

Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Уральский государственный университет путей сообщения
Кафедра «Электроснабжение транспорта»

А. В. Паранин
Д.А. Ефимов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Екатеринбург
УрГУПС
2019

Федеральное агентство железнодорожного транспорта
Уральский государственный университет путей сообщения
Кафедра «Электроснабжение транспорта»

А. В. Паранин

Д.А. Ефимов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

практикум по дисциплине «Математическое моделирование в
профессиональной деятельности»
для студентов всех форм обучения направления подготовки
13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника»
направленность «Автоматика энергосистем»

Екатеринбург
УрГУПС
2019

УДК 621.331:621.311.019.3

П18

Паранин, А. В.

П18 Математическое моделирование систем и процессов в профессиональной деятельности : практикум / А. В. Паранин, Д. А. Ефимов. – Екатеринбург : УрГУПС, 2019

Практикум содержит теоретические сведения и рекомендации для выполнения практических задач по дисциплине «Математическое моделирование в профессиональной деятельности». Практикум составлен в соответствии с программой по дисциплине «Математическое моделирование в профессиональной деятельности» для студентов всех форм обучения направления подготовки 13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника» направленность «Автоматика энергосистем»

УДК 621.331:621.311.019.3

Практикум утвержден на заседании кафедры «Электроснабжение транспорта», протокол № 1 от 29 августа 2019 г.

Авторы: А. В. Паранин – канд. техн. наук, доцент кафедры Электроснабжение транспорта (УрГУПС)
Д.А. Ефимов – канд. техн. наук, доцент кафедры Электроснабжение транспорта (УрГУПС)

Рецензенты: И. С. Цихалевский, – канд. техн. наук, доцент кафедры «Электрическая тяга», УрГУПС

© Уральский государственный университет
путей сообщения (УрГУПС), 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1	5
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2	18
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3	21
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4	30
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5	36
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6	42
ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ	48
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	48

ВВЕДЕНИЕ

Mathcad является универсальным математическим пакетом, позволяющим решать большое количество сложных задач без использования программирования.

Пакет Mathcad разработан с учетом интересов простого пользователя. Реализован интуитивно понятный интерфейс, основной упор сделан на наглядность и простоту работы со средой. Разработчики сделали все возможное, чтобы пользователь не чувствовал себя брошенным в чуждую и враждебную среду. Для работы с Mathcad достаточно базовых навыков пользователя. Работа в Mathcad немногим сложнее работы в таких приложениях, как Word и «Калькулятор», и, пожалуй, даже проще работы в Excel.

Основным преимуществом Mathcad являются:

- широкие возможности;
- простота и удобство эксплуатации;
- легкость и наглядность программирования задач.

В Mathcad реализован принцип: «Что видишь – то и получаешь». Сложные математические формулы записываются без использования всяческих галочек и звездочек вместо возведения в степень и умножения.

Mathcad работает как интерпретатор. Все совершенные пользователем ошибки немедленно помечаются. В любой момент можно проверить значение конкретного параметра.

Пакет Mathcad создавался как мощный научный калькулятор, позволяющий легко справляться с вычислением сложных формул и функций, решением алгебраических уравнений, упрощением алгебраических уравнений, решением дифференциальных уравнений, анализом функций, построением их графиков, поиском экстремумов, численным и аналитическим дифференцированием и интегрированием и тому подобного.

Первые версии Mathcad появились еще задолго до появления Windows, но широкого распространения они не получили. Это связано с отсутствием графического интерфейса в этих версиях и малой мощности компьютеров. Набор математических формул был достаточно запутанным и утомительным занятием, поскольку требовалось знать десятки клавиатурных комбинаций. Чтобы прочувствовать, как сложно приходилось тогдашним пользователям, можно и сейчас отключить мышку и попробовать управляться с любым приложением, используя только клавиатуру.

В начале 1990х годов, с распространением Windows, произошло второе рождение Mathcad. Для работы в Windows 3 была разработана очередная версия программы Mathcad 3.0. Mathcad 3.0 был уже вполне доступен для эксплуатации не только программистами, но и обычными пользователями. С тех пор программа непрерывно дорабатывается, отшлифовывается и дополняется новыми функциями и возможностями, разрабатываются более удобные функции и вычислительные блоки.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

РАССМОТРЕНИЕ ПРИМЕРОВ ПРОСТЕЙШИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ, ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ, ЗАДАНИЯ ПЕРМЕННЫХ, ФУНКЦИЙ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Задание и исходные данные:

Интерфейс

Для запуска Mathcad необходимо либо щелкнуть на соответствующей пиктограмме на рабочем столе, либо в меню Пуск зайти в MathSoft Apps и там выбрать Mathcad.

После запуска программы загрузятся 3 окна: главное окно Mathcad , окно Resource Center и окно Tip of the Day. Окно Tip of the Day (Совет Дня) хорошо знакомо пользователям пакета Microsoft Office как одно из стандартных окон. Оно содержит описание одной из произвольно выбранных возможностей Mathcad. Перед началом работы это окно надо закрыть, нажав на кнопку Close. Если мы не хотим, что бы это окно появилось при следующем запуске, достаточно убрать галочку в флажке Show tips on startup. Если содержимое окна нас заинтересовало и мы хотим увидеть еще один совет, достаточно щелкнуть на кнопке Next tip.

Окно Resource Center (Центр документации) содержит справочную информацию о работе в Mathcad. Опять же закроем это окно.

Для того чтобы оба эти окна больше не появлялись при запуске, необходимо в меню Tools (Сервис) выбрать подпункт Preferences (Параметры) и в возникшем окне убрать соответствующий флажок Show Mathcad tips at startup.

Рассмотрим теперь главное окно Mathcad. Оно является стандартным для большинства приложений операционной системы

Windows. Выглядит, как показано на рис.1.1

В строке заголовка представлено имя открытого документа Mathcad. По умолчанию он называется Untitled1.

Главное меню

Ниже строки заголовка расположена строка главного меню. В строке меню сгруппированы все те действия, которые выполняются в окне Mathcad. При нажатии на любой пункт главного меню появляется список меню первого уровня. Некоторые пункты меню первого уровня содержат подменю второго уровня. Такие пункты помечены справа треугольником. Рассмотрим подробнее пункты главного меню.

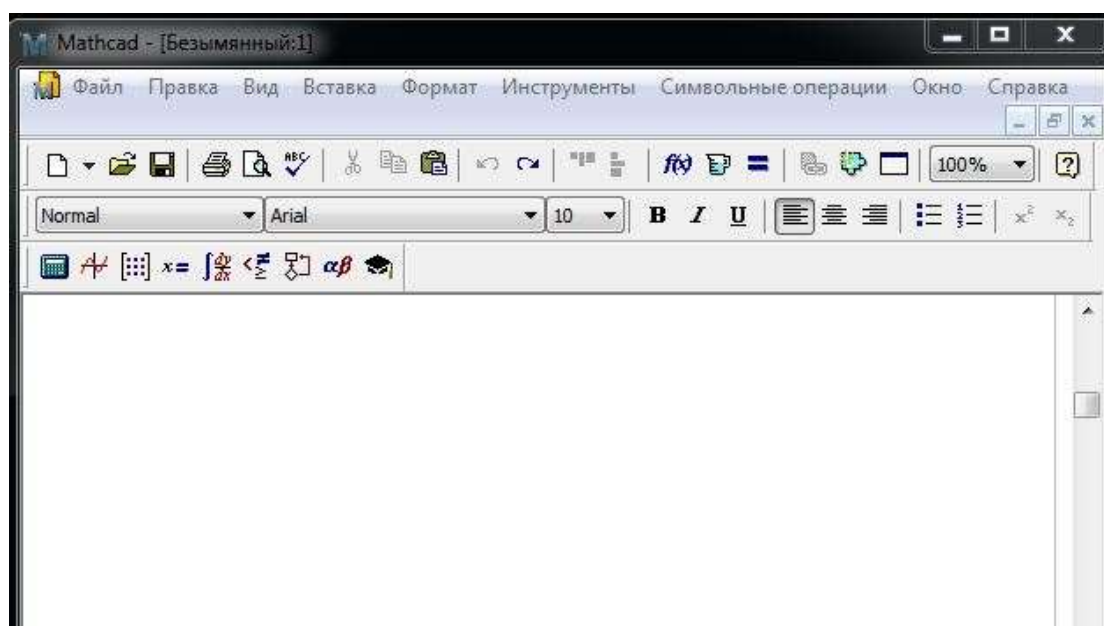


Рис.1.1 Основное окно программы

Файл

В меню сгруппированы действия, связанные с выходом из программы, открытием, закрытием, созданием и печатью документов (см. рис. 1.2)

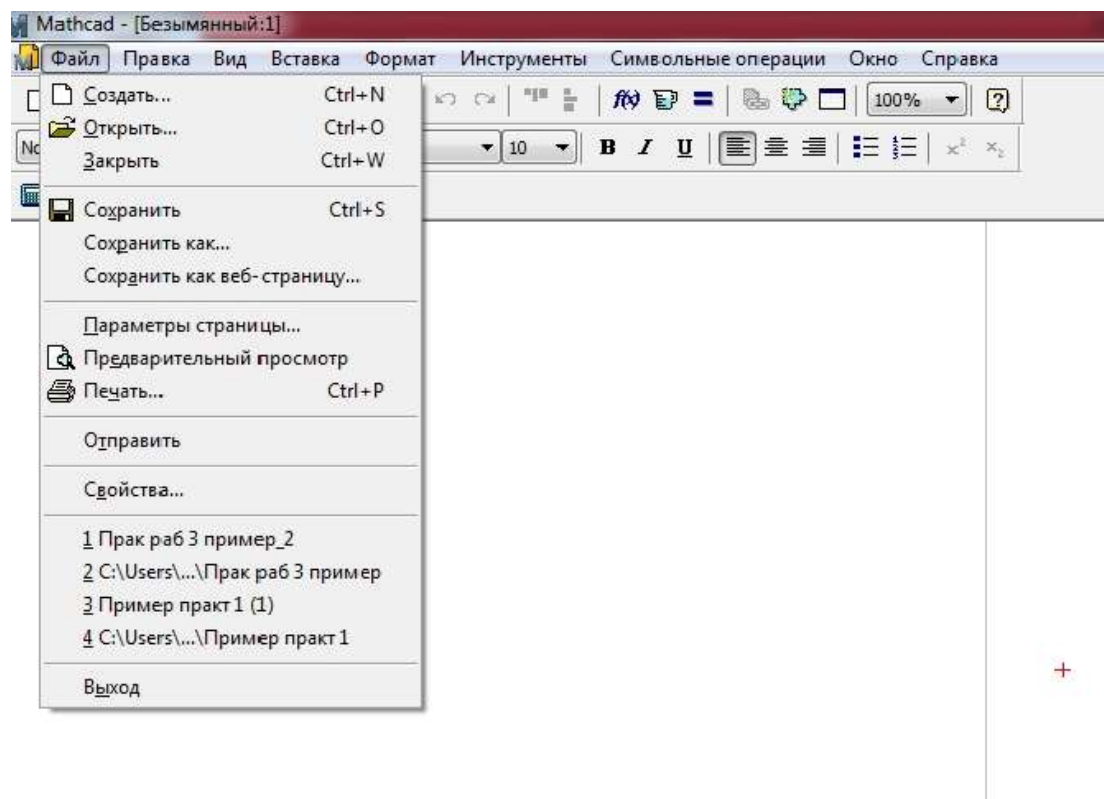


Рис. 1.2 Меню «Файл»

Правка

Отвечает за действия, связанные с редактированием текста, копированием и поиском в документе (см. рис. 1.3).

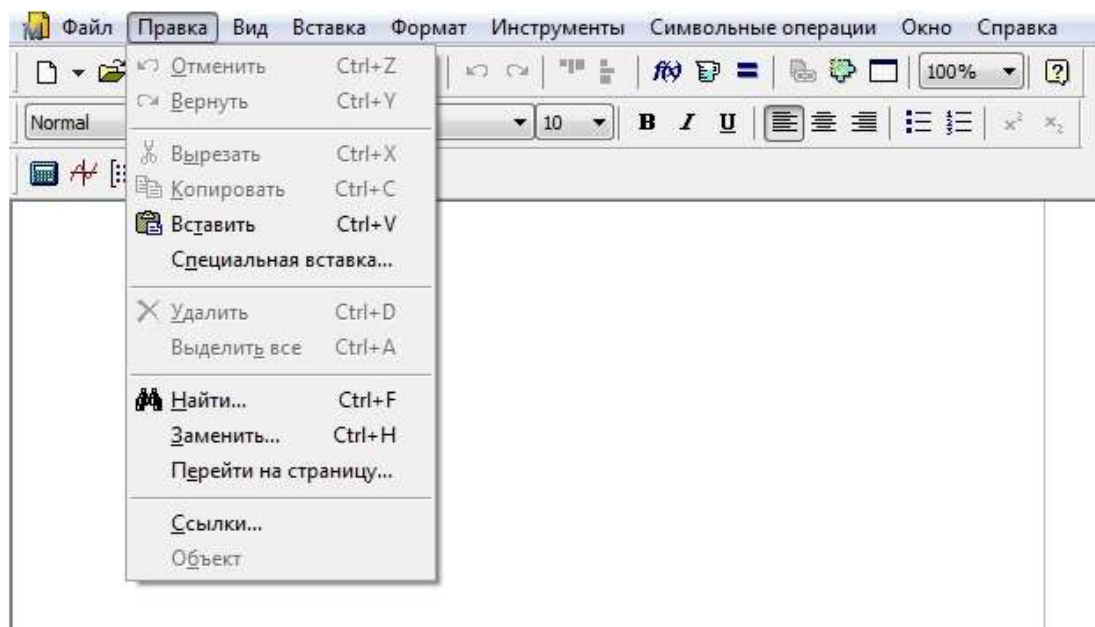


Рис. 1.3 Меню «Правка»

Вид

Отвечает за общий вид окна Mathcad, используемые панели инструментов, анимацию и т.п. (см. рис. 1.4).

Вставка

Содержит элементы, которые можно вставить в документ (графики, матрицы, встроенные функции, рисунки, объекты других приложений Windows и т.п.) (см. рис. 1.5).

Формат

В этом пункте сгруппированы операции, позволяющие управлять стилями вычисления и стилем рабочего листа (см. рис. 1.6).

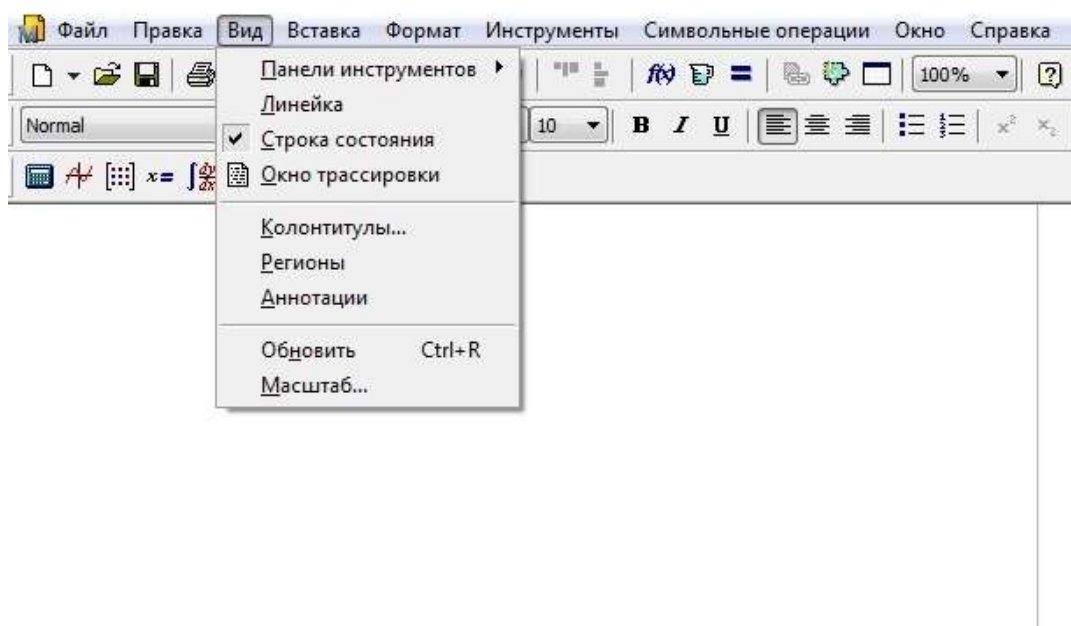


Рис. 1.4 Меню «Вид»

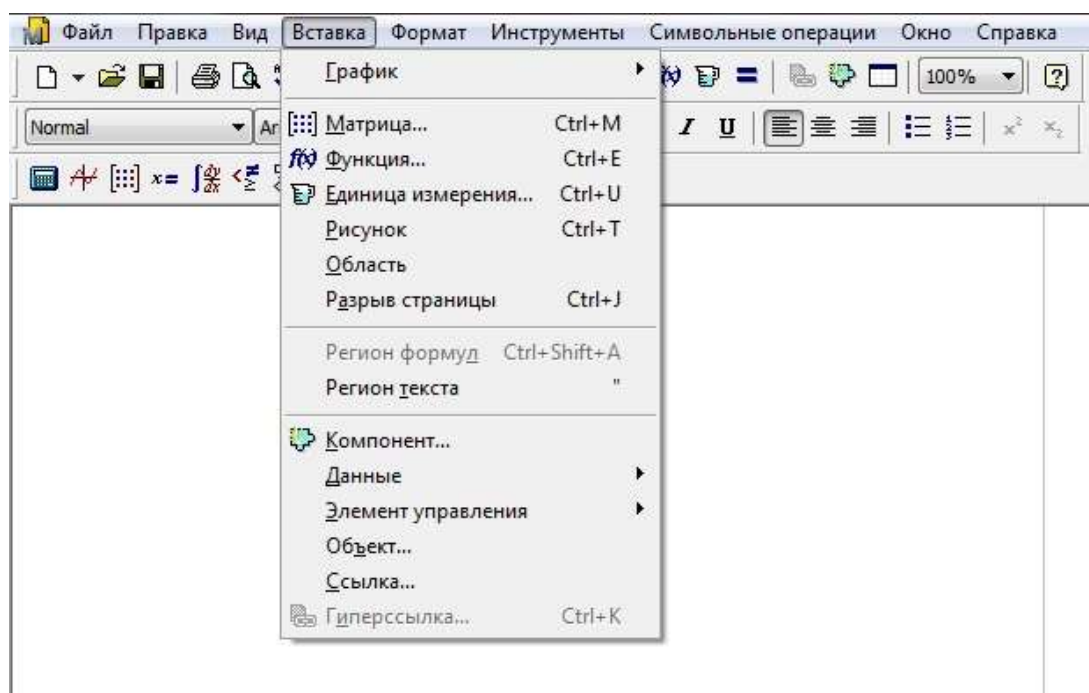


Рис. 1.5 Меню «Вставка»

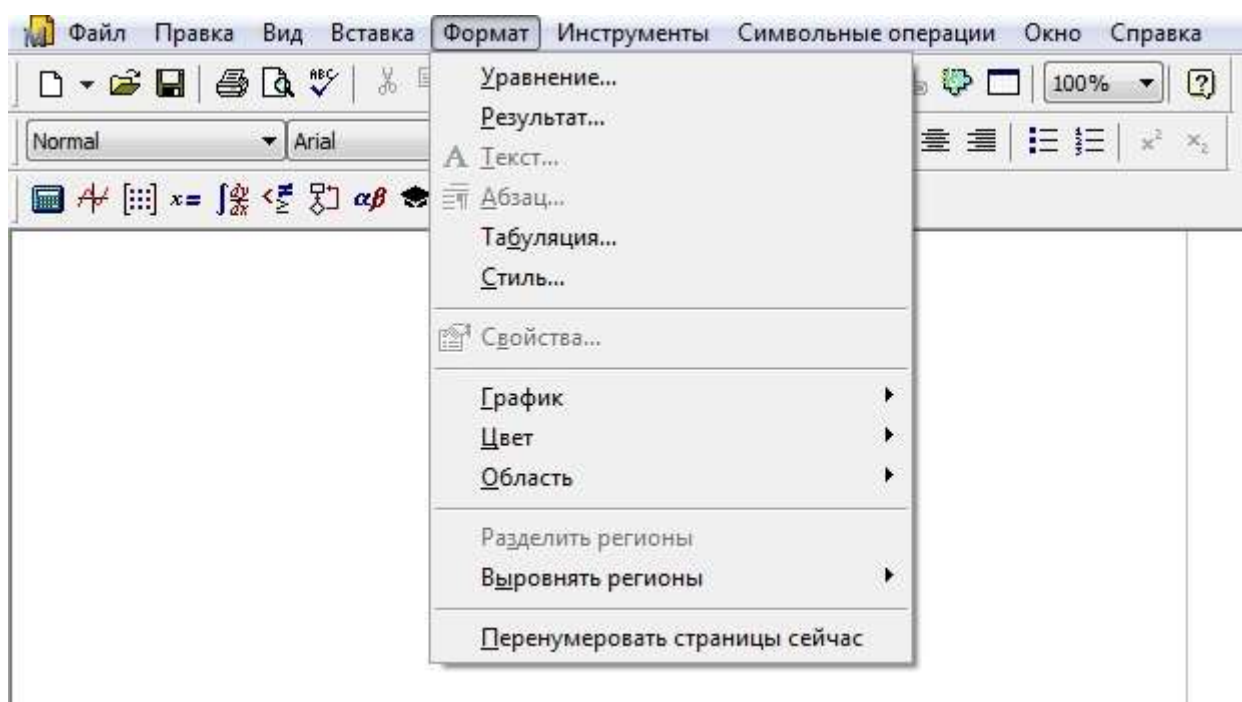


Рис. 1.6 Меню «Формат»

Инструменты

Пункт позволяет настроить параметры документа и программы, оптимизировать и отладить выполнение программ (см. рис. 1.7).

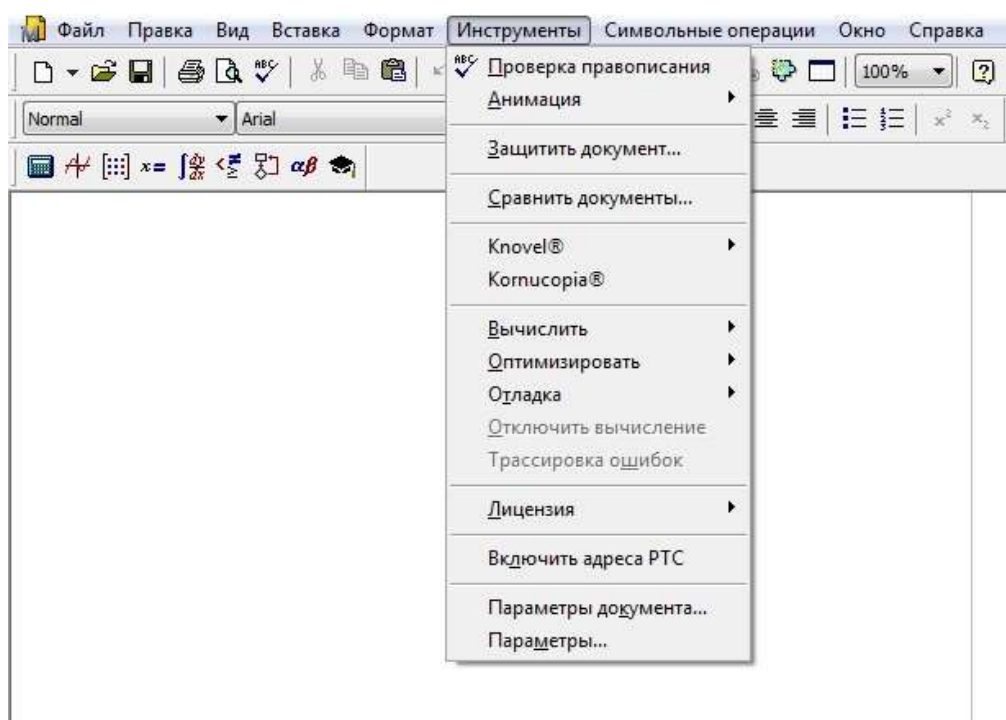


Рис. 1.7 Меню «Инструменты»

Символические операции

Меню позволяет управлять работой с символьными выражениями. Упрощать символьные алгебраические выражения, приводить подобные слагаемые, раскладывать на множители, раскладывать дробно-рациональные выражения на множители и т.п. (см. рис. 1.8).

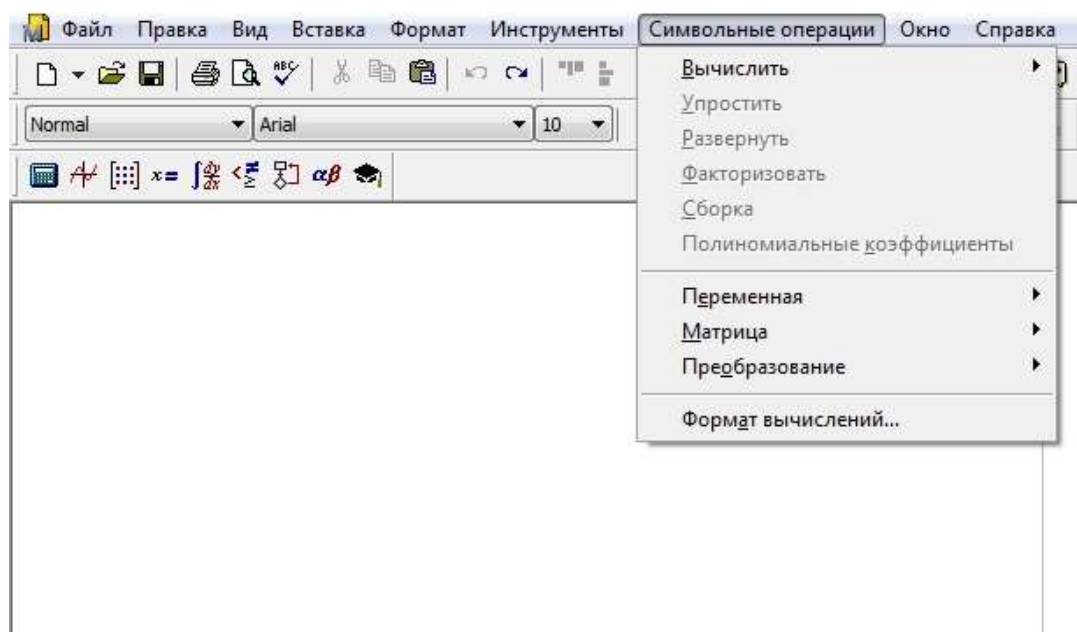


Рис. 1.8 Меню «Символьные операции»

Окно

Отвечает за работу с окнами при открытии нескольких документов (см. рис. 1.9).

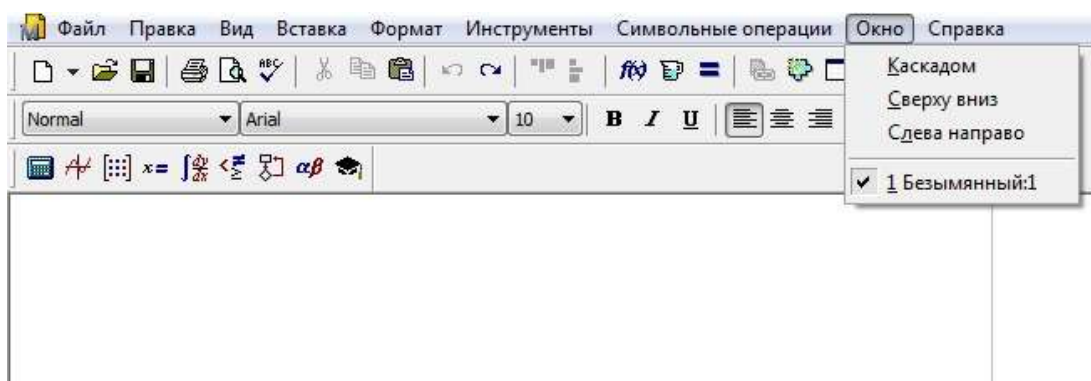


Рис. 1.9 Меню «Окно»

Справка

В меню сгруппирована справочная информация по Mathcad (см. рис. 1.10).

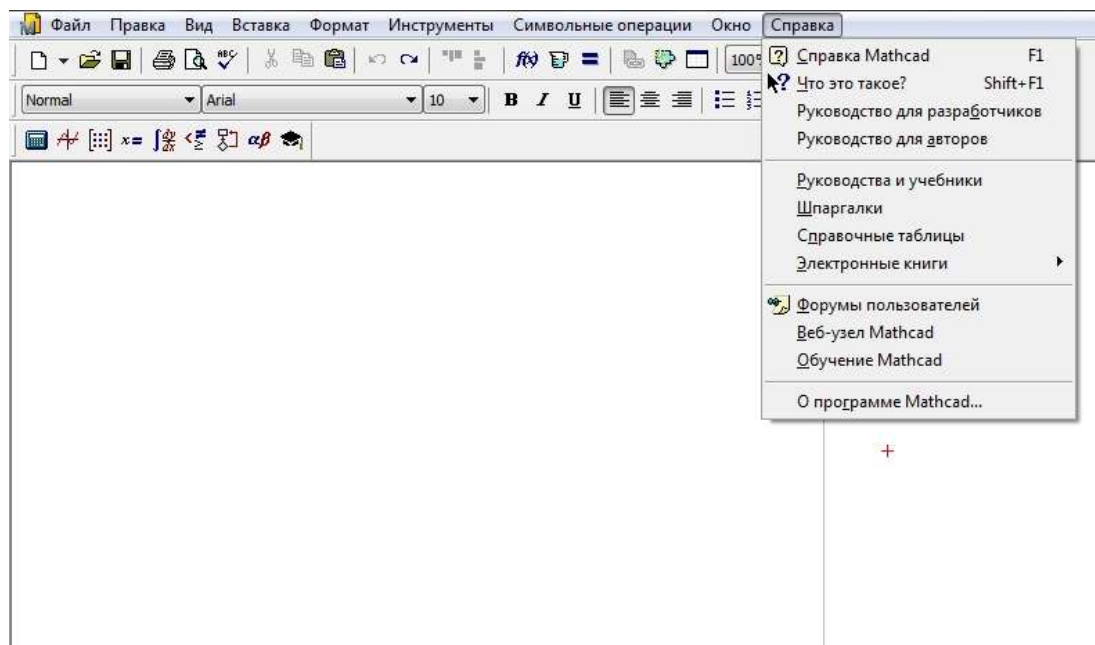


Рис. 1.10 Меню «Справка»

Панели инструментов

Под строкой меню расположены панели инструментов. Если текущих панелей инструментов недостаточно, всегда можно подключить дополнительные, выбрав в меню View (Вид) подпункт Toolbars (Панели инструментов) и установить галочки напротив нужных панелей инструментов.

На панелях инструментов, в понятном для пользователя графическом виде, представлены наиболее часто выполняемые в Mathcad действия.

Рассмотрим основные панели инструментов (см. рис. 1.11).

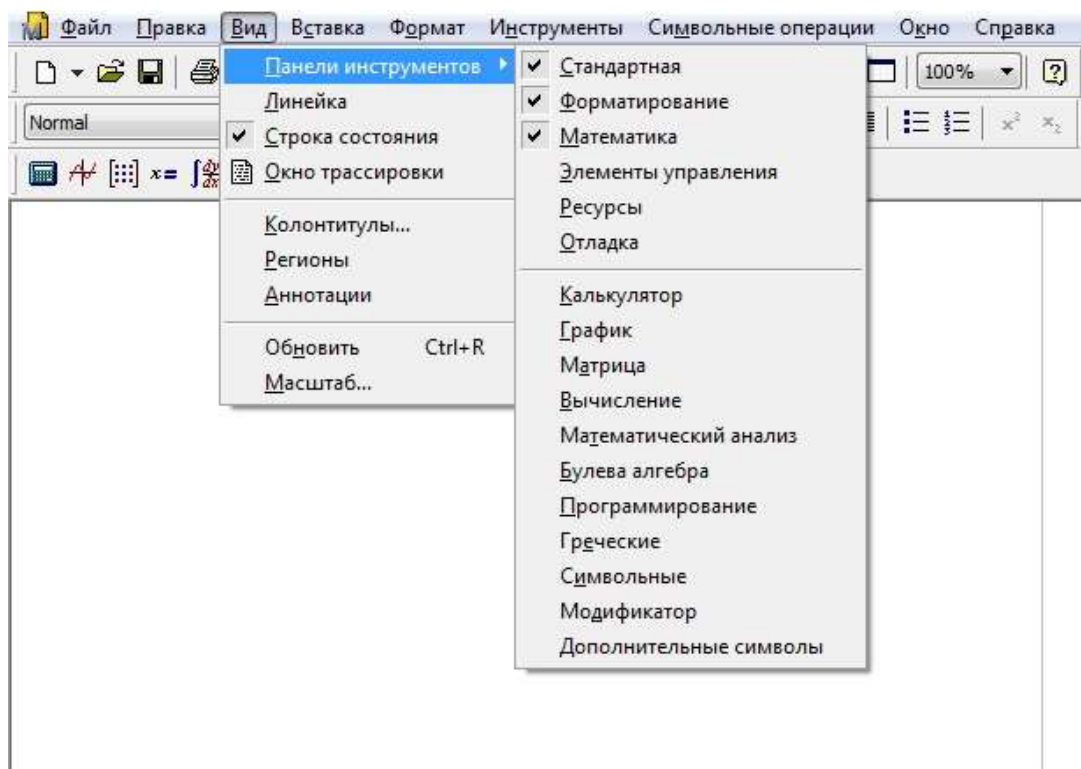


Рис. 1.11 Меню «Панели инструментов»

Панель инструментов «Стандартная»

Данная панель инструментов содержит значки, связанные с работой с файлами: создание нового файла, открытие существующего файла, сохранения редактируемого файла, печати текущего документа, редактированием документов, вставкой объектов и т.п.

Чтобы получить представление о том, какая выполнится команда при нажатии на данную кнопку, достаточно показать на нее мышкой и задержаться на полсекунды, после чего возникнет всплывающая подсказка.

Панель инструментов «Форматирование»

Данная панель инструментов отвечает за форматирование текста и формул, позволяет изменять стиль текста, тип шрифта, размер шрифта, выравнивание и т.п.

Как и панель инструментов «Стандартная», она хорошо знакома любому пользователю, поскольку фигурирует в таких широко используемых программах пакета Microsoft Office, как Word, Excel, Access, PowerPoint и т.д.

Панель инструментов «Математика»

Здесь сгруппированы девять панелей инструментов, предназначенных для работы с математическими приложениями: «Calculftor», «Graph», «Matrix», «Evaluation», «Calculus», «Boolean», «Programming», «Greek» и «Symbolic».

Эти же панели инструментов можно подключить и через меню Toolbars.

Панель инструментов «Калькулятор»

Данная панель инструментов имитирует обычный научный калькулятор. Здесь сгруппированы основные математические функции,

мнимая единица i , цифры и арифметические операции. Используя данную панель, можно только при помощи мыши производить основные арифметические вычисления.

Панель инструментов «Булева алгебра»

Данная панель инструментов содержит шесть операций отношения, используемых в логических выражениях и четыре логических операции.

Панель инструментов «График»

Позволяет строить графики функций двух и более переменных различной сложности, заданных в декартовых или в полярных координатах, графики функций, записанных в параметрическом виде. Для функции многих переменных можно строить график поверхности или линии уровня, диаграммы и гистограммы.

Панель инструментов «Матрица»

Тут сгруппированы шаблоны для работы с матрицами и векторами. Задание размерности матриц и векторов, введение индексов, вычисление обратной матрицы, определителя, оператор векторизации матриц, выделение столбца матрицы, транспонирования матриц, создание ранжированных векторов, скалярное и векторное произведение, сумма элементов матрицы или вектора.

Панель инструментов «Вычисление»

Позволяет вычислять производные первого и n-го порядка, определенные интегралы, сумму ряда, произведение элементов вектора, неопределенные интегралы, пределы функций и последовательностей, в том числе односторонние.

Панель инструментов «Греческие»

Содержит алфавит греческих символов.

Панель инструментов «Программирование» предназначена для создания программ на встроенном в Mathcad языке программирования. Команду Add Line можно использовать при написании сложных составных функций.

Рекомендации по выполнению

Пример 1.

Построить график функции $f(x) = x \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Решение:

Определим заданную функцию. Для этого в произвольном месте документа с клавиатуры необходимо ввести имя функции и в скобках задать аргумент. Для ввода знака присваивания можно использовать, так называемую, «горячую» клавишу. Для этого необходимо нажать комбинацию из двух клавиш Shift и «:». В дальнейшем комбинации «горячих» клавиш мы будем

заключать в кавычки и между удерживаемыми клавишами ставить знак +. Например «Shift+;», означает, что необходимо нажать на клавишу Shift и, удерживая ее, нажать на клавише двоеточие. После знака присваивания вводим правую часть. Получили: $f(x) := x \cdot \sin(x)$

Вызываем мастер построения графиков в декартовой системе координат. Это можно сделать либо из панели графиков, либо из меню Insert/Graph, либо при помощи «горячей» клавиши «Shift+2». В результате появляется прямоугольник, в который вписан квадрат. Внешний прямоугольник обозначает поле объекта мастера графиков, а внутренний – область построения графика. Подводим курсор мыши к левому прямоугольному маркеру, нажимаем левую кнопку мыши и при помощи клавиатуры вводим имя функции и в скобках аргумент: $f(x)$. После нажатия клавиши Enter или при нажатии левой кнопки мыши вне поля графика на экране появляется представленный справа график.

Мастер построения графиков построил график функции $y=f(x)$, при этом подставил значения всех параметров, равные значениям по умолчанию. Диапазон изменения аргумента принял равным $[-10,10]$. Для того чтобы правильно установить диапазон изменения аргумента, переместим курсор мыши внутрь графика и нажмем левую кнопку мыши. В результате, мы вошли в режим коррекции свойств графика функции. Подводим курсор к полю, в котором определена левая граница диапазона (-10) , и поменяем ее на 0. Затем – к полю, в котором определена левая граница диапазона (10) , и меняем ее на 2π . Для того чтобы получить константу π , необходимо в панели инструментов (Calculator) выбрать символ π . Диапазон отображения значения функции также можно изменить. Для этого подходим к области определения значений этого диапазона, в нашем примере $[-10,10]$ и изменяем на $[-6, 5]$.

Диапазон изменения аргумента можно задать другим способом. Для этого, до построения графика функции, необходимо задать диапазон изменения аргумента командой $x := a0 ,a1..b$, где 0 a – левая граница области, 1 a – задает

шаг табуляции h ($h = a_1 - a_0$), b – правая граница диапазона изменения x . При этом две точки вводятся клавишей ; (точка с запятой).

Например, команда $x := -2, -1.9..2$ означает изменение аргумента в диапазоне от -2 до 2 и график рисуется по 41 точке с шагом между точками $0,1$.

Теперь необходимо отформатировать полученный график. Для этого, находясь внутри поля графика, нажимаем на правую кнопку мышки, тем самым вызываем контекстное (зависимое от положения курсора мыши) меню. В появившемся окне выбираем пункт *Format...* В закладке *X–Y Axes* устанавливаем флажки *Grid Lines* (линии сетки), а остальные все флажки сбрасываем. В поле *Number of Grid* (число ячеек) по обеим осям записываем цифру 5. Это означает, что будет нарисована равномерная сетка линий из пяти ячеек по оси абсцисс и оси ординат. Далее нажимаем закладку *Traces*, в которой можно установить параметры каждой из 16 возможных графиков. В нашей задаче всего лишь один график *trace 1*. Устанавливаем для него параметры *Color = blk* (черный), определяющий цвет графика, и параметр *Weight=3* (толщина линии). Каждую линию графиков можно подписать. Для этого необходимо убрать флажок *Hide Legend* (скрыть легенды) и поле *Legend label* (метки легенд), вместо *trace1* внести название первой линии.

Контрольные вопросы

- 1) В чем состоит отличие Mathcad от других аналогичных систем?
- 2) Каковы возможности системы Mathcad?
- 3) Дайте характеристику составных частей Mathcad?
- 4) Назовите состав падающего меню пункта Файл
- 5) Какие панели входят в панель математики из пункта меню Вид/Панели инструментов?
- 6) Перечислите условные операторы и назовите особенности их ввода в математическое выражение.
- 7) Как построить двухмерный график в декартовой системе координат?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

РАССМОТРЕНИЕ ПРИМЕРА РАСЧЕТА ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ СОСТАВЛЕНИЯ И РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОГРАММЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Задание и исходные данные

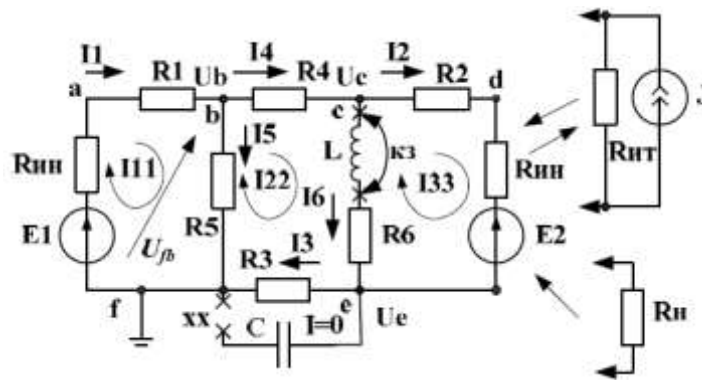


Рис.2.1. Схема линейной цепи постоянного тока

В электрических цепях постоянного тока источниками энергии являются источники постоянного напряжения E и источники постоянного тока J . Понятие «постоянное напряжение (ток)» означает, что во времени значение и направление напряжения (тока) не меняются. Можно сказать, что частота изменения постоянного напряжения (тока) $\omega = 0$.

В идеальном источнике напряжения внутреннее сопротивление $R_{ин} = 0$ и напряжение на выходе идеального источника напряжения равно E и не зависит от внешней цепи.

В идеальном источнике тока внутреннее сопротивление $R_{ит} = \infty$, ток, отдаваемый во внешнюю цепь, не зависит от свойств внешней цепи.

Источник тока J с параллельно включенным сопротивлением $R_{ит}$ можно заменить эквивалентным источником напряжения $E_2 = J \cdot R_{ит}$, в котором $R_{ин} = R_{ит}$.

И наоборот, источник напряжения E_2 с внутренним сопротивлением $R_{ин}$ можно заменить источником тока J , в котором $R_{ин} = R_{ит}$.

Пассивными элементами электрической цепи являются сопротивление (резистор), индуктивность, емкость.

По закону Ома напряжение на резисторе $u_R = I \cdot R$.

Вольтамперной характеристикой элемента электрической цепи называют зависимость тока, проходящего через этот элемент, от напряжения на его зажимах.

Электрическая цепь постоянного тока является линейной, если все элементы цепи имеют линейные вольтамперные характеристики.

Структура электрической цепи определяется ветвями, узлами и контурами. Ветвь это участок цепи, через который проходит один и тот же ток. Узел – место соединения трех и более ветвей. Контур – замкнутый путь, последовательность ветвей и узлов, в которой каждая ветвь и каждый узел входит один раз. В схеме рис.2.1. 6 ветвей (не считая разомкнутой емкости), 4 узла и 3 контура. Один из узлов (например, f) заземляют и считают общим.

Рекомендации по выполнению

Рассчитать токи в линейной цепи (рис.2.1.) по законам Кирхгофа.

Записываем уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов b, c, e :

$$\text{Узел } b: I_1 = I_4 + I_5$$

$$\text{Узел } c: I_4 = I_2 + I_6$$

$$\text{Узел } e: I_3 = I_6 + I_2$$

Записываем уравнения по второму закону Кирхгофа для трех контуров:

$$1\text{-й контур: } R_{ин} I_1 + R_5 I_5 = E_1$$

$$2\text{-й контур: } R_4 I_4 + R_6 I_6 + R_3 I_3 - R_5 I_5 = 0$$

$$3\text{-й контур: } R_2 I_2 + R_{ин} I_2 - R_6 I_6 = -E_2$$

Решаем уравнения в Mathcad.

Задаем значения параметров цепи:

$$E1 := 12 \text{ В} \quad E2 := 8 \text{ В} \quad R_{ин} := 4 \text{ Ом} \quad R1 := 20 \text{ Ом}$$

$$R2 := 30 \text{ Ом} \quad R3 := 30 \text{ Ом} \quad R4 := 20 \text{ Ом}$$

$$R5 := 40 \text{ Ом} \quad R6 := 20 \text{ Ом}$$

Составляем уравнения по законам Кирхгофа

Given (Ключевое слово решения уравнений)

По первому закону Кирхгофа:

$$I1 = I4 + I5$$

$$I4 = I2 + I6$$

$$I3 = I6 + I2$$

По второму закону Кирхгофа:

$$R_{ин} \cdot I1 + R1 \cdot I1 + R5 \cdot I5 = E1$$

$$R4 \cdot I4 + R6 \cdot I6 + R3 \cdot I3 - R5 \cdot I5 = 0$$

$$R2 \cdot I2 + R_{ин} \cdot I2 - R6 \cdot I6 = -E2$$

Примечание об операторах: Оператор локального присваивания ($:=$) присваивает численное или символьное значение переменным, расположенным ниже и правее этого знака. Знак локального присваивания находится на панели «Калькулятор» или вызывается клавишей ($:$ - двоеточие) английского алфавита.

Жирный знак равенства из панели «Булевы операторы» ($\mathbf{=}$) - это логическое равенство, используется в уравнениях после ключевого слова Given и в символьных вычислениях. Этот знак можно вызвать сочетанием клавиш Ctrl=. Обычный (тонкий) знак равенства ($=$) дает вывод результата численного расчета.

Находим вектор искомых токов:

$$\begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \\ I5 \\ I6 \end{pmatrix} := \text{Find}(I1, I2, I3, I4, I5, I6) \text{ float}, 4 \rightarrow \begin{pmatrix} .2240 \\ -.1265 \\ 5.847 \cdot 10^{-2} \\ 5.847 \cdot 10^{-2} \\ .1656 \\ .1850 \end{pmatrix}$$

Инструменты символьных вычислений $\text{float}, 4 \rightarrow$ дают результат решения в виде столбца значений токов с четырьмя значащими цифрами.

Контрольные вопросы

1) Какие элементы используются в линейных цепях постоянного тока?

Нарисуйте вольтамперные характеристики этих элементов.

2) Как преобразовать источник напряжения в источник тока и обратно?

3) Нарисуйте четырехконтурную цепь постоянного тока с двумя источниками напряжения и источником тока. Обозначьте токи в ветвях и запишите уравнения для расчета токов по законам Кирхгофа, по методу контурных токов и по методу узловых напряжений.

4) Нарисуйте двухконтурную цепь с источником напряжения и источником тока. Задайте значения параметров всех элементов. Рассчитайте ток в одной из ветвей методом наложения. Определите остальные токи.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

РАССМОТРЕНИЕ ПРИМЕРА РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СХЕМЫ С ДИОДОМ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОГРАММЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Задание и исходные данные

В данной главе проводится анализ схем однополупериодного и двухполупериодного выпрямления переменного тока с использованием полупроводниковых диодов. ВАХ реального неуправляемого диода (кривая 1,

рис 12.1) имеет ветвь прямого тока при $u > 0$ и ветвь обратного тока при $u < 0$. Обратный ток $i_{обр}$ у качественных диодов очень невелик (единицы микроампер). Прямой ток может достигать у мощных диодов

десятков ампер. При теоретическом исследовании процессов выпрямления реальный диод мы заменяем идеальным, имеющим прямоугольную ВАХ (кривая 2, рис. 3.1).

На рис. 3.2 а показана простейшая схема однополупериодного выпрямления, работающая на резисторную нагрузку. При входном напряжении $u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$ ток и напряжение на R_n имеют вид положительных полуволн рис.3.2 б. Моменты отпирания и запираания диода определяются соответственно моментами перехода напряжения и тока через нулевые значения.

В мостовой схеме двухполупериодного выпрямления, рис.3.3, при входном напряжении $u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$ ток в нагрузку поступает в каждый полупериод (рис.12.4), и имеет форму двух положительных полуволн положительные полупериоды входного напряжения диоды VD_1 и VD_2 открыты, а VD_3 и VD_4 закрыты, в отрицательные полупериоды диоды VD_1 и VD_2 заперты, а VD_3 и VD_4 открыты.

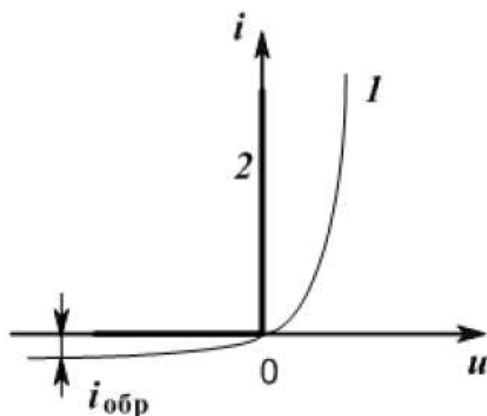


Рис.3.1. Вольтамперная характеристика реального (1) и идеального (2) диода

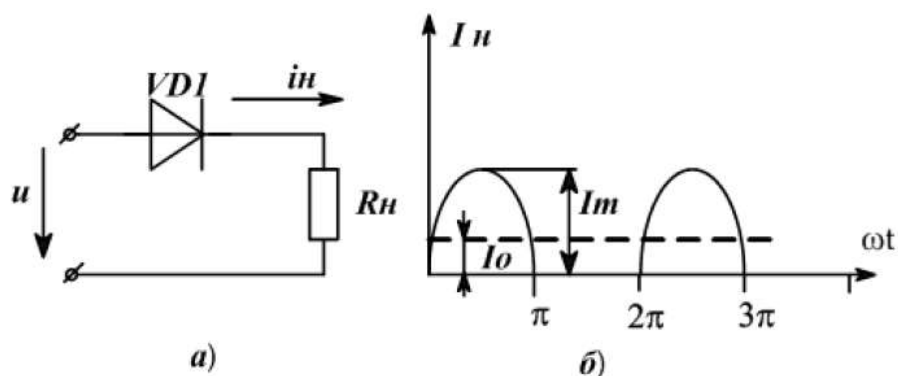


Рис 3.2. Схема однополупериодного выпрямителя

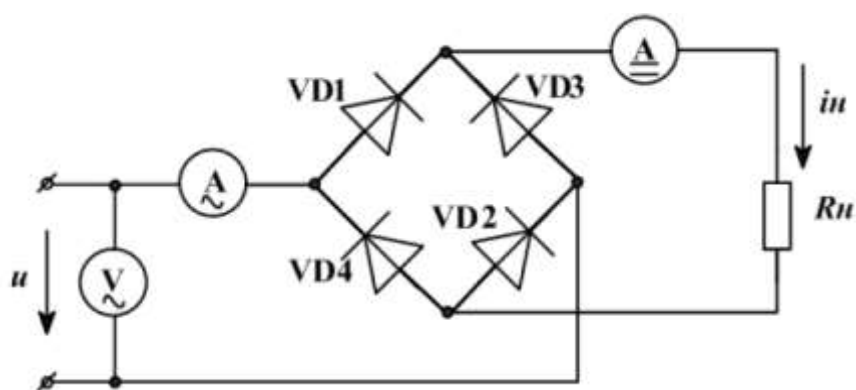


Рис.3.3. Схема двухполупериодного выпрямителя

Напряжение на нагрузке R_n равно $u_n(t) = U_m \cdot |\sin \omega t|$ и будет повторять по форме кривую тока.

Функции $i_n(t)$, $u_n(t)$ в этих случаях состоят из суммы постоянной составляющей и гармоник.

В схеме однополупериодного выпрямления постоянные составляющие

напряжения или средние за период значения напряжения $U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u_n dt$ и тока

$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i_n dt$ равны: $U_0 = U_m/\pi$, $I_0 = I_m/\pi$. Первая, вторая и четвертая гармоники

напряжения имеют амплитуды соответственно $U_m/2$, $2U_m/3\pi$, $2U_m/15\pi$.

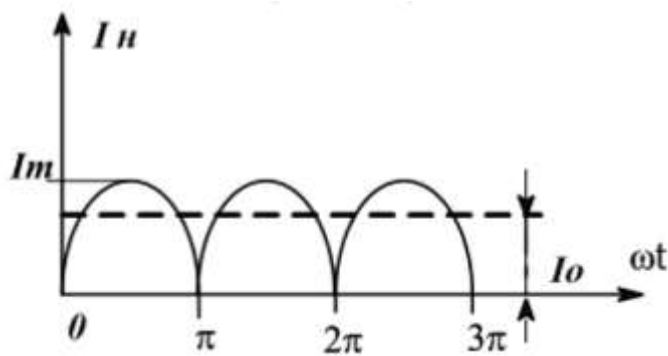


Рис. 3.4. Диаграмма тока в нагрузке двухполупериодного выпрямителя

Действующее значение переменного тока в нагрузке $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_n^2 dt}$. Для схемы двухполупериодного выпрямления $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ то есть такое же, как для синусоидального тока. Для схемы однополупериодного выпрямления действующее значение тока в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем в схеме двухполупериодного выпрямления.

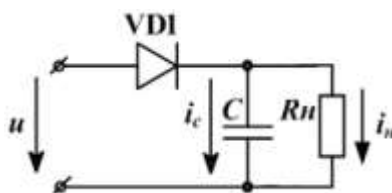


Рис.3.5. Однополупериодный выпрямитель с емкостным фильтром

В открытом состоянии диода $\omega t_1 \leq \omega t \leq \omega t_2$ (рис.3.6) напряжение $u = U_m \cdot \sin \omega t$ приложено к нагрузке R_n, C . Емкостный элемент схемы в эти моменты времени заряжается, ток через диод равен сумме токов через резистивный и емкостной элементы. В момент времени t_2 ток через диод равен нулю, диод закрывается. Угол запираания диода равен: $\omega t_2 = \arctg(-\omega R_n C) = \pi - \arctg(\omega R_n C)$, ток через диод $i(\omega t_2) = 0$, напряжение на конденсаторе $u_c(\omega t_2) = U_m \sin \omega t_2$. После закрытия диода, начиная от t_2 до $(T + t_1)$, происходит разряд конденсатора C на резистор R_n по экспоненциальному закону $u_c = U_m \sin \omega t_2 e^{-(t-t_2)/R_n C}$. Кривая $u_c(t)$ приведена на рис.3.6. В момент t_1 входное

напряжение становится равным напряжению на емкостном элементе, диод открывается. Для определения момента открытия диода t_1 запишем равенство:

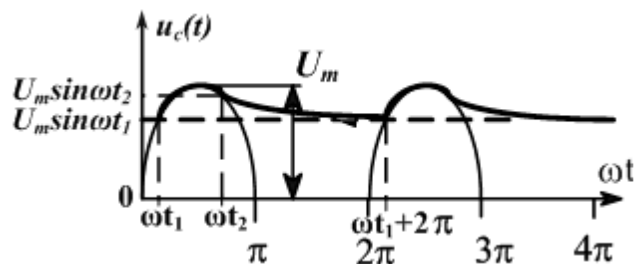


Рис.3.6. Напряжение на емкости фильтра

$$U_m \sin(\omega t_1) = U_m \sin(\omega t_2) e^{\frac{2\pi + \omega t_1 - \omega t_2}{\omega R_n C}} \quad (3.1)$$

Величину ёмкости C практически выбирают так, чтобы при заданной нагрузке выполнялось соотношение $\omega R_n C > 1$, тогда напряжение на ёмкости спадает относительно медленно.

Схема двухполупериодного выпрямителя с емкостным фильтром отличается от рис.3.3 тем, что параллельно сопротивлению нагрузки R_n включается емкость C .

Решение уравнения (3.1) можно выполнить численно, используя Mathcad.

Рекомендации по выполнению

Расчет углов открывания и запираания диода

Исходные данные

$$\omega = 314 \quad \frac{1}{C} \quad M = 10$$

$$m = 1 \quad n = 1..3 \quad \text{ORIGIN} = 1$$

```

αn,m := for m ∈ 1..M
  t2 ←  $\frac{\pi - \text{atan}(m)}{\omega}$ 
  t11 ← root  $\left[ \sin(\omega \cdot t2) \cdot e^{-\left(\frac{2\pi + \omega t11 - \omega t2}{m}\right)} - \sin(\omega \cdot t11), t11, 0, t2 \right]$ 
  t12 ← root  $\left[ \sin(\omega \cdot t2) \cdot e^{-\left(\frac{\pi + \omega t12 - \omega t2}{m}\right)} - \sin(\omega \cdot t12), t12, 0, t2 \right]$ 
  α1,m ←  $\omega \cdot t11 \cdot \frac{180}{\pi}$ 
  α2,m ←  $\omega \cdot t12 \cdot \frac{180}{\pi}$ 
  α3,m ←  $\omega \cdot t2 \cdot \frac{180}{\pi}$ 
αn,m

```

В этой программе $m = \omega R_n C = 1 + 10, M = 10$, t_2 - момент закрывания диода, t_{11} - момент открывания диода в однополупериодном выпрямителе, t_{12} - момент открывания диода в двухполупериодном выпрямителе. Углы открывания, выраженные в градусах, для разных значений m , показаны на рис. 3.7 ($\alpha_{1,m}$ - однополупериодный выпрямитель, $\alpha_{2,m}$ - двухполупериодный выпрямитель).

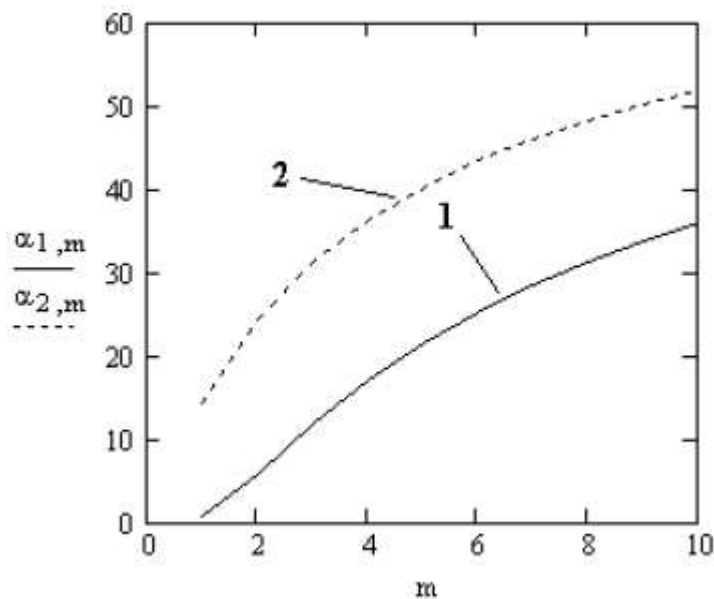


Рис.3.7. Графики углов открывания диодов (1- однополупериодный выпрямитель, 2- двухполупериодный выпрямитель)

Программа расчета формы выпрямленного напряжения на нагрузке приведена ниже. В расчетах принято, что амплитуда переменного напряжения $U_m = 10$ В, $\omega R_H C = 5$, U_{01}, U_{C1} - постоянная составляющая и форма напряжения на нагрузке в однополупериодном выпрямителе, U_{02}, U_{C2} - постоянная составляющая и форма напряжения на нагрузке в двухполупериодном выпрямителе.

$$U_m := 10$$

$$U_{01} := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\int_{\omega \cdot t_{11}}^{\omega \cdot t_2} U_m \cdot \sin(\omega t) d\omega t + \int_{\omega \cdot t_2}^{2 \cdot \pi + \omega \cdot t_{11}} U_m \cdot \left[\sin(\omega \cdot t_2) \cdot e^{-\left(\frac{\omega t - \omega \cdot t_2}{m}\right)} \right] d\omega t \right]$$

$$U_{01} = 6.662$$

$$U_{02} := \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_{\omega \cdot t_{12}}^{\omega \cdot t_2} U_m \cdot \sin(\omega t) \, d\omega t + \int_{\omega \cdot t_2}^{\pi + \omega \cdot t_{12}} U_m \cdot \left[\sin(\omega \cdot t_2) \cdot e^{-\left(\frac{\omega t - \omega \cdot t_2}{m}\right)} \right] d\omega t \right]$$

$$U_{02} = 8.356$$

$$UC1(\omega t) := \begin{cases} (U_m \cdot \sin(\omega t)) & \text{if } \omega \cdot t_{11} < \omega t < \omega \cdot t_2 \\ \left[U_m \cdot \left[\sin(\omega \cdot t_2) \cdot e^{-\left(\frac{\omega t - \omega \cdot t_2}{m}\right)} \right] \right] & \text{if } \omega \cdot t_2 < \omega t < 2 \cdot \pi + \omega \cdot t_{11} \end{cases}$$

$$UC2(\omega t) := \begin{cases} (U_m \cdot \sin(\omega t)) & \text{if } \omega \cdot t_{12} < \omega t < \omega \cdot t_2 \\ \left[U_m \cdot \left[\sin(\omega \cdot t_2) \cdot e^{-\left(\frac{\omega t - \omega \cdot t_2}{m}\right)} \right] \right] & \text{if } \omega \cdot t_2 < \omega t < \pi + \omega \cdot t_{12} \end{cases}$$

$$UC2(\omega t) := \begin{cases} (U_m \cdot \sin(\omega t)) & \text{if } \omega \cdot t_{12} < \omega t < \omega \cdot t_2 \\ \left[U_m \cdot \left[\sin(\omega \cdot t_2) \cdot e^{-\left(\frac{\omega t - \omega \cdot t_2}{m}\right)} \right] \right] & \text{if } \omega \cdot t_2 < \omega t < \pi + \omega \cdot t_{12} \\ (|U_m \cdot \sin(\omega t)|) & \text{if } \omega \cdot t_{12} + \pi < \omega t < \omega \cdot t_2 + \pi \\ \left[|U_m \cdot \sin(\omega \cdot t_2 + \pi)| \cdot \left[e^{-\left(\frac{\omega t - \omega \cdot t_2 - \pi}{m}\right)} \right] \right] & \text{if } \omega \cdot t_2 + \pi < \omega t < 2 \cdot \pi + \omega \cdot t_{12} \end{cases}$$

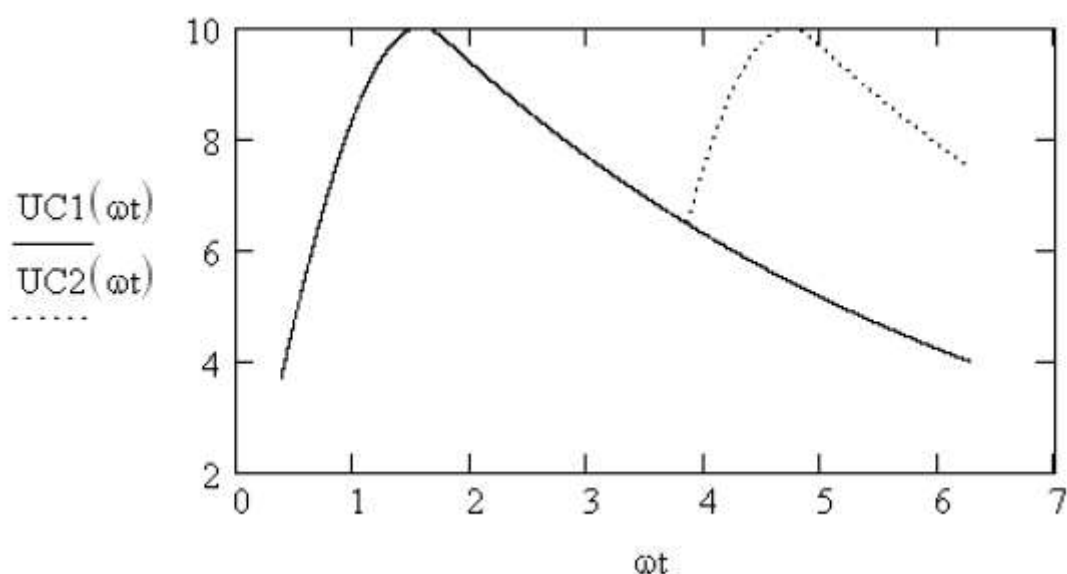


Рис.12.8. Графики напряжения на нагрузке в однополупериодном ($UC1(\omega t)$) и двухполупериодном ($UC2(\omega t)$) выпрямителе при $\omega R_n C = 5$

Степень пульсации напряжения или тока в нагрузке можно оценить коэффициентом пульсации $K_{\text{П}} = (U_{\text{max}} - U_{\text{min}}) / U_0$.

Если $m > 100-200$, емкость C не успевает разряжаться за время периода T и напряжение на нагрузке будет практически равно амплитуде (пику) входного напряжения U_m . Такой выпрямитель называется пиковым детектором и применяется в радиотехнических устройствах для детектирования сигналов.

Контрольные вопросы

- 1) Нарисуйте вольтамперные характеристики идеального и реального диода.
- 2) Нарисуйте схему однополупериодного выпрямителя и объясните его назначение и работу.
- 3) Нарисуйте схему двухполупериодного выпрямителя и объясните его назначение и работу.
- 4) Как рассчитать постоянное напряжение в активной нагрузке однополупериодного и двухполупериодного выпрямителя без сглаживающего фильтра? На сколько отличаются эти напряжения?
- 5) Для чего применяют сглаживающий емкостной фильтр в выпрямителях?
- 6) Как меняется напряжение на емкости сглаживающего фильтра в однополупериодном выпрямителе?
- 7) Как меняется напряжение на емкости сглаживающего фильтра в двухполупериодном выпрямителе?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

РАССМОТРЕНИЕ ПРИМЕРА РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СХЕМЕ НА ОСНОВЕ СОСТАВЛЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОГРАММЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Задание и исходные данные

Переходным процессом называется неустановившийся, нестационарный процесс, возникший при переходе из одного режима работы к другому. Всякие изменения и переключения в схеме называют коммутацией. В схеме рис.4.1 в момент $t = 0$ происходит коммутация (в данном случае замыкание ключа). Режим работы цепи изменяется и возникает переходный процесс.

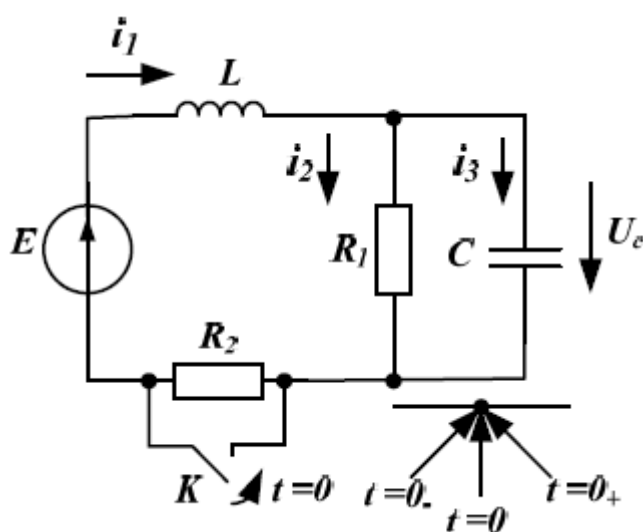


Рис.4.1. Схема цепи с коммутирующим ключом K

Считается, что коммутация происходит мгновенно в момент времени $t = 0$. Момент времени, предшествующий коммутации, обозначен $t = 0_-$. Момент времени, следующий сразу после коммутации, обозначен $t = 0_+$. Примем следующие значения параметров цепи:

$$E = 120 \text{ В}, L = 10 \text{ мГн}, C = 68 \text{ нФ}, R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}.$$

До коммутации в момент $t = 0_-$ ток в индуктивности $i_1(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2}$. В индуктивности накоплена магнитная энергия $W_M(0_-) = \frac{L \cdot i_1^2(0_-)}{2}$. Энергия не может измениться мгновенно, так как мощность всегда ограничена $(P(t) = \frac{dW}{dt} \neq \infty)$. Поэтому в электрических цепях с постоянной индуктивностью действует.

Первый закон коммутации: Ток в индуктивности до коммутации равен току в индуктивности в начальный момент после коммутации: $i_L(0_-) = i_L(0_+)$.

До коммутации в момент $t = 0_-$ напряжение на емкости $U_C(0_-) = \frac{E \cdot R_1}{R_1 + R_2}$. На емкости накоплена электрическая энергия $W_C(0_-) = \frac{C \cdot U_C^2(0_-)}{2}$. Электрическая энергия также не может изменяться мгновенно. Поэтому в электрической цепи с постоянной емкостью действует

Второй закон коммутации: Напряжение на емкости до коммутации равно напряжению на емкости в начальный момент после коммутации: $U_C(0_-) = U_C(0_+)$.

Расчет переходных процессов основан на использовании первого и второго закона коммутации.

Переходные процессы в линейных электрических цепях описываются линейными дифференциальными уравнениями. Для цепи, показанной на рис.4.1 систему дифференциальных уравнений составим по законам Кирхгофа:

$$i_1 = i_2 + i_3; \quad i_2 = \frac{u_C}{R_1}; \quad i_3 = C \frac{du_C}{dt}; \quad L \frac{di_1}{dt} + u_C = E.$$

Используя данные уравнения преобразуем их к виду

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{L}{CR_1} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = E \quad (4.1)$$

Получили линейное, однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Расчет переходных процессов в линейной электрической цепи можно выполнить несколькими методами.

Рекомендации по выполнению

Расчет переходного процесса для напряжения на емкости в разветвленной цепи (рис.4.1) выполнен классическим с использованием Mathcad.

Исходные данные

$$E := 120 \text{ В} \quad L := 10^{-2} \text{ Гн} \quad C := 68 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$$

$$R1 := 1000 \text{ Ом} \quad R2 := 1000 \text{ Ом}$$

1. Расчет режима до коммутации

$$I10 := \frac{E}{R1 + R2} \quad I10 = 0.06 \text{ А}$$

$$U10 := (I10 \cdot R1) \quad U10 = 60 \text{ В}$$

2. Расчет принужденного режима

$$I1P := \frac{E}{R1} \quad I1P = 0.12 \text{ А}$$

$$U1P := I1P \cdot R1 \quad U1P = 120 \text{ В}$$

3. Характеристическое уравнение

Функция параллельного соединения

$$\text{parallel}(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$Z(p) := p \cdot L + \text{parallel}\left(R1, \frac{1}{p \cdot C}\right)$$

$$\begin{pmatrix} p1 \\ p2 \end{pmatrix} := Z(p) \left| \begin{array}{l} \text{solve}, p \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -7353. + 3.764 \cdot 10^4 \cdot i \\ -7353. - 3.764 \cdot 10^4 \cdot i \end{pmatrix}$$

Корни характеристического уравнения

$$p1 = -7.353 \times 10^3 + 3.764i \times 10^4 \quad \frac{1}{c}$$

$$p2 = -7.353 \times 10^3 - 3.764i \times 10^4 \quad \frac{1}{c}$$

Общий вид свободной составляющей напряжения на емкости

$$U_{св}(A1, A2, t) := A1 \cdot e^{p1 \cdot t} + A2 \cdot e^{p2 \cdot t}$$

4. Расчет постоянных интегрирования

Для момента $t=0+$ находим $UC0_{св}$ и $I30_{св}$.

$$UC0_{св} := UC0 - UCP \quad UC0_{св} = -60$$

$$I30_{св} := I10 - \frac{UC0}{R1} \quad I30_{св} = 0$$

Находим $A1, A2$

Given

$$A1 + A2 = UC0_{св}$$

$$p1 \cdot A1 + p2 \cdot A2 = I30_{св}$$

$$\begin{pmatrix} A1 \\ A2 \end{pmatrix} := \text{Find}(A1, A2) \text{ float}, 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -30. + 5.861 \cdot i \\ -30. - 5.861 \cdot i \end{pmatrix}$$

Решение для полного напряжения на емкости

$$U_c(t) := U_{CP} + A1 \cdot e^{p1 \cdot t} + A2 \cdot e^{p2 \cdot t} \text{ complex} \rightarrow$$

$$120 - 60 \cdot \exp(-7353 \cdot t) \cdot \cos(3.764 \cdot 10^4 \cdot t) - 11.722 \cdot \exp(-7353 \cdot t) \cdot \sin(3.764 \cdot 10^4 \cdot t)$$

График полного напряжения на емкости

$$U_c(t) := U_{CP} + U_{св}(t)$$

$$t := 0, 10^{-6} \dots 10^{-3}$$

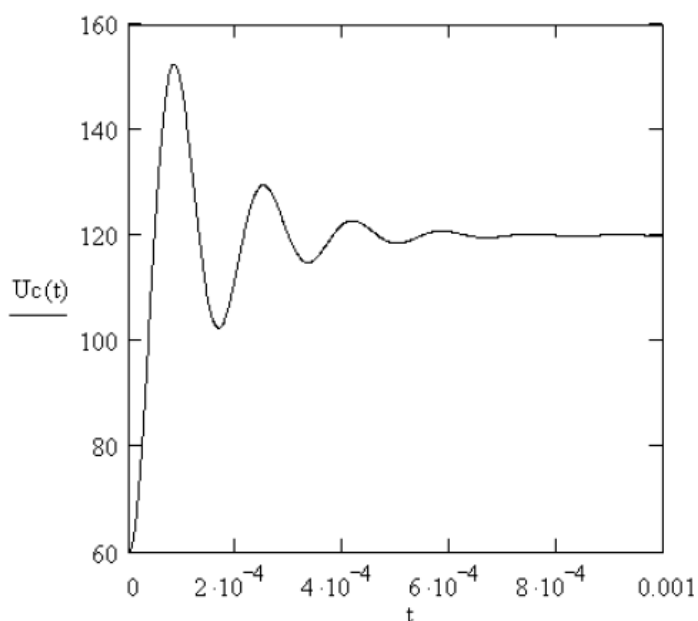


Рис.4.2. График полного напряжения на емкости

Контрольные вопросы

- 1) Что называют переходными процессами и когда они происходят?
- 2) Объясните физический смысл первого и второго закона коммутации.
- 3) Как определить порядок цепи при расчете переходных процессов?
- 4) Объясните последовательность расчета переходных процессов классическим методом.
- 5) Объясните последовательность расчета переходных процессов операторным методом.
- 6) Какой вид имеют переходные процессы в цепях первого порядка?

7) Как изменяется напряжение на каждом из двух элементов при подключении постоянного напряжения E к цепям RC и RL?

8) Как выглядят графики выходных напряжений при действии прямоугольного импульсного сигнала на входе дифференцирующего и интегрирующего звена?

9) Какой вид могут иметь переходные процессы при подключении постоянного напряжения E к RLC -цепи?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

РАССМОТРЕНИЕ ПРИМЕРА РАСЧЕТА НЕРАВНОМЕРНОГО ПО ДЛИНЕ И ВО ВРЕМЕНИ ПРОЦЕССА НАГРЕВА ПРОВОДА НА ОСНОВЕ СОСТАВЛЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРОГРАММЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Задание и исходные данные

Используется одномерная модель т.е. температура проводника T считается неизменной по сечению (см. приложение 1). Принято, что форма проволоки идеально цилиндрическая и неизменна в течение процесса. Учитывается зависимость теплофизических свойств материала от температуры. Нагрев проволоки происходит за счет джоулева тепловыделения j^2/σ . Сброс теплоты идет за счет следующих процессов:

1. *Естественная конвекция.* Процесс считается квазистационарным; не учитываются потоки теплоты в воздухе в направлении вдоль проволоки, вызываемые неравномерностью температуры по ее длине - то есть для расчета теплоотдачи с малого участка длины используется модель бесконечно длинного цилиндра (см. приложение 1). Тогда тепловой поток с поверхности проволоки q :

$$q = \alpha(T)(T - T_0) \quad (5.1)$$

где для определения $\alpha(T)$ используется формула М.А. Михеева, дающая наибольшее значение α для переходного от пленочного (псевдотеплопроводность) к ламинарному режиму течения, характерному для охлаждения тонких проволок на воздухе ($Gr_m Pr_m < 1$)

$$Nu_m = 1.18(Gr_m Pr_m)^{0.125} \quad (5.2)$$

Значения безразмерных критериев берутся при температуре $T_m=(T+T_0)/2$. Подставив в (2) выражения для них , и введя $\theta=T/T_0$, получим:

$$\alpha(\theta) = \alpha_0 \lambda(\theta_m) \left(\frac{\theta-1}{(\theta_m+1)\nu(\theta_m)a(\theta_m)} \right)^{0.125}, \quad \alpha_0 = 1.18 \frac{\lambda_0}{d} \left(\frac{d^3 g}{\nu_0 a_0} \right)^{0.125} \quad (5.3)$$

где $\theta_m=T_m/T_0$, $\tilde{\lambda}(\theta) = \frac{\lambda(\theta)}{\lambda_0}$, $\tilde{\nu}(\theta) = \frac{\nu(\theta)}{\nu_0}$, $\tilde{a}(\theta) = \frac{a(\theta)}{a_0}$ - соответственно теплопроводность, кинематическая вязкость и температуропроводность воздуха, отнесенные к своим значениям при $T=T_0$.

2. *Излучение.* Тепловой поток определяется по закону Стефана-Больцмана:

$$q = \sigma_{„3} \varepsilon(T) T^4 \quad (5.4)$$

где $\sigma_{CB}=5.67 \cdot 10^{-8}$ Дж/м²·К⁴ - постоянная Стефана-Больцмана, $\varepsilon(T)$ - степень черноты молибдена. Воздух считается диатермичной средой.

3. *Теплопроводность и “электронная конвекция”.* Учитывается , что, потоки теплоты и заряда должны быть связаны друг с другом , так как и теплота и заряд в металле переносятся свободными электронами. Эта связь описывается уравнениями, получаемыми в общей теории переноса (из решения кинетического уравнения):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} - \sigma S \vec{\nabla} T \quad (5.5)$$

$$\vec{q} = -\Pi \sigma \vec{E} - \lambda \vec{\nabla} T \quad (5.6)$$

Здесь \vec{j} , \vec{q} , \vec{E} - плотность тока, тепловой поток и напряженность поля в проводнике; σ, λ, S - проводимость, теплопроводность и абсолютная термоэдс (коэффициент термоэдс) материала проводника ($\Pi=ST$ - коэффициент Пельтье). Формула (5.2) показывает, что теплота передается как за счет теплопроводности,

так и за счет “ макроскопического” движения электронного газа - аналог вынужденной конвекции в “обычном” газе или жидкости. Оценка показывает , что тепловой поток за счет электронной конвекции при $j \approx 10^8 \text{ А/м}^2$ может составлять $\approx 10^6 \text{ Вт/м}^2$, что сравнимо с теплопроводным потоком ($\approx 10^7 - 10^8 \text{ Вт/м}^2$, в данном случае, как показал расчет, до $5 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$), поэтому его, по видимому, необходимо учитывать.

Для этого выразим $\sigma \vec{E}$ из (5.5) и подставив в (5.6) получим:

$$\vec{q} = -ST(\vec{j} + \sigma S \vec{\nabla} T) - \lambda \vec{\nabla} T = -ST\vec{j} - (\lambda + \sigma S^2 T) \vec{\nabla} T = -ST\vec{j} - \lambda \vec{\nabla} T \quad (5.7)$$

Последнее равенство в (5.7) записано с учетом того, что величина $\sigma S^2 T$, которая учитывает перенос теплоты током, возникающим под действием данного градиента температур (а не под действием внешнего поля) $\ll \lambda$, вследствие малости термоэдс ($S \approx 10^{-6} - 10^{-5} \text{ В/К}$). Уравнение (5.7) представляет собой закон Био-Фурье с поправкой на “электронную конвекцию”.

Процессы окисления и испарения оксида в данной модели не учитываются, что является основным допущением .

Для определения поля температуры в проволоке $T(x,t)$ запишем с учетом (5.1), (5.4) и (5.6) уравнение теплопроводности и граничные условия к нему:

$$C_v(T)\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{4IS(T)T}{\pi d^2} \right) + \frac{16I^2 \rho_e(T)}{\pi^2 d^4} - \frac{4\alpha(T)}{d} (T - T_0) - \frac{4\varepsilon(T)\sigma_{\text{СБ}}}{d} T^4 \quad (5.8)$$

$$T|_{x=0} = T|_{x=l} = T \quad (5.9) \quad , \quad T(x,0) = T_0 \quad (5.10)$$

(теплотдача с поверхности приведена к объемным стокам тепла). Здесь C_v - удельная теплоемкость молибдена, ρ – плотность, ρ_e - удельное электрическое сопротивление, λ - теплопроводность, ε - степень черноты, I - сила тока в проводнике. Координата x направлена вдоль проводника по току.

Рекомендации по выполнению

Математическая модель. Для численного решения уравнения и граничные условия приводятся к безразмерному виду. Помимо безразмерной величины θ вводятся $\chi = x/l$; $\tau = t/t_x$, где $t_x = L/R_\Sigma$ (постоянная времени переходного процесса в R - L цепи); ток $i = I/I_x$, где $I_x = E_b/R_\Sigma$ (установившийся ток в цепи без учета сопротивления проволоки R_{np}). Все функции от температуры (теплоемкость, теплопроводность и т.д.) записываются в виде $f(T) = f_0 \cdot \tilde{f}(\theta)$, где $f_0 = f(T_0)$, $\tilde{f}(\theta)$ - некоторая безразмерная функция. Получаем:

$$\frac{\tilde{C}_v(\theta)}{Fo} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\tilde{\lambda}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + Pel \cdot \theta \cdot i \right) + Om \cdot i^2 \cdot \tilde{\rho}_e(\theta) - Bio \cdot \tilde{\alpha}(\theta)(\theta - 1) - St \cdot \tilde{\varepsilon}(\theta) \theta^4 \quad (5.11)$$

$$\theta|_0 = \theta|_1 = \theta_3, \quad \theta(\chi, 0) = 1 \quad (5.12); \quad i \cdot r + \frac{di}{d\tau} = 1, \quad i(0) = 0 \quad (5.13)$$

$$\text{Здесь } Fo = \frac{t_x \lambda_0}{l^2 C_{v0} \rho} = 0.014, \quad Om = \frac{16 \cdot I_x^2 \cdot l^2 \rho_{e0}}{\pi^2 d^4 \lambda_0 T_0} = 33.604, \quad Bio = \frac{4 \alpha_0 l^2}{\lambda_0 d} = 5.489, \\ St = \frac{4 \sigma T_0^3}{\lambda_0 d} = 0.31, \quad Pel = \frac{4 I_0 l S_0}{\pi d^2 \lambda_0} = 0.204, \quad r = 1 + \frac{R_0}{R_\Sigma} \cdot \int_0^l \tilde{\rho}_e(\theta(\chi)) d\chi, \quad \theta_3 = T_3/T_0.$$

Для решения используется чисто неявная линейная схема:

$$c(u_j^n) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau'} = \frac{1}{h} \left(a_{j+1} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} - a_j \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} + \frac{q_{j+1} u_{j+1}^{n+1} - q_{j-1} u_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) + f(u_j^n, i^{n+1}) \quad (5.14)$$

$$u_j^0 = 1 \quad (11.2), \quad u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = \theta_3 \quad (5.15)$$

$$i^{n+1} \cdot d + \frac{i^{n+1} - i^n}{\tau'} = 1, \quad i^0 = 0 \quad (5.16)$$

Здесь u_j^n - искомая сеточная функция, описывающая распределение температуры, n -индекс временного слоя, j - индекс по координате; τ' - шаг сетки по времени, h - по координате, $a_i = 0.5 \left(\tilde{\lambda}(u_j^n) + \tilde{\lambda}(u_{j-1}^n) \right)$, $c(u) = \frac{\tilde{C}_v(u)}{Fo}$, $q_i = i^{n+1} \tilde{S}(u_j^n)$,

$$f(u,i) = Om \cdot i^2 \cdot \tilde{\rho}_e(u) - Bio \cdot \tilde{\alpha}(u)(u-1) - St \cdot \varepsilon(u)u^4, \quad d = 1 + \tilde{R} \sum_{j=0}^{N-1} 0.5 \left(\tilde{\rho}_e(u_j^n) + \tilde{\rho}_e(u_{j+1}^n) \right) h,$$

$\tilde{R} = \frac{R_0}{R_\Sigma}$, N - число шагов по координате ($h \cdot N = 1$). Канонический вид системы на

$n+1$ временном слое:

$$A_j^n u_{j-1}^{n+1} - C_j^n u_j^{n+1} + B_j^n u_{j+1}^{n+1} = -F_j^n \quad (1 < j < N) \quad (5.17)$$

$$u_0^{n+1} = u_N^{n+1} = \theta_3 \quad (5.18)$$

Здесь $A_j^n = a_j - 0.5hq_{j-1}^n$, $C_j^n = a_{j+1} + a_j + c(u_j^n) \cdot h^2 / \tau'$, $B_j^n = a_j + 0.5hq_{j+1}^n$,

$F_j^n = f(u_j^n, i^{n+1}) \cdot h^2 + u_j^n \cdot c(u_j^n) \cdot h^2 / \tau'$. На каждом временном слое, начиная с нулевого (начальное условие), определяется i^{n+1} затем решается относительно u^{n+1} методом прогонки.

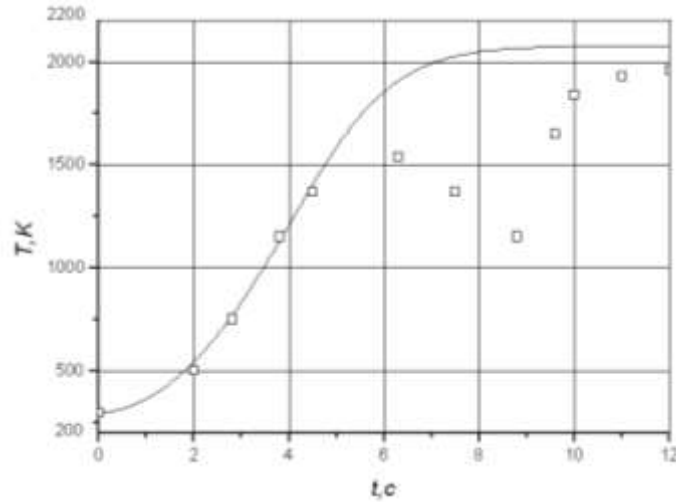


Рис.5.1. Температура в центре проволоки в зависимости от времени

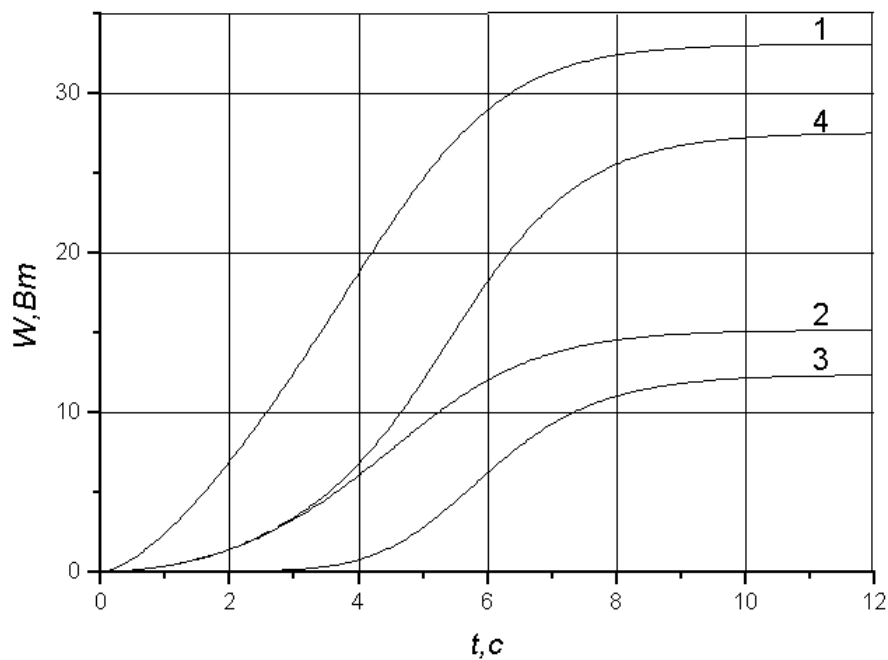


Рис. 5.2. Изменение суммарной мощности источников и стоков тепла обусловленных различными процессами : 1 - джоулево тепло , 2- конвекция , 3 - излучение , 4 - сумма 2 и 3 .

Контрольные вопросы

- 1) Что такое перегрев и чем определяется допустимая величина перегрева изолированных и неизолированных проводников?
- 2) Почему кривые нагрева различаются по характеру изменения температуры во времени?
- 3) Что такое постоянная времени нагрева и охлаждения проводника? При каких условиях они будут одинаковы?
- 4) Как градуируются термопары? Какая температура измеряется термопарой?
- 5) Какие отступления от понятия однородности имеют место в экспериментальной установке?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

РАССМОТРЕНИЕ ПРИМЕРА ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДАННЫХ В ПРОГРАММЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ И ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ДАННЫХ СПОСОБОВ

Задание и исходные данные

Линейная интерполяция

Простейшим случаем локальной интерполяции является линейная интерполяция, когда в качестве интерполяционной функции выбирается полином первой степени, то есть узловые точки соединяются прямой линией.

Линейная интерполяция на Mathcad'е осуществляется с помощью встроенной функции `interp`.

Пусть требуется провести линейную интерполяцию функции $\sin(x)$ на интервале $[0..6]$, используя пять узлов интерполяции, и вычислить значения функции в четырех точках X_k

$k := 0..3$

$X_k :=$

-0.5
1.111
2.333
4.574

Задаем интервал изменения x и число узловых точек

$x_{\min} := 0 \quad x_{\max} := 6 \quad n := 5$

$$h := \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{n}$$

Определяем шаг изменения x :

Вычисляем координаты узлов и значения функции в них:

$$i := 0..n-1 \quad x_i := x_{\min} + i \cdot h \quad y_i := \sin(x_i)$$

Проводим линейную интерполяцию: $g(z) := \text{linterp}(x, y, z)$

Вычислим значение интерполяционной функции в заданных точках и сравним их с точными значениями

$g(X_k)$	$\sin(X_k)$
-0.388	-0.479
0.863	0.896
0.69	0.723
-0.892	-0.99

Как видно, результаты интерполяции отличаются от точных значений функции незначительно.

Интерполяция сплайнами

В настоящее время среди методов локальной интерполяции наибольшее распространение получила интерполяция сплайнами (от английского слова *spline* – гибкая линейка). При этом строится интерполяционный полином третьей степени, проходящий через все заданные узлы и имеющий непрерывные первую и вторую производные. На каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ интерполирующая функция является полиномом третьей степени

$$S(x) = S_i(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(x - x_i) + a_2^{(i)}(x - x_i)^2 + a_3^{(i)}(x - x_i)^3$$

и удовлетворяет условиям $S(x_i) = y_i$. Если всего n узлов, то интервалов – $n - 1$. Значит, требуется определить $4(n - 1)$ неизвестных коэффициентов полиномов. Условие дает нам n уравнений. Условие непрерывности функции и

ее первых двух производных во внутренних узлах интервала дает дополнительно $3(n - 2)$ уравнений

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$$

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$$

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$$

Всего имеем $4n - 6$ различных уравнений. Два недостающих уравнения можно получить, задавая условия на краях интервала. В частности, можно потребовать нулевой кривизны функции на краях интервала, то есть $S''(a) = S''(b) = 0$.

Задавая различные условия на концах интервала, можно получить разные сплайны.

Решим задачу об интерполяции синуса с помощью сплайнов. Для этого воспользуемся встроенной функцией `interp(VS,x,y,z)`. Переменные x и y задают координаты узловых точек, z является аргументом функции, VS определяет тип граничных условий на концах интервала.

Определим интерполяционные функции для трех типов кубического сплайна

<code>VSI := lspline(x , y)</code>	<code>gl(z) := interp(VSI , x , y , z)</code>
<code>VSp := pspline(x , y)</code>	<code>gp(z) := interp(VSp , x , y , z)</code>
<code>VSc := cspline(x , y)</code>	<code>gc(z) := interp(VSc , x , y , z)</code>

Рекомендации по выполнению

Вычисляем значения интерполяционных функций в заданных точках и сравниваем результаты с точными значениями

X_k	$gl(X_k)$	$gp(X_k)$	$gc(X_k)$	$\sin(X_k)$
-0.5	-0.473	-0.737	-0.752	-0.479
1.111	0.896	0.903	0.904	0.896
2.333	0.724	0.722	0.72	0.723
4.574	-0.927	-0.962	-1.014	-0.99

Обратите внимание, что результаты интерполяции различными типами кубических сплайнов практически не отличаются во внутренних точках интервала и совпадают с точными значениями функции. Вблизи краев интервала отличие становится более заметным, а при экстраполяции за пределы заданного интервала различные типы сплайнов дают существенно разные результаты. Для большей наглядности представим результаты на графиках

$z := -1, -0.9 \dots 6$

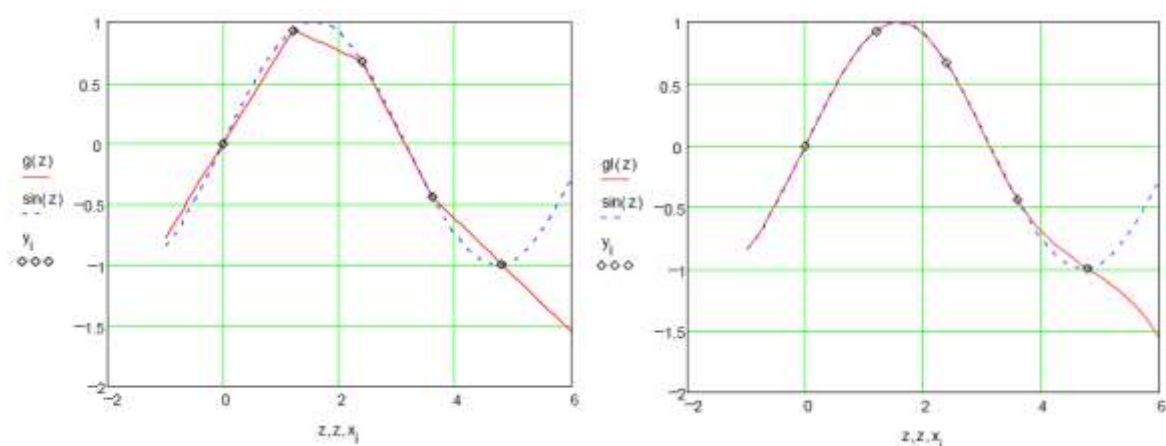


Рис.6.1. Графики функций

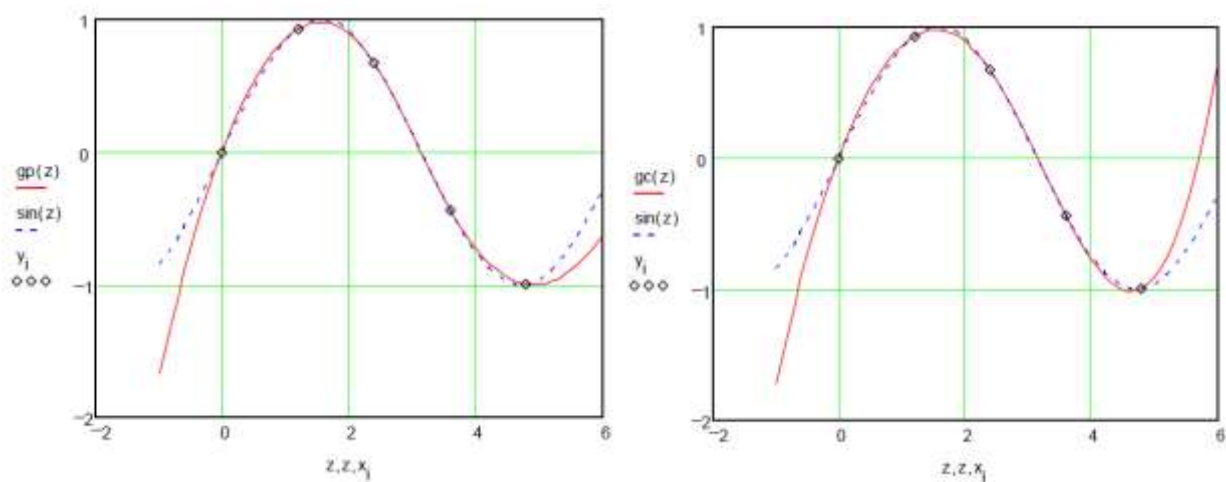


Рис.6.2. Графики функций

Убедимся в том, что первые и вторые производные сплайна непрерывны

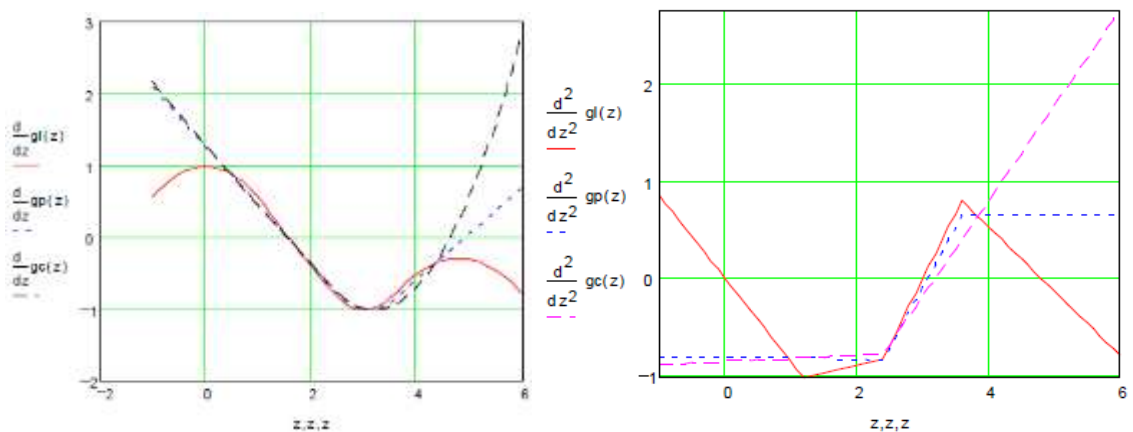


Рис.6.2. Графики производных функций

Но производные более высоких порядков уже не являются непрерывными.

Контрольные вопросы

- 1) Какие существуют способы аппроксимации опытных данных?
- 2) Какая функция используется для линейной интерполяции?
- 3) Для чего используется сплайн-интерполяция?
- 4) Какая функция используется для сплайн-интерполяции?
- 5) В чем отличие В-сплайн-интерполяции от обычной интерполяции?

- 6) Какая функция используется для сплайн-интерполяции?
- 7) Что такое линейное предсказание?
- 8) Как определить узлы, через которые проходит поверхность, при двухмерной сплайн-интерполяции?
- 9) Как построить график поверхности?
- 10) Какими функциями реализуется одномерная регрессия в MathCAD?

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ

Основная учебная литература

Голубева Н. В. Математическое моделирование систем и процессов: Учебное пособие. — 1-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 192 с.

Дополнительная учебная литература

Горлач Б. А. Математическое моделирование. Построение моделей и численная реализация. — Москва: Издательство «Лань», 2016 — 292 с.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1) Решение задач в пакете MathCAD : методические указания по выполнению лабораторных работ № 1 – 5 по информатике для студентов дневной формы обучения / сост. Н. Д. Белова. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2007. – 51 с.

2) В. Ю. Яньков, Н.А.Якушина Лабораторный практикум по маткаду Модуль 1. Основы работы в Маткаде. — Москва : Московский государственный университет технологий и управления 2009. – 36 с.

3) Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов БХВ- Петербург 2007

4) Очков В.Ф. Мультимедийный обучающий курс по Mathcad 13. Курс создан на фирме Мультимедиа Технологии – (495) 673-76-92, www.mmt-dl.ru

5) Ю. Ю. Тарасевич Численные методы на Mathcad'е. – Астраханский гос. пед. ун-т: Астрахань, 2000.

6) Алехин В.А. Электротехника и электроника: Лабораторный практикум с использованием Миниатюрной электротехнической лаборатории МЭЛ, компьютерного моделирования, Mathcad и LabVIEW/ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики» - М., 2013. – 224 с.

7) Котов В.Э. "К расчету температурного поля проводника при его медленном нагреве током высокой плотности", Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, сер. "Естественные науки", 1(6), 2001, с.51-60.

8) Интернет-форум exponenta.ru/Mathcad

Учебно-практическое издание

Паранин Александр Викторович
Ефимов Денис Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

практикум по дисциплине «Математическое моделирование в
профессиональной деятельности»
для студентов всех форм обучения направления подготовки
13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника»
направленность «Автоматика энергосистем»

Редактор *С. В. Пилюгина*

Подписано в печать 29. 08. 2019 Формат 60×84/16

Усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ

УрГУПС

620034, г. Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66