frac{dx}{4x - \sqrt{x}}$; в). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$.
13. а). $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2} dx$; б). $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{2x - \sqrt{2x}}$; в). $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{-x} dx$.
14. а). $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2} dx$; б). $\int_6^{25} x^3 \sqrt{x+2} dx$; в). $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{-3x} dx$.
15. а). $\int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx$; б). $\int_2^9 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+7}}$; в). $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{\frac{-x}{2}} dx$.
16. а). $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$; б). $\int_5^7 \frac{1}{x^2 - 2x + 3} dx$; в). $\int_1^2 (x+1)^2 \ln(x) dx$.
17. а). $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(2x) \sin(2x) dx$; б). $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$; в). $\int_1^2 x \ln(2x+1) dx$.
18. а). $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x \operatorname{ctg}(x^2 + \frac{2\pi}{3}) dx$; б). $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$; в). $\int_3^4 x e^{2x-3} dx$.
19. а). $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2x)}{\cos^2(2x)} dx$; б). $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos(x)}$; в). $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos(2x) dx$.
20. а). $\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg}(\frac{x}{2})}{4+x^2} dx$; б). $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$; в). $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x)^2 e^{2x+1} dx$.

21-30. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$21. \text{ а). } \int_1^{\infty} x e^{x^2} dx;$$

$$22. \text{ а). } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx;$$

$$23. \text{ а). } \int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2 + 1} dx;$$

$$24. \text{ а). } \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx;$$

$$25. \text{ а). } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx;$$

$$26. \text{ а). } \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx;$$

$$27. \text{ а). } \int_1^{\infty} \frac{5}{2x+3} dx;$$

$$28. \text{ а). } \int_2^{\infty} x e^{x^2+1} dx;$$

$$29. \text{ а). } \int_1^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx;$$

$$30. \text{ а). } \int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2} - 1} dx;$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\text{б)} \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx.$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx.$$

$$\text{б)} \int_0^3 \frac{1}{(x-2)^2} dx.$$

$$\text{б)} \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{(x-3)^3}} dx.$$

$$\text{б)} \int_1^2 \frac{1}{x \ln(x)} dx.$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx.$$

$$\text{б)} \int_0^2 \frac{1}{2-x} dx.$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{x}{(x^2-1)^2} dx.$$

$$\text{б)} \int_2^3 \frac{1}{\sqrt[5]{(x-3)^3}} dx.$$

31-40. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$31. \quad y = x^2, \quad y = -x^2 + 2.$$

$$32. \quad y = x, \quad y = -x + 2, \quad y = 0.$$

$$33. \quad y = x^2 + 1, \quad y = x + 1.$$

$$34. \quad y = x^3, \quad y = x.$$

$$35. y = \sqrt{x}, \quad y = x^2.$$

$$36. y = \frac{x^2}{3}, \quad y = 3.$$

$$37. y = x^2 + 1, \quad y = -x + 3.$$

$$38. y = (x+1)^2, \quad y = -x + 1, \quad y = 0.$$

$$39. y = x^2, \quad y = -2x + 3.$$

$$40. y = 2x - x^2, \quad y = -x.$$

41-50. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линией.

$$41. y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

$$42. y = \sin(x), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

$$43. y = \cos(x), \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

$$44. y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2.$$

$$45. y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1.$$

$$46. y = 4x, \quad x = 4.$$

$$47. y = 1 - x^2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

$$48. y = 2 + x^2, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

$$49. y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

$$50. y = (x-1)^2, \quad y = 1.$$

51-60. Вычислить двойной интеграл по области D . Построить область.

$$51. \iint_D x dx dy, \text{ где } D - \text{треугольник } OAB. O(0;0); A(1;1) \text{ и } B(0;1).$$

52. $\iint_D x dx dy$, где D – ограничена прямой, проходящей через

точки $A(2;0)$ и $B(0;2)$, прямой $y = 0$ и кривой $x = \sqrt{y}$.

53. $\iint_D xy dx dy$, где D – треугольник OAB . $O(0;0)$, $A(2;3)$ и $B(4;0)$.

54. $\iint_D e^x y dx dy$, где $D: y^2 = x, x = 0, y = 1$.

55. $\iint_D (x + 2y) dx dy$, где $D: y = x^2, y = \sqrt{x}$.

56. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где $D: y = x, y = 2 - x, x = 0$.

57. $\iint_D xy dx dy$, где D – трапеция $C(4;2), D(5;1), A(1;1)$ и $B(2;2)$.

58. $\iint_D (x + 2y) dx dy$, где $D: y = -x^2, y = -\sqrt{x}$.

59. $\iint_D (4 - y) dx dy$, где $D: 4y = x^2, y = 1, x = 0 (x > 0)$.

60. $\iint_D y dx dy$, где D – треугольник OAB . $O(0;0); A(-1;1)$ и $B(1;1)$.

61-70. Вычислить криволинейные интегралы. Сделать чертеж.

61. $\int_L \frac{dl}{y - x}$, где L – отрезок прямой $y = 3x - 2$, от $A(0, -2)$ до $B(2, 4)$.

62. Найти длину кардиоиды: $r = a(1 + \cos \varphi)$.

63. $\int_L (x^2 + y^2)^2 dl$, где L – окружность $x = a \cos t, y = a \sin t$.

64. $\int_L \sqrt{4y + 1} dl$, где L – дуга $y = x^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$.

65. $\int_L \sqrt{2y} dl$, где L – первая арка циклоиды

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

66. $\int_{OA} y(x - y) dx + x dy$ по кривой $y = 2x^2$ от точки $O(0;0)$ до $A(1;2)$.

67. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$,
 $-1 \leq x \leq 1$.
68. $\int_L (2 - y)dx + xdy$, где L – арка циклоиды $x = t - \sin t$,
 $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
69. $\int_L (x + y)dx - (x - y)dy$, вдоль ломаной $L = OAB$, где
 $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;5)$.
70. $\int_L ydx + xdy$, где L – четверть эллипса $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ от
 $t = 0$ до $t = \pi/2$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.

Ниже приведена таблица номеров задач, входящих в задание на контрольную работу «Интегральное исчисление». Номер варианта совпадает с последней цифрой учебного номера (шифра).

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номера задач кон- трольных заданий	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лесняк, Л.И. Интеграл и его приложения / Л.И. Лесняк, В.А. Старенченко. – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 264 с.

2. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов по направлению "Технические науки" (550000). – СПб. [и др.]: Лань, 2009. – 727 с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1980. – Ч. 1. Гл. IX – X. С. 208 – 256.
4. Дорофеева Н.С., Казачков А.Б. Неопределенный интеграл. Методические указания – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2013. – 30 с.
5. Куницына Т.С. Неопределенный и определенный интеграл. Методические указания. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2015. – 40 с.
6. Абзаев Ю.А., Радченко И.В., Радченко А.В. Определенный интеграл. Методические указания. — Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2007.– 25 с.
7. Лазарева Р.И., Абзаев Ю.А. Кратные и криволинейные интегралы. Методические указания. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2015. – 40 с.