ФГБОУ ВПО Уральский государственный педагогический университет

В.Ю. Бодряков, Н.Г. Фомина

Дифференциальное исчисление

Индивидуальные домашние задания по дисциплине «Математический анализ. Часть 2. Дифференциальное исчисление»

Екатеринбург 2012

Составители: В.Ю. Бодряков, Н.Г. Фомина

Индивидуальные домашние задания по дисциплине "Математический анализ. Часть 2. Дифференциальное исчисление". Екатеринбург, Изд-во УрГПУ, 2012, 24 с.

Индивидуальные домашние задания (ИДЗ) по дисциплине "Математический анализ. Часть 2. Дифференциальное исчисление"предназначены для студентов очной и заочной форм обучения математического факультета УрГПУ, изучающих курс математического анализа. Работа содержит 11 ИДЗ по 25 вариантов в каждом, содержащих различные задания по теме "Введение в математический анализ". Самостоятельное решение индивидуальных заданий дает возможность углубить теоретические знания, отработать практические навыки пределов, исследования функции на локальную и глобальную непрерывность и освоить основные теоретические утверждения. Во введении к работе приведены подробные примеры решения типовых заданий по теме с необходимыми методическими указаниями.

Рецензент:

Методические указания к решению задач некоторых типов

Задание 1. Исследование функции на дифференцируемость

Пример 1.1. *Исходя из определения дифференцируемой функции, показать, что функция $y = 2x^3 - 5x + 7$ дифференцируема в произвольной точке своей области определения. Записать производную и дифференциал данной функции.*

Решение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x \in \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ — область определения данной функции, если ее произвольное приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ в точке x представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где величина A не зависит от Δx и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Производная и дифференциал функции при этом соответственно равны $f'(x) = A$ и $dy = A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$. В нашем случае $y = 2x^3 - 5x + 7$ и $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$. Возьмем произвольные $x \in \mathbb{R}$ и $\Delta x \in \mathbb{R}$.

Запишем и преобразуем $\Delta y = [2(x + \Delta x)^3 - 5(x + \Delta x) + 7] - [2x^3 - 5x + 7] =$
$= 2[(x + \Delta x)^3 - x^3] - 5[(x + \Delta x) - x] = 2[3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - 5\Delta x =$
$= (6x^2 - 5) \cdot \Delta x + [6x \cdot \Delta x + 2 \cdot (\Delta x)^2] \cdot \Delta x.$

Отсюда $A = 6x^2 - 5, \quad \alpha(\Delta x) = 6x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$.Так как величина A не зависит от Δx и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [6x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2] = 0$, то дифференцируемость функции в произвольной точке $x \in \mathbb{R}$ доказана. осталось записать производную и дифференциал данной функции:

$$y' = f'(x) = 6x^2 - 5, \quad dy = (6x^2 - 5) \cdot dx.$$

Пример 1.2. *Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = \ln^2(3x - 1)$.*

Решение. Найдем область определения данной функции. Очевидно, $\mathfrak{D} = \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$. В силу определения производной для любой точки $x \in \mathfrak{D}$ запишем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln^2(3(x + \Delta x) - 1) - \ln^2(3x - 1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [\ln(3x + 3\Delta x - 1) + \ln(3x - 1)] \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(3x + 3\Delta x - 1) - \ln(3x - 1)}{\Delta x} =$$

$$= 2 \cdot \ln(3x - 1) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{3x + 3\Delta x - 1}{3x - 1}\right)}{\Delta x} = 2 \cdot \ln(3x - 1) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{3\Delta x}{3x - 1}\right)}{\frac{3\Delta x}{3x - 1} \cdot \frac{3x - 1}{3}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot \ln(3x - 1)}{(3x - 1)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{3\Delta x}{3x - 1}\right)}{\frac{3\Delta x}{3x - 1}} = \frac{6\ln(3x - 1)}{3x - 1},$$

так как $t = \dfrac{3\Delta x}{3x - 1} \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\lim\limits_{t \to 0} \ln(1 + t)^{1/t} = 1$.

Выше были использованы алгебраические преобразования, свойство непрерывности логарифмической функции, а также отдельные факты теории пределов.Итак, искомая производная равна

$$y' = \frac{6 \cdot \ln(3x-1)}{3x-1}.$$

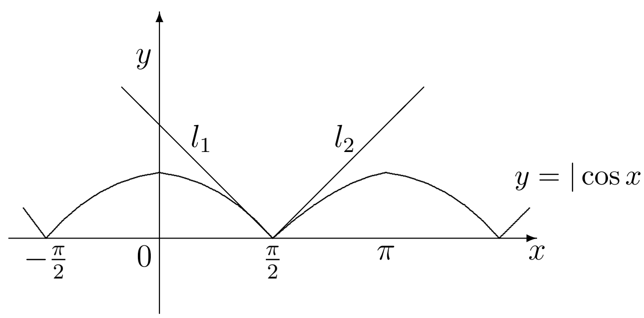
Пример 1.3. *Показать, что функция не дифференцируема в точке. Сделать чертеж.*

Решение. Данная функция определена и непрерывна на множестве $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$. Покажем, что она не имеет производной в точке $x = \pi/2$. Для этого достаточно убедиться в том, что односторонние производные функции в точке не равны, т.е. $f'(\pi/2-0) \neq f(\pi/2+0)$.

Действительно,

$$f'(\pi/2-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(\pi/2+\Delta x) - f(\pi/2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\cos(\pi/2+\Delta x)| - |\cos \pi/2|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|-\sin(\Delta x)|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\sin(\Delta x)}{\Delta x} = -1,$$



l_1 и l_2 — односторонние касательные

В то время как

$$f'(\pi/2+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(\pi/2+\Delta x) - f(\pi/2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1.$$

Полученные соотношения означают геометрически,что точка с абсциссой $x = \pi/2$ есть угловая точка графика функции $y = |\cos x|$.

Иначе говоря, в данной точке существуют две *различные* односторонние касательные к графику данной функции, но *общей* касательной не существует.

Задание 2. Найти производные функций

$$y = \ln^{-3} \frac{\cos x}{x}, \quad y = (\operatorname{tg} x)^{x+2}.$$

Пример 2.1. $y' = \left(\ln^{-3} \frac{\cos x}{x}\right)'$

Решение. Для нахождения производной первой функции применим правило дифференцирования сложной функции. Данная функция является композиций следующих функций: $y = z^{-3}, \quad z = \ln u, \quad u = \dfrac{\cos x}{x}$.

Поскольку

$$\frac{dy}{dx} = y'_z = -3z^{-4} = -3\ln^{-4}\frac{\cos x}{x};$$

$$\frac{dz}{du} = z'_u = \frac{1}{u} = \frac{x}{\cos x};$$

$$\frac{du}{dx} = u'_x = \frac{(-\sin x)\cdot x - \cos x \cdot 1}{x^2} = -\frac{x\cdot\sin x + \cos x}{x^2},$$

имеем

$$y' = y'_z \cdot z'_u \cdot u'_x = -3\ln^{-4}\frac{\cos x}{x}\cdot\frac{x}{\cos x}\cdot\left(-\frac{x\sin x + \cos x}{x^2}\right) =$$

$$3\cdot\frac{x\cdot\sin x + \cos x}{x\cdot\cos x}\cdot\ln^{-4}\frac{\cos x}{x} = 3\cdot\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{x}\right)\cdot\ln^{-4}\frac{\cos x}{x}.$$

Ответ: $\left(\ln^{-3}\dfrac{\cos x}{x}\right)' = 3\cdot\left(\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{x}\right)\cdot\ln^{-4}\dfrac{\cos x}{x}$.

Пример 2.2. $y' = \left((\operatorname{tg} x)^{x+2}\right)'$

Решение. Для нахождения производной второй функции применим формулу логарифмического дифференцирования: $y' = y\cdot(\ln y)'$.

Найдем для этого $(\ln y)' = ((x+2)\cdot\ln\operatorname{tg} x)' =$

$$= \ln\operatorname{tg} x + (x+2)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \ln\operatorname{tg} x + \frac{2(x+2)}{2\sin x\cos x}.$$

Ответ: $y' = (\operatorname{tg} x)^{x+2}\cdot\left(\ln\operatorname{tg} x + \dfrac{2x+4}{\sin 2x}\right)$.

Задание 3. Геометрический смысл производной

Пример 3. *Написать уравнение касательной к кривой $y = e^{(-3/2)x}$ в точке, касательная в которой перпендикулярна прямой $3y - 2x = 1$.*

Решение. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$ имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Из условия перпендикулярности прямых (касательной и заданной) следует, что $f'(x_0) = -\frac{1}{k}$, где k — угловой коэффициент прямой.

В нашем случае $k = 2/3$, $f(x) = e^{(-2/3)x}$, $f'(x) = (-3/2)\cdot e^{(-2/3)x}$. Следовательно, $(-3/2)\cdot e^{(-2/3)x_0} = -3/2$. Отсюда находим последовательно: $x_0 = 0$, $f(x_0) = 1$ и искомое уравнение $y = 1 - \frac{3}{2}(x - 0)$.

Ответ: $2y + 3x = 2$ — искомое уравнение касательной.

Задание 4. Использование основных теорем дифференциального исчисления и формулы Тейлора при доказательстве неравенств

Пример 4. *Доказать неравенство*: $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

Решение. Если $f(x) = \sin x$, то $f(0) = f^{(2)} = f^{(4)} = 0$, $f'(0) = 1$, $f^{(3)} = -1$, $f^{(n)}(x) = (\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$. Применяя формулу разложения функции в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

при $n = 5$, получаем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\sin\left(\xi + 5 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда следует правое неравенство, так как очевидно, $\left|\sin\left(\xi + 5 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{x^5}{5!}$ при $x > 0$. Используя формулу Тейлора для $f(x) = \sin x$ при $n = 3$, $x_0 = 0$, докажем левую часть неравенства.

Задание 5. Найти пределы

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi x)}{x^3 - 3x + 2}; \quad b)\ \lim_{x\to -1}(2 + x)^{x/(x+1)}.$$

Пример 5а. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi x)}{x^3 - 3x + 2}$

Решение. Применяя последовательно (дважды) правило Лопиталя и используя теорию пределов, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi x)}{x^3 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{2\sin(\pi x)\cos(\pi x)\cdot\pi}{3x^2 - 3} =$$

$$\frac{\pi}{3}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2\pi x)}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{\pi}{3}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\cos(2\pi x)\cdot 2\pi}{2x} =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1\cdot 2\pi}{2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Ответ: $\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi x)}{x^3 - 3x + 2} = \frac{\pi^2}{3}$.

Пример 5b. $\lim_{x\to -1}(2 + x)^{\frac{x}{x+1}}$.

Решение. В данном случае имется неопределенность вида $[1^\infty]$.

Положив $f(x) = (2 + x)^{x/(x+1)}$, найдем предел $\lim_{x\to -1}\ln f(x) = \lim_{x\to -1} x \cdot \frac{\ln(2 + x)}{x + 1} = (-1)\lim_{x\to -1}\frac{\ln(2 + x)}{x + 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to -1}\frac{1}{2 + x} = -1$. Отсюда в силу непрерывности показательной функции получим

$$\lim_{x\to -1}(2+x)^{\frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to -1} e^{\lim\limits_{x\to -1}\ln f(x)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{e}$.

Задание 6. Исследование функции на монотонность

Пример 6. *Исследовать на монотонность и экстремум функцию* $y = \frac{(x-1)^3}{x^2}$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на множестве $\mathfrak{D} = (-\infty, o)\bigcup(0,+\infty)$.

Найдем производную функции

$$y' = \left(\frac{(x-1)^3}{x^2}\right)' = \frac{3(x-i)^2\cdot x^2 - 2x(x-1)^3}{x^4} = \frac{(x-1)^2 cdot(x+2)}{x^3}.$$

Затем находим критические точки функции из условий $y' = 0$ и $x \neq 0$, т.е. $\frac{(x-1)^2 cdot(x+2)}{x^3} = 0$. Отсюда $x_1 = -2, x_2 = 1$ и $x \neq 0$.

Для определения промежутков монотонности и нахождения точек экстремума заполним следующую таблицу:

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;-\infty)$
y'	+	0	-	$\nexists$	+	0	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$	экстр. нет	$\nearrow$

Как видно из таблицы, на промежутках $(-\infty,-2)$ и $(0,+\infty)$ функция возрастает, на $(-2,0)$ — убывает, точка $x = -2$ — точка максимума данной функции, других точек экстремума нет.

Задание 7. Нахождение приближенного значения функции

Пример 7. *Используя многочлен Тейлора второго порядка, вычислить приближенное значение* $\sin 20^0$. *Оценить погрешность приближения.*

Решение. Для функции $y = \sin x$ формула Тейлора имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{x^n}{n!}\cdot\sin n\frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Так как

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \leqslant 1,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всех значениях x.

Применим выписанную формулу для приближенного значения $\sin 20^0$. Положим $n = 3$, т.е. ограничимся двумя первыми членами разложения:

$$\sin 20^0 = \sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0,343.$$

Оценим сделанную ошибку, которая равна остаточному члену:

$$|R_3| = \left|\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \frac{1}{4!}\sin(\xi + 2\pi)\right| \leqslant \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \frac{1}{4!} = 0,0006 < 0,0001.$$

Следовательно ошибка меньше, чем $0,001$ т.е. с точностью до $0,001$.

Ответ: $\sin 20^0 \approx 0,343$.

Задание 8. Исследование функций и построение графиков

Пример 9. *Провести полное исследование функции* $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ *и построить ее график.*

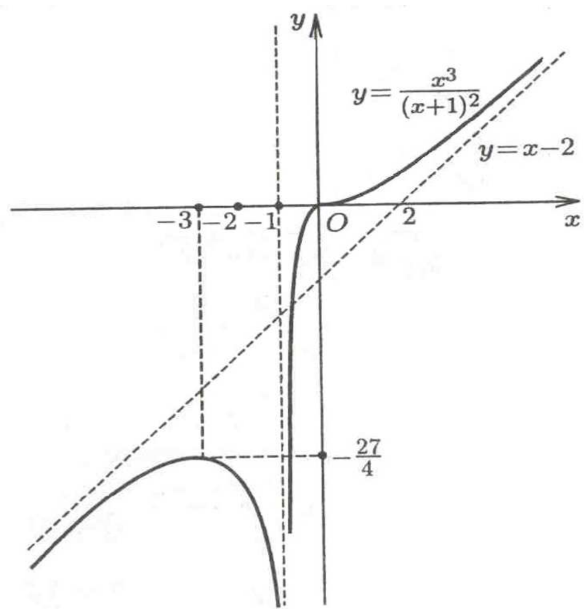
Решение. Исследование функций состоит из стандартной последовательности действий:

- Область определения функции — $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Точки пересечения с осями координат: $(0;0)$.
- Вертикальная асимптота: $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = -1$ — вертикальная асимптота.
- Наклонная асимптота: $y = kx + b$

  $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. В нашем случае: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{(x+1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2 x} = 1; \quad b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-(x^3+2x^2+x}{(x+1)^2=-2,}$ то есть наклонная асимптота имеет вид $y = x - 2$.
- Найдем производные: $y' = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}; \quad y'' = \frac{6x}{(x+1)^4}$. Их критические точки: $x = -3;\ x = 0;\ x = -1$.
- Для нахождения промежутков возрастания и убывания, выпуклостей и вогнутостей строим таблицу:

x	$(-\infty$;-3)	-3	(-3;-1)	-1	(-1;0)	0	(0;-∞)
y'	+	0	-	$\nexists$	+	0	+
y''	-	-	-	$\nexists$	-	0	+
y	$\nearrow\cap$	$\max = -\frac{27}{4}$	$\searrow\cap$	$\nexists$	$\nearrow\cap$	перегиб; 0	$\nearrow\cup$

- По проведенному иследованию функции строим график:



Задание 9. Задачи на моделирование с помощью производной

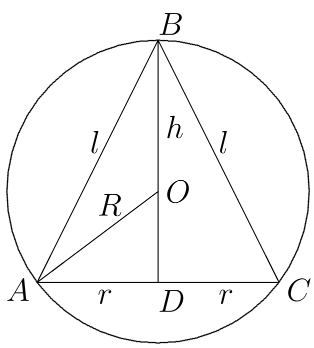
Пример 10. *Какова должна быть высота конуса, вписанного в шар радиуса R для того, чтобы его боковая поверхность была наибольшая?*

Решение. Пусть (см. на рисунке осевое сечение конуса)

$|AB| = |BC| = l$ — образующая конуса, $|BD| = h$ — его высота, $|AD| = |DC| = r$ — радиус основания конуса, $|AO| = |BO| = |CO| = R$.

Так как l и r непрерывно зависят от h (см. ниже), то площадь боковой поверхности $S = \pi r l$ является непрерывной функцией переменной h, $0 \leqslant h \leqslant 2R$.

Отсюда в силу теоремы Вейерштрасса функция $S = S(h)$ на отрезке $[0, 2R]$ достигает наибольшего значения при некотором $h = h_0$, причем $0 < h < 2R$, так как $S(0) = S(2R) = 0$.



Используя то, что конус вписан в шар, выразим по теореме Пифагора величины l и r через h :

$$r^2 = R^2-(h-R)^2 = 2Rh-h^2, \quad l^2 = h^2+r^2 = 2r\cdot h.$$

Для нахождения значения h_0 удобно ввести вспомогательную функци $F = F(h) = S^2(h) = \pi^2 \cdot r^2 \cdot l^2 = \pi^2 \cdot (2R \cdot h - h^2) \cdot 2R \cdot h = 2\pi^2 \cdot R(2R \cdot h^2 - h^3)$, принимающую, как и $S = S(h)$, наибольшее значение при $h = h_0$.

Найдем $F'(h) = 2\pi^2 \cdot R \cdot (4R \cdot h - 3h^2)$. Значение h_0 найдем из уравнения $F'(h) = 0$, т.е. $2\pi^2 \cdot R \cdot (4R \cdot h - 3h^2) = 0$,

с учетом $0 < h_0 < 2R$.

Отсюда получим $h_0 = \frac{4}{3}R$.

С помощью достаточного условия максимума: $F''(h_0) < 0$

докажем, что функция $F = F(h)$

и, следовательно, функция $S = S(h)$ достигает в точке $h = h_0$ наибольшее значение.

Действительно, $F''(h) = 2\pi^2 R\cdot(4R - 6h)$ и $F(h_0) = 2\pi^2 \cdot R\cdot(4R - 6\cdot\frac{4}{3}R = -8\pi^2 R^2 < 0.$

Ответ: искомая высота конуса должна быть равна $\frac{4}{3}R$.

Задания к контрольной работе

Задание 1. Исследование функции на дифференцируемость

а) Исходя из определения дифференцируемой функции, показать, что данная функция дифференцируема в произвольной точке своей области определения, записать производную и дифференциал данной функции;

b)пользуясь определением производной, найти производную данной функции;

c) показать, что данная функция не дифференцируема в данной точке, сделать чертеж.

1. $a)\ y = 12x - x^3,$ $b)\ y = \cos(2x-1),$ $c) y = |\ln(x+1)|,\ x = 0.$
2. $a)\ y = 6x + x^3,$ $b)\ y = \dfrac{x+1}{x-1},$ $c)\ y = |x+2|, \quad x = -2.$
3. $a)\ y = 4x^2 + 3x + 1,$ $b)\ y = e^{(2x-1)},$ $c)\ y = |\sin(x)|, \quad x = 0.$
4. $a)\ y = x^4 - x,$ $b)\ y = ln(3x+2),$ $c)\ y = |\operatorname{ctg}(x)|, \quad x = \frac{\pi}{2}.$
5. $a)\ y = (4x+1)(x-1),$ $b)\ y = \sin(4+3x),$ $c)\ y = |x-1|, \quad x = 1.$
6. $a)\ y = (2x+1)^3,$ $b)\ y = \sqrt{x^2+1}$ $c)\ y = e^{|x|}, \quad x = 0.$
7. $a)\ y = 2x^2 + 5x - 1,$ $b)\ y = \cos^2 3x,$ $c)\ y = |\ln(x)|, \quad x = 1.$
7. $a)\ y = 2 - x - 3x^3,$ $b)\ y = x \cdot \sin x,$ $c)\ y = |1-2x|, \quad x = \frac{1}{2}.$
8. $a)\ y = (1-4x)^2,$ $b)\ y = 2 \cdot \operatorname{tg} x,$ $c)\ y = |x^2 - 4x|, \quad x = 0.$
9. $a)\ y = x^2 - 10x + 1,$ $b)\ y = (2^x + 1)^2,$ $c)\ y = |x-3|, \quad x = 3.$
10. $a)\ y = x^4 + 5x,$ $b)\ y = \sqrt{x+5},$ $c)\ y = \operatorname{tg}|x|, \quad x = 0.$
11. $a)\ y = (x-7)(x+5),$ $b)\ y = (x+1)^2 \cdot x^{(-1)},$ $c)\ y = |\sin 2x|, \quad x = 0.$
12. $a)\ y = 5x^2 - x + 2,$ $b)\ y = 1 - \cos 2x,$ $c)\ y = \ln(|x|+1), \quad x = 0.$
13. $a)\ y = x^2 - 3x - 1,$ $a)\ y = x \cdot \cos x,$ $c)\ y = |x^2 + 2x|, \quad x = 0.$
14. $a)\ y = (x+4)^2,$ $a)\ y = \sin^2 2x,$ $b)\ y = |x-2|, \quad x = 2.$
15. $a)\ y = x^2 \cdot (x+1),$ $b)\ y = \sqrt[3]{x},$ $c)\ y = |\operatorname{tg} x|, \quad x = \pi.$
16. $a)\ y = (x^2-1) \cdot (x^2+1),$ $b)\ y = \ln^2(x+5),$ $c)\ y = |\cos \frac{x}{2}|, \quad x = \pi.$
17. $a)\ y = (3x-2)^2,$ $b)\ y = 4 - 2\sin 3x,$ $c)\ y = |x^2 + 4x|, \quad x = 0.$
18. $a)\ y = 7x - 4x^2,$ $b)\ y = \cos(2x+1),$ $c)\ y = |x+1|, \quad x = -1.$
19. $a)\ y = (4x+1)(x+1),$ $b)\ \ y = 4^x + 5,$ $c)\ y = \sin|x|, \quad x = 0.$
20. $a)\ y = 1 + 2x + 3x^2,$ $b)\ \ y = \operatorname{ctg} x,$ $c)\ y = |x|, \quad x = 0.$
21. $a)\ y = x^3 - 7x,$ $b)\ \ y = (x+2)^{-1},$ $c)\ y = 2^{|x|}, \quad x = 0.$
22. $a)\ y = (2x-1)(2x-3),$ $b)\ \ y = \sqrt{2x-1},$ $c)\ y = |x+3|, \quad x = -3.$
23. $a)\ y = 3x^2 - 6x,$ $b)\ \ y = x - x^{-1},$ $c)\ y = |x^2 - 2x|, \quad x = 0.$
24. $a)\ y = 4 + 2x + x^2,$ $b)\ \ y = x \cdot e^x,$ $c)\ y = |2x+1|, \quad x = -\dfrac{1}{2}.$

Задание 2. Найти производные функций

1. $a)\ y = \frac{\sqrt{x+4}\cdot 3^{\sin x}}{x-1}$ $\qquad b)\ y = \sqrt[x]{x}$
2. $a)\ y = \frac{\ln(\sqrt[3]{x}+1)}{x^2}$ $\qquad b)\ y = x^{\sin x}$
3. $a)\ y = \operatorname{ctg}(\sqrt{x}\cdot e^x)$ $\qquad b)\ y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$
4. $a)\ y = \sqrt{\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}}$ $\qquad b)\ y = (x+2)^{\cos x}$
5. $a)\ y = \cos^2\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$ $\qquad b)\ y = \sqrt[x]{\ln x}$
6. $a)\ y = \arcsin^2\sqrt{\ln x}$ $\qquad b)\ y = (1+\sqrt{x})^{-x}$
7. $a)\ y = e^{-x}\cdot\operatorname{tg}(3x-1)$ $\qquad b)\ y = (\ln x)^x;$
8. $a)\ y = \operatorname{arctg}\sqrt{e^{5x}}$ $\qquad b)\ y = (\operatorname{tg} x)^x;$
9. $a)\ y = \operatorname{tg}^2\ln\sqrt{x}$ $\qquad b)\ y = x^{\sqrt{x}};$
10. $a)\ y = (\ln\sqrt{1-x^2})^3$ $\qquad b)\ y = (\sin x)^{\cos x};$
11. $a)\ y = \frac{\ln(\cos 2x)}{\sqrt{x}}$ $\qquad b)\ y = x^{x^2};$
12. $a)\ y = \sqrt{\ln\frac{3x-1}{3x+1}}$ $\qquad b)\ y = \sqrt[x]{x+1};$
13. $a)\ y = 2^{-\sqrt{x}}\cdot\operatorname{tg} 3x$ $\qquad b)\ y = x^{\cos x};$
14. $a)\ y = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+x^2}$ $\qquad b)\ y = \left(\frac{x-1}{x}\right)^x;$
15. $a)\ y = 3^{\sqrt{x}}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ $\qquad b)\ y = (\sin x)^{x+1};$
16. $a)\ y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}(x-\frac{1}{x})}$ $\qquad b)\ y = \sqrt[x]{x^2+1};$
17. $a)\ y = x\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+5})$ $\qquad b)\ y = (\cos x)^x;$
18. $a)\ y = \arccos\sqrt{3x-1}$ $\qquad b)\ y = x^{\operatorname{tg} x};$
19. $a)\ y = \frac{\sqrt{e^x}}{x+\ln x}$ $\qquad b)\ y = \sqrt[x]{3x-1};$
20. $a)\ y = \sqrt[3]{\frac{2^x-1}{2^x+1}}$ $\qquad b)\ y = (\operatorname{ctg} x)^x;$
21. $a)\ y = \ln^4 x + \sqrt{1-x^2}$ $\qquad b)\ y = x^{\ln x};$
22. $a)\ y = \log_3\sin^2 x$ $\qquad b)\ y = x^{x^2+1};$
23. $a)\ y = \frac{\sqrt{x^2}}{\log_x 2}$ $\qquad b)\ y = \sqrt[x]{x^2-1};$
24. $a)\ y = \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt{x+1}}$ $\qquad b)\ y = (\sin x)^x;$
25. $a)\ y = \sqrt{x}\cdot\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad b)\ y = (x+1)^{\ln x}.$

Задание 3. Геометрический смысл производной

Варианты 1-7: написать уравнения той касательной к кривой, которая параллельна данной прямой.
Варианты 8-14: написать уравнения той касательной к кривой, которая перпендикулярна данной прямой.
Варианты 15-21: написать уравнение той нормали к кривой, которая параллельна данной прямой.
Вариант 22-25: написать уравнение той нормали к кривой, которая перпендикулярна данной прямой.
Сделать чертеж.

1. $y = x^2, \quad y = 3x + 1.$
2. $y = 1 - 2x^2, \quad y = 4x + 5.$
3. $y = 2 - \sqrt{x}, \quad x + 2y = 5.$
4. $y = \ln x, \quad y = x + 2.$
5. $y = -(x-2)^2, \quad y + 2x = 3.$
6. $y = x^4 - 3x + 2, \quad y = x - 1.$
7. $y = x \ln x, \quad y = x.$
8. $y = x^2, \quad 2x + 3y = 1.$
9. $y = e^{2x}, \quad 2x + 4y = 1.$
10. $y = \ln x, \quad y + 10x = 0.$
11. $y = -3x^2 + 2, \quad x - 12y = 7.$
12. $y = \operatorname{arctg} x, \quad y + x = 2.$
13. $y = \ln x, \quad y = -ex.$
14. $y = x^{-2}, \quad 2y + x = 1.$
15. $y = x^2 - 2, \quad 2y + x = 1.$
16. $y = \sqrt{x} + 3, \quad y + 2x = 3.$
17. $y = x^4 - 3x, \quad y + x = 2.$
18. $y = \ln x, \quad y + x = 2.$
19. $y = x^{-2}, \quad 2y - x = 4.$
20. $y = (x+1)^2, \quad 2y + x = 1.$
21. $y = \sqrt{x+3}, \quad y + 4x = 5.$
22. $y = -x^2, \quad y + 2x = 3.$
23. $y = \ln x, \quad y + x = 2.$
24. $y = \sqrt{x}, \quad y + 2x = 1.$
25. $y = \arcsin x, \quad y + x = 8.$

Задание 4. Использование основных теорем дифференциального исчисления и формулы Тейлора при доказательстве неравенств

Варианты 1-23: доказать неравенство. Варианты 24-25: найти значение ξ в теореме Коши для заданных функций.

1. $e^x > 1 + x; \quad x \neq 0.$
2. $|\ln x_1 - \ln x_2| < |x_1 - x_2|; \quad x_1 > 1,\ x_2 > 1,\ x_1 \neq x_2.$
3. $x^a - 1 > a(x-1); \quad x > 1,\ a > 1.$
4. $|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \leqslant |x_1 - x_2|; \quad x_1,\ x_2-$ произвольные числа.
5. $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}; \quad x \neq 0.$
6. $|\cos x_1 - \cos x_2| \leqslant |x_1 - x_2|; \quad x_1,\ x_2-$произвольные точки.
7. $|\arcsin x_1 - \arcsin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|; \quad |x_1| \leqslant 1,\ |x_2| \leqslant 1.$
8. $|\sqrt[n]{1+x_1} - \sqrt[n]{1+x_2}| \leqslant \dfrac{|x_1 - x_2|}{n}; \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ n \in \mathbb{N}.$
9. $2x \operatorname{arctg} x > \ln{(1+x)^2}; \quad x > 0.$
10. $|e^{x_1} - e^{x_2}| \leq e^a |x_1 - x_2|; \quad |x_1| \leqslant a, |x_2| \leqslant a,\ a > 0.$
11. $\ln(1+x) < x; \quad x > 0.$
12. $|\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x_2| \leqslant 2 \cdot |x_1 - x_2|; \quad |x_1| \leqslant \pi/4,\ |x_2| \leqslant \pi/4.$
13. $|\ln x_1 - \ln x_2| > |x_1 - x_2|; \quad 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1,\ x_1 \neq x_2.$
14. $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}; \quad x > 0.$
15. $|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \geqslant \dfrac{|x_1 - x_2|}{2}; \quad |x_1| \leqslant 1,\ |x_2| \leqslant 1.$
16. $\operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1+x); \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$
17. $|\sin x_1 - \sin x_2| \geqslant \dfrac{|x_1 - x_2|}{2}; \quad |x_1| \leqslant \pi/3,\ |x_2| \leqslant \pi/3.$
18. $|\arcsin x_1 - \arcsin x_2| \geqslant 2|x_1 - x_2|; \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 3/4.$
19. $|\operatorname{tg} x_1 - \operatorname{tg} x_2| \leqslant \dfrac{4}{3}|x_1 - x_2|; \quad \pi/6 \leqslant x_1 \leqslant \pi/2,\ \pi/6 \leqslant x_2 \leqslant \pi/2.$
20. $|e^{x_1} - e^{x_2}| \geqslant e^{-a}|x_1 - x_2|; \quad a > 0,\ |x_1| \leqslant a,\ |x_2| \leqslant a.$
21. $e^x - e^{-x} > 2x; \quad x > 0.$
22. $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a} < \sqrt[4]{x-a}; \quad x > a > 0.$
23. $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|; \quad x_1,\ x_2-$ произвольные числа.
24. $f(x) = \sqrt{1+x^2}, g(x) = 1 + x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}.$
25. $f(x) = \cos x, \quad g(x) = 2 + \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3.$

Задание 5. Найти пределы

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1-x\ln 2}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.
2. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\sin 6x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.
3. a) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln\sin x}{\cos^2 x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.
4. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x+x^2)^{\frac{1}{1-x}}$.
5. a) $\lim\limits_{x\to 0}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$; b) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.
6. a) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{1-x}}$.
7. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^4}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.
8. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$; b) $\lim\limits_{x\to +0}(1-x+x^2)^{\frac{1}{1-x}}$.
9. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{3^x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{\ln x}}$.
10. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^4}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$.
11. a) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-\operatorname{arctg} x)\ln x$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.
12. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{e^x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\ln x)^{\frac{1}{x-1}}$.
13. a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$.
14. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x+\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
15. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\ln x}$; b) $\lim_{x\to 0}(2^x+x)^{\frac{1}{x}}$.
16. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{tg} x}$.
17. a) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{\frac{1}{x^2}}$.
18. a) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2e^{-x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x^2}-x)^{\frac{1}{x}}$.
19. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3^x-x^3}{x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.
20. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\arcsin x+x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$.
21. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x^2}{\sin^2 6x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}(1+x^2)^{\frac{1}{x+x^2}}$.
22. a) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\ln x$; b) $\lim\limits_{x\to 1}(x+e-x)^{\frac{1}{x}}$.
23. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x-3x}{\operatorname{tg} x-x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\operatorname{ctg} x}$.
24. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.
25. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln e^x+x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)\frac{1}{x}$.

Задание 6. Исследование функции на монотонность и экстремум

1. $y = \sin^2 x + 3\cos x$.
2. $y = x^{-1}\ln^3 x$.
3. $y = \sqrt{x^2+1}e^{\frac{x}{2}}$.
4. $y = \dfrac{3-x^2}{x+2}$.
5. $y = 2\,\mathrm{arctg}\,2x - x$.
6. $y = x2^x$.
7. $y = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x$.
8. $y = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$.
9. $y = \mathrm{ctg}\,x + \mathrm{tg}\,x$.
10. $y = x^3(4-x) + 5$.
11. $y = e^x \cos x$.
12. $y = 4\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}$.
13. $y = x^4 + (2-x)^4$.
14. $y = (x+1)e^{x^2-x}$.
15. $y = \sin 2x - x$.
16. $y = (x^2+7)(3-x^2)$.
17. $y = \sqrt{x}\ln x$.
18. $y = x + \sqrt{4-x^2}$.
19. $y = 4^x + 4^{1-x}$.
20. $y = \dfrac{x^2-7x+9}{x}$.
21. $y = 6\sin x + \cos 2x$.
22. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x-5}}$.
23. $y = (x+1)^2 e^{-x}$.
24. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 5$.
25. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Задание 7. Нахождение приближенного значения функции

Графически исследовать область существования корней уравнения. С точностью три знака после запятой вычислите их по теореме о нуле функции:

1. $\lg x = \dfrac{x}{10}$.
2. $\ln x = \sqrt{x} - 1$.
3. $e^2 x + x^2 = 5$.
4. $\mathrm{tg}\,x = 2x \quad \dfrac{-1}{2}\pi < x < \dfrac{1}{2}\pi)$.
5. $\cos x = \ln x$.
6. $2\sin x = x^2 - 2x + 1$.
7. $\cos x = 2^x \quad (-\pi < x < \pi)$.
8. $\mathrm{arctg}\,x = \sqrt{x}$.
9. $1 + e^{-x} = x^2$.
10. $\mathrm{arctg}\,x = x^2 - 1$.
11. $\sin x = x^3$.
12. $x^3 = 3x^2 - 2$.
13. $\mathrm{arctg}\,x = x^3$.
14. $x^4 + x^2 = 1$.
15. $\arccos x = \dfrac{1}{|x|}$.
16. $\arcsin x = 1{,}2x$.
17. $\arccos x = 8x^4/$
18. $\mathrm{tg}\,x = \dfrac{x}{2} \quad \dfrac{-3}{2}\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi)$.
19. $\mathrm{tg}\,x = 2x^2 \quad 0 < x < \dfrac{1}{2}\pi)$.
20. $x^2 = \ln x + x$.
21. $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{1}{x}$.
22. $x^2 + \sqrt{x} = 5$.
23. $\lg x + \sqrt{1-x^2} = 0$.
24. $\mathrm{arcctg}\,x = |x|$.
25. $2^x - x = 2$.

Задание 8. Исследование функций и построение графиков

Исследовать данные функции и построить их графики:

1. $a)$ $y = \frac{4x^2+3}{2x-1}$ $b)$ $y = x - \sqrt{x+1}.$
2. $a)$ $y = \frac{3x^2+x+12}{3x}$ $b)$ $y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$
3. $a)$ $y = \frac{4+7x-x^2}{x-4}$ $b)$ $y = e^{1/x} - x.$
4. $a)$ $y = \frac{10x-3}{2x-3}$ $b)$ $y = e^x - e^{-x}.$
5. $a)$ $y = \frac{2x^2-2x+1}{x-1}$ $b)$ $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$
6. $a)$ $y = \left(\frac{x-1}{x-1}\right)^2$ $b)$ $y = x^4 - 2x^2 - 3.$
7. $a)$ $y = \frac{x^2+2x-12}{2x}$ $b)$ $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$
8. $a)$ $y = \frac{12x^2-9x+12}{4x-3}$ $b)$ $y = x^{-1} \cdot e^x.$
9. $a)$ $y = \frac{2x^2-x+6}{2x}$ $b)$ $y = \sqrt{x^2 - 2x}.$
10. $a)$ $y = \frac{1}{x^2-x}$ $b)$ $y = \ln(x^2+1).$
11. $a)$ $y = \frac{x^2-2x+12}{x}$ $b)$ $y = (x^2-4)^3.$
12. $a)$ $y = \frac{3x+10}{x+10}$ $b)$ $y = x + \operatorname{arctg} x.$
13. $a)$ $y = \frac{x^2-x+2}{x-2}$ $b)$ $y = \ln\cos x.$
14. $a)$ $y = \frac{x}{1-x^2}$ $b)$ $y = xx \cdot |x^2-1|.$
15. $a)$ $y = \frac{4x^2}{2x-1}$ $b)$ $y = |x|^3 - 6|x| + 7.$
16. $a)$ $y = \frac{2x-1}{x-1}$ $b)$ $y = (x+1)(-2)^2.$
17. $a)$ $y = \frac{x^2-x+4}{x-4}$ $b)$ $y = \ln(4-x^2).$
18. $a)$ $y = \frac{x}{x^2+1}$ $b)$ $y = x^3 - x^2 - x + 1.$
19. $a)$ $y = \frac{2x^2+4x-18}{x+2}$ $b)$ $y = \ln\|\sin x|.$
20. $a)$ $y = \frac{6x+1}{3x+1}$ $b)$ $y = x^2 e^{-x}.$
21. $a)$ $y = \frac{3x^2-2x+3}{x}$ $b)$ $y = 8 + 2x^2 - x^4.$
22. $a)$ $y = \frac{x^3-4}{x^2}$ $b)$ $y = \cos^2 x - 2\sin x.$
23. $a)$ $y = \frac{4x^2+1}{2x+1}$ $b)$ $y = \frac{\ln x}{x}.$
24. $a)$ $y = \frac{9x^2-18x+1}{x-2}$ $b)$ $y = 2x^3 - 3x^2.$
25. $a)$ $y = \frac{x^2+x+2}{x+2}$ $b)$ $y = e^x \cdot \sin x.$

Задание 9. Задачи на моделирование с помощью производной

Решить задачу:

1. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

2. Дан ящик объема V. Каковы должны быть его размеры для того, чтобы поверхность ящика (без крышки) была наименьшей?

3. Требуется изготовить коническую воронку с образующей l. Какова должна быть высота воронки для того, чтобы ее объем был наибольшим?

4. Каковы должны быть размеры открытого цилиндрического бака объемом V литров для того, чтобы его поверхность была наименьшей?

5. Каковы должны быть размеры консервной банки, имеющей наибольший объем при заданной полной поверхности S?

6. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

7. Найти соотношение между радиусом и высотой цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

8. Доказать, что конический шатер данной вместимости требует наименьшего количества материи для его изготовления, когда высота шатра в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса основания.

9. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R.

10. Какова должна быть сторона основания правильной треугольной призмы для того, чтобы при заданном объеме призмы V ее полная поверхность была наименьшей?

11. Периметр кругового сектора равен l. Каким должен быть радиус сектора для того, чтобы его площадь была наибольшей?

12. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каково должно быть его основание, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания был наибольшим?

13. Проволокой, длина которой l метров, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

14. Бревно, длинной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Какова должны быть размеры балки?

15. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком — 5 км/ч, а на лодке — 4км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

16. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая. Высота конуса $\mathcal{H}$, радиус основания $\mathcal{R}$.

17. Из бумажного круга вырезан сектор, а из оставшейся части склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим.

18. Канал, ширина которого a метров, под прямым углом впадает в другой канал, ширина которого b метров. Определить наибольшую длину бревен, которую можно сплавлять по этой системе каналов.

19. Найти высоту прямого кругового конуса, наименьшего объема, описанного около шара, радиуса R.

20. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции площадь ее будет наибольшей, если боковые стороны равны b, а меньшее основание a.

21. Из фигуры ограниченной кривой $y = 3\sqrt{x}$ и прямыми $x = 4, y = 0$, вырезать прямоугольник наибольшей площади.

22. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 15 м. При каком радиусе6 полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?

23. На странице книги текст занимает площадь S. Ширина верхнего и нижнего полей равна a, а левого и правого — b. При каком отношении ширины к высоте площадь всей страницы будет наименьшей?

24. Требуется изготовить бак вместимостью V. Стоимость 1 м^2 материала, из которого изготовлено дно бака составляет P_1р., а стоимость 1 м^2 материала, идущего на стенки бака P_2р. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут минимальными?

25. Из всех конусов, с данной боковой поверхностью S найти тот, у которого объем наибольший.