Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

*В.Л. ФАЙНШМИДТ, П.М. ВИННИК,
И.В. ГУСЕВ, Г.А. СОГОМОНОВА,
Н.В. ТАРАСОВА*

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2013

УДК 517.53(075.8)
Ф 17

Ф 17 **Функции** комплексного аргумента: учебное пособие /В.Л.Файншмидт [и др.]; Балт. гос. техн. ун-т. — СПб., 2013. — 120 с.
ISBN 978-5-85546-775-8

Пособие соответствует программе курса теории функций комплексного аргумента для технических специальностей. Оно содержит теоретическую часть, варианты индивидуальных заданий и проверочных работ.

Предназначено для студентов всех технических специальностей.

УДК 517.53(075.8)

Р е ц е н з е н т: д-р физ.-мат. наук проф. каф. мат. анализа мат.–мех. фак-та СПбГУ *В.В. Жук*

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

ISBN 978-5-85546-775-8

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

1.1. Понятие комплексного числа

Из курса математики средней школы всем хорошо известно, что не всякую операцию, производимую с положительными числами, можно распространить на отрицательные числа. Например, из отрицательного числа невозможно получить вещественное значение квадратного корня. Невозможно также ввести логарифм отрицательного числа и т.д. Поэтому возникает необходимость так расширить понятие числа, чтобы можно было производить подобные операции с любым вещественным числом. Такое расширение мы и осуществим в этом разделе, введя понятие комплексного числа. Впервые это было сделано во второй половине XVI века итальянским математиком Рафаэлем Бомбелли (R. Bombelli, около 1526-1573).

Начнем с такого формального описания: числом i, или мнимой единицей, обозначают выражение $\sqrt{-1}$:

$$i = \sqrt{-1}.$$

Другими словами, мнимой единицей обозначают число, квадрат которого равен -1:

$$i^2 = -1.$$

Комплексным числом будем называть выражение $x + iy$, в котором x и y – вещественные числа.

Положив $z = x + iy$, число x называют вещественной или действительной частью комплексного числа z и обозначают $\operatorname{Re} z$, а число y – мнимой частью z и обозначают через $\operatorname{Im} z$:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Обозначения $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ происходят от латинских слов realis (действительный) и imaginarius (мнимый).

Обратим внимание на следующее: и вещественная, и мнимая части комплексного числа являются вещественными числами.

Множество всех комплексных чисел принято обозначать $\mathbb{C}$.

Понятно, что вещественные числа являются частью множества комплексных. Они получаются при $\operatorname{Im} z = 0$.

Комплексные числа, у которых $\operatorname{Re} z = 0$, т.е. числа вида iy, называют мнимыми или чисто мнимыми.

Таким образом, всякое комплексное число характеризуется парой вещественных чисел (x, y). В соответствии со сказанным нередко комплексные числа записывают как пару вещественных чисел: $z = (x, y)$.

Пару (x, y) можно рассматривать как координаты точки на плоскости или как координаты вектора. Тем самым комплексное число $z = x + iy$ можно изображать либо точкой, либо вектором на плоскости. В этом случае координатную ось, на которой откладываются значения x, называют вещественной осью, а вторую, где откладываются значения y, – мнимой. Саму плоскость в этом случае называют комплексной плоскостью (рис. 1).

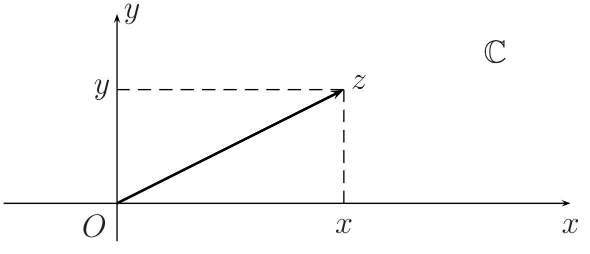

Рис. 1

Пусть $z = (x, y) = x + iy$. Сопряженным с ним называют число $\overline{z} = (x, -y) = x - iy$.

Очевидно, что комплексно сопряженные числа изображаются на комплексной плоскости точками, симметричными относительно вещественной оси.

Чтобы данными выше формальными описаниями комплексных чисел можно было пользоваться, нужно ввести правила действий с ними.

Начнем с понятия равенства, а затем введем сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считают равными, если они имеют одинаковые вещественные и одинаковые мнимые части, т.е. $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Суммой комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называют число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

т.е. при сложении комплексных чисел складывают по отдельности их вещественные и мнимые части, т.е. комплексные числа складываются так же, как векторы.

Умножение комплексных чисел производится по правилу умножения биномов с учетом того, что $i^2 = -1$. Это означает, что произведением числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на число $z_2 = x_2 + iy_2$ называют комплексную величину

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Нетрудно проверить, что сложение и умножение обладают обычными для этих операций свойствами, т.е. верны такие соотношения:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \qquad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Естественно, что вычитанием следует называть действие, противоположное сложению, так что

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Аналогичным образом, делением называют действие, обратное умножению.

Приведем примеры того, как производятся введенные арифметические операции.

П р и м е р 1.

$$(4 + i3)(6 + i2) + (5 - i4) = (24 - 6) + i(8 + 18) + (5 - i4) = 23 + i22.$$

П р и м е р 2.

$$\frac{3 + i5}{2 + i3} = \frac{(3 + i5)(2 - i3)}{(2 + i3)(2 - i3)} = \frac{21 + i}{13} = \frac{21}{13} + i\frac{1}{13}.$$

В связи с последним примером отметим следующее: при делении одного комплексного числа на другое обычно домножают числитель и знаменатель на число, сопряженное со знаменателем. В этом случае, как нетрудно понять, знаменатель становится вещественным, а это позволяет легко отделить вещественную и мнимую части в частном.

Итак, мы распространили на комплексные числа арифметические операции, которые раньше производили лишь с вещественными числами. Тем самым мы существенно расширили понятие числа.

Теперь можем сказать следующее: комплексные числа это пары вещественных, для которых определены указанным выше способом арифметические операции. При этом введенные арифметические операции с комплексными числами подчиняются тем же правилам, что и арифметические операции с вещественными числами.

Введение понятия квадратного корня из числа -1 позволяет нам сказать, что любое квадратное уравнение с вещественными коэффициентами разрешимо, т.е. имеет корни (вещественные или комплексные). Действительно, мы знаем, что решение квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет вид

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

а в последнем выражении квадратный корень существует при любом дискриминанте.

П р и м е р. Решим квадратное уравнение $x^2 + 4x + 20 = 0$.

В соответствии с формулой для решения квадратного уравнения, находим

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 20} = -2 \pm i4.$$

Значит, наше квадратное уравнение имеет два комплексных корня.

Более того, введение комплексных чисел позволило доказать такую замечательную теорему:

Теорема Гаусса (C. F. Gauss, 1777-1855). Всякий многочлен с вещественными коэффициентами вида

$$x^n + p_{n-1}x^{n-1} + ... + p_1x + p_0 \quad (n \geqslant 1)$$

имеет (с учетом кратности) ровно n корней, которые могут быть как вещественными, так и комплексными.

Другими словами, у всякого уравнения вида

$$x^n + p_{n-1}x^{n-1} + ... + p_1x + p_0 = 0 \quad (n \geqslant 1)$$

имеется (с учетом кратности) ровно n решений.

1.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Обратимся к рис. 2. Из него хорошо видно, что всякое комплексное число $z = x + iy$ можно полностью охарактеризовать длиной ρ изображающего его вектора и углом φ между осью Ox и этим вектором.

Величину ρ называют модулем числа z и обозначают $|z|$. Угол φ называют аргументом числа z и обозначают $\operatorname{Arg} z$.

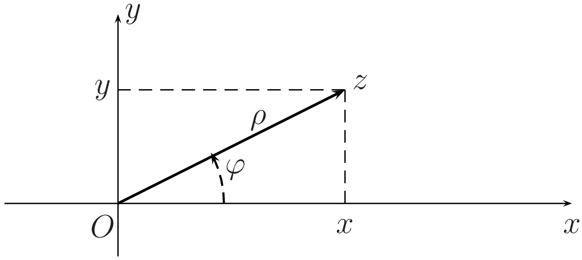

Рис. 2

Отметим сразу же, что число 0 определенного аргумента не имеет.

Модуль и аргумент комплексного числа $z = x + iy$ нетрудно выразить через его вещественную и мнимую части.

Действительно, очевидно, что

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Заметим, кстати, что $|z| = |\overline{z}|$ и $|z|^2 = z\overline{z}$.

Аргумент числа $z = x + iy$ нетрудно найти исходя из пары равенств:

$$\cos\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Если увеличить или уменьшить аргумент комплексного числа на 2π, то от этого число не изменится. Это значит, что всякое комплексное число имеет бесконечно много аргументов. Мы будем называть главным значением аргумента то, которое попадает в промежуток $(-\pi, \pi]$. Главное значение аргумента обозначается так: $\arg\ z$. Ясно, что все множество аргументов числа описывается формулой

$$\operatorname{Arg} z = \arg\, z + 2k\pi,$$

где k – любое целое число, то есть $k \in \mathbb{Z}$.

Напомним, что через $\mathbb{Z}$ обозначают множество всех целых чисел.

Если ρ – модуль комплексного числа $z = x + iy$, а φ – какой-нибудь его аргумент, то

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi.$$

Из этих равенств следует, что всякое комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

или

$$z = x + iy = \rho(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Мы получили тригонометрическую форму записи комплексных чисел.

Полезно обратить внимание на следующее: из тригонометрического способа записи видно, что два комплексных числа равны, если равны их модули, а аргументы либо равны, либо различаются на величину, кратную 2π.

П р и м е р. Запишем в тригонометрической форме такие числа: $1+i$, $-1-i$, 1, -1, i (рис. 3).

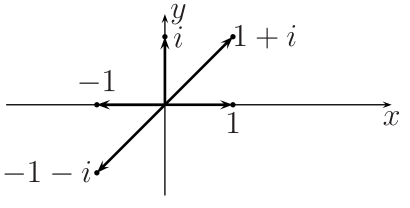

Рис. 3

Видно, что $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$ и $|1+i| = \sqrt{2}$. Поэтому

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right).$$

Аналогичо находим, что $\arg(-1-i) = -\dfrac{3\pi}{4}$ и $|-1-i| = \sqrt{2}$, откуда

$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)\right).$$

Далее,

$$1 = \cos 0 + i\sin 0 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi,$$

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = \cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi),$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

Рекомендуем читателю получить последние три равенства самостоятельно.

Заметим, что во всех примерах $k \in \mathbb{Z}$.

Тригонометрическая форма записи оказывается весьма полезной во многих случаях. В частности, она оказывается весьма удобной при умножении и делении комплексных чисел.

Действительно, пусть

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$

$$= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Исходя из последнего правила умножения можно получить одну очень полезную формулу. Действительно, очевидно, что

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Далее,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Продолжая эти действия, получим

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Это равенство называется формулой Муавра (A. de Moivre, 1667-1754).

Формула Муавра оказывается весьма полезной при нахождении степеней комплексных чисел.

П р и м е р. Найдем $(\sqrt{3}+i)^9$.

Для этого запишем число в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Тогда

$$(\sqrt{3}+i)^9 = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^9 = 2^9\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) =$$

$$= 512(0-i) = -512i.$$

В связи с решением последнего примера полезно обратить внимание на следующее: при решении задач для получения конкретного ответа обычно достаточно записывать комплексные числа, используя только главное значение аргумента.

В следующем разделе, исходя из формулы Муавра, мы найдем правило извлечения корня из числа.

Естественно, что при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются, так что оказывается

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\varrho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Рекомендуем читателю самостоятельно проверить справедливость написанного равенства.

1.3. Извлечение корня из числа

Корнем степени n из числа z называют такое число, n-я степень которого равна z. Мы будем такой корень обозначать $z^{\frac{1}{n}}$.

Выясним, как находится корень. Пусть

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{и} \quad z^{\frac{1}{n}} = r(\cos\psi + i\sin\psi).$$

В соответствии с определением должно быть

$$(r(\cos\psi + i\sin\psi))^n = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

или

$$r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Из последнего равенства следует, что

$$r^n = \rho \quad \text{и} \quad n\psi = \varphi + 2\pi k,$$

откуда

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{и} \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что символом $\sqrt[n]{\rho}$ мы, как обычно, обозначили только одно арифметическое значение корня.

Таким образом,

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$

Как мы видели, величина k может принимать любые целые значения. Обозначим корень, соответствующий k, через ξ_k и покажем, что $\xi_{k+n} = \xi_k$. Действительно,

$$\xi_{k+n} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi(k+n)}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi(k+n)}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + 2\pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \xi_k.$$

Равенство $\xi_{k+n} = \xi_k$ означает, что корень степени n из числа имеет ровно n различных значений. Все их можно найти, придавая n последовательных значений величине k. Например, мы можем написать так:

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \quad (k = 0, 1, ..., n-1).$$

П р и м е р 1. Найдем корни шестой степени из числа -64, т.е. вычислим $(-64)^{\frac{1}{6}}$.

Для решения задачи запишем -64 в тригонометрической форме:

$$-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Так как $\sqrt[6]{64} = 2$, то, в силу сказанного, получаем

$$(-64)^{\frac{1}{6}} = \xi_k = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right),$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$

Придавая k последовательно указанные значения, находим:

$$\xi_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$\xi_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = 2i,$$

$$\xi_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$\xi_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$\xi_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = -2i,$$

$$\xi_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

Обратим внимание на то, что при всех значениях k оказывается $|\xi_k| = 2$. Это значит, что все корни лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом 2. При этом у двух соседних корней аргументы отличаются на $\dfrac{\pi}{3}$. Следовательно, найденные корни являются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность (рис. 4).

Рекомендуем читателю показать, что корни степени n из числа являются вершинами правильного n-угольника, так что задача о нахождении корней эквивалентна задаче о построении правильного многоугольника.

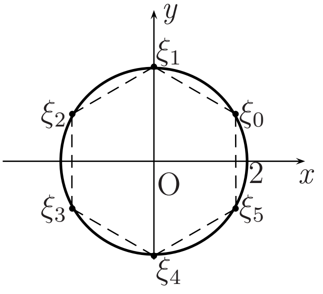

Рис. 4

1.4. Формулы Эйлера. Показательная форма записи комплексного числа

Распространим понятие показательной функции (экспоненты) на случай, когда аргумент принимает чисто мнимые значения. Для этого положим

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Это равенство называется формулой Эйлера (L. Euler, 1707-1783).

Покажем, что при таком определении сохраняется основное свойство показательной функции: при умножении экспонент их показатели степени складываются.

Действительно, если

$$e^{i\varphi_1} = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1, \quad e^{i\varphi_2} = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2,$$

то

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Итак,

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

т.е. показатели степени складываются.

Заменяя в формуле

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

величину φ на $-\varphi$, получаем

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Складывая два последних равенства и деля затем сумму на 2, приходим к формуле

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\,\varphi} + e^{-i\,\varphi}}{2}\ .$$

При вычитании этих же равенств получим

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\,\varphi} - e^{-i\,\varphi}}{2i}\ .$$

Эти выражения синуса и косинуса через экспоненту тоже называются формулами Эйлера.

Заметим, что полученное можно записать и так:

$$\cos\varphi = \operatorname{ch}(i\varphi), \quad \sin\varphi = -i\operatorname{sh}(i\varphi),$$

где

$$\operatorname{ch}(i\varphi) = \frac{e^{i\,\varphi} + e^{-i\,\varphi}}{2}, \quad \operatorname{sh}(i\varphi) = \frac{e^{i\,\varphi} - e^{-i\,\varphi}}{2}.$$

Формулы Эйлера представляют собой одно из самых замечательных достижений математики. Они обнаруживают глубокую связь между такими, на первый взгляд, различными функциями, как показательная и тригонометрические. Эти формулы оказываются чрезвычайно полезными при решении большого числа теоретических и прикладных задач.

Используя первую из формул Эйлера, мы можем комплексное число

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

записать в виде

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Эта форма записи комплексного числа называется показательной.

П р и м е р ы.

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)},$$

$$-1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k)}$$

$$-1 = e^{i\pi} = e^{i(\pi+2\pi k)}.$$

Итак, существует три формы записи комплексного числа:

- алгебраическая $z = x + iy$,
- тригонометрическая $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
- показательная $z = \rho e^{i\varphi}$.

Очевидно, что все формы записи эквивалентны. Другими словами, зная одну из форм записи, всегда можно перейти к каждой из двух других.

П р и м е р. Предположим, что число записано в тригонометрической форме: $z = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Тогда показательная форма записи имеет вид: $z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Видно также, что $x = 4\cos\dfrac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$ и $y = 4\sin\dfrac{\pi}{6} = 2$. Значит, алгебраическая запись такова: $z = 2\sqrt{3} + 2i$.

1.5. Некоторые геометрические понятия

В дальнейшем нам понадобятся некоторые важные геометрические понятия.

Заметим вначале, что множество точек z, удовлетворяющих равенству $|z - a| = r$, представляет собой на комплексной плоскости окружность с центром в точке a и радиусом r.

Множество точек z, для которых $|z - a| < r$, называют открытым кругом.

Окрестностью точки z_0 называют всякий содержащий ее открытый круг.

Если этот круг имеет центр в z_0 и радиус ε, то его называют ε-окрестностью точки z_0.

Точка z_0 называется внутренней точкой множества Z, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

Если все точки множества являются внутренними, то множество называют открытым.

Примерами открытого множества могут служить открытый круг и квадрат $\{0 < \mathrm{Re}z < 1,\ 0 < \mathrm{Im}z < 1\}$.

Множество Z называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в Z.

Областью называют связное открытое множество точек.

Точку z_0 называют граничной точкой области D, если она не принадлежит D, но в любой ее окрестности имеются точки, принадлежащие D.

Множество всех граничных точек образует границу D.

Если к открытой области D присоединить его границу, то образовавшееся множество называют замкнутой областью.

Примером замкнутой области служит квадрат с включенными границами $\{0 \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant 1,\ 0 \leqslant \mathrm{Im}z \leqslant 1\}$.

Примеры областей приведены на рис. 5.

Видно, что граница области на рис. 5 *а* состоит из одного контура. Такая область называется односвязной. На рис. 5*б* изображена трехсвязная область, то есть область, граница которой состоит из трех частей.

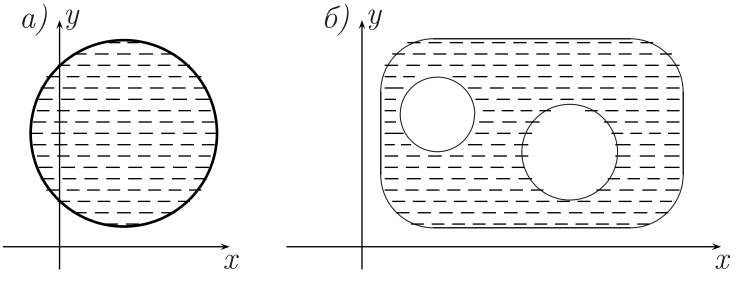

Рис. 5

В заключение этого раздела дадим еще одно определение: область D называется ограниченной, если существует такое положительное число A, что для всех z из области D выполняется неравенство $|z| < A$.

1.6. Функции комплексного аргумента

Функции комплексного аргумента вводятся аналогично тому, как это делается в случае вещественного аргумента. Именно, пусть имеется два множества комплексных чисел D и G. Если каждому числу $z = x + iy$ из D ставится в соответствие по определенному правилу f одно значение $w = u + iv$ из G, то говорят, что задана функция, отображающая D в G. Это записывают обычно так: $w = f(z),\ z \in D.$

Множество D называют множеством задания, а G – множеством значений функции.

Естественно, что построить график функции $w = f(z)$ невозможно. Вместе с тем, введя две комплексные плоскости $\mathbb{C}$ и $\mathbb{W}$ и считая, что $D \subset \mathbb{C}$ и $G \subset \mathbb{W}$, мы можем для каждой точки $z \in D$ построить в G соответствующую ей точку $w = f(z)$. Тем самым получим отображение множества D на плоскости $\mathbb{C}$ в некоторое множество на плоскости $\mathbb{W}$.

Очевидно, что задание одной комплексной функции $f(z)$ эквивалентно заданию ее вещественной и мнимой частей, т.е. двух вещественных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Распространим теперь основные элементарные функции на случай комплексного аргумента.

Мы уже распространили понятие показательной функции на случай чисто мнимого аргумента, положив $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Теперь введем показательную функции (экспоненту) для любого комплексного числа.

Если $z = x + iy$, то положим

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

П р и м е р ы.

$$\begin{aligned} e^{2+3i} &= e^2(\cos 3 + i \sin 3); \\ e^{3+i\pi} &= e^3(\cos \pi + i \sin \pi) = -e^3. \end{aligned}$$

Легко проверить, что при таком определении сохраняется важнейшее свойство показательной функции:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Рекомендуем читателю проверить это самостоятельно.

Интересно, что из нашего определения следует периодичность показательной функции. В самом деле,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Видно, что e^z имеет период, равный $2\pi i$.

Естественно наряду с показательной функцией ввести логарифм комплексного аргумента. Для того чтобы сделать это, запишем число в показательной форме:

$$z = \rho e^{i(\varphi+2\pi k)} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Так как $\rho = e^{\ln \rho}$, где $\ln \rho$ – хорошо известный нам логарифм вещественного положительного числа ρ, то z можно записать в виде

$$z = e^{\ln \rho + i(\varphi + 2\pi k)},$$

где φ – главное значение аргумента z. В соответствии с этой записью натуральным логарифмом числа следует называть величину

$$\ln \rho + i(\varphi + 2\pi k).$$

Очевидно, что число 0 логарифма не имеет, поскольку не имеет аргумента.

Натуральный логарифм z принято обозначать $\operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Ln} z = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Таким образом, всякое комплексное число, кроме нуля, имеет бесконечно много логарифмов, поскольку k может быть любым целым числом. Следовательно, $\operatorname{Ln} z$ не является функцией в обычном для нас смысле. Принято говорить, что $\operatorname{Ln} z$ есть многозначная (точнее, бесконечнозначная) функция.

Значение логарифма z, которое получается при $k = 0$ и при $\varphi \in (-\pi, \pi]$, называют главным и обозначают $\ln\, z$. Иначе говоря,

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Ясно, что каждому значению z отвечает одно значение $\ln\, z$. Поэтому $\ln\, z$ можем назвать функцией в обычном смысле этого слова.

П р и м е р ы.

$\operatorname{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \operatorname{Ln}\left(2e^{i(\frac{\pi}{3} + 2\pi k)}\right) = \ln 2 + i\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$;

$\ln(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{3}$;

$\operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln}\, e^{i(\pi + 2\pi k)} = i(\pi + 2\pi k)$;

$\ln(-1) = i\pi$;

$\operatorname{Ln} 1 = \ln e^{i2\pi k} = i2\pi k$;

$\ln 1 = 0$;

$\operatorname{Ln}\, i = \operatorname{Ln}\, e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$;

$\ln\, i = i\dfrac{\pi}{2}$.

Определим тригонометрические функции комплексного аргумента так:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{и} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Далее положим

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Рекомендуем читателю показать, что при таком определении сохраняются все основные формулы тригонометрии. Например, справедливо равенство $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

П р и м е р. Найдем $\cos 3i$.

В соответствии с определением

$$\cos 3i = \frac{e^{-3} + e^3}{2} \approx 10,07.$$

Введем степень μ комплексного числа z. Для этого запишем z в показательной форме $e^{\operatorname{Ln} z}$ и положим

$$z^\mu = \left(e^{\operatorname{Ln}\, z}\right)^\mu = e^{\mu \operatorname{Ln}\, z}.$$

Так как $\operatorname{Ln} z$ имеет бесконечно много значений, то из написанного хорошо видно, что степень числа тоже может иметь бесконечно много различных значений. Однако так бывает не всегда. Например, советуем читателю самостоятельно показать, что если n – целое число, z^n принимает только одно значение. Далее, при выводе выражения для корня из комплексного числа оказалось, что $z^{\frac{1}{n}}$ имеет n различных значений. Рекомендуем читателю показать, что такой же вывод можно сделать и из общего определения степени.

П р и м е р. Найдем i^i.

Выше мы видели, что $\operatorname{Ln} i = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$i^i = (e^{\operatorname{Ln} i})^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{ii(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}.$$

Таким образом, i^i принимает бесконечно много значений, причем все эти значения оказываются вещественными.

1.7. Предел и непрерывность функции комплексного аргумента

Пусть функция $f(z)$ задана в некоторой области D. Число l называется пределом функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $z \in D$, удовлетворяющих условию $0 < |z-z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z)-l| < \varepsilon$.

Говорят, что $f(z)$ стремится к бесконечности при $z \to z_0$, если для всякого вещественного $A > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $z \in D$, удовлетворяющих условию $0 < |z-z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z)| > A$.

Число l называется пределом функции $f(z)$ при $z \to \infty$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $R > 0$, что при всех z, у которых $|z| > R$, выполняется неравенство $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Наконец, $f(z)$ стремится к бесконечности при $z \to \infty$, если для всякого A существует такое $R > 0$, что при всех z, удовлетворяющих условию $|z| > R$, выполняется неравенство $|f(z)| > A.$

Будем писать в соответствии со сказанным

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l, \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty, \quad \lim_{z\to\infty} f(z) = l, \quad \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$$

или

$$f(z) \to l \ (z \to z_0), \quad f(z) \to \infty \ (z \to z_0),$$

$$f(z) \to l \ (z \to \infty), \quad f(z) \to \infty \ (z \to \infty).$$

Функцию, имеющую при $z \to z_0$ пределом 0, называют бесконечно малой при $z \to z_0$.

Данные нами определения практически дословно повторяют те, которые были даны для функции вещественного аргумента. Вместе с тем эти определения существенно отличаются по содержанию. Действительно, если в вещественном случае аргумент мог приближаться к предельному значению лишь с двух сторон, то на комплексной плоскости существует бесконечное множество направлений, по которым аргумент стремится к пределу.

Нетрудно видеть, что из определений можно получить теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного.

Пусть $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $l = m + in.$ Отделим в функции вещественную и мнимую части, то есть представим $f(z)$ в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$ Нетрудно понять, что утверждение:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=l$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} u(x,y)=m \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} v(x,y)=n.$$

Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, то функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0.

Полагая $\Delta z_0 = z - z_0$ и $\Delta f(z_0) = f(z_0+\Delta z_0) - f(z_0)$, можем сформулировать определение непрерывности так: функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если $\Delta f(z_0)\to 0$ при $\Delta z_0 \to 0$.

Очевидно, что функция непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывны ее вещественная и мнимая части.

Если функция непрерывна во всех точках некоторой области, то она называется непрерывной в этой области.

Нетрудно понять, что остаются справедливыми основные теоремы, доказанные для непрерывных функций вещественного аргумента. Например, справедлива теорема о сохранении непрерывности при арифметических операциях с непрерывными функциями. Верна такая теорема: если функция $f(z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, то она ограничена в этой области, то есть найдется такое число M, что $|f(z)|<M$ при всех $z\in\overline{D}$.

Можно доказать, что введенные нами основные элементарные функции непрерывны во всех точках, где они заданы. Мы не будем этого делать.

1.8. Производная функции комплексного аргумента

Возьмем две точки z и $z+\Delta z$ в области задания функции $f(z)$. Найдем значения $f(z)$ и $f(z+\Delta z)$. Затем составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Предел этого отношения при $\Delta z \to 0$ называют производной и обозначают $f'(z)$, т. е.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Полагая $\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z)$, можем написать:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}.$$

Так же как и для функции вещественного аргумента, нетрудно доказать,что необходимым условием существования производной является непрерывность функции.

Укажем теперь необходимые и достаточные условия существования производной.

Теорема. Функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, заданная в области D, имеет в точке $z = x+iy \in D$ производную $f'(z)$ тогда и только тогда, когда в этой точке функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы и при этом выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Доказательство. Предположим, что $f(z)$ имеет производную. Это означает, что существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z).$$

В таком случае, должно быть

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z) + \gamma,$$

где $\gamma \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Отсюда

$$\Delta f(z) = f'(z)\Delta z + \gamma \Delta z.$$

Положим $f'(z) = A + iB$, $\gamma = \alpha + i\beta$ и перепишем полученное равенство так:

$$\Delta u + i\Delta v = (A+iB)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y).$$

Отделяя здесь вещественную и мнимую части, находим

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha\Delta x - \beta\Delta y,$$

$$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \beta\Delta x + \alpha\Delta y.$$

Полученные равенства показывают, что u и v дифференцируемы в точке $z = x + iy$. Теперь докажем, что справедливы равенства, приведенные в формулировке теоремы. Значение производной не зависит от направления, по которому $\Delta z \to 0$. Поэтому мы можем взять, например, $\Delta z = \Delta x$. В этом случае мы получаем

$$f'(z) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y) + i(v(x+\Delta x, y) - v(x,y))}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если возьмем $\Delta z = i\Delta y$, то в этом случае

$$f'(z) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(z+i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y) + i(v(x, y+\Delta y) - v(x,y))}{i\Delta y} =$$

$$= -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Сравнивая два выражения для одной и той же производной, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теперь допустим, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы и выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

и докажем, что существует производная $f'(z)$.

Рассмотрим выражение

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u(x,y)+i\Delta v(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}\,.$$

Так как u и v дифференцируемы в точке $z=x+iy$, то

$$\Delta u=u'_x\Delta x+u'_y\Delta y+\alpha|\Delta z|,\quad \Delta v=v'_x\Delta x+v'_y\Delta y+\beta|\Delta z|,$$

где $|\Delta z|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, а функции α и β стремятся к нулю при $\Delta x\to 0,\quad \Delta y\to 0.$

Значит,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\frac{u'_x\Delta x+u'_y\Delta y+i(v'_x\Delta x+v'_y\Delta y)+(\alpha+i\beta)|\Delta z|}{\Delta x+i\Delta y}\,.$$

Но $u'_y=-v'_x$, $v'_y=u'_x$. Поэтому

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\frac{u'_x\Delta x-v'_x\Delta y+i(v'_x\Delta x+u'_x\Delta y)+(\alpha+i\beta)|\Delta z|}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\frac{u'_x(\Delta x+i\Delta y)+v'_x(i\Delta x-\Delta y)+(\alpha+i\beta)|\Delta z|}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\left(\frac{u'_x(\Delta x+i\Delta y)+iv'_x(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\frac{(\alpha+i\beta)|\Delta z|}{\Delta z}\right)=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\left(u'_x+iv'_x+\frac{(\alpha+i\beta)|\Delta z|}{\Delta z}\right)=u'_x+iv'_x.$$

Итак, производная существует. Теорема доказана.

Полезно отметить, что из доказательства теоремы видно, что производные можно находить, пользуясь равенствами

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y.$$

Условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

обычно называют условиями Коши – Римана (A. Cauchy, 1780-1857; B. Riemann, 1826-1866) хотя исторически это несправедливо, поскольку еще раньше они были найдены Эйлером и Даламбером (J. d'Alembert, 1717-1783).

Нетрудно доказать, что все правила и формулы, по которым мы находили производные в случае вещественного аргумента, остаются справедливыми для функций комплексного аргумента.

Покажем, например, что $(e^z)' = e^z$ при любом z.

Действительно, так как

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y),$$

то

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Ясно, что u и v дифференцируемы при любых x и y. При этом

$$u'_x = v'_y = e^x \cos x, \quad u'_y = -v'_x = -e^x \sin y,$$

то есть выполнены условия Коши – Римана.Следовательно, производная $(e^z)'$ существует.

Найдем ее. Мы видели, что $f'(z) = u'_x + iv'_x$. В нашем случае оказывается

$$(e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

В заключение введем понятие дифференциала функции комплексного аргумента.

Из равенства

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z},$$

как мы уже видели, следует, что

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z) + \gamma,$$

где $\gamma \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Значит,

$$\Delta f(z) = f'(z)\Delta z + \gamma\Delta z,$$

откуда видно, что $f'(z)\Delta z$ является главной линейной частью приращения $\Delta f(z)$ (если $f'(z) \neq 0$). Так же как и для функции вещественного аргумента, эта главная линейная часть приращения называется дифференциалом функции $f(z)$ и обозначается $df(z)$.

Для независимого аргумента z считают, что $dz = \Delta z$. Это дает возможность написать:

$$df(z) = f'(z)dz.$$

Заметим, что $f'(z) = \dfrac{df(z)}{dz}$.

Определение 1. Функция называется регулярной или аналитической в некоторой области (открытой), если она имеет производную во всех точках этой области.

Определение 2. Функция называется регулярной или аналитической в точке, если она регулярна в некоторой области, содержащей эту точки.

Иначе говоря, функция регулярна в точке, если она имеет производную не только в этой точке, но и в некоторой ее окрестности.

Определение 3. Функция называется регулярной или аналитической в замкнутой области D, если она регулярна в некоторой более широкой области, содержащей D.

Регулярные функции будут основным объектом нашего изучения.

1.9. Конформное отображение

Предположим, что регулярная функция $w = f(z)$ отображает линию L на плоскости $\mathbb{C}$ в линию M на плоскости $\mathbb{W}$ (рис. 6).

Возьмем на L какие-нибудь точки z и $z+\Delta z$. Им соответствуют точки $w = f(z)$ и $w + \Delta w = f(z + \Delta z)$ на линии M.

Запишем Δz и Δw в показательной форме:

$$\Delta z = |\Delta z|e^{i\varphi}, \quad \Delta w = |\Delta w|e^{i\psi}.$$

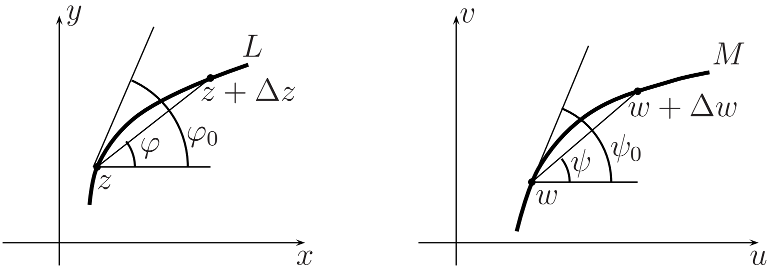

Рис. 6

Тогда

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|\Delta w| e^{i\psi}}{|\Delta z| e^{i\varphi}} = \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}\ e^{i(\psi-\varphi)}.$$

Заметим, что в пределе при $\Delta z \to 0$ углы ψ и φ превратятся в углы ψ_0 и φ_0 наклона касательных, проведенных к линиям L и M соответственно в точках z и w.

Переходя к пределу при $\Delta z \to 0$, получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}\ e^{i(\psi-\varphi)} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}\ e^{i(\psi_0-\varphi_0)}.$$

Отсюда

$$|f'(z)| = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

и, если $f'(z) \neq 0$,

$$\operatorname{Arg}\, f'(z) = \psi_0 - \varphi_0$$

или

$$\psi_0 = \varphi_0 + \operatorname{Arg}\, f'(z).$$

Величина $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ представляет собой коэффициент деформации, которую претерпевает в точке z линия L при отображении ее в линию M. Поскольку $|f'(z)|$ не зависит от выбора линии, постольку ясно, что все линии имеют один и тот же коэффициент деформации в этой точке.

Величина $\operatorname{Arg} f'(z)$ также не зависит от линии. Поэтому равенство $\psi_0 = \varphi_0 + \operatorname{Arg} f'(z)$ показывает, что при переходе от точки z к точке w все кривые поворачиваются на один и тот же угол, равный $\operatorname{Arg} f'(z)$.

Определение. Отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, называется конформным в точке z, если оно удовлетворяет двум условиям:

1) при переходе от точки z к точке $w = f(z)$ коэффициент деформации для всех линий один;

2) все линии, проходящие через точку z, поворачиваются на один и тот же угол в точке $w = f(z)$.

Из сказанного, очевидно, что при конформном отображении углы между линиями, проходящими через z, сохраняются.

Нетрудно также понять, что окружность с бесконечно малым радиусом и с центром в точке z при конформном отображении превратится в бесконечно малую окружность с центром в w (с точностью до бесконечно малых высших порядков), а бесконечно малый треугольник – в подобный (с точностью до малых высшего порядка).

В соответствии с тем, что говорилось выше, справедлива

Теорема. Если $f(z)$ – регулярная функция, то производимое ею отображение конформно во всех точках, в которых $f'(z) \neq 0$.

Приведем без доказательства еще одно свойство конформного отображения

Теорема. Если функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D, то она отображает D в множество Δ, являющееся односвязной областью, а граница D отображается в границу Δ, причем сохраняется направление обхода границы.

1.10. Линейное и дробно-линейное отображения

Рассмотрим линейную функцию $w = az + b \quad (a \neq 0)$. Очевидно, что она регулярна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и, так как $w' = a$, то осуществляет конформное отображение плоскости $\mathbb{C}$ на плоскость $\mathbb{W}$. При этом во всех точках коэффициент деформации равен $|a|$, а кривые поворачиваются на угол $\operatorname{Arg} a$.

Так как во всех точках коэффициент растяжения и угол поворота линий одни и те же, то ясно, что при линейном отображении всякая прямая на плоскости $\mathbb{C}$ преобразуется в прямую на плоскости $\mathbb{W}$, а всякая окружность – в окружность. Кроме того, любой треугольник на $\mathbb{C}$ превращается в подобный треугольник на плоскости $\mathbb{W}$.

Теперь рассмотрим дробно-линейную функцию, то есть функцию $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Прежде чем сформулировать одно важное для приложений свойство нашей функции, выясним, как записывается уравнение окружности на комплексной плоскости. Для этого напомним, что в вещественной форме уравнение окружности имеет вид

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0.$$

Используя равенства $x^2+y^2=z\overline{z}$, $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, преобразуем левую часть уравнения окружности:

$$az\overline{z}+b\frac{z+\overline{z}}{2}+c\frac{z-\overline{z}}{2i}+d=az\overline{z}+\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2i}\right)z+\left(\frac{b}{2}-\frac{c}{2i}\right)\overline{z}+d.$$

Положив $a=A$, $B=\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2i}$, $D=d$, получим уравнение окружности в комплексной форме:

$$Az\overline{z}+Bz+\overline{B}\overline{z}+D=0.$$

Заметим, что при $a=A=0$ уравнение окружности превращается в уравнение прямой. Это дает возможность рассматривать прямую как частный случай окружности (прямая есть окружность с бесконечным радиусом).

Вернемся к дробно-линейной функции. Начнем с простейшего случая, когда $w=\dfrac{1}{z}$. Эта функция задана при всех z, кроме $z=0$. При этом производная $w'=-\dfrac{1}{z^2}$ существует и не равна нулю во всех точках области задания. Так что осуществляемое ею отображение является конформным во всей области задания.

Выясним теперь, во что превратится окружность при преобразовании $w=\dfrac{1}{z}$. Для этого заменим в ее уравнении z на $\dfrac{1}{z}$. Получим

$$A\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}}+B\frac{1}{w}+\overline{B}\frac{1}{\overline{w}}+D=0$$

или

$$A+B\overline{w}+\overline{B}w+Dw\overline{w}=0.$$

Очевидно, что мы получили уравнение окружности.

Итак, функция $w = \dfrac{1}{z}$ переводит окружность в окружность. В частности, если $d = D = 0$, то образуется прямая, то есть окружность с бесконечным радиусом, как говорилось выше. Такое свойство функции называют круговым.

Напомним, что в начале этого раздела было доказано круговое свойство функции $w = az + b$.

Перейдем к общему случаю дробно-линейной функции, то есть рассмотрим $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Если $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, то функция принимает вид $w = \text{const}$. Поэтому будем считать, что $ad \neq bc$. В этом случае функция задана при всех z, кроме $z = -\dfrac{d}{c}$.

Ясно, что

$$w' = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

Так как $ad \neq bc$, то во всей области задания дробно-линейная функция имеет отличную от нуля производную, а потому отображение, осуществляемое ею, конформно.

Покажем, что дробно-линейная функция w обладает круговым свойством. Для этого выделим в дроби целую часть, т.е. запишем ее в таком виде:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2z+cd}\ .$$

Теперь представим дробно-линейное преобразование в виде последовательных преобразований:

$$w_1 = c^2z + cd, \quad w_2 = \frac{1}{w_1}, \quad w = \frac{a}{c} + (bc-da)w_2.$$

Выше было показано, что при каждом из указанных преобразований окружность отображается в окружность. Значит, окружность на плоскости $\mathbb{C}$ отобразится в окружность на плоскости $\mathbb{W}$, т. е. дробно-линейная функция обладает круговым свойством.

Введем новое понятие.

Определение. Двойным или ангармоническим отношением чисел a, b, c, d называют величину

$$\frac{a-c}{a-d}:\frac{b-c}{b-d}.$$

Теперь можно сформулировать такое свойство: если при дробно-линейном преобразовании точкам z, z_1, z_2, z_3 отвечают соответственно точки w, w_1, w_2, w_3, то сохраняется двойное отношение точек, то есть

$$\frac{w-w_2}{w-w_3}:\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z-z_2}{z-z_3}:\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}.$$

Справедливость этого свойства проверяется легко, а потому мы его не доказываем.

З а м е ч а н и е. Если одно из чисел в последнем равенстве равно ∞, то дробь, в которую это число входит, следует положить равной 1.

Например, если $w_3=\infty$, то равенство примет вид

$$\frac{w-w_2}{w_1-w_2}=\frac{z-z_2}{z-z_3}:\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}.$$

Как мы знаем, всякая окружность может быть задана тремя лежащими на ней точками. Поэтому, задав три точки на одной окружности и соответствующие им три точки на другой, мы можем, используя последнее свойство, получить дробно-линейное преобразование, переводящее одну окружность в другую. Еще раз обратим внимание на то, что слово окружность используется в широком смысле, то есть прямая рассматривается как частный случай окружности.

Вспоминая, что при конформном отображении граница области преобразуется в границу с сохранением направления обхода, мы можем теперь решать задачи такого типа: с помощью дробно-линейного преобразования отобразить круг в круг или во внешность круга, отобразить круг в полуплоскость и наоборот.

П р и м е р. Круг единичного радиуса с центром в начале координат преобразовать в верхнюю полуплоскость.

Для решения задачи возьмем на границе круга три точки: 1, i, -1. Чтобы круг преобразовался в верхнюю полуплоскость, окружность должна превратиться в вещественную ось. Это будет, если, например, взятые нами точки отобразятся соответственно в 0, 1 и $+\infty$.

При последовательном обходе точек 1, i, -1 круг остается слева, а при последовательном обходе точек 0, 1, $+\infty$ слева остается верхняя полуплоскость.

Используя равенство ангармонических отношений, имеем

$$\frac{w-1}{0-1} = \frac{z-i}{z+1} : \frac{1-i}{1+1}.$$

Отсюда после несложных преобразований получаем

$$w = -i\,\frac{z-1}{z+1}.$$

Таким образом, учитывая правило сохранения направления обхода границы, мы можем утверждать, что найденная нами дробно-линейная функция отображает круг в верхнюю полуплоскость.

1.11. Примеры конформных отображений

П р и м е р 1. Пусть $w = z^n$, где n – число целое и больше единицы. Выясним, во что преобразуется угол, ограниченный лучами $\arg z = \alpha$ и $\arg z = \beta$ (см. рис. 7*а*).

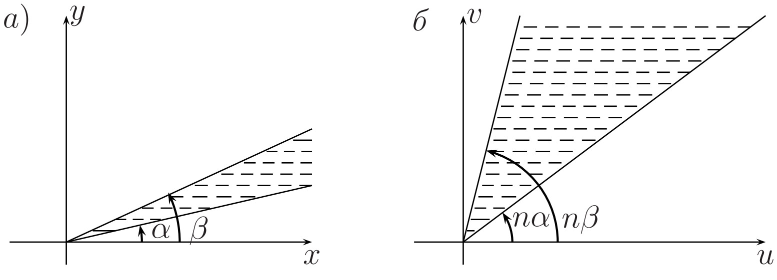

Рис. 7

Заметим прежде всего, что $w' = nz^{n-1} \neq 0$ при всех z, кроме $z = 0$. Значит, отображение, осуществляемое этой функцией, конформно во всех точках, кроме точки $z = 0$.

Для решения запишем z и w в показательной форме: $z = \rho e^{i\varphi}$ и $w = re^{i\psi}$. Тогда окажется, что $re^{i\psi} = \rho^n e^{in\varphi}$, откуда $r = \rho^n$, $\psi = n\varphi$.

Теперь нетрудно видеть, что при движении точки z из нуля вдоль луча $\arg z = \alpha$ оказывается $\psi = n\alpha$, а r изменяется от нуля до $+\infty$. Это означает, что луч $\arg z = \alpha$ преобразуется на плоскости $\mathbb{W}$ в луч $\arg w = n\alpha$. Точно так же луч $\arg z = \beta$ преобразуется в луч $\arg w = n\beta$.

Значит, на плоскости $\mathbb{W}$ получается угол с вершиной в начале координат и с раствором в n раз большим, чем на плоскости z (рис. 7*б*).

П р и м е р 2. Найдем, во что функция $w = e^z$ преобразует полуполосу $\{\mathrm{Re} z > 0, \quad 0 < \mathrm{Im} z < \pi\}$ (см. рис. 8*а*).

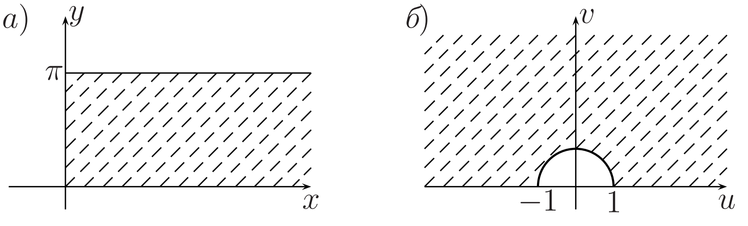

Рис. 8

Так как $w' = e^z \neq 0$ при любом значении z, то ясно, что отображение $w = e^z$ конформно при всех z.

Мы знаем, что $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Следовательно, вещественная и мнимая части имеют вид $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

Далее, граница полуполосы состоит из трех частей:

1) правой половины вещественной оси, где $0 \leqslant x < +\infty$ и $y = 0$;
2) отрезка мнимой оси, на котором $x = 0$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$;
3) полупрямой, где $y = \pi$ и $0 \leqslant x < +\infty$.

На первой части границы $z = x$, а потому оказывается $u = e^x$ и $v = 0$. Отсюда видно, что когда $z = x$ пробегает эту часть от 0 до $+\infty$, точка $w = e^x$ пробегает отрезок оси u от 1 до $+\infty$.

На второй части границы области $z = iy$, так что $u = \cos y$ и $v = \sin y$. Поэтому, когда точка $z = iy$ проходит эту часть границы от $y = 0$ до $y = \pi$, точка $w = \cos y + i \sin y$ пробегает против часовой стрелки верхнюю половину окружности с радиусом единица и центром в начале координат от точки $(1, 0)$ до точки $(-1, 0)$.

На третьей части границы $z = x + i\pi$, а потому оказывается $u = -e^x$ и $v = 0$. Отсюда видно, что когда $z = x + i\pi$ пробегает эту часть от $x = 0$ до $x = +\infty$, точка $w = -e^x$ пробегает отрезок оси u от -1 до $-\infty$.

Теперь, учитывая сохранение направления обхода границы при конформном отображении, можем сказать, что заданная нам полуполоса превратится на плоскости $\mathbb{W}$ в верхнюю полуплоскость с вырезанным полукругом (рис. 8*б*).

Заметим, что можно было иначе определить, в какую часть плоскости $\mathbb{W}$ отобразится исходная область. Для этого достаточно, взяв какую-нибудь внутреннюю точку исходной области, посмотреть, куда она попадает на плоскости $\mathbb{W}$. Ясно, что в ту же часть будут попадать и остальные точки исходной области. Например, взяв $z = 1 + i\dfrac{\pi}{2}$, находим

$$w = e^{1+i\frac{\pi}{2}} = e\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = ie.$$

Так как точка $w = ie$ попала в верхнюю полуплоскость с вырезанным полукругом, то и вся исходная область преобразуется в эту область. Такой прием используют довольно часто.

Пример 3. На плоскости $\mathbb{C}$ область задана условиями $|z| > 4$ и $\dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ (рис. 9*а*). Выясним, во что она преобразуется функцией $w = \ln z$.

Так как $w = \ln z = \ln|z| + i\arg z$, то $u = \ln|z|$ и $v = \arg z$. Из условий задачи видно, что должно быть $u > \ln 4$ и $\dfrac{\pi}{6} < v < \dfrac{\pi}{3}$. Это неравенства описывают на плоскости $\mathbb{W}$ полуполосу (рис. 9*б*).

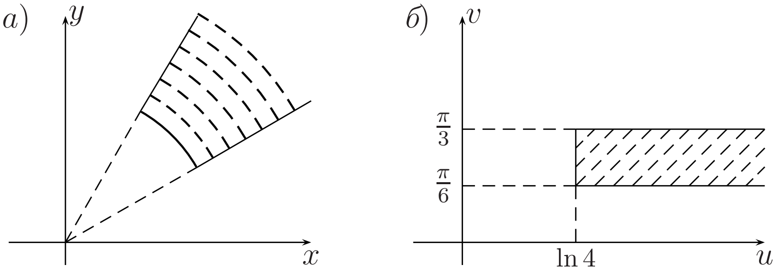

Рис. 9

Пример 4. Найдем, во что преобразуется прямоугольник $\{0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ 0 < y < \ln 3\}$ (рис. 10*а*), если $w = \sin z$.

Граница исходного прямоугольника состоит из четырех отрезков, задаваемых такими условиями:

1) $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$; 2) $x = \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \ln 3$;

3) $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $y = \ln 3$; 4) $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant \ln 3$.

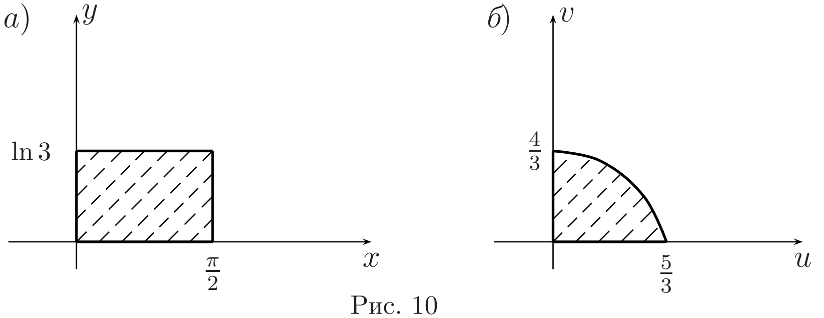

Рис. 10

Выясним, во что преобразуются участки границы. Для этого отделим в функции $w = \sin z$ вещественную и мнимую части. Так как

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin y) - e^{y}(\cos x - i \sin y)}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

то оказывается $u = \sin x \operatorname{ch} y$, $v = \cos x \operatorname{sh} y$.

На первом участке границы $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$. Поэтому на этом участке $u = \sin x$, $v = 0$. Значения $\sin x$ изменяются от 0 до 1. Значит, первый участок границы превратится на плоскости w в лежащий на вещественной оси отрезок $[0, 1]$.

На втором участке границы $x = \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \ln 3$. Поэтому оказывается $u = \operatorname{ch} y$, $v = 0$. При изменении y от 0 до $\ln 3$ величина $\operatorname{ch} y$ изменяется от 1 до $\operatorname{ch} \ln 3 = \dfrac{5}{3}$. Таким образом, второй участок границы преобразуется в отрезок $\left[1, \dfrac{5}{3}\right]$ вещественной оси.

Так как на третьей части границы $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $y = \ln 3$, то там $u = \dfrac{5}{3} \sin x$, $v = \dfrac{4}{3} \cos x$. Когда x изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ точка на плоскости w описывает дугу эллипса, лежащую в первом квадранте.

Наконец, на четвертой части границы $u = 0$, $v = \operatorname{sh} y$. Так как $0 \leqslant y \leqslant \ln 3$, то v изменяется от 0 до $\operatorname{sh}\ln 3 = \dfrac{4}{3}$, то есть пробегает на мнимой оси отрезок $\left[0, \dfrac{4}{3}\right]$.

Учитывая сохранение направления обхода контура области, можем сказать, что исходный прямоугольник превратится на плоскости $\mathbb{W}$ в четверть эллипса (рис. 10*б*).

1.12. Интеграл от функции комплексного аргумента

Пусть функция $f(z)$ задана в области D и aLb – некоторая линия, лежащая в D. Разобьем эту линию на n произвольных частей точками $a = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n = b$. Найдем разности $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. В каждой из частей линии возьмем по одной точке. Обозначим точки соответственно ζ_1, ζ_2, ..., ζ_n. В этих точках найдем значения функции: $f(\zeta_1)$, $f(\zeta_2)$, ..., $f(\zeta_n)$. Затем составим произведения вида $f(\zeta_k)\Delta z_k$ и сложим их. Получим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

Назовем рангом дробления линии наибольшую из величин $|\Delta z_k|$. Обозначим ранг дробления через λ.

Предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$ называют интегралом от функции $f(z)$ по линии aLb:

$$\int\limits_{aLb} f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

Укажем сразу же (без доказательства) условия существования интеграла: если линия имеет длину и функция $f(z)$ непрерывна, то интеграл существует.

Положим $z = x + iy$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ и отделим в $f(z)$ вещественную и мнимую части: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда интегральную сумму можно преобразовать так:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k +$$

$$+ i\sum_{k=1}^{n} v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k.$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\int\limits_{aLb} f(z)dz = \int\limits_{aLb} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{aLb} v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

Таким образом, интеграл от функции комплексного аргумента оказался выраженным через два вещественных криволинейных интеграла.

Ясно, что интеграл обладает свойствами линейности и аддитивности.

Кроме того, нетрудно показать, что если $|f(z)| \leqslant M$ и длина линии интегрирования равна $|L|$, то

$$\left| \int\limits_{aLb} f(z)dz \right| \leqslant M\ |L|.$$

Если линия aLb задана параметрически, так что, например, $x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)\ \ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, причем значению α соответствует точка a, а значению β – точка b, то на линии $z = \varphi(t) + i\psi(t)$. Поэтому оказывается

$$\int\limits_{aLb} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t) + i\psi(t))(\varphi'(t) + i\psi'(t))dt.$$

Отделяя в последнем выражении вещественную и мнимую части, сведем дело к вычислению двух определенных интегралов.

П р и м е р. Вычислим интеграл

$$\int\limits_{aLb} z\overline{z}dz,$$

в котором дуга aLb – отрезок прямой между точками $a = 1 + i$ и $b = 3 + 5i$.

На этом отрезке $x = 2t + 1$, $y = 4t + 1$, где $t \in [0, 1]$. Поэтому $z = 2t+1+i(4t+1)$, $\overline{z} = 2t+1-i(4t+1)$, $dz = (2+4i)dt$. Подставляя эти выражения в интеграл, получаем

$$\int\limits_{aLb} z\overline{z}dz = \int\limits_0^1 ((2t+1)^2 + (4t+1)^2)(2+4i)dt =$$

$$= (2+4i)\int\limits_0^1 (20t^2 + 12t + 2)dt = \frac{88}{3}(1+2i).$$

Если точки a и b совпадают, то есть линия L оказывается замкнутым контуром, то будем писать

$$\oint\limits_L f(z)dz.$$

Очевидно, что значение интеграла по замкнутому контуру зависит от направления обхода этого контура. Поэтому интегралы, обходимые против и по часовой стрелке, будем обозначать соответственно

$$\ointctrclockwise\limits_L f(z)dz \quad \text{и} \quad \ointclockwise\limits_L f(z)dz.$$

П р и м е р. Найдем интеграл,

$$\ointctrclockwise\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dz \quad (n - \text{целое число}).$$

Так как точка z лежит на окружности $|z-a| = r$, то $z - a$ можно записать в виде $z - a = re^{i\varphi}$, где φ изменяется от 0 до 2π. Отсюда видно, что $dz = rie^{i\varphi}d\varphi$. Следовательно,

$$\ointctrclockwise\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = \int\limits_0^{2\pi} (re^{i\varphi})^n rie^{i\varphi} d\varphi = ir^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}\, d\varphi =$$

$$= ir^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} (\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi)d\varphi.$$

Если $n \neq -1$, то последний интеграл, очевидно, равен нулю.

Итак,

$$\oint\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = 0 \quad (n \neq -1).$$

Если же $n = -1$, то получаем

$$\oint\limits_{|z-a|=r} \frac{dz}{(z-a)} = i \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Таким образом, справедлива

Теорема. Если n – целое число, то

$$\oint\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = 0 \;\; (n \neq -1) \quad \text{и} \quad \oint\limits_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i\ .$$

Эта теорема будет весьма полезной нам при дальнейшем изучении функций комплексного аргумента.

1.13. Интегральная теорема Коши

Теорема (интегральная теорема Коши для односвязной области). Если функция $f(z)$ регулярна в замкнутой односвязной области D , ограниченной контуром Γ , то

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим теорему в предположении, что $f(z)$ имеет непрерывную производную. При этом нам понадобится формула Грина (G. Green, 1793-1841). Напомним ее:
если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют непрерывные частные производные в замкнутой односвязной области D , то

$$\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

если контур Γ обходится так, что область D остается слева.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда, как мы знаем,

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint_{\Gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

Из непрерывности $f'(z)$ следует, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные. Поэтому к стоящим в правой части равенства криволинейным интегралам можно применить формулу Грина. Это приводит равенство к виду

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \iint_{D} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + \iint_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.$$

Так как $f(z)$ регулярна, то u и v удовлетворяют условиям Коши – Римана. Поэтому

$$-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Следовательно,

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(z)$ регулярна в односвязной области D , то для любой линии aLb , лежащей в D , интеграл

$$\int_{aLb} f(z)dz$$

не зависит от формы этой линии (он зависит лишь от ее начальной и конечной точек).

Заметим, что в этом случае мы получаем:

$$\int_{aLb} f(z)dz = \int_{a}^{b} f(z)dz = F(b) - F(a),$$

где $F(z)$ – первообразная по отношению к $f(z)$.

Интегральная теорема Коши допускает обобщение на случай многосвязной области.

Теорема (интегральная теорема Коши для многосвязной области). Если функция регулярна в замкнутой области $\overline{D}$, граница которой состоит из m несвязных частей, $\Gamma_1,\ \Gamma_2, ..., \Gamma_m$, то

$$\sum_{k=1}^{m} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz = 0,$$

причем все части границы обходятся так, чтобы область $\overline{D}$ оставалась по одну сторону.

Мы не будем доказывать эту теорему в общем виде, а рассмотрим лишь случай трехсвязной области.

Пусть трехсвязная область (рис. 11) ограничена линиями Γ_1, Γ_2 и Γ_3, причем контуры Γ_2 и Γ_3 лежат внутри Γ_1.

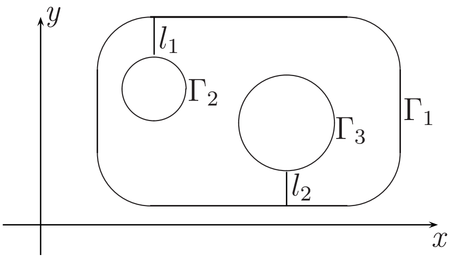

Рис. 11

Сделаем два разреза: l_1 и l_2. Тогда область превратится в односвязную. Если Γ – полная граница этой односвязной области, то, по доказанной теореме, должно быть

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Полный обход границы при интегрировании состоит из обхода контуров Γ_1, Γ_2 и Γ_3 и обхода разрезов. При этом каждый разрез, очевидно, проходится дважды, причем в противоположных направлениях. Поэтому интегралы по разрезам взаимно уничтожатся. Следовательно, окажется

$$\oint\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\Gamma_2} f(z)dz + \oint\limits_{\Gamma_3} f(z)dz = 0,$$

причем все контуры обходятся так, чтобы область D оставалась по одну сторону. Например, если контур Γ_1 обходится против часовой стрелки, то и Γ_2 и Γ_3 – по часовой, то есть

$$\oint\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\Gamma_2} f(z)dz + \oint\limits_{\Gamma_3} f(z)dz = 0.$$

В общем случае доказательство проводится аналогично.

Заметим, что если в последнем равенстве поменять направление обхода контуров Γ_2 и Γ_3 на противоположное, то окажется

$$\oint\limits_{\Gamma_1} f(z)dz - \oint\limits_{\Gamma_2} f(z)dz - \oint\limits_{\Gamma_3} f(z)dz = 0,$$

откуда

$$\oint\limits_{\Gamma_1} f(z)dz = \oint\limits_{\Gamma_2} f(z)dz + \oint\limits_{\Gamma_3} f(z)dz,$$

причем в последнем равенстве все контуры обходятся в одном направлении.

Аналогичное равенство имеет место и в общем случае. Иначе говоря, из теоремы Коши вытекает

Следствие. Если функция $f(z)$ регулярна в замкнутой области, ограниченной одним внешним контуром Γ и несколькими контурами $\Gamma_1 ,..., \Gamma_m$, лежащими внутри него, то

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \oint\limits_{\Gamma_k} f(z)dz,$$

причем при интегрировании все контуры обходятся в одном направлении (либо все по часовой стрелке, либо все против).

В частности, если замкнутая двухсвязная область ограничена парой контуров, один из которых лежит внутри другого, то интегралы по этим контурам равны (при одинаковых направлениях интегрирования).

1.14. Интегральная формула Коши

Теорема (интегральная формула Коши). Пусть функция $f(z)$ регулярна в замкнутой односвязной области D с границей Γ. Тогда для любой точки z, лежащей внутри D, справедливо равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

причем контур Γ обходится так, чтобы область оставалась слева.

Доказательство. Пусть z – точка, лежащая внутри D. Напишем разность

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

и покажем, что она равна нулю. Для этого построим окружность Γ_1 с центром в точке z, целиком лежащую в D. Теперь рассмотрим зависящую от ζ функцию $\dfrac{f(\zeta)}{z-\zeta}$ (z у нас зафиксировано). Очевидно, что во всех точках замкнутой области, ограниченной контурами Γ_1 и Γ, функция регулярна. Поэтому, в соответствии со сказанным в предыдущем разделе, должно выполняться равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

в котором Γ_1 и Γ обходятся в одном направлении.

Значит, исходную разность можно записать так:

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ранее в разделе 12 мы видели, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 1.$$

Поэтому $f(z)$ можно записать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Отсюда

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

а потому

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \right| = \frac{1}{2\pi}\left| \oint\limits_{\Gamma_1} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \right|.$$

Функция f регулярна, а потому непрерывна. Значит, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех ζ, удовлетворяющих условию $|\zeta - z| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$. Теперь выберем радиус r окружности Γ_1 столь малым, чтобы было $r < \delta$. Тогда в последнем интеграле будут выполнены условия $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$ и $|\zeta - z| = r$, так что

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} \right| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\left| \oint\limits_{\Gamma_1} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \right| < \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r}\ 2\pi r = \varepsilon.$$

Таким образом, оказывается, что

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \right| < \varepsilon.$$

Поскольку ε можно брать сколь угодно малым, постольку ясно, что должно быть

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Значит, интегральная формула Коши верна. Теорема доказана.

Интегральная теорема Коши остается справедливой и для многосвязной области. Именно, нетрудно показать (используя разрезы), что если замкнутая область D ограничена контурами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, то в любой ее внутренней точке z выполняется равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \oint_{\Gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

в котором все контуры интегрирования обходятся так, чтобы область оставалась слева.

Таким образом, зная значения регулярной функции на границе области, можно найти ее значение в любой точке области. Это весьма нетривиальное свойство регулярных функций оказывается очень полезным при решении ряда теоретических и прикладных задач.

1.15. Ряды с комплексными членами

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

в котором члены a_k являются комплексными числами. Как и в вещественном случае, n-й частной суммой ряда называют величину

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

и

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

называют суммой ряда.

Записав члены ряда в форме $a_k = b_k + ic_k$, мы можем всякую частную сумму представить в виде $A_n = B_n + iC_n$, где

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Ясно, что при $n \to \infty$ предел A_n существует тогда и только тогда, когда существуют пределы величин B_n и C_n. Значит, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Значит, исследование ряда с комплексными членами можно заменить исследованием пары рядов с вещественными членами.

Так же,как и для вещественных рядов, справедлива

Теорема об абсолютной сходимости. Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

В этом случае последний ряд называют абсолютно сходящимся.

Наиболее важными для нас будут степенные ряды с комплексными членами, то есть ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

в которых c_k и a – константы, z может принимать различные значения.

Простейшим примером степенного ряда является геометрический ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Частная сумма этого ряда имеет вид:

$$Q_n(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Если $|z| < 1$, то $z^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому оказывается $Q_n(z) \to \dfrac{1}{1-z}$ при $n \to \infty$. Значит, при $|z| < 1$ ряд сходится.

Если $|z| > 1$, то $z^{n+1} \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, $Q_n(z) \to \infty$, то есть ряд расходится.

Если $|z| = 1$, то частная сумма ряда тоже не имеет предела при $n \to \infty$, а потому ряд сходиться не может. Таким образом, справедлива

Теорема. Геометрический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

сходится тогда и только тогда, когда $|z| < 1$.

Для комплексных степенных рядов остается верной

Теорема Абеля (N. H. Abel, 1802-1829). Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

сходится в точке z_0 , то он абсолютно сходится при любом z , удовлетворяющем условию $|z-a| < |z_0 - a|$.

Доказательство этого утверждения такое же, как и в вещественном случае. Поэтому мы его не приводим.

Из теоремы Абеля, очевидно, следует, что множество точек z , в которых сходится степенной ряд, представляет собой круг с центром в точке a .

Радиус R этого круга называется радиусом сходимости степенного ряда.

Можно дать определение радиуса сходимости иначе:
число R называется радиусом сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

если при всех z , для которых $|z-a| < R$, ряд сходится и при всех z , для которых $|z-a| > R$, ряд расходится.

О сходимости ряда на границе круга сходимости в общем случае ничего сказать нельзя.

Нетрудно понять, что справедливо такое утверждение.

Теорема. Во всех внутренних точках круга сходимости степенной ряд сходится абсолютно.

Действительно, возьмем какую-нибудь точку z внутри круга сходимости. Так как z – внутренняя точка, то в круге найдется точка z_0 такая, что $|z-a| < |z_0 - a|$. В точке z_0 ряд сходится. Следовательно, в силу теоремы Абеля, он абсолютно сходится в точке z . Теорема доказана.

Из этой теоремы становится понятно, как следует находить радиус сходимости степеннного ряда. Для этого нужно составить ряд из модулей и выяснить, где он сходится и где расходится.

П р и м е р 1. Найдем радиус сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2+1}.$$

Для этого составляем ряд из модулей

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k^2+1}.$$

Так как ряд из модулей положительный, то можно использовать признак Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|z|^{k+1}(k^2+1)}{|z|^k((k+1)^2+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|(k^2+1)}{(k+1)^2+1} = |z|.$$

Значит, ряд, составленный из модулей, сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$. Поэтому радиус сходимости $R = 1$.

Заметим, что при $|z| = 1$ ряд из модулей принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}.$$

Этот ряд, как известно, сходится. Поэтому область сходимости исходного ряда является замкнутым кругом, определяемым неравенством $|z| \leqslant 1$.

Укажем без доказательства два свойства степенных рядов:

1) степенной ряд можно почленно интегрировать по любой линии, лежащей в круге сходимости;

2) степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой внутренней точке круга сходимости. Иначе говоря, если

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$

то

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1}.$$

Второе свойство означает, что справедлива

Теорема. Если функция в круге является суммой степенного ряда, то она регулярна в открытом круге.

1.16. Ряды Тейлора

Предположим, что функция $f(z)$ является суммой степенного ряда в круге $|z-a|<R$, то есть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k.$$

Полагая в этом равенстве $z=a$, получим $c_0=f(a)$.

Продифференцируем исходное равенство:

$$f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k k(z-a)^{k-1}.$$

Взяв $z=a$, найдем $c_1=f'(a)$.

Продолжая этот процесс, мы увидим, что $c_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Таким образом, если в окрестности точки a функция $f(z)$ раскладывается в степенной ряд, то этот ряд имеет вид

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k,$$

то есть является рядом Тейлора (B. Taylor, 1685-1731).

Теорема. Регулярная функция может быть представлена в виде суммы степенного ряда в некоторой окрестности любой точки из области задания.

Доказательство. Пусть $f(z)$ регулярна в области D. Возьмем в D какую-нибудь точку a и построим круг с центром в a, целиком лежащий в D. Обозначим через Γ окружность, ограничивающую этот круг. Тогда, в силу интегральной формулы Коши, для любого z, лежащего внутри круга, должно быть

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Преобразуем написанное равенство:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)\left(1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)}\,d\zeta=$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}\right)}\, d\zeta.$$

Так как $\dfrac{|z-a|}{|\zeta - a|} < 1$, то дробь $\dfrac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}}$ можно представить как сумму геометрического ряда:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k.$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-a)^k}{(\zeta-a)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Интегрируя почленно ряд, стоящий в правой части, получим

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-a)^k \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Положив

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\, d\zeta,$$

увидим, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Итак, теорема доказана.

Ранее мы показали, что коэффициенты степенного ряда должны быть такими:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Сравнивая два различных выражения одного и того же коэффициента, находим, что справедливо равенство

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\, d\zeta.$$

Мы уже говорили, что степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри круга сходимости. Продифференцированный ряд тоже является степенным. Поэтому его снова можно дифференцировать почленно и т.д. Поскольку регулярная функция представима по доказанной теореме в виде суммы степенного ряда, постольку сказанное означает, что регулярная функция имеет производные любого порядка.

Нетрудно понять, что ряды Тейлора для простейших функций имеют тот же вид, что и в случае вещественного аргумента. Например,

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k},$$

причем все эти ряды (кроме последнего) сходятся при $|z| < \infty$. Последний ряд сходится при $|z| < 1$.

1.17. Ряды Лорана

Рассмотрим функцию $f(z)$, регулярную в некотором замкнутом кольце $R_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_2$ (то есть в некоторой области, содержащей и границу кольца). Обозначим границы этого кольца соответственно Γ_1 и Γ_2 (рис. 12).

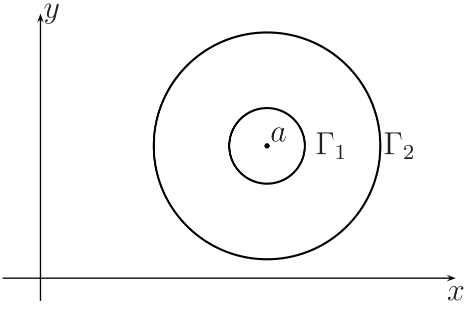

Рис. 12

В силу интегральной формулы Коши, для любого z внутри кольца должно быть

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

причем контуры Γ_1 и Γ_2 обходятся так, чтобы кольцо оставалось по одну сторону.

Преобразуем написанное выражение:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)+(a-z)}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)+(a-z)}\,d\zeta=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-a}\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}d\zeta.$$

В интеграле, который берется по контуру Γ_1, очевидно, $\left|\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right|<1$, а в интеграле по контуру Γ_2 – $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$. Поэтому, используя формулу дла суммы геометрического ряда, имеем

$$\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^k,\qquad \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k.$$

Подставив эти выражения в интегралы, получим

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^k d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k d\zeta=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-a}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^k d\zeta+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k d\zeta=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{k+1}}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}f(\zeta)(\zeta-a)^k d\zeta+\sum_{k=0}^{\infty}(z-a)^k\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta\,.$$

Введя обозначения:

$$c_{-(k+1)} = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1} f(\zeta)(\zeta-a)^k d\zeta, \quad c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta,$$

можем записать, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{-(k+1)}(z-a)^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

или, что то же,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k.$$

Таким образом, функция, регулярная в кольце с центром в a, может быть разложена в ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные степени величины $z-a$. Такой ряд называют рядом Лорана (P. A. Laurent, 1813-1854).

Можно доказать, что двух различных разложений в ряд Лорана по степеням $z-a$ функция не имеет, так что справедлива

Теорема. Если в кольце $R_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_2$ функция $f(z)$ регулярна, то в любой внутренней точке кольца ее можно представить, причем единственным образом, в виде суммы ряда Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k.$$

В ряде Лорана различают две части: правильную и главную. Правильной называют часть, содержащую неотрицательные степени аргумента, главной – часть с отрицательными степенями.

Ввиду единственности разложение функции в ряд Лорана нередко можно производить без интегрирования.

П р и м е р. Функция $f(z) = \dfrac{z}{z^2-6z+8}$ регулярна при всех z, кроме точек $z=2$ и $z=4$, в которых она не существует. В частности, она регулярна внутри кольца, заданного неравенством $2 < |z| < 4$. Центром кольца является точка 0. Так что ряд Лорана в нашем случае имеет вид

$$\frac{z}{z^2-6z+8} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \quad (2 < |z| < 4).$$

Чтобы не находить коэффициенты ряда с помощью интегрирования, разложим дробь на простейшие:

$$\frac{z}{z^2-6z+8}=\frac{z}{(z-4)(z-2)}=\frac{2}{z-4}-\frac{1}{z-2}.$$

Теперь преобразуем первое слагаемое:

$$\frac{2}{z-4}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{4}}.$$

В последней дроби $\left|\dfrac{z}{4}\right|<1$. Поэтому ее можно рассматривать как сумму геометрического ряда со знаменателем $q=\dfrac{z}{4}$. Следовательно,

$$\frac{2}{z-4}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{4}}=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{4^k}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{2k+1}}.$$

Заметим, что этот ряд сходится при $|z|<4$. Теперь преобразуем второе слагаемое:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}.$$

Так как $\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$, то полученная дробь является суммой геометрического ряда с знаменателем $q=\dfrac{2}{z}$. Значит,

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}},$$

причем последний ряд сходится при $|z|>2$. Таким образом,

$$\frac{z}{z^2-6z+8}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{2k+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}},\quad 2<|z|<4.$$

1.18. Изолированные особые точки регулярной функции

Точка a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ регулярна во всех точках некоторой окрестности a и не регулярна в a.

Принята такая классификация изолированных особых точек:

1) точка a называется устранимой особой точкой, если существует конечный $\lim\limits_{z\to a} f(z)$;

2) точка a называется полюсом, если $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;

3) точка a называется существенно особой, если не существует ни конечного, ни бесконечного $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

Например, точка 0 является устранимой особой точкой функций $\dfrac{\sin z}{z}$ и $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}$, полюсом функции $\dfrac{1}{z}$ и существенно особой точкой функций $\sin\dfrac{1}{z}$, $\cos\dfrac{1}{z}$.

В соответствии с определением изолированной особой точки a функции $f(z)$, очевидно, что существует замкнутое кольцо с центром в точке a, в котором $f(z)$ регулярна. В силу сказанного в предыдущем разделе, в этом кольце можно разложить в ряд Лорана по степенам $z-a$. Заметим сразу же, что внутренний радиус кольца можно брать сколь угодно малым, так что разложение справедливо в области, определяемой неравенством $0 < |z-a| \leqslant R,$ то есть в круге с выколотым центром.

Выясним, как влияет характер особой точки на вид ряда Лорана.

Пусть a – устранимая особая точка функции. Так как существует конечный $\lim\limits_{z\to a} f(z)$, то ясно, что в ряде Лорана не может быть членов с отрицательными степенями, т.е. ряд Лорана должен содержать только правильную часть. Иначе говоря, в окрестности устранимой особой точки a ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad (0 < |z-a| \leqslant R).$$

Пусть теперь a – полюс, т.е. $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty.$ В этом случае для функции $\dfrac{1}{f(z)}$ точка a окажется корнем. Если этот корень имеет кратность m, то говорят, что a является полюсом порядка m для $f(z)$.

Заметим, что полюс, имеющий кратность 1, называют простым.

Нетрудно понять, что если a – полюс порядка m функции $f(z)$, то для произведения $(z-a)^m f(z)$ точка a окажется устранимой особой точкой. Значит, в окрестности этой точки $(z-a)^m f(z)$ раскладывается в ряд Лорана, содержащий только правильную часть, т.е.

$$(z-a)^m f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots \quad (a_0 \neq 0).$$

Отсюда

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^m} + \frac{a_1}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{m-1}}{z-a} + a_m + a_{m+1}(z-a) + \ldots$$

Изменяя обозначения коэффициентов, полученное можно записать в виде

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$$

или, что то же,

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad (c_{-m} \neq 0).$$

Таким образом, в окрестности полюса главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых (при этом число m равно порядку полюса).

Справедливо и такое утверждение: если главная часть ряда Лорана по степеням $z-a$ функции $f(z)$ содержит конечное число членов, то a является полюсом $f(z)$.

Рекомендуем читателю доказать самостоятельно справедливость этого простого факта.

Из сказанного выше о поведении рядов Лорана в окрестности полюса и устранимой особой точки, можно сделать вывод о том, что в окрестности существенно особой точки главная часть ряда Лорана должна содержать бесконечное число слагаемых.

П р и м е р 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. Очевидно, что является для нее особой точкой. При этом

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

т.е. для нашей функции $z = 0$ является устранимой особой точкой.

Разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности $z = 0$ построить нетрудно. Действительно, так как

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (z \in \mathbb{Z}),$$

то очевидно, что

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} \quad (|z| > 0),$$

т.е. ряд содержит только правильную часть.

П р и м е р 2. Функция $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ имеет $z = 0$ существенно особой точкой, так как ее предел при $z \to 0$ не существует. Разложим $e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в окрестности точки 0.

Мы знаем, что

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

причем ряд сходится при всех z. Заменив в написанном z на $\dfrac{1}{z}$, получаем

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}.$$

Ясно, что последний ряд сходится при всех z, кроме $z = 0$.

Главная часть построенного ряда содержит бесконечное число членов, что соответствует теории, а правильная часть состоит лишь из одного слагаемого (оно получается при $k = 0$ и равно 1).

П р и м е р 3. Функция $f(z) = \dfrac{z^2 + z + 2}{(z-1)^2(z+1)}$ имеет два полюса: $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. Точка $z_1 = 1$, как нетрудно понять, является полюсом второго порядка. Построим ряд Лорана, соответствующий $z_1 = 1$, т.е. ряд, содержащий степени величины $z - 1$. Для этого вначале разложим нашу дробь на простейшие. Получим

$$\frac{z^2 + z + 2}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2(z+1)}.$$

Первые два слагаемых, очевидно, уже содержат степени разности $z-1$. Остается разложить по степеням $z-1$ третье слагаемое. Сделаем это:

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2((z-1)+2)} = \frac{1}{4\left(\dfrac{z-1}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^{k+2}} \quad (|z-1|<2).$$

Таким образом,

$$\frac{z^2+z+2}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-1)^k}{2^{k+2}}.$$

Заметим, что построенный ряд сходится при $0<|z-1|<2$.

В заключение отметим следующее обстоятельство: для изучения поведения функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки, то есть $z=\infty$, делают замену $z=\dfrac{1}{\zeta}$ и рассматривают поведение функции $f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ в точке $\zeta=0$. Если окажется, что $f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ регулярна в точке $\zeta=0$, то говорят, что $f(z)$ регулярна в бесконечно удаленной точке. Если $\zeta=0$ оказывается изолированной особой точкой $f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$, то считают, что $z=\infty$ является изолированной особой точкой того же типа для $f(z)$.

1.19. Вычеты функции

Пусть функция $f(z)$ регулярна во всех точках некоторой области D, за исключением изолированной особой точки a. Обозначим через Γ окружность с центром в a, содержащуюся в D.

Вычетом функции $f(z)$ в точке a называется величина

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z)dz.$$

Вычет обозначают $\operatorname{res} f(a)$ или $\operatorname{res} f(z)|_a$.

Обозначение происходит от французского слова residu (вычет). Итак,

$$\operatorname{res} f(a) = \operatorname{res} f(z)\,|_a = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz.$$

Чтобы понять, как следует находить вычеты, разложим нашу функцию в окрестности точки a в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} c_k \oint\limits_{\Gamma} z-a)^k dz.$$

В соответствии с теоремой, доказанной в разделе 12, в правой части все интегралы, кроме того, в котором $k=-1$, равны нулю. Поэтому оказывается

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}c_{-1}\oint\limits_{\Gamma}(z-a)^{-1}dz.$$

В силу той же теоремы последний интеграл равен $2\pi i$, а потому

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = c_{-1}$$

или, что то же,

$$\operatorname{res} f(a) = c_{-1}.$$

Из полученного прежде всего видно, что если a – устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\operatorname{res} f(a) = 0$, так как в этой точке $c_{-1} = 0$.

Выясним, как находятся вычеты в полюсах функций. Пусть a - полюс порядка m функции $f(z)$. Тогда

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots \quad .$$

Умножив обе части равенства на $(z-a)^m$, получим

$$f(z)(z-a)^m = c_m + c_{-m+1}(z-a) + \ldots$$

$$... + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + c_1(z-a)^{m+1} + ... \ .$$

Теперь обе части равенства продифференцируем $m-1$ раз (заметим, что степенной ряд можно дифференцировать почленно). Тогда окажется

$$(f(z)(z-a)^m)^{(m-1)} =$$
$$= (m-1)!c_{-1} + c_0 m \cdot \ldots \cdot 2(z-a) + c_1(m+1) \cdot \ldots \cdot 3(z-a)^2 + \ldots$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $z \to a$. У нас окажется

$$\lim_{z\to a}(f(z)(z-a)^m)^{(m-1)} = (m-1)!c_{-1},$$

откуда

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}(f(z)(z-a)^m)^{(m-1)}.$$

Таким образом, в полюсе порядка m вычет находится по формуле

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}(f(z)(z-a)^m)^{(m-1)}.$$

В частности, в простом полюсе (т.е. первого порядка) оказывается

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z\to a} f(z)(z-a).$$

П р и м е р 1. Найдем $\operatorname{res} \left.\dfrac{1}{\sin z}\right|_0$.

Так как $\sin z \sim z$ при $z \to 0$, то это означает, что точка $z = 0$ является для нашей функции полюсом первого порядка. Поэтому, в соответствии с полученной формулой,

$$\operatorname{res} \left.\frac{1}{\sin z}\right|_0 = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = 1.$$

П р и м е р 2. Функция $\dfrac{e^z}{(z-1)^2(z^2+2)}$ в точке $z = 1$ имеет полюс второго порядка ($m = 2$). Поэтому

$$\operatorname{res} \left.\frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+2)}\right|_1 = \lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z}{z^2+2}\right)' = \lim_{z\to 1}\frac{e^z(z^2+2-2z)}{(z^2+2)^2} = \frac{e}{9}.$$

К сожалению, для существенно особых точек подобных рецептов для нахождения вычетов указать не удается.

П р и м е р 3. Рассмотрим функцию $z^2 e^{\frac{1}{z}}$. Точка $z = 0$ является существенно особой для нее. Чтобы найти вычет в нуле, разложим функцию в ряд Лорана. Так как в окрестности нуля

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + ...,$$

то

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + ... \,.$$

Видно, что $c_{-1} = \dfrac{1}{6}$. Значит, $\operatorname{res}\, z^2 e^{\frac{1}{z}}\Big|_0 = \dfrac{1}{6}$.

Теперь сформулируем и докажем важную для приложений теорему.

Теорема Коши о вычетах. Пусть функция $f(z)$ регулярна во всех точках, лежащих внутри контура Γ, кроме точек $a_1,\ a_2, ...,\ a_m$. Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}\, f(a_k).$$

Доказательство. Каждую из точек $a_1,\ a_2, ...,\ a_m$ окружим маленькими окружностями, лежащими внутри Γ и не содержащими других особых точек. Обозначим окружности соответственно Γ_1, Γ_2, ..., Γ_m. Тогда $f(z)$ окажется регулярной в многосвязной области, ограниченной контурами $\Gamma,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ ...,\ \Gamma_m$. В силу следствия из интегральной теоремы Коши (раздел 13), должно быть

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{m} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz.$$

Но

$$\oint_{\Gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}\, f(a_k).$$

Значит,

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}\, f(a_k).$$

Теорема доказана.

П р и м е р. Вычислим

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{z^2+1}{(z^2-1)(z-3)^2}\,dz,$$

где Γ – окружность $|z|=2$.

Очевидно, что внутри окружности лежат две особые точки подынтегральной функции: $a_1=-1$ и $a_2=1$. Обе эти точки являются простыми полюсами. В соответствии со сказанным выше вычеты в этих точках находятся так:

$$\operatorname{res} \left.\frac{z^2+1}{(z^2-1)(z-3)^2}\right|_{-1} = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^2+1}{(z^2-1)(z-3)^2} = -\frac{1}{16},$$

$$\operatorname{res} \left.\frac{z^2+1}{(z^2-1)(z-3)^2}\right|_{1} = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^2+1}{(z^2-1)(z-3)^2} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{z^2+1}{(z^2-1)(z-3)^2}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}\pi i.$$

2. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Записать число z в тригонометрической и показательной формах.

1.1. $z = 2$; $z = 4i$; $z = 2 + 2i$; $z = 1 - \sqrt{3}i$;
$z = \sqrt{3} + 1$; $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$; $z = 3 + 3i$.
1.2. $z = -2$; $z = 5i$; $z = -1 + 5i$; $z = 3 - \sqrt{3}i$;
$z = 4\sqrt{3} - 4i$; $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$; $z = 4 + 4i$.
1.3. $z = 3$; $z = -2i$; $z = -3 + 4i$; $z = 5 - 5\sqrt{3}i$;
$z = -5 + 5i$ $z = -3\sqrt{3} + 3i$; $z = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$.
1.4. $z = 4$; $z = -4i$; $z = 2 + 3i$; $z = 1 + \sqrt{3}i$;
$z = \sqrt{3} - i$; $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$; $z = 3 + 6i$.
1.5. $z = -7$; $z = 3i$; $z = 4 + 2i$; $z = 1 - \sqrt{3}i$;
$z = -7\sqrt{3} - 7i$; $z = 7\sqrt{2} + 7\sqrt{2}i$; $z = 7 - 5i$.
1.6. $z = 6$; $z = 2i$; $z = 1 + i$; $z = 2 - 2\sqrt{3}i$;
$z = 6\sqrt{3} + 6i$; $z = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$; $z = 5 + 7i$.
1.7. $z = -3$; $z = 6i$; $z = 2 + 4i$; $z = -1 - \sqrt{3}i$;
$z = 2\sqrt{3} + 2i$; $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$; $z = 3 - 2i$.
1.8. $z = 7$; $z = -4i$; $z = 2 - 2i$; $z = -1 + \sqrt{3}i$;
$z = -2\sqrt{3} - 2i$; $z = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$; $z = 4 + 3i$.
1.9. $z = -5$; $z = 7i$; $z = 2 + 6i$; $z = 4 - 4\sqrt{3}i$;
$z = 7\sqrt{3} + 7i$; $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$; $z = 3 - i$.
1.10. $z = 2$; $z = 4i$; $z = 1 - 5i$; $z = 7 - 7\sqrt{3}i$;
$z = 4\sqrt{3} + 4i$; $z = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i$; $z = 3 + 4i$.
1.11. $z = -2$; $z = 5i$; $z = 2 - i$; $z = 6 - 6\sqrt{3}i$;
$z = 5\sqrt{3} + 5i$; $z = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}i$; $z = 4 - 3i$.
1.12. $z = 3$; $z = -2i$; $z = -2 + 2i$; $z = 5 + 5\sqrt{3}i$;
$z = 7\sqrt{3} - 7i$; $z = -7\sqrt{2} + 7\sqrt{2}i$; $z = -3 + 7i$.
1.13. $z = 21$; $z = 14i$; $z = 2 + i$; $z = -7 - 7\sqrt{3}i$;
$z = -\sqrt{3} + i$; $z = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$; $z = -3 + 3i$.
1.14. $z = 12$; $z = -4i$; $z = -2 - 2i$; $z = -3 - 3\sqrt{3}i$;
$z = -7\sqrt{7} + 7i$; $z = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$; $z = -3 + 3i$.
1.15. $z = 3$; $z = 5i$; $z = -2 - i$; $z = -6 - 6\sqrt{3}i$;
$z = 2\sqrt{3} + 2i$; $z = 7\sqrt{2} - 7\sqrt{2}i$ $z = -3 - 3i$.

1.16. $z = 12$; $z = 42i$; $z = -2 + i$; $z = -5 - 5\sqrt{3}i$;
$z = 4\sqrt{3} + 4i$; $z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$; $z = 3 - 3i$.
1.17. $z = -21$; $z = 14i$; $z = -2 + 3i$; $z = -2 - 2\sqrt{3}i$;
$z = 3\sqrt{3} + 3i$; $z = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$; $z = 3 - 6i$; .
1.18. $z = 20$; $z = -9i$; $z = -1 + 2i$; $z = 7 + 7\sqrt{3}i$;
$z = \sqrt{3} = i$; $z = -5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}i$; $z = -4 + 7i$.
1.19. $z = 22$; $z = 24i$; $z = 2 - 3i$; $z = -4 - 4\sqrt{3}i$;
$z = -6\sqrt{3} + 6i$; $z = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2}i$; $z = -3 + 5i$.
1.20. $z = 12$; $z = 42i$; $z = 1 - i$; $z = 6 + 6\sqrt{3}i$;
$z = 5\sqrt{3} - 5i$; $z = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$; $z = -3 - 5i$.
1.21. $z = -24$; $z = -14i$; $z = 3 - 4i$; $z = 4 + 4\sqrt{3}i$;
$z = 2\sqrt{3} - 2i$; $z = -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$; $z = 5 + 6i$.
1.22. $z = 2$; $z = 4i$; $z = 5 - 5i$; $z = 1 - \sqrt{3}i$;
$z = \sqrt{3} + i$; $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$; $z = 6 + 2i$.
1.23. $z = -2$; $z = 5i$; $z = -1 + 5i$; $z = 3 - 3\sqrt{3}i$;
$z = 4\sqrt{3} - 4i$; $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$; $z = 4 + 4i$.
1.24. $z = 3$; $z = -2i$; $z = -3 + 4i$; $z = 5 - 5\sqrt{3}i$;
$z = -3\sqrt{3} + 3i$; $z = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$; $z = -5 + 5i$.
1.25. $z = 2$; $z = 5i$; $z = s + 4i$; $z = 1 + \sqrt{3}i$;
$z = -7\sqrt{3} - 7i$; $z = 7\sqrt{2} - 7\sqrt{2}i$ $z = -3 - 5i$.

Задание 2. Записать число z в тригонометрической и показательной формах.

2.1. $z = -7 + 4i$; $z = \sin\dfrac{\pi}{4} + i\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{4}\right)$;
$z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

2.2. $z = -6 + 5i$; $z = \sin\dfrac{\pi}{3} + i\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{3}\right)$;
$z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$.

2.3. $z = -6 + 2i$; $z = \sin\dfrac{\pi}{6} + i\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{6}\right)$;
$z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}$.

2.4. $z = 4 + 7i$; $z = \sin\dfrac{5\pi}{12} + i\left(1 - \cos\dfrac{5\pi}{12}\right)$;
$z = 1 + \cos\dfrac{7\pi}{8} + i\sin\dfrac{7\pi}{8}$.

2.5. $z = -5 + 3i$; $z = \sin\dfrac{5\pi}{8} + i\left(1 - \cos\dfrac{5\pi}{8}\right)$;

$z = 1 + \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}$.

2.6. $z = -7 + 2i$; $z = \sin\dfrac{7\pi}{4} + i\left(1 - \cos\dfrac{7\pi}{4}\right)$;

$z = 1 + \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$.

2.7. $z = 5 + 3i$; $z = \sin\dfrac{\pi}{12} + i\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{12}\right)$;

$z = 1 + \cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}$.

2.8. $z = 3 + 7i$; $z = \sin\dfrac{3\pi}{4} + i\left(1 - \cos\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

$z = 1 + \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

2.9. $z = 7 + 3i$; $z = \sin\dfrac{5\pi}{4} + i\left(1 - \cos\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

$z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$.

2.10. $z = 6 - 3i$; $z = \sin\dfrac{3\pi}{8} + i\left(1 - \cos\dfrac{3\pi}{8}\right)$;

$z = 1 + \cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

2.11. $z = 3 - i$; $z = \sin\dfrac{\pi}{8} + i\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{8}\right)$;

$z = 1 + \cos\dfrac{5\pi}{12} + i\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

2.12. $z = -5 - 6i$; $z = \sin\dfrac{2\pi}{3} + i\left(1 - \cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$;

$z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2.13. $z = 6 + 5i$; $z = \sin\dfrac{4\pi}{3} + i\left(1 - \cos\dfrac{4\pi}{3}\right)$;

$z = 1 + \cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}$.

2.14. $z = -3 - 2i$; $z = \sin\dfrac{4\pi}{9} + i\left(1 - \cos\dfrac{4\pi}{9}\right)$;

$z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

2.15. $z = -5 + 4i$; $z = \sin\dfrac{5\pi}{3} + i\left(1 - \cos\dfrac{5\pi}{3}\right)$;

$z = 1 + \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}$.

2.16. $z=7+6i$; $z=\sin\dfrac{7\pi}{6}+i\left(1-\cos\dfrac{7\pi}{6}\right)$;
$z=1+\cos\dfrac{5\pi}{8}+i\sin\dfrac{5\pi}{8}$.

2.17. $z=-6-7i$; $z=\sin\dfrac{7\pi}{12}+i\left(1-\cos\dfrac{7\pi}{12}\right)$;
$z=1+\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}$.

2.18. $z=4-2i$; $z=\sin\dfrac{7\pi}{8}+i\left(1-\cos\dfrac{7\pi}{8}\right)$;
$z=1+\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}$.

2.19. $z=5-7i$; $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+i\left(1-\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$;
$z=1+\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}$.

2.20. $z=7+7i$; $z=\sin\dfrac{5\pi}{6}+i\left(1-\cos\dfrac{5\pi}{6}\right)$;
$z=1+\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

2.21. $z=-4-7i$; $z=\sin\dfrac{\pi}{9}+i\left(1-\cos\dfrac{\pi}{9}\right)$;
$z=1+\cos\dfrac{3\pi}{5}+i\sin\dfrac{3\pi}{5}$.

2.22. $z=-4+4i$; $z=\sin\dfrac{11\pi}{12}+i\left(1-\cos\dfrac{11\pi}{12}\right)$;
$z=1+\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}$.

2.23. $z=2+5i$; $z=\sin\dfrac{11\pi}{6}+i\left(1-\cos\dfrac{11\pi}{6}\right)$;
$z=1+\cos\dfrac{23\pi}{12}+i\sin\dfrac{23\pi}{12}$.

2.24. $z=3+2i$; $z=\sin\dfrac{23\pi}{6}+i\left(1-\cos\dfrac{23\pi}{6}\right)$;
$z=1+\cos\dfrac{9\pi}{8}+i\sin\dfrac{9\pi}{8}$.

2.25 $z=-3+5i$; $z=\sin\dfrac{3\pi}{5}+i\left(1-\cos\dfrac{3\pi}{5}\right)$;
$z=1+\cos\dfrac{8\pi}{9}+i\sin\dfrac{8\pi}{9}$

Задание 3 . Найти вещественные x и y из уравнения.

3.1. $5+ixy=\overline{x+y-4i}$. **3.2**. $\overline{3x-y-xyi}=3+x+2i$.
3.3. $xy+3i=\overline{2x+y-6xi}$. **3.4**. $\overline{3x+4y+xyi}=1+2i$.
3.5. $3xy-7i=\overline{2y+x+6yi}$. **3.6**. $3x-1+yi=\overline{6xy+3i}$.
3.7. $\overline{3+x+2i}=2x+y+xyi$. **3.8**. $11xy-2i=\overline{5+3x-2xi}$.
3.9. $\overline{3x+2yi}=3+x+y+2i$. **3.10** $x5x-2yi=\overline{7x-y+3i}$.
3.11. $\overline{3-xyi}=x+y+4i$. **3.12**. $3x+2yi=\overline{5-x+y+2i}$.
3.13. $\overline{11xy+2i}=6+2x+2xi$. **3.14**. $9+7xyi=\overline{3-2xy+yi}$.
3.15. $\overline{2x+1+yi}=6xy+3i$. **3.16**. $2y+x+6yi=\overline{2xy+7i}$.
3.17. $\overline{1+2i}=3x+2y+xyi$. **3.18**. $5xy+2i=\overline{2x+y+6xi}$.
3.19. $\overline{2x+y-xyi}=3+x+2i$. **3.20**. $3-xyi=\overline{x+y+4i}$.
3.21. $\overline{5+xyi}=x+y+4i$. **3.22**. $3+x+2i=\overline{3x-y-xyi}$.
3.23. $\overline{7xy-3i}=2x+y+6xi$. **3.24**. $3x+4y+xyi=\overline{1-2i}$.
3.25 $\overline{3x-7i}=2y+x+6yi$.

Задание 4. Выполнить действия.

4.1. $(3-2i)^2$; $(2+3i)(3-2i)$; $(4+3i)(3-4i)$;
$(6+3i)(4-2i)$; $(1+i)^3$.
4.2. $(4-i)^2$; $(7+i)(5-3i)$; $(6+5i)(5-3i)$;
$(5+3i)(6-3i)$; $(1+i)^3$.
4.3. $(2+5i)^2$; $(2-4i)(1-3i)$; $(4+5i)(7-2i)$;
$(1+5i)(4-3i)$; $(1-i)^3$.
4.4. $(3+2i)^2$; $(-1+3i)(3-5i)$; $(4+4i)(5-4i)$;
$(6+4i)(1-2i)$; $(1+2i)^3$.
4.5. $(3+4i)^2$; $(2-i)(3-i)$; $(4+6i)(7-4i)$;
$(6-6i)(4-5i)$; $(4+i)^3$.
4.6. $(-3-2i)^2$; $(2+2i)(-7-2i)$; $(-3+3i)(4-4i)$
$(-6+3i)(4+2i)$; $(1-7i)^3$.
4.7. $(1+5i)^2$; $(2+5i)(-3-2i)$; $(4+5i)(6-4i)$;
$(6+i)(4-7i)$; $(1+7i)^3$.
4.8. $(1-4i)^2$; $(-6+3i)(3-7i)$; $(-4+3i)(2-4i)$;
$(-7+3i)(4-5i)$; $(1-3i)^3$.
4.9. $(2-6i)^2$; $(2+7i)(5-2i)$; $(4+6i)(7-4i)$;
$(-6+7i)(4-i)$; $(1+3i)^3$.
4.10. $(5-i)^2$; $(-2+5i)(-5-2i)$; $(4+7i)(7-4i)$;
$(5-6i)(7+2i)$; $(1+6i)^3$.
4.11. $(6-i)^2$; $(-2-7i)(6-2i)$; $(-5+3i)(-3-4i)$;
$(-6+4i)(-4-2i)$; $(-1+i)^3$.
4.12. $(7-i)^2$; $(2+4i)(-6-2i)$; $(7+3i)(-6-4i)$;
$(-6+2i)(4-6i)$; $(-1+7i)^3$.

4.13. $(-1-2i)^2$; $(-2+2i)(-3-i)$; $(4-8i)(1-4i)$; $(-6-5i)(6+2i)$; $(-1-5i)^3$.
4.14. $(-3+2i)^2$; $(6+7i)(3-6i)$; $(5+7i)(-3-5i)$; $(-6+4i)(-5-4i)$; $(-1-i)^3$.
4.15. $(-1-7i)^2$; $(2+6i)(-3-3i)$; $(-4+5i)(-7-4i)$; $(6-5i)(4-7i)$; $(-1-6i)^3$.
4.16. $(2-2i)^2$; $(-6-7i)(-3+6i)$; $(-4+6i)(3-3i)$; $(-6-6i)(-2-2i)$; $(-1+4i)^3$.
4.17. $(-2+3i)^2$; $(-7+6i)(-3-6i)$; $(5+6i)(-3+5i)$; $(-5+7i)(-4+4i)$; $(-1-3i)^3$.
4.18. $(-2-3i)^2$; $(-7-i)(-3+4i)$; $(-4-7i)(7+6i)$; $(-7+7i)(-4+2i)$; $(-1-4i)^3$.
4.19. $(-4-i)^2$; $(2+7i)(-5-3i)$; $(-4+7i)(5-5i)$; $(-6+5i)(-4-5i)$; $(7+2i)^3$.
4.20. $(-5-i)^2$; $(-2+i)(-3+7i)$; $(-5+5i)(-4-3i)$; $(6-7i)(-4+i)$; $(1-6i)^3$.
4.21. $(-7+i)^2$; $(6+6i)(2-7i)$; $(-4-6i)(-5+4i)$; $(-5+2i)(7+7i)$; $(1-9i)^3$.
4.22. $(2-8i)^2$; $(2+9i)(3-8i)$; $(4+8i)(3-9i)$; $(6+9i)(4-8i)$; $(1+8i)^3$.
4.23. $(1-9i)^2$; $(8+i)(9-2i)$; $(6+8i)(5-9i)$; $(2-9i)(3+8i)$; $(1-8i)^3$.
4.24. $(2+8i)^2$; $(-2-9i)(1+9i)$; $(4+9i)(8-2i)$; $(8+5i)(9-3i)$; $(1-9i)^3$.
4.25 $(2-3i)^2$; $(7-5i)(5-3i)$; $(5+4i)(6-5i)$; $(3+3i)(4-5i)$; $(4+3i)^3$.

Задание 5. Выполнить действия.

5.1. $\dfrac{1+i}{1-i}$; $\dfrac{3+i}{1-3i}$; $\dfrac{4i(7-3i)}{(2+3i)(2-5i)}$; $3i^{171}-2i^{123}+i^{16}-i$; $3i^{187}-2i^{91}+3i^{33}-i^{10}$.
5.2. $\dfrac{5+i}{1-5i}$; $\dfrac{-4+3i}{-7+2i}$; $\dfrac{3i(-2+7i)}{(2+3i)(2-5i)}$; $3i^{151}-2i^{103}+i^{12}-i^{2}$; $i^{571}-2i^{342}+3i^{49}-2i^{14}$.
5.3. $\dfrac{2+i}{1-6i}$; $\dfrac{6+i}{5+3i}$; $\dfrac{5i(6-4i)}{(1+4i)(5-2i)}$; $3i^{137}-2i^{121}-i^{2}+i$; $i^{197}-2i^{142}+3i^{79}-2i^{5}$.
5.4. $\dfrac{1+4i}{1-2i}$; $\dfrac{3+5i}{4-3i}$; $\dfrac{-4i(7-4i)}{(2-3i)(2+9i)}$;

$5i^{913} + 2i^{416} - 3i^{17} + 5i^3; \quad 3i^{111} - 2i^{128} + i^{14} - i^9$.

5.5. $\dfrac{1+7i}{1-4i}; \quad \dfrac{3+3i}{2-3i}; \quad \dfrac{6i(7-5i)}{(-2+4i)(-2-5i)};$

$6i^{124} + i^{97} - 3i^9 + 2i^5; \quad 3i^{121} - 2i^{113} + i^{106} - i^7$.

5.6. $\dfrac{1+3i}{2-i}; \quad \dfrac{3+6i}{-1+3i}; \quad \dfrac{7i(-6-3i)}{(4-3i)(4-5i)};$

$6i^{144} + i^{117} - 3i^{13} + 2i^2; \quad 3i^{171} - 2i^{123} + i^{16} - i$.

5.7. $\dfrac{1+2i}{1-6i}; \quad \dfrac{3+5i}{1-2i}; \quad \dfrac{-3i(5-6i)}{(2+5i)(1+5i)};$

$i^{120} - 5i^{403} - 3i^{17} - i^8; \quad 3i^{141} - 2i^{163} + i^{26} - i^2$.

5.8. $\dfrac{1+6i}{1-3i}; \quad \dfrac{3+2i}{1-4i}; \quad \dfrac{-6i(5-3i)}{(2-4i)(4-5i)};$

$2i^{153} - 5i^{47} + 2i^{43} - i^{15}; \quad 3i^{177} - 2i^{129} + i^9 - i^5$.

5.9. $\dfrac{1+4i}{1-7i}; \quad \dfrac{3+i}{1-5i}; \quad \dfrac{-7i(7-7i)}{(2+7i)(2-6i)};$

$2i^{183} - 5i^{57} + 2i^{23} - i^{11}; \quad 3i^{151} - 2i^{103} + i^{15} - i^2$.

5.10. $\dfrac{-1+6i}{5-i}; \quad \dfrac{-7+i}{1+4i}; \quad \dfrac{5i(6-3i)}{(4+7i)(-2-5i)};$

$5i^{114} - 2i^{75} + i^{36} - i^5; \quad 6i^{124} + i^{97} - 3i^{13} + 2i^5$.

5.11. $\dfrac{-1+5i}{-1+9i}; \quad \dfrac{-3+i}{-1+8i}; \quad \dfrac{-4i(7-7i)}{(-2+3i)(8-5i)};$

$5i^{713} + 2i^{316} - 3i^{15} + 5i^2; \quad 6i^{126} + i^{98} - 3i^{19} + 2i^7$.

5.12. $\dfrac{-1+2i}{1-9i}; \quad \dfrac{-5+i}{-1+4i}; \quad \dfrac{-6i(-5-7i)}{(7+3i)(2+4i)};$

$3i^{313} - 2i^{202} + 5i^{15} - i^5; \quad 6i^{128} + i^{79} - 3i^{13} + 2i^9$.

5.13. $\dfrac{1+4i}{1-5i}; \quad \dfrac{8+i}{4-3i}; \quad \dfrac{2i(5-3i)}{(9+5i)(5-7i)};$

$5i^{917} + 2i^{412} - 3i^{17} + 5i^3; \quad i^{1021} - 5i^{364} - 3i^{18} - i^9$.

5.14. $\dfrac{1+2i}{1-2i}; \quad \dfrac{9+i}{8-3i}; \quad \dfrac{-3i(6-5i)}{(4+5i)(6-i)};$

$5i^{134} - 2i^{79} - i^{34} - 2i^3; \quad i^{1011} - 5i^{351} - 3i^{10} - i^4$

5.15. $\dfrac{1+3i}{1-9i}; \quad \dfrac{7+i}{11-3i}; \quad \dfrac{-5i(-5+6i)}{(8+6i)(2-5i)};$

$3i^{197} - 2i^{101} + 3i^{51} + i^{12}; \quad i^{1001} - 5i^{507} - 3i^{12} - i^8$.

5.16. $\dfrac{1+3i}{1-7i}; \quad \dfrac{3+2i}{10-3i}; \quad \dfrac{14i(5-i)}{(7+3i)(2-9i)};$

$3i^{137}+2i^{121}-i^2+i$; $2i^{163}-5i^{53}+2i^{26}-i^{15}$.

5.17. $\dfrac{1+7i}{1-5i}$; $\dfrac{3+5i}{9-4i}$; $\dfrac{11i(4-i)}{(3+7i)(5-2i)}$;

$3i^{147}+2i^{131}-i^{11}+i^3$; $2i^{161}-5i^{55}+2i^{26}-i^{9}$.

5.18. $\dfrac{1+5i}{1-9i}$; $\dfrac{3+4i}{3-5i}$; $\dfrac{7i(8-i)}{(4+i)(6-i)}$;

$i^{1203}-5i^{407}-3i^{17}+i^{10}$; $2i^{167}-5i^{57}+2i^{27}-i^{11}$.

5.19. $\dfrac{1+3i}{1-4i}$; $\dfrac{3-4i}{5-3i}$; $\dfrac{-7i(-7-5i)}{(4+3i)(2-9i)}$;

$3i^{101}-2i^{253}+i^{46}-i^7$; $3i^{1071}-2i^{1203}+i^{36}-i^{5}$.

5.20. $\dfrac{3-2i}{1-2i}$; $\dfrac{3+i}{6-3i}$; $\dfrac{-9i(6-i)}{(7+i)(3-5i)}$;

$3i^{1701}-2i^{723}+3i^{26}-i^{11}$; $3i^{1001}-2i^{423}+2i^{86}-i^{17}$.

5.21. $\dfrac{1+6i}{1-7i}$; $\dfrac{3+7i}{8-5i}$; $\dfrac{2i(5-2i)}{(2+9i)(2-i)}$;

$3i^{1271}-2i^{1123}+6i^{26}-i^9$; $3i^{1371}-2i^{1423}+4i^{46}-i^{13}$.

5.22. $\dfrac{1+i}{1-8i}$; $\dfrac{3+8i}{1-3i}$; $\dfrac{4i(7-8i)}{(2+3i)(2-5i)}$;

$3i^{1771}-2i^{1423}+i^{125}-i^{57}$; $3i^{1587}-2i^{971}+3i^{313}-i^{19}$.

5.23. $\dfrac{5+i}{1-9i}$; $\dfrac{-4+3i}{-8+2i}$; $\dfrac{3i(-2+7i)}{(9+3i)(2-8i)}$;

$3i^{1591}-2i^{1093}+i^{172}-i^{27}$; $i^{5071}-2i^{3242}+3i^{459}-2i^{124}$.

5.24. $\dfrac{2+i}{8-6i}$; $\dfrac{6+i}{5+9i}$; $\dfrac{5i(6-4i)}{(1-9i)(5-8i)}$;

$3i^{1317}-2i^{1021}-i^{27}+i^{13}$; $i^{1297}-2i^{1402}+3i^{759}-2i^{57}$.

5.25 $\dfrac{6+5i}{1-i}$; $\dfrac{-4+3i}{-7+2i}$; $\dfrac{3i(6-4i)}{(1+4i)(5+2i)}$;

$5i^{143}+2i^{63}-3i^{73}+5i^{6}$; $3i^{321}+4i^{13}+2i^{98}-6i^{29}$.

Задание 6. Построить области.

6.1. $\{|z|<3\}$; $\left\{|z|<2, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>3\}$;

$\left\{|z|>2, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{2<|z|<4, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.2. $\{|z|<2\}$; $\left\{|z|<5, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>9\}$;

$\left\{|z|>6, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{4<|z|<7, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.3. $\{|z|<5\}$; $\left\{|z|<3, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>2\}$;

$\left\{|z|>1, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{3<|z|<6, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.4. $\{|z|<0,5\}$; $\left\{|z|<4, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>1\}$;
$\left\{|z|>4, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{3<|z|<5, -\pi<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.5. $\{|z|<1,5\}$; $\left\{|z|<6, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>7\}$;
$\left\{|z|>3, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{2<|z|<3, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.6. $\{|z|<2,5\}$; $\left\{|z|<8, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>5\}$;
$\left\{|z|>2,5, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{1<|z|<7, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.7. $\{|z|<4\}$; $\left\{|z|<3, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>2,7\}$;
$\{1,5<|z|<4\}$; $\left\{2<|z|<5, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

6.8. $\{|z|<3,5\}$; $\left\{|z|<6, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>8\}$;
$\left\{|z|>2,5, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{1<|z|<6, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.9. $\{|z|<9\}$; $\left\{|z|<4, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>5\}$;
$\left\{|z|>6, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{3<|z|<4,5, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.10. $\{|z|<0,3\}$; $\left\{|z|<1, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>8,7\}$;
$\left\{|z|>\dfrac{3}{4}, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{1,5<|z|<2, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.11. $\{|z|<4,5\}$; $\left\{|z|<0,5, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>7,3\}$;
$\left\{|z|>1, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{3<|z|<9, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.12. $\{|z|<6,5\}$; $\{|z|<1, \pi<\varphi<2\pi\}$; $\{|z|>\dfrac{3}{2}\}$;
$\left\{|z|>8, \dfrac{\pi}{4}<z<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{0,5<|z|<5, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.13. $\{|z|<6\}$; $\left\{|z|<9, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>6\}$;
$\left\{|z|>7, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{3,5<|z|<6, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.14. $\{|z|<5,5\}$; $\left\{|z|<3,5, \dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi\right\}$; $\{|z|>2,5\}$;
$\left\{|z|>5, \dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{4<|z|<5, -\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

6.15. $\{|z| < 7\}$; $\left\{|z| < 2,5, \dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$; $\{|z| > 4\}$;
$\left\{|z| > 3,5, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{3 < |z| < 8, -\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
6.16. $\{|z| < 8\}$; $\left\{|z| < 5,5, \dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$; $\{|z| > 3,5\}$;
$\left\{|z| > 6,5, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{5,5 < |z| < 7, -\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
6.17. $\{|z| < 7,5\}$; $\left\{|z| < 8, \dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$; $\{|z| > 10\}$;
$\left\{|z| > 12, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{2,5 < |z| < 4, -\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
6.18. $\{|z| < 10\}$; $\left\{|z| < 6,3, \dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$; $\{|z| > 2,9\}$;
$\left\{|z| > 4, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ $\left\{1,5 < |z| < 2, -\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
6.19. $\{|z| < 1\}$; $\left\{|z| < 7, \dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$; $\{|z| > 6,5\}$;
$\left\{|z| > 10, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{6,5 < |z| < 8, -\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
6.20. $\{|z| < 8,5\}$; $\left\{|z| < 4,5, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \pi\right\}$; $\{|z| > 11\}$;
$\left\{|z| > 9, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{4 < |z| < 8, -\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
6.21. $\{|z| < 9,5\}$; $\left\{|z| < 10, \dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$; $\{|z| > 12\}$;
$\left\{|z| > 8, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{5 < |z| < 6, -\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
6.22. $\{|z| < 3,2\}$; $\left\{|z| < 2, \dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$; $\{|z| > 3\}$;
$\left\{|z| > 2, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{2 < |z| < 4, -\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
6.23. $\{|z| < 2,2\}$; $\left\{|z| < 4,2, \dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$; $\{|z| > 9,2\}$;
$\left\{|z| > 6, \dfrac{\pi}{4} < z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{2 < |z| < 7, -\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
6.24. $\{|z| < 5,7\}$; $\left\{|z| < 3,7, \dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$; $\{|z| > 2,4\}$;
$\left\{|z| > 1, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{3 < |z| < 10, -\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}\right\}$.
6.25 $\{|z| < 3,7\}$; $\left\{|z| < 3,2, \dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$; $\{|z| > 1,6\}$;
$\left\{|z| > 2, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; $\left\{2 < |z| < 5, \dfrac{\pi}{4} < \varphi < \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

Задание 7. Построить области.
7.1. $\{\operatorname{Re} z > 2, \operatorname{Im} z < -4\}$; $\{|z - 1 + 2i| < 2\}$;

$\{|z-1+2i|>1\}$; $\{1<|z-2-3i|<2\}$.

7.2. $\{\mathrm{Re}\ z>4,\ \mathrm{Im}\ z<-3\}$; $\{|z-3+4i|<6\}$;

$\{|z-4+5i|>3\}$; $\{0,5<|z-3-6i|<1,5\}$.

7.3. $\{\mathrm{Re}\ z>2\sqrt{2}, \mathrm{Im}\ z<-1\}$; $\{|z-2+3i|<4\}$;

$\{|z-2+3i|>2\}$; $\{1<|z-1-4i|<2\}$.

7.4. $\{\mathrm{Re}\ z>3, \mathrm{Im}\ z<\sqrt{7}\}$; $\{|z-6+8i|<7\}$;

$\{|z-6+8i|>4\}$; $\{1,5<|z-3-8i|<2,5\}$.

7.5. $\{\mathrm{Re}\ z<-1, \mathrm{Im}\ z>2\}$; $\{|z-5+2i|<3\}$;

$\{|z-3+7i|>6\}$; $\{\{0,5<|z-7+2i|<1\}$.

7.6. $\{\mathrm{Re}\ z>1, \mathrm{Im}\ z>2\sqrt{2}\}$; $\{|z-4+6i|<2,5\}$;

$\{|z+2+8i|>1,5\}$; $\{3<|z+1-7i|<3,5\}$.

7.7. $\{\mathrm{Re}\ z>4, \mathrm{Im}\ z<-2\}$; $\{|z-3+5i|<1\}$;

$\{|z-2+7i|>3\}$; $\{1,5<|z|<4\}$.

7.8. $\{\mathrm{Re}\ z>\sqrt{7}, \mathrm{Im}\ z<-3\}$; $\{|z-10+i|<8\}$;

$\{|z-4+3i|>1,5\}$; $\{2<|z-1-6i|<2,5\}$.

7.9. $\{\mathrm{Re}\ z<-2, \mathrm{Im}\ z>4\}$; $\{|z-11+2i|<5\}$;

$\{|z-2+4i|>2,5\}$; $\{3<|z-3-5i|<4\}$.

7.10. $\{\mathrm{Re} z<-3, \mathrm{Im} z>\sqrt{7}\}$; $\{|z-4+3i|<1\}$;

$\{|z-12+i|>1,5\}$; $\{2<|z-2-5i|<3\}$.

7.11. $\{\mathrm{Re}\ z>3\sqrt{2}, \mathrm{Im}\ z<-1\}$; $\{|z-7+9i|<3\}$;

$\{|z-8+i|>6\}$; $\{2<|z-1-4i|<5\}$.

7.12. $\{\mathrm{Re}\ z<-2, \mathrm{Im}\ z>4\}$; $\{|z-5+i|<5\}$;

$\{|z-6+3i|>6\}$; $\{4<|z-1-7i|<5\}$.

7.13. $\{\mathrm{Re}\ z>4\sqrt{2}, \mathrm{Im}\ z<-\sqrt{2}\}$; $\{|z-9+5i|<6\}$;

$\{|z+11-9i|>5\}$; $\{7<|z+2-7i|<4\}$.

7.14. $\{\mathrm{Re}\ z>\sqrt{2}, \mathrm{Im}\ z<-\sqrt{2}\}$; $\{|z+1-12i|<3\}$;

$\{|z-7+2i|>3\}$; $\{10<|z-5+6i|<2\}$.

7.15. $\{\mathrm{Re}\ z<4, \mathrm{Im}\ z<3\}$; $\{|z+11-2i|<7\}$;

$\{|z-2+5i|>9\}$; $\{11<|z+8-3i|<5\}$.

7.16. $\{\mathrm{Re}\ z>\sqrt{2}, \mathrm{Im}\ z>\sqrt{2}\}$; $\{|z+5+3i|<6\}$;

$\{|z-4-12i|>\}$; $\{9<|z-8+3i|<12\}$.

7.17. $\{\mathrm{Re}\ z>4\sqrt{2}, \mathrm{Im}\ z>4\sqrt{2}\}$; $\{|z-8-3i|<4\}$;

$\{|z+8-7i|>13\}$; $\{6<|z-7+5i|<7\}$.

7.18. $\{\mathrm{Re}\ z<1, \mathrm{Im}\ z<2\sqrt{2}\}$; $\{|z+9+5i|<1\}$;
$\{|z-7-9i|>15\}$; $\{2<|z+3-5i|<3\}$.

7.19. $\{\mathrm{Re}\ z>1, \mathrm{Im}\ z>\sqrt{3}\}$; $\{|z+7+5i|<4\}$;
$\{|z+8-2i|>6\}$; $\{3<|z+1-5i|<5\}$.

7.20. $\{\mathrm{Re} z<-\sqrt{3}, \mathrm{Im} z>1\}$; $\{|z+2-5i|<3\}$;
$\{|z+1+7i|>4\}$; $\{5<|z-3+7i|<6\}$.

7.21. $\{\mathrm{Re}\ z<1, \mathrm{Im}\ z<\sqrt{3}\}$; $\{|z+11-3i|<4\}$;
$\{|z+5+i|>3\}$; $\{8<|z+3-4i|<10\}$.

7.22. $\{\mathrm{Re}\ z>2, \mathrm{Im}\ z<-4\}$; $\{|z-2+3i|<2\}$;
$\{|z-3+i|>0,5\}$; $\{2<|z-6-3i|<4\}$.

7.23. $\{\mathrm{Re}\ z>4, \mathrm{Im}\ z<-3\}$; $\{|z-5-4i|<3\}$;
$\{|z-7+i|>7\}$; $\{4,5<|z+5+2i|<6,5\}$.

7.24. $\{\mathrm{Re}\ z>5, \mathrm{Im}\ z<-4\}$; $|z-3+5i|<6\}$;
$\{|z-1+6i|>2\}$; $\{2<|z-4+2i|<4\}$.

7.25 $\{\mathrm{Re}\ z<5, \mathrm{Im}\ z<-4\}$; $\{|z-3+4i|<6\}$;
$\{|z-2+3i|>2\}$; $\{1,5<|z-3-8i|<2,5\}$.

Задание 8. Вычислить.

8.1. $(2+2i)^7$; $(1-\sqrt{3}i)^6$; $\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^4$;
$\frac{(1-i)^{19}(i-\sqrt{3})^{13}}{(\sqrt{3}+i)^{17}(1+i\sqrt{3})^{37}}$; $\frac{(-3+3i)^7(3i+\sqrt{3})^{11}}{(6+6i)^{22}(1+i\sqrt{3})^5}$.

8.2. $(2+2\sqrt{3}i)^5$; $(5\sqrt{2}-5\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^7$;
$\frac{(1+i)^{14}(i+\sqrt{3})^{21}}{(\sqrt{3}+i)^{13}(1+i\sqrt{3})^7}$; $\frac{(2+i\sqrt{1}2)^5(1-i)^6}{(\sqrt{3}+i)^{15}(1+i)^{14}}$.

8.3. $(4-4\sqrt{3}i)^6$; $(3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i)^5$; $\left(1+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^6$;
$\frac{(\sqrt{3}-i)^{12}(1+i\sqrt{3})^9}{(1-i)^{11}(i-\sqrt{3})^{24}}$; $\frac{(2+i\sqrt{1}2)^{11}(1-i)^9}{(\sqrt{3}+i)^7(1+i)^{24}}$.

8.4. $(2-2\sqrt{3}i)^5$; $(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^5$;

$\dfrac{(1-i)^{15}(i-\sqrt{3})^{17}}{(\sqrt{3}+i)^{25}(1+i\sqrt{3})^{14}}$; $\dfrac{(1-i)^{20}(i-\sqrt{3})^{25}}{(\sqrt{3}+i)^{25}(1+i\sqrt{3})^{14}}$.

8.5. $(3+3\sqrt{3}i)^6$; $(5\sqrt{2}-5\sqrt{2}i)^5$; $\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{3}+i\sin\dfrac{7\pi}{3}\right)^4$;
$\dfrac{(1-i)^{19}(i-\sqrt{3})^{25}}{(\sqrt{3}+i)^{13}(1+i\sqrt{3})^{25}}$; $\dfrac{(1-i)^{8}(1-\sqrt{3})^{18}}{(\sqrt{3}+i)^{13}(1+i\sqrt{3})^{32}}$.

8.6. $(3-3i)^5$; $(4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)^6$;
$\dfrac{(1-i)^{9}(i-\sqrt{3})^{7}}{(\sqrt{3}+i)^{3}(1+i\sqrt{3})^{5}}$; $\dfrac{(1-i)^{14}(i-\sqrt{3})^{9}}{(\sqrt{3}+i)^{17}(1+i\sqrt{3})^{5}}$.

8.7. $(5-5\sqrt{3}i)^6$; $(6\sqrt{2}+6\sqrt{2}i)^5$; $\left(1+\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^6$;
$\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{7}(1+i\sqrt{3})^{5}}{(1-i)^{8}(i-\sqrt{3})^{15}}$; $\dfrac{(7-7i)^{3}(i+\sqrt{3})^{19}}{(1+i)^{15}(7\sqrt{3}+7i)^{8}}$.

8.8. $(7-7\sqrt{3}i)^5$; $(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^4$;
$\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{8}(1+i\sqrt{3})^{6}}{(1-i)^{9}(i-\sqrt{3})^{15}}$; $\dfrac{(7-7i)^{7}(i+\sqrt{3})^{13}}{(1+i)^{11}(7\sqrt{3}+7i)^{9}}$.

8.9. $(6-6\sqrt{3}i)^6$; $(3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i)^5$; $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^{10}$;
$\dfrac{(5-5i)^{5}(-i+\sqrt{3})^{14}}{(i\sqrt{3}+1)^{3}(10+10i)^{5}}$; $\dfrac{(7-7i)^{5}(i+\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^{13}(7\sqrt{3}+7i)^{6}}$.

8.10. $(4+4\sqrt{3}i)^5$; $(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}\right)^5$;
$\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{9}(-2i+\sqrt{12})^{3}}{(1-i)^{11}(\sqrt{27}+i\sqrt{27})^{4}}$; $\dfrac{(5-5i)^{11}(-i+\sqrt{3})^{19}}{(1+i)^{3}(10+i10\sqrt{3})^{9}}$.

8.11. $(5+5\sqrt{3}i)^6$; $(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i)^5$; $\left(1+\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)^5$;
$\dfrac{(1+i)^{33}(2-2\sqrt{3}i)^{5}}{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{7}(\sqrt{3}+i)^{6}}$; $\dfrac{(5-5i)^{7}(-i+\sqrt{3})^{17}}{(1+i)^{7}(10+10\sqrt{3}i)^{5}}$.

8.12. $(-2-2\sqrt{3}i)^5$; $(3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)^4$;
$\dfrac{(-3+3i)^{5}(\sqrt{3}i+\sqrt{3})^{7}}{(6+6i)^{12}(1+i\sqrt{3})^{3}}$; $\dfrac{(5-5i)^{4}(-i+\sqrt{3})^{13}}{(1+i)^{9}(10+10\sqrt{3}i)^{7}}$.

8.13. $(3+3\sqrt{3}i)^6$; $(-4\sqrt{3}-4\sqrt{3}i)^5$; $\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)^8$;
$\dfrac{(1+i)^{32}(2-2\sqrt{3}i)^4}{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{16}(\sqrt{3}+i)^5}$; $\dfrac{(2-2i)^{10}(-i+\sqrt{3})^{14}}{(3-3\sqrt{3}i)^5(1+i)^9}$.

8.14. $(5+5\sqrt{3}i)^5$; $(-7\sqrt{2}+7\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\dfrac{5\pi}{9}+i\sin\dfrac{5\pi}{9}\right)^6$;
$\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{10}(\sqrt{1}2-2i)^4}{(1+i)^{12}(3-3\sqrt{3}i)^5}$; $\dfrac{(2+2i)^{13}(-i+\sqrt{3})^{17}}{(3-3\sqrt{3}i)^7(1-i)^7}$.

8.15. $(2-2\sqrt{3}i)^6$; $(3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i)^5$; $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^5$;
$\dfrac{(\sqrt{3}+3i)^{11}(1-i)^{10}}{(2+2i)^7(\sqrt{3}-3i)^8}$; $\dfrac{(2+2i)^{17}(-i+\sqrt{3})^{25}}{(3-3\sqrt{3}i)^{11}(1-i)^5}$.

8.16. $(6+6\sqrt{3}i)^5$; $(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)^{12}$;
$\dfrac{(5-5i)^5(-i+\sqrt{3})^{14}}{(10+10\sqrt{3})^8(1+i)^{10}}$; $\dfrac{(1-i)^{14}(i-\sqrt{3})^{19}}{(\sqrt{3}+i)^8(1+i\sqrt{3})^{37}}$.

8.17. $(5+5\sqrt{3}i)^6$; $(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^5$; $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)^9$;
$\dfrac{(7-7i)^4(i+\sqrt{3})^{11}}{(1+i)^{12}(7\sqrt{3}+7i)^3}$; $\dfrac{(1-i)^{18}(i-\sqrt{3})^{25}}{(\sqrt{3}+i)^{16}(1+i\sqrt{3})^{31}}$.

8.18. $(-5-5\sqrt{3}i)^6$; $(-7\sqrt{2}-7\sqrt{2}i)^5$; $\left(1+\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)^7$;
$\dfrac{(7-7i)^5(i+\sqrt{3})^4}{(1+i)^{13}(7\sqrt{3}+7i)^6}$; $\dfrac{(1-i)^9(i-\sqrt{3})^{14}}{(\sqrt{3}+i)^8(1+i\sqrt{3})^5}$.

8.19. $(4-4\sqrt{3}i)^5$; $(-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\dfrac{4\pi}{9}+i\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)^9$;
$\dfrac{(\sqrt{3}+i)^9(-3i+3)^4}{(1+i)^{10}(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^6}$; $\dfrac{(i-\sqrt{3})^{17}(1-i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^{1}7(1-i\sqrt{3})^{15}}$.

8.20. $(1-\sqrt{3}i)^6$; $(3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i)^5$; $\left(1+\cos\dfrac{6\pi}{5}+i\sin\dfrac{6\pi}{5}\right)^{10}$;
$\dfrac{(2+2i)^{10}(-i+\sqrt{3})^4}{(3-3\sqrt{3}i)^5(1-i)^8}$; $\dfrac{(1+i)^{11}(2i-2\sqrt{3})^{13}}{(\sqrt{3}+i)^7(1+i\sqrt{3})^{25}}$.

8.21. $(2+2\sqrt{3}i)^5$; $(-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)^8$;

$\dfrac{(2+2i)^{12}(-i+\sqrt{3})^{15}}{(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)^5(1-i)^7}$; $\dfrac{(1-i)^{11}(1-\sqrt{3})^{17}}{(\sqrt{3}+i)^8(1+i)^5}$.

8.22. $(-2+2\sqrt{3}i)^6$; $(3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i)^5$; $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)^6$;
$\dfrac{(1-i)^{10}(i-\sqrt{3})^{15}}{(\sqrt{3}+i)^7(1+i\sqrt{3})^{35}}$; $\dfrac{(-3+3i)^6(3i+\sqrt{3})^8}{(6+6i)^{13}(1+i\sqrt{3})^3}$.

8.23. $(1-\sqrt{3}i)^5$; $(3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{9}+i\sin\dfrac{7\pi}{9}\right)^3$;
$\dfrac{(1+i)^9(i+\sqrt{3})^{14}}{(\sqrt{3}-i)^8(-\sqrt{3}+i\sqrt{3})^5}$; $\dfrac{(2+i\sqrt{12})^5(1-i)^6}{(\sqrt{3}+i)^8(1+i)^{10}}$.

8.24. $(4-4\sqrt{3}i)^6$; $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^5$; $\left(1+\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)^6$;
$\dfrac{(\sqrt{3}-i)^7(1+i)^5}{(1-i)^8(i+\sqrt{3})^9}$; $\dfrac{(12+i\sqrt{12})^6(1-i)^7}{(\sqrt{3}+i)^4(1+i)^{11}}$.

8.25 $(2+2i)^7$; $(5\sqrt{2}-5\sqrt{2}i)^6$; $\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)^6$;
$\dfrac{(1-i)^{15}(i-\sqrt{3})^{17}}{(\sqrt{3}+i)^{25}(1+i\sqrt{3})^{14}}$; $\dfrac{(1-i)^8(1-\sqrt{3})^{18}}{(\sqrt{3}+i)^{13}(1+i\sqrt{3})^{32}}$.

Задание 9. Решить уравнения.

9.1. $x^2-225=0$; $x^2+1=0$; $x^2+4x+5=0$;
$x^2-16x+65=0$; $x^2+12x+40=0$; $x^2+20x+109=0$;
$x^2-8x+32=0$.

9.2. $x^2-1=0$; $x^2+4=0$; $x^2+4x+85=0$;
$x^2-18x+82=0$; $x^2+14x+53=0$; $x^2-2x+10=0$;
$x^2-10x+41=0$.

9.3. $x^2-4=0$; $x^2+9=0$; $x^2+6x+10=0$;
$x^2-20x+101=0$; $x^2+16x+68=0$; $x^2-4x+13=0$;
$x^2-12x+52=0$.

9.4. $x^2-9=0$; $x^2+16=0$; $x^2+8x+17=0$;
$x^2-2x+2=0$; $x^2+18x+85=0$; $x^2-6x+18=0$;
$x^2-14x+65=0$.

9.5. $x^2-16=0$; $x^2+25=0$; $x^2+10x+26=0$;
$x^2-16x+80=0$; $x^2+20x+104=0$; $x^2+2x+10=0$;
$x^2-4x+5=0$.

9.6. $x^2-25=0$; $x^2+36=0$; $x^2+12x+37=0$;
$x^2-6x+10=0$; $x^2+2x+5=0$; $x^2+4x+13=0$;
$x^2-18x+97=0$.

9.7. $x^2 - 36 = 0$; $x^2 + 49 = 0$; $x^2 + 14x + 50 = 0$; $x^2 - 20x + 116 = 0$; $x^2 + 4x + 8 = 0$; $x^2 + 6x + 18 = 0$; $x^2 - 8x + 17 = 0$.

9.8. $x^2 - 49 = 0$; $x^2 + 64 = 0$; $x^2 + 16x + 65 = 0$; $x^2 - 2x + 17 = 0$; $x^2 + 6x + 13 = 0$; $x^2 + 8x + 25 = 0$; $x^2 - 10x + 26 = 0$.

9.9. $x^2 - 64 = 0$; $x^2 + 81 = 0$; $x^2 + 18x + 82 = 0$; $x^2 - 4x + 20 = 0$; $x^2 + 8x + 20 = 0$; $x^2 + 10x + 34 = 0$; $x^2 - 12x + 37 = 0$.

9.10. $x^2 - 81 = 0$; $x^2 + 100 = 0$; $x^2 + 12x + 45 = 0$; $x^2 - 14x + 50 = 0$; $x^2 + 10x + 29 = 0$; $x^2 + 20x + 101 = 0$; $x^2 - 6x + 25 = 0$.

9.11. $x^2 - 100 = 0$; $x^2 + 121 = 0$; $x^2 + 2x + 2 = 0$; $x^2 - 16x + 73 = 0$; $x^2 + 14x + 74 = 0$; $x^2 + 14x + 130 = 0$; $x^2 - 8x + 80 = 0$.

9.12. $x^2 - 121 = 0$; $x^2 + 144 = 0$; $x^2 + 2x + 82 = 0$; $x^2 - 10x + 125 = 0$; $x^2 + 16x + 80 = 0$; $x^2 + 16x + 73 = 0$; $x^2 - 18x + 106 = 0$.

9.13. $x^2 - 144 = 0$; $x^2 + 169 = 0$; $x^2 + 4x + 68 = 0$; $x^2 - 6x + 34 = 0$; $x^2 + 18x + 117 = 0$; $x^2 + 18x + 90 = 0$; $x^2 - 10x + 34 = 0$.

9.14. $x^2 - 169 = 0$; $x^2 + 196 = 0$; $x^2 + 6x + 25 = 0$; $x^2 - 18x + 117 = 0$; $x^2 + 20x + 149 = 0$; $x^2 + 20x + 116 = 0$; $x^2 - 12x + 72 = 0$.

9.15. $x^2 - 196 = 0$; $x^2 + 225 = 0$; $x^2 + 8x + 32 = 0$; $x^2 - 20x + 104 = 0$; $x^2 + 2x + 101 = 0$; $x^2 + 2x + 17 = 0$; $x^2 - 14x + 130 = 0$.

9.16. $x^2 - 256 = 0$; $x^2 + 625 = 0$; $x^2 + 6x + 34 = 0$; $x^2 - 8x + 25 = 0$; $x^2 + 12x + 117 = 0$; $x^2 + 20x + 136 = 0$; $x^2 - 6x + 90 = 0$.

9.17. $x^2 - 289 = 0$; $x^2 + 576 = 0$; $x^2 + 8x + 52 = 0$; $x^2 - 10x + 74 = 0$; $x^2 + 14x + 65 = 0$; $x^2 + 2x + 50 = 0$; $x^2 - 8x + 41 = 0$.

9.18. $x^2 - 324 = 0$; $x^2 + 529 = 0$; $x^2 + 10x + 41 = 0$; $x^2 - 12x + 45 = 0$; $x^2 + 16x + 89 = 0$; $x^2 + 4x + 20 = 0$; $x^2 - 10x + 50 = 0$.

9.19. $x^2 - 361 = 0$; $x^2 + 484 = 0$; $x^2 + 4x + 53 = 0$; $x^2 - 6x + 73 = 0$; $x^2 + 2x + 65 = 0$; $x^2 + 12x + 52 = 0$; $x^2 - 18x + 130 = 0$.

9.20. $x^2 - 400 = 0$; $x^2 + 441 = 0$; $x^2 + 8x + 80 = 0$;
$x^2 - 2x + 37 = 0$; $x^2 + 18x + 97 = 0$; $x^2 + 20x + 181 = 0$;
$x^2 - 14x + 53 = 0$.
9.21. $x^2 - 441 = 0$; $x^2 + 400 = 0$; $x^2 + 10x + 50 = 0$;
$x^2 - 4x + 53 = 0$; $x^2 + 20x + 200 = 0$; $x^2 + 2x + 37 = 0$;
$x^2 - 4x + 85 = 0$.
9.22. $x^2 - 484 = 0$; $x^2 + 361 = 0$; $x^2 + 4x + 125 = 0$;
$x^2 - 16x + 89 = 0$; $x^2 + 12x + 100 = 0$; $x^2 + 20x + 221 = 0$;
$x^2 - 8x + 65 = 0$.
9.23. $x^2 - 529 = 0$; $x^2 + 324 = 0$; $x^2 + 12x + 85 = 0$;
$x^2 - 6x + 109 = 0$; $x^2 + 2x + 26 = 0$; $x^2 + 4x + 40 = 0$;
$x^2 - 18x + 85 = 0$.
9.24. $x^2 - 576 = 0$; $x^2 + 289 = 0$; $x^2 + 32x + 252 = 0$;
$x^2 - 36x + 325 = 0$; $x^2 + 20x + 164 = 0$; $x^2 + 20x + 244 = 0$;
$x^2 - 12x + 40 = 0$.
9.25 $x^2 - 625 = 0$; $x^2 + 256 = 0$; $x^2 + 6x + 45 = 0$;
$x^2 - 2x + 50 = 0$; $x^2 + 20x + 269 = 0$; $x^2 + 4x + 200 = 0$;
$x^2 - 8x + 52 = 0$.

Задание 10. Решить уравнения.
10.1. $x^4 + 8x^2 + 12 = 0$; $x^4 - 32x^2 + 255 = 0$;
$x^4 + 98x^2 + 2397 = 0$; $x^4 + 242x^2 + 14632 = 0$;
$x^4 + 450x^2 + 50609 = 0$.
10.2. $x^4 + 50x^2 + 624 = 0$; $x^4 - 128x^2 + 4092 = 0$;
$x^4 + 18x^2 + 77 = 0$; $x^4 + 288x^2 + 20727 = 0$;
$x^4 - 512x^2 + 65520 = 0$.
10.3. $x^4 + 72x^2 + 1295 = 0$; $x^4 - 32x^2 + 252 = 0$;
$x^4 + 162x^2 + 6557 = 0$; $x^4 + 338x^2 + 28552 = 0$;
$x^4 + 578x^2 + 83505 = 0$.
10.4. $x^4 + 50x^2 + 621 = 0$; $x^4 - 512x^2 + 65532 = 0$;
$x^4 + 200x^2 + 9996 = 0$; $x^4 + 392x^2 + 38407 = 0$;
$x^4 + 648x^2 + 104960 = 0$.
10.5. $x^4 + 72x^2 + 1292 = 0$; $x^4 - 144x^2 + 5188 = 0$;
$x^4 + 162x^2 + 6560 = 0$; $x^4 + 392x^2 + 38407 = 0$;
$x^4 + 722x^2 + 130305 = 0$.
10.6. $x^4 + 98x^2 + 2397 = 0$; $x^4 + 162x^2 + 6560 = 0$;
$x^4 + 150x^2 + 5634 = 0$; $x^4 + 338x^2 + 28557 = 0$;
$x^4 - 800x^2 + 159984 = 0$.
10.7. $x^4 + 162x^2 + 6557 = 0$; $x^4 - 128x^2 + 4105 = 0$;

$x^4 + 90x^2 + 2024 = 0$; $x^4 + 392x^2 + 38412 = 0$;
$x^4 + 2x^2 - 15 = 0$.
10.8. $x^4 + 80x^2 + 1596 = 0$; $x^4 - 112x^2 + 3132 = 0$;
$x^4 + 142x^2 + 5041 = 0$; $x^4 + 22x^2 + 117 = 0$;
$x^4 + 8x^2 + 7 = 0$.
10.9. $x^4 + 142x^2 + 5037 = 0$; $x^4 - 32x^2 + 240 = 0$;
$x^4 + 138x^2 + 4760 = 0$; $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$;
$x^4 + 18x^2 + 65 = 0$.
10.10. $x^4 + 8x^2 + 12 = 0$; $x^4 - 288x^2 + 20732 = 0$;
$x^4 + 392x^2 + 38415 = 0$; $x^4 + 242x^2 + 14632 = 0$;
$x^4 + 50x^2 + 609 = 0$.
10.11. $x^4 + 18x^2 + 77 = 0$; $x^4 - 32x^2 + 247 = 0$;
$x^4 + 450x^2 + 50624 = 0$; $x^4 + 338x^2 + 28552 = 0$;
$x^4 + 72x^2 + 1280 = 0$.
10.12. $x^4 + 50x^2 + 621 = 0$; $x^4 - 32x^2 + 255 = 0$;
$x^4 + 578x^2 + 83520 = 0$; $x^4 + 392x^2 + 38407 = 0$;
$x^4 + 98x^2 + 2395 = 0$.
10.13. $x^4 + 18x^2 + 77 = 0$; $x^4 - 112x^2 + 3137 = 0$;
$x^4 + 348x^2 + 30275 = 0$; $x^4 + 450x^2 + 50616 = 0$;
$x^4 + 578x^2 + 83505 = 0$.
10.14. $x^4 + 32x^2 + 252 = 0$; $x^4 - 72x^2 + 1295 = 0$;
$x^4 + 622x^2 + 96720 = 0$; $x^4 + 512x^2 + 65227 = 0$;
$x^4 + 648x^2 + 104960 = 0$.
10.15. $x^4 + 20x^2 + 96 = 0$; $x^4 - 162x^2 + 6536 = 0$;
$x^4 + 600x^2 + 89999 = 0$; $x^4 + 578x^2 + 83512 = 0$;
$x^4 + 338x^2 + 28536 = 0$.
10.16. $x^4 + 128x^2 + 4087 = 0$; $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
$x^4 + 72x^2 + 1292 = 0$; $x^4 + 242x^2 + 14632 = 0$;
$x^4 + 242x^2 + 14616 = 0$.
10.17. $x^4 + 162x^2 + 6552 = 0$; $x^4 - 18x^2 + 56 = 0$;
$x^4 + 98x^2 + 2397 = 0$; $x^4 + 288x^2 + 20727 = 0$;
$x^4 + 128x^2 + 4071 = 0$.
10.18. $x^4 + 200x^2 + 9991 = 0$; $x^4 - 32x^2 + 231 = 0$;
$x^4 + 128x^2 + 4092 = 0$; $x^4 + 338x^2 + 28552 = 0$;
$x^4 + 338x^2 + 28536 = 0$.
10.19. $x^4 + 50x^2 + 621 = 0$; $x^4 - 192x^2 + 9212 = 0$;
$x^4 + 200x^2 + 9996 = 0$; $x^4 + 392x^2 + 38407 = 0$;
$x^4 + 648x^2 + 104960 = 0$.
10.20. $x^4 + 52x^2 + 672 = 0$; $x^4 - 188x^2 + 8832 = 0$;

$x^4+162x^2+6560=0$; $x^4+392x^2+38407=0$;
$x^4+722x^2+130305=0$.
10.21. $x^4+58x^2+837=0$; $x^4+162x^2+6560=0$;
$x^4+150x^2+5616=0$; $x^4+338x^2+28557=0$;
$x^4-800x^2+159984=0$.
10.22. $x^4+8x^2+12=0$; $x^4-32x^2+255=0$;
$x^4+98x^2+2397=0$; $x^4+242x^2+14632=0$;
$x^4+450x^2+50609=0$.
10.23. $x^4+98x^2+2397=0$; $x^4-162x^2+960=0$;
$x^4+150x^2+5616=0$; $x^4+338x^2+28557=0$;
$x^4+722x^2+130305=0$.
10.24. $x^4+50x^2+621=0$; $x^4-62x^2+6536=0$;
$x^4+500x^2+62499=0$; $x^4+578x^2+83536=0$;
$x^4+338x^2+28536=0$.
10.25 $x^4+8x^2+12=0$; $x^4-128x^2+4092=0$;
$x^4+162x^2+6557=0$; $x^4+392x^2+38407=0$;
$x^4+722x^2+130305=0$.

Задание 11. Решить уравнение.
11.1. $x^3+2197=0$; $x^4-6561=0$; $x^5+1024=0$;
$x^6-85766121=0$.
11.2. $x^3-216=0$; $x^4+1=0$; $x^5-759375=0$;
$x^6+308915776=0$.
11.3. $x^3+2744=0$; $x^4-256=0$; $x^5+3125=0$;
$x^6-113379904=0$.
11.4. $x^3-343=0$; $x^4+16=0$; $x^5-1=0$;
$x^6+244140625=0$.
11.5. $x^3+3375=0$; $x^4-28561=0$; $x^5+7776=0$;
$x^6-244140625=0$.
11.6. $x^3-512=0$; $x^4+81=0$; $x^5-32=0$;
$x^6+191102976=0$.
11.7. $x^3+729=0$; $x^4-625=0$; $x^5+371293=0$;
$x^6-191102976=0$.
11.8. $x^3-27=0$; $x^4+14641=0$; $x^5-32768=0$;
$x^6+11390625=0$.
11.9. $x^3+1000=0$; $x^4-1296=0$; $x^5+537824=0$;
$x^6-2985984=0$.
11.10. $x^3-64=0$; $x^4+20736=0$; $x^5-59049=0$;
$x^6+46656=0$.

11.11. $x^3+1331=0$; $x^4-2401=0$; $x^5+759375=0$; $x^6-148035889=0$.
11.12. $x^3-125=0$; $x^4+28561=0$; $x^5-1419857=0$; $x^6+148035889=0$.
11.13. $x^3+1=0$; $x^4-14641=0$; $x^5+16807=0$; $x^6-308915776=0$.
11.14. $x^3-729=0$; $x^4+256=0$; $x^5-243=0$; $x^6+531441=0$.
11.15. $x^3+8=0$; $x^4-20736=0$; $x^5+32768=0$; $x^6-11390625=0$.
11.16. $x^3-1000=0$; $x^4+625=0$; $x^5-1024=0$; $x^6+262144=0$.
11.17. $x^3+27=0$; $x^4-38416=0$; $x^5+59049=0$; $x^6-1775161=0$.
11.18. $x^3-1331=0$; $x^4+4096=0$; $x^5-3125=0$; $x^6+1=0$.
11.19. $x^3+64=0$; $x^4-10000=0$; $x^5+1048576=0$; $x^6-4826809=0$.
11.20. $x^3-1728=0$; $x^4+6561=0$; $x^5-100000=0$; $x^6+729=0$.
11.21. $x^3+125=0$; $x^4-4096=0$; $x^5+161051=0$; $x^6-7529536=0$.
11.22. $x^3-2197=0$; $x^4+10000=0$; $x^5-16807=0$; $x^6+4096=0$.
11.23. $x^3+216=0$; $x^4-81=0$; $x^5+248832=0$; $x^6-64000000=0$.
11.24. $x^3-2744=0$; $x^4+1296=0$; $x^5-1048576=0$; $x^6+15625=0$.
11.25. $x^3+2197=0$; $x^4+2401=0$; $x^5+1419857=0$; $x^6+117649=0$.

Задание 12. Записать в алгебраической форме.

12.1 а) $e^{\frac{3\pi i}{2}}$; б) $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$.
12.2 а) $e^{\ln 5-\frac{2\pi i}{3}}$; б) $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}-i\right)$.
12.3 а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+i\ln 3\right)$; б) $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}-2i\right)$.
12.4 а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+i\ln 2\right)$; б) $\mathrm{Ln}\left(-2-i2\sqrt{3}\right)$.
12.5 а) $\mathrm{sh}\left(\ln 3+i\dfrac{\pi}{2}\right)$; б) $\mathrm{Ln}\,(-3)$.

12.6 а) $e^{5\pi i+\ln 4}$; б) $\mathrm{Ln}(2-2i)$.
12.7 а) $\cos(i\ln 2)$; б) $\mathrm{Ln}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.
12.8 а) $\mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi i}{3}\right)$; б) $\mathrm{Ln}(-3-3i)$.
12.9 а) $e^{\ln 4+\pi i}$; б) $\mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)$.
12.10 а) e^{1+i}; б) $\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)$.
12.11. а) $e^{2+\frac{\pi i}{4}}$; б) $\mathrm{Ln}\left(1+i\sqrt{3}\right)$.
12.12. а) $e^{2-\frac{\pi i}{3}}$; б) $\mathrm{Ln}\left(2\sqrt{3}+2i\right)$.
12.13. а) $\mathrm{sh}\,\dfrac{3\pi i}{4}$; б) $\mathrm{Ln}(4)$.
12.14. а) $\mathrm{ch}\left(\ln 3-\dfrac{\pi i}{2}\right)$; б) $\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}+i\right)$.
12.15. а) $e^{\ln 2+\frac{5\pi i}{6}}$; б) $\mathrm{Ln}(-4i)$.
12.16. а) $e^{1-\frac{\pi i}{6}}$; б) $\mathrm{Ln}\left(2-i2\sqrt{3}\right)$.
12.17. а) $\mathrm{sh}\left(\ln\frac{1}{3}+\dfrac{\pi i}{3}\right)$; б) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}\right)$.
12.18. а) $e^{\ln 5+\frac{\pi i}{6}}$; б) $\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}-i\right)$.
12.19. а) $e^{\pi i-\ln 2}$; б) $\mathrm{Ln}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right)$.
12.20. а) $e^{\frac{5\pi i}{6}-\ln 3}$; б) $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}+i}\right)$.
12.21. а) $e^{\frac{2\pi i}{3}-1}$; б) $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{i}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
12.22. а) $e^{2-\frac{3\pi i}{4}}$; б) $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{i\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
12.23. а) $e^{\ln 4+\frac{\pi i}{4}}$; б) $\mathrm{Ln}\left(-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$.
12.24. а) $\mathrm{sh}\left(\ln 10-\dfrac{3\pi i}{2}\right)$; б) $\mathrm{Ln}(-e+ei)$.
12.25. а) $e^{\pi(1-i)}$; б) $\mathrm{Ln}(9-9i)$.

Задание 13. Проверить справедливость условий Коши – Римана для функции $w=f(z)$.

13.1. $w=\mathrm{ch}\,2z$. **13.2**. $w=ze^z$. **13.3**. $w=\dfrac{z}{z+1}$.
13.4. $w=\dfrac{z+2}{z-2}$. **13.5**. $w=\mathrm{sh}\,2z$. **13.6**. $w=\mathrm{ch}\,\dfrac{z}{3}$.

13.7. $w = \dfrac{z-1}{z+1}$. **13.8**. $w = (z-1)e^z$. **13.9**. $w = \operatorname{ch}\dfrac{z}{2}$.
13.10. $w = i\operatorname{sh}\dfrac{z}{3}$. **13.11**. $w = \dfrac{2z}{z+2}$. **13.12**. $w = \operatorname{ch}(z+1)$.
13.13. $(z+1)e^{-z}$. **13.14**. $w = \operatorname{ch}\ 3z$. **13.15**. $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.
13.16. $w = z+1+\dfrac{1}{z+1}$. **13.17**. $w = ze^{-z}$.
13.18. $w = \operatorname{sh}(z-3)$. **13.19**. $w = \operatorname{sh}(z+2)$.
13.20. $w = \dfrac{z-3}{z+3}$. **13.21**. $w = z-1-\dfrac{1}{z-1.}$
13.22. $w = \operatorname{ch}\ 4z$. **13.23**. $w = (z+1)e^{z+1}$.
13.24. $w = \dfrac{z-5}{z+5}$. **13.25**. $w = i\ \operatorname{sh}(z+1)$.

Задание 14. По заданным условиям восстановить аналитическую функцию $w = u+iv = f(z)$ комплексного аргумента $z = x+iy$.
14.1. $u = x^3 - 3xy^2 + xy, \quad f(0) = i$.
14.2. $v = 3x^2y - y^3 + 2x + 3, \quad f(i) = 2i$.
14.3. $v = 3xy + x + 2y - 5, \quad f(1+i) = i$.
14.4. $u = x^2 - y^2 + 3x + 2y - 3, \quad f(1) = 1+i$.
14.5. $v = x^3 - 3xy^2 + x, \quad f(0) = 1$.
14.6. $u = -2y^3 + 6x^2y + x - y - 1, \quad f(1) = 0$.
14.7. $u = y^2 - x^2 + 4yx + 1, \quad f(i) = 2$.
14.8. $v = 3x^2y - y^3 - 2x, \quad f(i) = 1-i$.
14.9. $v = 2x^2 - 2y^2 + x + 2, \quad f(1+i) = 3i+1$.
14.10. $u = 6xy + x - 2y + 4, \quad f(1-i) = 1$.
14.11. $u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2, \quad f(0) = i$.
14.12. $v = 3x^2y - y^3 + 2xy + 2, \quad f(i) = 1+i$.
14.13. $u = -4xy + x + y + 2, \quad f(1+i) = i$.
14.14. $v = 3x^2 - 3y^2 + x - 12, \quad f(2) = 2$.
14.15. $u = -3xy + x - y + 2, \quad f(1+i) = -1+i$.
14.16. $v = 6xy + x - 2y + 3, \quad f(i) = 2+i$.
14.17. $u = x^2 - y^2 + 4x + 1, \quad f(0) = 1+i$.
14.18. $v = x^3 - 3xy^2 + x - 1, \quad f(i) = 1-i$.
14.19. $u = y^3 - 3x^2y + x + y + 1, \quad f(0) = 1+2i$.
14.20. $u = -2xy + 4x + 3y - 5, \quad f(1+i) = i$.
14.21. $v = y^2 - x^2 + x + 2y + 2, \quad f(-i) = 1+i$.
14.22. $v = 4x^2 - 4y^2 + x - 2y - 1, \quad f(0) = 1-i$.
14.23. $u = -8xy + x + 3y + 5, \quad f(-i) = 2+i$.
14.24. $v = 3x^3 - 9xy^2 + x + 1, \quad f(0) = 2+i$.

14.25. $u = 2x^2 - 2y^2 + 4x + 5, \quad f(-i) = 3 - 4i.$

Задание 15. Найти и нарисовать область H , в которую функция $w = f(z)$ отображает область G .

15.1. $w = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})z^2, \quad G = \left\{ \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3},\ 1 < |z| < 2 \right\}.$

15.2. $w = (1 - \sqrt{3}i)z^3, \quad G = \left\{ \frac{\pi}{4} < \arg\ z < \frac{\pi}{3},\ 1 < |z| < \sqrt[3]{2} \right\}.$

15.3. $w = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i \right) z^2,$
$G = \left\{ -\frac{\pi}{12} < \arg\ z < \frac{\pi}{8},\ 1 < |z| < \sqrt{2} \right\}.$

15.4. $w = (1 - i)z^3, \quad G = \left\{ \frac{\pi}{9} < \arg z < \frac{5\pi}{18},\ 1 < |z| < \sqrt{2} \right\}.$

15.5. $w = (2 + 2\sqrt{3}i)z^2, \quad G = \left\{ -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\}.$

15.6. $w = -2iz^2, \quad G = \left\{ \frac{\pi}{12} < \arg z < \frac{5\pi}{12},\ 2 < |z| < 3 \right\}.$

15.7. $w = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) z^2,$
$G = \left\{ \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\}.$

15.8. $w = \frac{(iz)^3}{2}, \quad G = \left\{ -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4},\ 1 < |z| < 2 \right\}.$

15.9. $w = (2\sqrt{3} - 2i)z^2, \quad G = \left\{ \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2} < |z| < 1 \right\}.$

15.10. $w = -(1 + \sqrt{3}i)z^3,$
$G = \left\{ -\frac{\pi}{18} < \arg z < \frac{\pi}{4},\ 0 < |z| < 1 \right\}.$

15.11. $w = (-\sqrt{3} + i)z^3,$
$G = \left\{ \frac{\pi}{12} < \arg z < \frac{\pi}{3},\ \frac{1}{\sqrt[3]{3}} < |z| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right\}.$

15.12. $w = (\sqrt{3} + i)z^4,$
$G = \left\{ -\frac{\pi}{12} < \arg z < \frac{\pi}{6},\ 1 < |z| < \sqrt{2} \right\}.$

15.13. $w = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}} z^4, \quad G = \left\{ \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4},\ 1 < |z| < 2 \right\}.$

15.14. $w = \sqrt{2}(1 - i)z^3,$
$G = \left\{ -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{4},\ 1 < |z| < \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \right\}.$

15.15. $w = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} z^2, \quad G = \left\{ -\dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{\pi}{6},\ 1 < |z| < 4 \right\}.$

15.16. $w = (\sqrt{3} - i) z^3, \quad G = \left\{ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{3},\ 2 < |z| < \sqrt[3]{9} \right\}.$

15.17. $w = \dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}} z^3,$
$G = \left\{ -\dfrac{\pi}{12} < \arg z < \dfrac{\pi}{4},\ \sqrt{2} < |z| < 2 \right\}.$

15.18. $w = \sqrt{2}(-1+i) z^3,$
$G = \left\{ \dfrac{\pi}{12} < \arg\ z < \dfrac{\pi}{3},\ 1 < |z| < 3 \right\}.$

15.19. $w = (3 - \sqrt{3} i) z^2,$
$G = \left\{ -\dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{\pi}{6},\ \sqrt{3} < |z| < 2 \right\}.$

15.20. $w = \sqrt{6}(iz)^3,$
$G = \left\{ -\dfrac{\pi}{12} < \arg z < \dfrac{\pi}{6},\ \sqrt{6} < |z| < 3 \right\}.$

15.21. $w = (1 - i) z^3,$
$G = \left\{ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < -\dfrac{\pi}{6},\ \sqrt{2} < |z| < 3 \right\}.$

15.22. $w = \dfrac{1+i}{4} z^2, \quad G = \left\{ \dfrac{\pi}{12} < \arg z < \dfrac{\pi}{3},\ 1 < |z| < 3 \right\}.$

15.23. $w = (\sqrt{6} - \sqrt{2} i) z^2,$
$G = \left\{ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} < |z| < 2 \right\}.$

15.24. $w = 6(-1+i) z^4,$
$G = \left\{ -\dfrac{\pi}{6} < \arg z < -\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} < |z| < 1 \right\}.$

15.25. $w = -(\sqrt{3} + i) z^2,\ G = \left\{ \dfrac{\pi}{12} < \arg z < \dfrac{\pi}{3},\ 1 < |z| < 2 \right\}.$

Задание 16. Найти область H, в которую функция $w = \dfrac{1}{z}$ отображает область G. Нарисовать обе области.

16.1 $G = \{1 < \mathrm{Im} z < 2\}.$

16.2 $G = \{|\mathrm{Re} z - \mathrm{Im} z| < 1\}.$

16.3. $G = \{|z - i| > 1,\ |z - 2i| < 2\}.$

16.4. $G = \{0 < \mathrm{Re} z < 2\}.$

16.5. $G = \left\{ \left| z - \dfrac{3}{2} \right| > \dfrac{3}{2},\ |z - 2| < 2 \right\}.$

16.6. $G = \{1 < \mathrm{Im} z - \mathrm{Re} z < 2\}.$

16.7. $G = \{-2 < \mathrm{Im}z < 0\}$.
16.8. $G = \{0 < \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z < 2\}$.
16.9. $G = \{0 < \mathrm{Re}z - \mathrm{Im}z < 1\}$.
16.10. $G = \{-1 < \mathrm{Im}z < 0\}$.
16.11 $G = \{|z-1| > 1,\ |z-2| > 2\}$.
16.12. $G = \{1 < \mathrm{Re}z - \mathrm{Im}z < 2\}$.
16.13. $G = \{|z+i| > 1,\ |z+2i| < 2\}$.
16.14. $G = \{-1 < \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z < 0\}$.
16.15. $G = \{-3 < \mathrm{Re}z < -1\}$.
16.16. $G = \{|z+2| > 1,\ |z+2| < 2\}$.
16.17. $G = \{-3 < \mathrm{Im}z < 0\}$.
16.18. $G = \{0 < \mathrm{Re}z - \mathrm{Im}z < 2\}$.
16.19. $G = \{1 < \mathrm{Re}z < 3\}$.
16.20. $G = \left\{\left|z + \dfrac{3}{2}\right| > 1,\ |z+2| < 2\right\}$.
16.21. $G = \{0 < \mathrm{Im}z < 2\}$.
16.22. $G = \{-2 < \mathrm{Re}z - \mathrm{Im}z < 0\}$.
16.23. $G = \{-1 < \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z < 1\}$.
16.24. $G = \left\{\left|z + \dfrac{3}{2}\right| > 1,\ |z+2| < 2\right\}$.
16.25. $G = \{-1 < \mathrm{Re}z < 2\}$.

Задание 17. На плоскости $w = u + iv$ найти область, в которую функция $w = f(z)$ отображает область G плоскости $z = x + iy$. Нарисовать обе области.

17.1. $w = \cos z$, $G = \left\{0 < \mathrm{Re}\, z < \dfrac{\pi}{2},\ \mathrm{Im}\, z > 0\right\}$.
17.2. $w = \ln z$, $G = \{2 < |z| < 4,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$.
17.3. $w = \mathrm{sh}\ z$, $G = \left\{\mathrm{Re}\, z < 0,\ |\mathrm{Im}\, z| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
17.4. $w = \mathrm{ch}\ z$, $G = \{\mathrm{Re}\, z > 0,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < \pi\}$.
17.5. $w = e^z$, $G = \left\{0 < \mathrm{Re}\, z < 1,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
17.6. $w = \sin z$, $G = \left\{0 < \mathrm{Re}\, z < \dfrac{\pi}{2},\ \mathrm{Im}\, z < 0\right\}$.
17.7. $w = \cos z$, $G = \left\{\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\, z < \pi,\ \mathrm{Im}\, z > \ln 2\right\}$.
17.8. $w = \mathrm{sh}\ z$, $G = \left\{0 < \mathrm{Re}\, z < \ln 3,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
17.9. $w = \ln z$, $G = \{1 < |z| < e,\ 0 < \mathrm{Re}\, z < \mathrm{Im}\, z\}$.
17.10. $w = \mathrm{ch}\ z$, $G = \left\{0 < \mathrm{Re}\, z < \ln 5,\ -\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\, z < 0\right\}$.

17.11. $w = e^z,\quad G = \{\ln 4 < \operatorname{Re} z < \ln 9,\ 2\pi < \operatorname{Im} z < 3\pi\}$.

17.12. $w = \sin z,\quad G = \left\{\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \pi,\ \operatorname{Im} z > \ln 2\right\}$.

17.13. $w = \cos z,\quad G = \left\{\frac{3\pi}{2} < \operatorname{Re} z < 2\pi,\ \operatorname{Im} z > \ln 3\right\}$.

17.14. $w = \ln z,\quad G = \left\{1 < |\,z| < 4, \frac{\operatorname{Re} z}{\sqrt{3}} < \operatorname{Im} z < \sqrt{3}\operatorname{Re} z\right\}$.

17.15. $w = \operatorname{sh} z,\ G = \left\{\ln 3 < \operatorname{Re} z < \ln 5,\ \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \pi\right\}$.

17.16. $w = \operatorname{ch} z,\quad G = \left\{\operatorname{Re} z < 0,\ \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \pi\right\}$

17.17. $w = e^z;\quad G = \{\ln 2 < \operatorname{Re} z < \ln 5,\ \pi < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.

17.18. $w = \sin z,\quad G = \left\{-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z > \ln 3\right\}$.

17.19. $w = \ln z,\quad G = \{|\operatorname{Re} z| < \operatorname{Im} z,\ |z| < 2\}$.

17.20. $w = e^z,\quad G = \{\ln 2 < \operatorname{Re} z < \ln 6,\ -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$.

17.21. $w = \operatorname{sh} z,\ G = \left\{0 < \operatorname{Re} z < \ln 2,\ \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \pi\right\}$.

17.22. $w = \cos z,\quad G = \left\{-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < 0,\ \ln 2 < \operatorname{Im} z < \ln 4\right\}$.

17.23. $w = \operatorname{ch} z,\ G = \left\{\operatorname{Re} z > \ln 3, \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \pi\right\}$.

17.24. $w = \sin z,\quad G = \left\{\frac{3\pi}{2} < \operatorname{Re} z < 2\pi,\ -\ln 5 < \operatorname{Im} z < 0\right\}$.

17.25. $w = e^z,\quad G = \left\{-\ln 4 < \operatorname{Re} z < -\ln 2,\ \pi < \operatorname{Im} z < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Задание 18. Функцию $f(z)$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки z_0. Указать круг сходимости ряда.

18.1. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)(z^2-4)},\quad z_0 = 0.$

18.2. $f(z) = \dfrac{z}{z^2-3z+2},\quad z_0 = -1.$

18.3. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z},\quad z_0 = 1.$

18.4. $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-4},\quad z_0 = 4.$

18.5. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-9)(z^2-1)},\quad z_0 = 0.$

18.6. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2},\quad z_0 = 3.$

18.7. $f(z) = \dfrac{z}{z^2-1},\quad z_0 = -3.$

18.8. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+5)}, \quad z_0 = 0.$

18.9. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+8z+15}, \quad z_0 = -1.$

18.10. $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2-2z}, \quad z_0 = 4.$

18.11. $f(z) = \dfrac{2z}{z^2+6z+8}, \quad z_0 = 1.$

18.12. $f(z) = \dfrac{z}{z^2-9}, \quad z_0 = -1.$

18.13. $f(z) = \dfrac{1}{z^2-z-2}, \quad z_0 = -3.$

18.14. $f(z) = \dfrac{z}{z^2-4}, \quad z_0 = 5.$

18.15. $f(z) = \dfrac{2}{z^2+4z+3}, \quad z_0 = 1.$

18.16. $f(z) = \dfrac{z}{z^2+2z-15}, \quad z_0 = -1.$

18.17. $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-16}, \quad z_0 = -1.$

18.18. $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-2z-3}, \quad z_0 = -5.$

18.19. $f(z) = \dfrac{z}{z^2-16}, \quad z_0 = 2.$

18.20. $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2+6z+5}, \quad z_0 = 3.$

18.21. $f(z) = \dfrac{z^2+2}{(z^2+4)(z^2+6)}, \quad z_0 = 0.$

18.22. $f(z) = \dfrac{z+6}{z^2-6z+8}, \quad z_0 = -2.$

18.23. $f(z) = \dfrac{z}{z^2-25}, \quad z_0 = -1.$

18.24. $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-8z+12}, \quad z_0 = 3.$

18.25. $f(z) = \dfrac{z+3}{z^2+6z+5}, \quad z_0 = -2.$

Задание 19. Разложить заданную функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

19.1. а) $\dfrac{5z^3+4z^2-15z+2}{(z+1)^2(z-1)^2}, \quad z_0 = -1;$

б) $\dfrac{-z^3-11z^2+39z-30}{(z-1)^2(z^2-4)}, \quad z_0 = 1;$

в) $(4z^2+4z+3)e^{\frac{1}{2z+4}}, \quad z_0=-2.$

19.2. а) $\dfrac{3z^3+10z^2-5z}{(z-1)^2(z+1)^2}, \quad z_0=1;$

б) $\dfrac{2z^3-z^2-20z+24}{(z-2)^2z(z-3)}, \quad z_0=2;$

в) $(3z^2+2z+1)e^{\frac{1}{3z+9}}, \ z_0=-3.$

19.3. а) $\dfrac{-2z^3-10z^2-13z}{(z+2)^2(z+3)^2}, \ z_0=-2;$

б) $\dfrac{-17z^2+41z-30}{(z-1)^2(z+2)(z-3)}, \ z_0=1;$

в) $(7z^2-z-4)e^{-\frac{1}{z-2}}, \ z_0=2.$

19.4. а) $\dfrac{5z^3-35z^2+75z-46}{(z-3)^2(z-2)^2}, \ z_0=3;$

б) $\dfrac{4z^3-18z^2+23z-7}{(z-1)^2(z-2)(z-3)}, \ z_0=1;$

в) $(6z^2-2z+3)e^{\frac{1}{-z+5}}, \ z_0=5.$

19.5. а) $\dfrac{3z^2-9z+8}{(z-1)^2(z-2)^2}, \ z_0=1;$

б) $\dfrac{5z^3-28z^2+49z-28}{(z-2)^2(z-1)(z-3)}, \ z_0=2;$

в) $(z^2-z+3)e^{\frac{1}{z-2}}, \ z_0=2.$

19.6. а) $\dfrac{-z^2-z+4}{(z-2)^2(z-1)^2}, \ z_0=2;$

б) $\dfrac{4z^3-36z^2+105z-97}{(z-3)^2(z-1)(z-4)}, \ z_0=3;$

в) $(z^2+z-4)e^{\frac{1}{z-3}}, \ z_0=3.$

19.7. а) $\dfrac{2z^3-11z^2+19z-8}{(z-2)^2(z-3)^2}, \ z_0=2;$

б) $\dfrac{-4z^3+11z^2-4z-7}{(z-1)^2(z+1)(z-2)}, \ z_0=1;$

в) $(2z^2-z-4)e^{\frac{1}{2(z+3)}}, \ z_0=-3.$

19.8. а) $\dfrac{-4z^3+9z^2+9z+14}{(z-2)^2(z+1)^2}, \ z_0=2;$

б) $\dfrac{2z^3-z^2-5z+2}{(z-1)^2z(z-2)}, \ z_0=1;$

в) $(-z^2+z-1)e^{\frac{1}{-2z-2}},\ z_0=-1.$

19.9. а) $\dfrac{-6z^3+32z^2-56z+33}{(z-1)^2(z-2)^2},\ z_0=1;$

б) $\dfrac{-2z^3+12z^2-8z-4}{(z-2)^2z(z+1)},\ z_0=2;$

в) $(z^2+3z+4)e^{\frac{1}{-z-4}},\ z_0=-4.$

19.9. а) $\dfrac{-6z^3+32z^2-56z+33}{(z-1)^2(z-2)^2},\ z_0=1;$

б) $\dfrac{-2z^3+12z^2-8z-4}{(z-2)^2z(z+1)},\ z_0=2;$

в) $(z^2+3z+4)e^{\frac{1}{-z-4}},\ z_0=-4.$

19.10. а) $\dfrac{6z^3-22z^2+26z-9}{(z-1)^2(z-2)^2},\ z_0=1;$

б) $\dfrac{3z^3-11z^2+15z-8}{(z-2)^2z(z-1)},\ z_0=2;$

в) $(z^2+z-5)e^{\frac{1}{-2z-8}},\ z_0=-4.$

19.11. а) $\dfrac{6z^3-2z^2-10z+7}{(z+1)^2(z-2)^2},\ z_0=-1;$

б) $\dfrac{z^3-6z^2+8z-4}{(z-1)^2z(z-2)},\ z_0=1;$

в) $(z^2-2z+1)e^{\frac{1}{z+2}},\ z_0=-2.$

19.12. а) $\dfrac{4z^3+14z^2-2}{(z+3)^2(z-1)^2},\ z_0=-3;$

б) $\dfrac{8z^2-15z+1}{(z-1)^2(z+1)(z-2)},\ z_0=1;$

в) $(2z^2-2z-1)e^{\frac{1}{z+2}},\ z_0=-2.$

19.13. а) $\dfrac{-6z^2+40}{(z+2)^2(z-2)^2},\ z_0=-2;$

б) $\dfrac{11z^2-25z+18}{(z-2)^2(z^2-1)},\ z_0=2;$

в) $(2z^2+3)e^{\frac{1}{z-3}},\ z_0=3.$

19.14. а) $\dfrac{-z^2-2z+11}{(z-1)^2(z-3)^2},\ z_0=1;$

б) $\dfrac{z^2-5z+2}{(z-2)^2(z-3)(z-1)},\ z_0=2;$

в) $(2z^2+z-3)e^{\frac{1}{2z-4}}$, $z_0=2$.

19.15. а) $\dfrac{-4z^3+6z^2-4z+14}{(z+1)^2(z-1)^2}$, $z_0=-1$;

б) $\dfrac{17z^2-18z-8}{(z-2)^2z(z+1)}$, $z_0=2$;

в) $(3z^2+18z+20)e^{\frac{1}{-3z-12}}$, $z_0=-4$.

19.16. а) $\dfrac{3z^3+z^2-7z+4}{z^2(z-1)^2}$, $z_0=0$;

б) $\dfrac{13z^2-58z+69}{(z-1)^2(z-3)(z-4)}$, $z_0=1$;

в) $(2z^2-2z)e^{\frac{1}{2z+4}}$, $z_0=-2$.

19.17. а) $\dfrac{5z^3-4z^2+5z+2}{(z+1)^2(z-1)^2}$, $z_0=-1$;

б) $\dfrac{4z^3-24z^2+50z-38}{(z-1)^2(z-2)(z-3)}$, $z_0=1$;

в) $(3z^2+z)e^{-\frac{1}{2z+2}}$, $z_0=-1$.

19.18. а) $\dfrac{2z^3-8z^2-15z+100}{(z-5)^2z^2}$, $z_0=5$;

б) $\dfrac{-10z^2+16z+10}{(z-1)^2(z-3)(z+1)}$, $z_0=1$;

в) $(z^2+2z+6)e^{-\frac{1}{4z+4}}$, $z_0=-1$.

19.19. а) $\dfrac{-z^3+2z^2+z+7}{(z+1)^2(z-2)^2}$, $z_0=-1$;

б) $\dfrac{-10z+18}{(z-1)^2(z-2)(z-3)}$, $z_0=1$;

в) $(2z^2-z+2)e^{\frac{1}{z+2}}$, $z_0=-2$.

19.20. а) $\dfrac{-2z^2+4z+22}{(z+1)^2(z-3)^2}$, $z_0=-1$;

б) $\dfrac{2z^3-2z^2+6z+2}{(z-1)^2z(z+1)}$, $z_0=1$;

в) $(2z^2-2z-1)e^{\frac{1}{2z-6}}$, $z_0=3$.

19.21. а) $\dfrac{-2z^2+8z+2}{(z+1)^2(z-1)^2}$, $z_0=-1$;

б) $\dfrac{z^3+7z-16}{(z-1)^2(z+1)(z-2)}$, $z_0=1$;

в) $(z^2-2)e^{\frac{1}{z-2}},\ z_0=2.$

19.22. а) $\dfrac{7z^2-20z+15}{(z-1)^2(z-2)^2},\ z_0=1;$

б) $\dfrac{13z^2-58z+69}{(z-1)^2(z-3)(z-4)},\ z_0=1;$

в) $(-z^2+3z+2)e^{\frac{1}{2z+2}},\ z_0=-1.$

19.23. а) $\dfrac{3z^3-21z^2+39z+9}{(z-3)^2z^2},\ z_0=3;$

б) $\dfrac{5z^2-15z+16}{(z-2)^2(z^2-1)},\ z_0=2;$

в) $(-z^2-z+6)e^{\frac{1}{2z-2}},\ z_0=1.$

19.24. а) $\dfrac{4z^3+4z^2-4z+4}{(z+1)^2(z-1)^2},\ z_0=-1;$

б) $\dfrac{6z^2-11z-7}{(z-1)^2(z-2)(z+3)},\ z_0=1;$

в)$(-z^2-2z+3)e^{\frac{1}{-2z+2}},\ z_0=1.$

19.25. а) $\dfrac{-2z^2+16z-18}{(z-1)^2(z-3)^2};$

б) $\dfrac{13z^2-34z+24}{(z-2)^2(z-1)(z+2)},\ z_0=2;$

в)$(-2z^2+3z+5)e^{\frac{1}{z+3}},\ z_0=-3.$

Задание 20. Найти вычеты функций в указанных точках.

20.1. а) $\dfrac{z+4}{z^2(z^2+1)},\quad z=0, z=i;$

б) $(z-2)^2e^{\frac{1}{z}},\quad z=0.$

20.2. а) $\dfrac{z+3}{(z+1)^2(z^2+4)},\quad z=-1, z=-2i;$

б) $(z+4)^2\sin\dfrac{2}{z},\quad z=0.$

20.3. а) $\dfrac{z^2+48}{(z-2)^2(z^2+9)},\quad z=2, z=3i;$

б) $z^2(z^2+1)\sin\dfrac{3}{z},\ z=0.$

20.4. а) $\dfrac{z^2-1}{z^4+4z^2},\ z=0, z=-2i;$

б) $(z-3)^3\cos\dfrac{1}{z}\quad z=0.$

20.5. а) $\dfrac{4z}{(z+3)^2(z^2+25)},\quad z=-3, z=-5i;$

б) $z^2e^{\frac{1}{z-1}},\ z=1.$

20.6. а) $\dfrac{z^2+33}{(z-1)^2(z^2+16)},\ z=1, z=4i;$

б) $z(z^2+1)\cos\dfrac{2}{z},\quad z=0.$

20.7. а) $\dfrac{z-3}{(z+1)^2(z^2+1)},\ z=-1, z=-i;$

б) $z^2\sin\dfrac{1}{z+2},\quad z=-2.$

20.8. а) $\dfrac{-z^2+17}{(z+2)^2(z^2+9)},\ z=-2, z=3i;$

б) $z^2\operatorname{ch}\dfrac{2}{z-1},\ z=1.$

20.9. а) $\dfrac{-2z+18}{(z+4)^2(z^2+36)},\ z=-4, z=-6i;$

б) $(z-2)^2\operatorname{sh}\dfrac{3}{z},\quad z=0.$

20.10. а) $\dfrac{3z+22}{(z+3)^2(z^2+4)},\quad z=-3, z=-2i;$

б) $(z+3)^2\operatorname{sh}\dfrac{2}{z+1},\quad z=-1.$

20.11. а) $\dfrac{4z+13}{(z-3)^2(z^2+16)},\quad z=3, z=4i;$

б) $(z^2+1)e^{\frac{1}{z+1}},\quad z=-1.$

20.12. а) $\dfrac{3z-4}{(z+4)^2(z^2+16)},\quad z=-4, z=-4i;$

б) $(z+1)^2\sin\dfrac{4}{z+3},\quad z=-3.$

20.13. а) $\dfrac{5z+3}{(z^2+1)z^2},\quad z=0, z=i;$

б) $(z-2)^2\operatorname{sh}\dfrac{2i}{z-1},\quad z=1.$

20.14. а) $\dfrac{z^2-9}{(z+2)^2(z^2+1)},\quad z=-2, z=-i;$

б) $\dfrac{z+2}{z-1}e^{\frac{2}{z-1}},\quad z=1.$

20.15. а) $\dfrac{z^2+16}{(z+2)^2(z^2+36)}$, $z=-2, z=6i$;

б) $\dfrac{z+1}{z-2}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z-2}$, $z=2$.

20.16. а) $\dfrac{3z+23}{(z-1)^2(z^2+25)}$, $z=1, z=5i$;

б) $(z+3)^2\cos\dfrac{3}{z-2}$, $z=2$.

20.17. а) $\dfrac{z+21}{(z+4)^2(z^2+1)}$, $z=-4, z=i$;

б) $\dfrac{2z+8}{z+1}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z+1}$, $z=-1$.

20.18. а) $\dfrac{2z+16}{(z-2)^2(z^2+36)}$, $z=2, z=-6i$;

б) $\dfrac{(z+3)^2}{z+1}\sin\frac{1}{z+1}$, $z=-1$.

20.19. а) $\dfrac{2z-12}{(z+3)^2(z^2+9)}$, $z=-3, z=-3i$;

б) $\dfrac{3z^2+2}{z+2}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z+2}$, $z=-2$.

20.20. а) $\dfrac{4z}{(z+2)^2(z^2+4)}$, $z=-2, z=2i$;

б) $\dfrac{4z-5}{z-3}e^{\frac{2}{z-3}}$, $z=3$.

20.21. а) $\dfrac{3z+13}{(z^2+9)(z-4)^2}$, $z=3i, z=4$;

б) $\dfrac{6z+2}{z+3}e^{\frac{1}{z+3}}$, $z=-3$.

20.22 а) $\dfrac{z^2-3z}{(z+2)^2(z^2+1)}$, $z=-2, z=i$;

б) $\dfrac{z^2+3}{z+5}\cos\dfrac{2}{z+5}$, $z=-5$.

20.23. а) $\dfrac{4z-9}{(z^2+9)(z+4)^2}$, $z=3i, z=-4$;

б) $(z^2+4)\operatorname{ch}\dfrac{3}{z+2}$, $z=-2$.

20.24. а) $\dfrac{z+4}{(z-1)^2(z^2+9)}$, $z=1, z=-3i$;

б) $z^3\sin\dfrac{1}{z+3}$, $z=-3$.

20.25. а) $\dfrac{4z-6}{(z^2+4)(z+6)^2}$, $z=2i, z=-6$;

б) $(z^2+6)\operatorname{sh}\dfrac{1}{z+1}$, $z=-1$.

Задание 21. Вычислить с помощью вычетов интегралы по замкнутому контуру C, обходимому в положительном направлении.

21.1. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z^2+1)(z-2)^2}$,

C - окружность $|z-i-1|=2$;

б) $\displaystyle\int\limits_C (4z^3-7z^2+21z-1)e^{\frac{3}{z+1}}\,dz$,

C - окружность $|z+2|=4$;

в) $\displaystyle\int\limits_C \frac{2^z(4+z)}{\sin\pi z}dz$,

C - квадрат с вершинами $\pm\dfrac{i}{2}$, $\pm\dfrac{1}{2}$.

21.2. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z+1)^2(z^2-z-6)}$,

C - прямоугольник с вершинами $\pm i$, $-3\pm i$;

б) $\displaystyle\int\limits_C (2z^3-3z^2+2z+3)\sin\frac{3}{z-1}\,dz$,

C – окружность $|z+1|=3$.

в) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(2+z)}{(z+1)\sin\frac{\pi z}{2}}dz$,

C - окружность $|z-2|=\dfrac{1}{2}$.

21.3. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z^2+4)(z-i)^2}$,

C – параллелограмм с вершинами $-2+5i$, $\pm2+i$, $2-3i$;

б) $\displaystyle\int\limits_C (2z^3-10z^2+12z-11)\operatorname{ch}\frac{3}{z-2}\,dz$,

C – окружность $|z-1|=3$;

в) $\displaystyle\int\limits_C \frac{z^2+z+1}{(z-i)\operatorname{tg} z}dz$,

C – окружность $|z-1|=\dfrac{5}{4}$.

21.4. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)(z-i)}$,

C – квадрат с вершинами $-1+2i,\ -1-i,\ 2-i,\ 2+2i$;

б) $\displaystyle\int\limits_C (2z^3+2z^2-3z+2)\,\mathrm{sh}\,\frac{2}{z+1}\,dz$,

C – окружность$|z|=4$;

в) $\displaystyle\int\limits_C \frac{\mathrm{ctg}\ z}{(z^2+9)(z+2)}dz$,

C – ромб с вершинами $\pm 1,\ \pm 2i$.

21.5 а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z^2-5z+6)(z-1-2i)^2}$,

C – окружность$|z+1-i|=4$;

б) $\displaystyle\int\limits_C (2z^3-10z^2+22z-21)\,\mathrm{sh}\,\frac{3}{z-2}\,dz$,

C - окружность$|z+2|=6$;

в) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(z-8)}{(2^z-1)(z^2-16)}dz$,

- прямоугольник с вершинами $-3\pm i,\ 1\pm i$.

21.6. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z^2+1)(z+1)(z-i)}$,

C – окружность $|z-1|=1,5$;

б) $\displaystyle\int\limits_C (4z^3-13z^2+16z-9)e^{\frac{3}{z-1}}\,dz$,

C – окружность $|z-2|=2$;

в) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(z+2)^2}{(\sqrt[3]{1+z}-1)(z+5)}dz$,

C – прямоугольник с вершинами $-2\pm i,\ 3\pm i$.

21.7. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{zdz}{(z^4-16)}$

C – треугольник с вершинами $-3-i, -3+7i,\ 5-i$;

б) $\int\limits_C (3z^3 + 11z^2 + 9z + 4)\sin\frac{2}{z+1}\,dz,$

C – окружность$|z| = 5$;

в) $\int\limits_C \frac{(z^2+6)}{(z+2)\ln(1+4z)}dz,$

C – окружность$|z - i| = 2$.

21.8. а) $\int\limits_C \frac{dz}{(z-2i)^2(z^2-z-2)},$

C – окружность$|z - i - 1| = 1,5$;

б) $\int\limits_C (6z^3 - 33z^2 + 62z - 36)\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{z-2}\,dz,$

C – окружность$|z + 4| = 8$;

в) $\int\limits_C \frac{z^2}{(z+9)(e^{5(z-1)}-1)}dz,$

C – ромб с вершинами $-1,\ 3, 1 \pm i$.

21.9. а) $\int\limits_C \frac{dz}{(z^2+9)(z-1)^2}, 4$

C – окружность $|z - i| = 3$;

б) $\int\limits_C (3z^3 - 17z^2 + 27z - 9)\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{2z-2}\,dz,$

C – окружность $|z + 2| = 4$;

в) $\int\limits_C \frac{(z^3+1)}{(z-1)\cos\pi z}dz,$

C – квадрат с вершинами $\pm i,\ 2 \pm i$.

21.10. а) $\int\limits_C \frac{dz}{(z^2+4)(z-2i)(z-1)},$

C – окружность$|z - i| = 2$;

б) $\int\limits_C (2z^3 - 10z^2 + 9z - 16)\cos\frac{3}{z-2}\,dz,$

C – прямоугольник с вершинами $1 \pm i,\ 5 \pm i$;

в) $\int\limits_C \frac{(4z+3)dz}{(z^2+1)\ln(2-z)},$

C – треугольник с вершинами $0, 1 \pm i$.

21.11. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z^2+4)(z-i)^2}$,

C – окружность $|z-i|=2$;

б) $\displaystyle\int\limits_C (3z^3-17z^2+33z-20)e^{-\dfrac{2}{z-2}}\,dz$,

C – окружность$|z|=4$;

в) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(z+2)\operatorname{tg}\pi z}{(z^2+1)}dz$,

C – треугольник с вершинами $0,\ 0\pm i$.

21.12. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z-1)^2(z+i)(z-2i)}$,

C – окружность $|z|=\dfrac{3}{2}$;

б) $\displaystyle\int\limits_C (2z^3-8z^2+18z-7)\sin\frac{1}{2-z}\,dz$,

C – окружность$|z-1|=3$;

в) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(2+z)}{(z^2+4)\ln(1+\sin z)}dz$,

C – квадрат с вершинами $\pm 1,\ \pm i$.

21.13. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z-3)^2(z-i)(z-2i)}$,

C – треугольник с вершинами $-2+3i,\ 4-i,\ 4+3i$;

б) $\displaystyle\int\limits_C (4z^3-10z^2+7z-8)\operatorname{ch}\frac{2}{z-1}\,dz$,

C – окружность $|z-2|=3$;

в) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(z^2+2z+3)dz}{(z+3)(e^z a-e)}$,

C – окружность $|z-1|=1$.

21.14. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z^2-4)(z-i-1)^2}$,

C – окружность$|z-2-i|=2$;

б) $\displaystyle\int_C (z^3+3z^2-11z-27)\operatorname{sh}\frac{1}{3-z}\,dz,$

C – окружность $|z-1|=3$;

в) $\displaystyle\int_C \frac{(z^2+z+3)}{(z^2+1)\arcsin(z-3)}dz,$

C – квадрат с вершинами $2,\ 4,\ \ 3\pm i$.

21.15. а) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z-i+2)^2},$

C – окружность $|z-3i|=3$;

б) $\displaystyle\int_C (4z^3+33z^2+91z+82)\cos\frac{1}{z+3}\,dz,$

C – окружность $|z+2|=2$;

в) $\displaystyle\int_C \frac{(z^2+3)dz}{(z^2+2z+5)\cos\dfrac{\pi z}{2}},$

C – ромб с вершинами $0,\ 2,\ 1\pm 2i$.

21.16. а) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^2-1)(z-1+i)^2},$

C – окружность $|z-2|=2$;

б) $\displaystyle\int_C (2z^3+16z^2+39z+32)e^{-\dfrac{1}{z+2}}\,dz,$

C – окружность $|z+3|=12$;

в) $\displaystyle\int_C \frac{(z^2+3)dz}{(z^2+4z+6)\ln(1+\operatorname{tg}2z)},$

C – ромб с вершинами $\pm 2i,\ \pm\dfrac{1}{2}$.

21.17. а) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z^2-1)(z-2i)^2},$

C – окружность $|z-i+1|=2$;

б) $\displaystyle\int_C (z^3-6z^2+5z-1)\sin\frac{2}{3-z}\,dz,$

C – окружность $|z-5|=3$;

в) $\int\limits_C \dfrac{(z+1)dz}{(z^2-4)(e^{\sin z}-1)}$,

C – треугольник с вершинами$1-i,\ 1+2i,\ -1-i$.

21.18. а) $\int\limits_C \dfrac{dz}{(z-2-i)^2(z-i)(z-1)}$,

C – параллелограмм с вершинами $1-i,\ 2+2i,\ 5+2i,\ 2-i$;

б) $\int\limits_C (3z^3+7z^2+7z-1)\operatorname{ch}\dfrac{2}{z+1}\,dz$,

C – окружность$|z-3|=6$;

в) $\int\limits_C \dfrac{(z^2+3z+4)dz}{(z+1)\arcsin(z-1)}$,

C – окружность $|z-1-i|=2$.

21.19. а) $\int\limits_C \dfrac{dz}{(z-3i)^2(z-1-2i)z}$,

C – прямоугольник с вершинами $-1+i,\ -1+4i,\ 2+4i,\ 2+i$;

б) $\int\limits_C (4z^3-31z^2+80z-71)\operatorname{sh}\dfrac{2}{z-3}\,dz$,

C – окружность
$|z-1|=5$;

в) $\int\limits_C \dfrac{(z+3)\operatorname{ctg}2z}{z^2+2z+5}dz$,

C – окружность $|z|=1,5$.

21.20. а) $\int\limits_C \dfrac{dz}{(z+1+i)^2(z^2+1)}$,

C – прямоугольник с вершинами $-2,\ 1,\ 1-2i,\ -2-2i$;

б) $\int\limits_C (3z^3+7z^2+9z+3)\cos\dfrac{2}{z+1}\,dz$,

C – окружность $|z|=6$;

в) $\int\limits_C \dfrac{(4z^2-6)dz}{z(9^{z-2}-1)}$,

C – окружность $|z-2-i|=2$.

21.21. а) $\int\limits_C \dfrac{dz}{(z-2i)^2(z^2+2z)}$,

C – окружность $\left|z-\frac{3}{2}i\right|=2$;

б) $\displaystyle\int_C (z^3-7z^2+16z-31)e^{-\frac{2}{z-3}}\,dz$,

C – окружность $|z-1|=3$;

в) $\displaystyle\int_C \frac{(z^2+z+2)dz}{(z+4)\operatorname{arctg}(z+1)}$,

C – параллелограмм с вершинами $-3-i,\ -i,\ 2+i,\ -1+i$.

21.22. а) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2(z-3i)(z-1-i)}$,

C – треугольник с вершинами $\pm 2-i,\ 2+3i$;

б) $\displaystyle\int_C (3z^3+22z^2+50z+31)\sin\frac{2}{z+3}dz$,

C – окружность $|z+1|=4$;

в) $\displaystyle\int_C \frac{(4z^2+z-1)dz}{(z+5)\ln(2+z)}$,

C – окружность $|z+1|=3$.

21.23. а) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z+2-i)^2(z-1-i)(z-i)}$,

C – параллелограмм с вершинами $-2,\ 1,\ 2i,\ -3+2i$;

б) $\displaystyle\int_C (z^3+3z^2-z-10)\operatorname{ch}\frac{3}{z+2}\,dz$,

C – окружность $|z-4|=8$;

в) $\displaystyle\int_C \frac{(z^2-z+4)dz}{(z+1)(e^{2(z-3)}-1)}$,

C – окружность $|z-2|=2$.

21.24. а) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-1-2i)^2(z-i)(z+1)}$,

C – окружность $|z-2-2i|=3$;

б) $\displaystyle\int_C (2z^3-8z^2+13z-12)\operatorname{sh}\frac{1}{2-z}\,dz$,

C – окружность $|z+1| = 6$;

в) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(z^2+8z+15)dz}{(z^2-5)\sin\frac{\pi z}{4}}$,

C – квадрат с вершинами $2-2i,\ 2+i,\ -1+i,\ -1-2i$.

21.25. а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z+2-2i)^2(z^2+2z)}$,

C – окружность $|z+2-i| = 2$;

б) $\displaystyle\int\limits_C (z^3+5z^2-4z-4)\cos\frac{2}{z+3}\,dz$,

C – окружность $|z-1| = 5$;

в) $\displaystyle\int\limits_C \frac{(z+5)dz}{(z^2+2z+6)\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}}$,

C – параллелограмм с вершинами $\pm i,\ -1+i,\ 1-i$.

Задание 22. Вычислить с помощью вычетов определенные интегралы.

22.1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x^2+2x-4}{x^4+13x^2+36}\,dx$.

22.2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-4x+5}{x^4+37x^2+36}\,dx$.

22.3. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^2+3x+3}{x^4+10x^2+9}\,dx$.

22.4. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-5x+40}{x^4+40x^2+144}\,dx$.

22.5. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2-x+5}{x^4+29x^2+100}\,dx$.

22.6. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+7x+12}{x^4+45x^2+324}\,dx$.

22.7. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{5x^2-2x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

22.8. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2+x+3}{x^4+15x^2+36}\,dx$.

22.9. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+6x+4}{x^4+17x^2+16}\,dx$.

22.10. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x^2+4x+4}{x^4+10x^2+16}\,dx$.

22.11. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2-x+4}{x^4+25x^2+144}\,dx$.

22.12. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+6x+4}{x^4+20x^2+36}\,dx$

22.13. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^2-3x+4}{x^4+20x^2+64}\,dx.$

22.14. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+6x+10}{x^4+25x^2+100}\,dx.$

22.15. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x^2+2x+5}{x^4+26x^2+25}\,dx.$

22.16. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+11x+7}{x^4+30x^2+81}\,dx.$

22.17. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2+x+3}{4x^4+5x^2+1}\,dx.$

22.18. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2+3x+5}{x^4+41x^2+400}\,dx.$

22.19. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x^2+7x+1}{4x^4+17x^2+4}\,dx.$

22.20. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x^2-x-6}{x^4+82x^2+81}\,dx.$

22.21. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3x+5}{x^4+34x^2+225}\,dx.$

22.22. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2+6x+3}{4x^4+37x^2+9}\,dx.$

22.23. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x^2+x+2}{36x^4+13x^2+1}\,dx.$

22.24. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{5x^2-x+1}{9x^4+10x^2+1}\,dx.$

22.25. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2+5x+1}{16x^4+17x^2+1}\,dx.$

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРОЧНЫХ РАБОТ

3.1. Варианты первого типа

1. Построить точки z и $\overline{z}$. Найти $|z|$, $|\overline{z}|$, $\arg z$, $\arg\overline{z}$.

2. Найти реальную и мнимую часть чисел, заданных выражениями.

3. Найти все комплексные корни уравнения.

4. Найти вещественные x и y такие, что выполняется данное равенство.

5. Написать такое квадратное уравнение, для которого число x_1 является корнем.

6. Нарисовать множество точек, удовлетворяющую заданным условиям.

Вариант 1.

1. $z = -2 + 3i$,

2. $a)$ $\dfrac{7-i}{2+i}$,

$b)$ $3i^{1171} - 2i^{128} + 5i^{34} - 6i^{5}$,

$c)$ $\dfrac{(1-i)^{10}(i-\sqrt{3})^{15}}{(\sqrt{3}+i)^7(1+\sqrt{3}i)^{15}}$,

3. $a)$ $2x^2 - 6x + 13 = 0$,

$b)$ $x^7 + 1 = 0$,

4. $5 + ixy = \overline{(x + y + 4i)}$,

5. $x_1 = 2 + i$,

6. $1 + \sin 12^\circ + i\cos 12^\circ$,

7. $\begin{cases} 3 \leqslant |z + 1 - i| \leqslant 4, \\ -\dfrac{\pi}{3} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Вариант 2.

1. $z = 3 - 2i$,

2. $a)$ $\dfrac{6+i}{2+i}$,

$b)$ $3i^{2131} - 2i^{141} + 7i^{12} - 8i^{6}$,

$c)$ $\dfrac{(1+i)^9(1+i\sqrt{3})^5}{(\sqrt{3}+i)^8(1+\sqrt{3})^5}$,

3. $a)$ $2x^2 + 4x + 11 = 0$,

$b)$ $x^7 - 1 = 0$,

4. $\overline{(3x - y + xyi)} = 3 + x - 2i$,

5. $x_1 = 1 + 2i$,

6. $1 + \sin 18^\circ + i\cos 18^\circ$,

7. $\begin{cases} 3 \leqslant |z + 1 - i| \leqslant 4, \\ -\dfrac{\pi}{3} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Вариант 3.

1. $z = -5 + 2i$,

2. $a)$ $\dfrac{12+10i}{1-2i}$,

$b)$ $3i^{1146} + 2i^{131} + 7i^{56} - 4i^{9}$,

Вариант 4.

1. $z = 11 + 7i$,

2. $a)$ $\dfrac{10+7i}{2-i}$,

$b)$ $3i^{1257} - 2i^{422} - 5i^{43} + 9i^{8}$,

Вариант 3.

2. *c*) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^8(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^9}$,

3. *a*) $3x^2+4x+12=0$,
b) $32x^5+1=0$,

4. $\overline{(7xy+3i)}=2x+y+5xi$,

5. $x_1=1-5i$,

6. $1-\sin 22^\circ+i\cos 22^\circ$,

7. $\begin{cases} 1\leqslant |z+2i|\leqslant |5i|, \\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant \arg z\leq 0. \end{cases}$

Вариант 4.

2. *c*) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^7(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^8(i-\sqrt{3})^{19}}$,

3. *a*) $2x^2+2x+17=0$,
b) $32x^5-1=0$,

4. $\overline{(3x+4y+xyi)}=1+2i$,

5. $x_1=5-i$,

6. $1-\sin 24^\circ+i\cos 24^\circ$,

7. $\begin{cases} 3\leqslant |z+2i|\leqslant |5i|, \\ -\dfrac{\pi}{3}\leqslant \arg z\leqslant \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

Вариант 5.

1. $z=-5-2i$,

2. *a*) $\dfrac{2+3i}{3-4i}$,
b) $6i^{1440}+5i^{107}-3i^{13}+2i^2$,
c) $\dfrac{(2+2i)^{12}(\sqrt{3}-i)^{16}}{(3-3\sqrt{3}i)^6(i+1)^7}$,

3. *a*) $3x^2+10x+15=0$,
b) $256x^4-1=0$,

4. $3xy-7i=\overline{(2y+x+6yi)}$,

5. $x_1=3+2i$,

6. $1+\cos 22^\circ-i\sin 22^\circ$,

7. $\begin{cases} |3i|\leqslant |z-2i|\leqslant |-9i|, \\ \dfrac{\pi}{6}\leqslant \arg z\leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Вариант 6.

1. $z=-7-3i$,

2. *a*) $\dfrac{2-3i}{4+5i}$,
b) $6i^{1248}+4i^{197}-3i^{67}+2i^6$,
c) $\dfrac{(2+2i)^{10}(\sqrt{3}-i)^4}{(3-3\sqrt{3}i)^6(i+1)^9}$,

3. *a*) $5x^2+4x+1=0$,
b) $256x^4+1=0$,

4. $3x-1+yi=\overline{(6xy+3i)}$,

5. $x_1=2+5i$,

6. $1+\cos 24^\circ+i\sin 24^\circ$,

7. $\begin{cases} |3i|\leqslant |z+2i|\leqslant |-9i|, \\ -\dfrac{\pi}{6}\leqslant \arg z\leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Вариант 7.

1. $z=-3+5i$,

2. *a*) $\dfrac{3-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}+3i}$,
b) $5i^{2913}+2i^{416}-3i^{26}+5i^3$,
c) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^9(\sqrt{12}-12i)^3}{(1-i)^{14}(\sqrt{27}+i\sqrt{27})^4}$,

3. *a*) $2x^2+4x+11=0$,
b) $x^3+125=0$,

4. $2x+y+xyi=\overline{(3+x+2i)}$,

5. $x_1=2-3i$,

Вариант 8.

1. $z=3+5i$,

2. *a*) $\dfrac{4-3i}{3+2i}$,
b) $7i^{1201}-5i^{403}-3i^{76}+8i^6$,
c) $\dfrac{(5-5i)^5(\sqrt{3}-i)^{14}}{(10+10\sqrt{3}i)^8(1+i)^{10}}$,

3. *a*) $2x^2-13x+100=0$,
b) $x^5+32=0$,

4. $11xy-2i=\overline{(5+3x-2xi)}$,

5. $x_1=-3+i$,

Вариант 7.

6. $1+\sin 116^\circ + i\cos 116^\circ$,

7. $\begin{cases} |z+1-i| \leqslant \mathrm{Im}(-7+5i), \\ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Вариант 8.

6. $1+\cos 20^\circ - i\sin 20^\circ$,

7. $\begin{cases} |z+1-3i| = 2, \\ \dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$

Вариант 9.

1. $z=-4+2i$,

2. *a*) $\dfrac{11-10i}{\sqrt{2}+9i}$,

b) $2i^{2153}-5i^{247}+2i^{48}-7i^{6}$,

c) $\dfrac{(7-7i)^4(\sqrt{3}+i)^{14}}{(i+1)^{12}(7\sqrt{3}+7i)^9}$,

3. *a*) $3x^2+4x+13=0$,

b) $x^6+64=0$,

4. $3+x+y+2i=\overline{(3x+2iy)}$,

5. $x_1=-3+5i$,

6. $1+\sin 22^\circ + i\cos 22^\circ$,

7. $\begin{cases} |z+1+3i| = 4, \\ -\dfrac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant 0. \end{cases}$

Вариант 10.

1. $z=8-4i$,

2. *a*) $\dfrac{4+3i}{3-2i}$,

b) $2i^{2163}-5i^{457}+2i^{24}-9i^{6}$,

c) $\dfrac{(7-7i)^5(\sqrt{3}+i)^{17}}{(1+i)^{15}(7\sqrt{3}+7i)^6}$,

3. *a*) $x^2-8x+11=0$,

b) $x^6+64=0$,

4. $5x-2yi=\overline{(7x-y+3i)}$,

5. $x_1=-3-5i$,

6. $1+\sin 24^\circ + i\cos 24^\circ$,

7. $\begin{cases} |z+1+3i| = 4, \\ -\dfrac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant 0. \end{cases}$

Вариант 11.

1. $z=7+14i$,

2. *a*) $\dfrac{8-i}{\sqrt{2}+5i}$,

b) $5i^{2743}+2i^{365}-3i^{68}+5i^{2}$,

c) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{10}(\sqrt{12}-2i)^4}{(1-i)^{12}(\sqrt{27}+i\sqrt{27})^5}$,

3. *a*) $2x^2-8x+13=0$,

b) $8x^3+125=0$,

4. $\overline{(3-ixy)}=x+y-4i$,

5. $x_1=2+7i$,

6. $1+\sin 202^\circ + i\cos 202^\circ$,

7. $\begin{cases} |z+1-i| \geqslant \mathrm{Im}(2+5i), \\ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Вариант 12.

1. $z=-1-4i$,

2. *a*) $\dfrac{5-2i}{1+7i}$,

b) $3i^{1343}-2i^{292}+5i^{58}-7i^{5}$,

c) $\dfrac{(\sqrt{3}+3i)^{11}(1-i)^{10}}{(2+2i)^7(\sqrt{3}-3i)^6}$,

3. *a*) $2x^2+4x+15=0$,

b) $81x^4-1=0$,

4. $\overline{(5-x+y+2i)}=3x+2iy$,

5. $x_1=7+i$,

6. $1+\cos 116^\circ + i\sin 116^\circ$,

7. $\begin{cases} |z+1-3i| > 4, \\ \dfrac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Вариант 13.

1. $z=-3+4i$,

Вариант 14.

1. $z=2-6i$,

Вариант 13.

2. *a*) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i}$,

b) $5i^{2114}-2i^{375}+4i^{36}-8i^{5}$,

c) $\dfrac{(i+1)^{32}(2-2\sqrt{3}i)^{4}}{(\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)^{16}(\sqrt{3}+i)^{5}}$,

3. *a*) $x^2-13x+100=0$,

b) $x^4-81=0$,

4. $\overline{(11xy+2i)}=6+2x+2xi$,

5. $x_1=3+5i$,

6. $1+\sin 98^\circ - i\cos 98^\circ$,

7. $\begin{cases} |z-2+i|\leqslant 4, \\ -\pi\leqslant \arg z\leqslant \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

Вариант 14.

2. *a*) $\dfrac{3+9i}{11-i}$,

b) $5i^{2134}-2i^{379}-7i^{33}-2i^{8}$,

c) $\dfrac{(i+1)^{38}(2-2\sqrt{3}i)^{5}}{(\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)^{7}(\sqrt{3}+i)^{6}}$,

3. *a*) $2x^2+8x+15=0$,

b) $x^4+81=0$,

4. $\overline{(3-2xy+iy)}=9+7xyi$,

5. $x_1=-3+2i$,

6. $1+\sin 100^\circ - i\cos 100^\circ$,

7. $\begin{cases} |z-2+i|\leqslant 4, \\ -\pi\leqslant \arg z\leqslant \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

Вариант 15.

1. $z=7+3i$,

2. *a*) $\dfrac{2+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}$,

b) $3i^{2197}-2i^{164}+3i^{51}+9i^{6}$,

c) $\dfrac{(i+1)^{5}(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^{7}}{(6+6i)^{12}(1+\sqrt{3}i)^{3}}$,

3. *a*) $6x^2+4x+1=0$,

b) $81x^4+1=0$,

4. $\overline{(2x+1+yi)}=6xy+3i$,

5. $x_1=-3-7i$,

6. $1-\cos 16^\circ - i\sin 16^\circ$,

7. $\begin{cases} |z-1+i|\leqslant |3+4i|, \\ \dfrac{\pi}{2}\leqslant \arg z\leqslant \pi. \end{cases}$

Вариант 16.

1. $z=-2-3i$,

2. *a*) $\dfrac{9-i}{7+2i}$,

b) $3i^{1872}-2i^{291}+3i^{33}-4i^{6}$,

c) $\dfrac{(3i-3)^{6}(\sqrt{3}+3i)^{8}}{(6+6i)^{13}(1+\sqrt{3}i)^{3}}$,

3. *a*) $3x^2+8x+15=0$,

b) $81x^4-16=0$,

4. $\overline{(2xy+7i)}=2y+x+6yi$,

5. $x_1=3+8i$,

6. $1-\cos 18^\circ - i\sin 18^\circ$,

7. $\begin{cases} |z-2+i|\leqslant |3+4i|, \\ \dfrac{\pi}{2}\leqslant \arg z\leqslant \pi. \end{cases}$

Вариант 17.

1. $z=1-4i$,

2. *a*) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$,

b) $9i^{2524}-2i^{1342}+3i^{49}-2i^{7}$,

c) $\dfrac{(2+i\sqrt{12})^{5}(1-i)^{6}}{(\sqrt{3}+i)^{3}(1+i)^{10}}$,

Вариант 18.

1. $z=11+22i$,

2. *a*) $\dfrac{1+6i}{3-2i}$,

b) $6i^{1972}-2i^{142}+3i^{79}-2i^{5}$,

c) $\dfrac{(2+i\sqrt{12})^{6}(1-i)^{7}}{(\sqrt{3}+i)^{4}(1+i)^{11}}$,

Вариант 17.

3. *a*) $x^2+2x+17=0$,
b) $64x^6+1=0$,

4. $3x+2y+xyi=\overline{(1+2i)}$,

5. $x_1=-2-3i$,

6. $1+\cos 16^\circ+i\sin 16^\circ$,

7. $\begin{cases} |z+3-i|<\mathrm{Im}(1+7i), \\ \frac{\pi}{\leqslant}\arg z\pi. \end{cases}$

Вариант 18.

3. *a*) $3x^2+6x+13=0$,
b) $64x^6-1=0$,

4. $5xy+2i=\overline{(2x+y+6xi)}$,

5. $x_1=12+5i$,

6. $1+\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ$,

7. $\begin{cases} |z+3-i|<\mathrm{Im}(1+7i), \\ \frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant\pi. \end{cases}$

Вариант 19.

1. $z=-3-5i$,

2. *a*) $\dfrac{3-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}+3i}$,
b) $5i^{2197}+2i^{414}-3i^{16}+5i^3$,
c) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^3(\sqrt{12}-2i)^3}{(1-i)^{14}(\sqrt{27}+\sqrt{27}i)^4}$,

3. *a*) $2x^2+4x+19=0$,
b) $125x^3+1=0$,

4. $\overline{(2x+y+xyi)}=3+x+2i$,

5. $x_1=-2+3i$,

6. $1+\sin 124^\circ+i\cos 124^\circ$,

7. $\begin{cases} |z+1-i|\geqslant\mathrm{Re}(5-2i), \\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

Вариант 20.

1. $z=7-14i$,

2. *a*) $\dfrac{8-i}{2+5i}$,
b) $5i^{2717}+2i^{312}-3i^{15}+5i^2$,
c) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{10}(\sqrt{12}-\sqrt{12}i)^4}{(1-i)^{12}(\sqrt{27}+\sqrt{27}i)^5}$,

3. *a*) $2x^2+8x+13=0$,
b) $125x^3-1=0$,

4. $3-ixy=\overline{(x+y-4i)}$,

5. $x_1=2-7i$,

6. $1+\sin 204^\circ+i\cos 204^\circ$,

7. $\begin{cases} |z+1-i|\geqslant\mathrm{Re}(5-3i), \\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

Вариант 21.

1. $z=-2+5i$,

2. *a*) $\dfrac{7-i}{\sqrt{2}+i}$,
b) $3i^{2174}-2i^{123}-7i^{68}-8i^5$,
c) $\dfrac{(1-i)^{10}(i-\sqrt{3})^{15}}{(\sqrt{3}+i)^7(1+\sqrt{3}i)^5}$,

3. *a*) $2x^2-6x+15=0$,
b) $x^7+128=0$,

4. $\overline{(5+ixy)}=x+y+4i$,

5. $x_1=2-i$,

6. $1+\sin 14^\circ+i\cos 14^\circ$,

7. $\begin{cases} 3\leqslant|z+1-i|\leqslant 4, \\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

Вариант 22.

1. $z=3+2i$,

2. *a*) $\dfrac{6+i}{2-i}$,
b) $3i^{2154}-2i^{125}+7i^{15}-5i^8$,
c) $\dfrac{(1-i)^9(i-\sqrt{3})^{14}}{(\sqrt{3}+i)^8(1+sqrt3)^5}$,

3. *a*) $2x^2+4x+13=0$,
b) $x^7-128=0$,

4. $3x-y+xyi=\overline{(3+x-2i)}$,

5. $x_1=1+6i$,

6. $1+\sin 44^\circ+i\cos 44^\circ$,

7. $\begin{cases} 3\leqslant|z+1-i|\leqslant 4, \\ -\frac{\pi}{3}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{3}. \end{cases}$

Вариант 23.

1. $z = -5 + 3i$,

2. $a)$ $\dfrac{12 + 10i}{1 - 2i}$,

$b)$ $3i^{147} + 2i^{132} - 6i^{13} + 7i^{6}$,

$c)$ $\dfrac{(\sqrt{3} - i)^8 (1 + \sqrt{3}i)^6}{(1 - i)^9 (i - \sqrt{3})^{15}}$,

3. $a)$ $3x^2 + 4x + 17 = 0$,

$b)$ $32x^5 + 243 = 0$,

4. $\overline{(7xy + 3i)} = 2x + y + 6xi$,

5. $x_1 = 1 + 5i$,

6. $1 - \sin 26^\circ + i\cos 26^\circ$,

7. $\begin{cases} 1 \leqslant |z + 2i| \leqslant |5i|, \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant 0. \end{cases}$

Вариант 24.

1. $z = 11 - 22i$,

2. $a)$ $\dfrac{10 + 7i}{2 + i}$,

$b)$ $3i^{2127} + 2i^{124} - 5i^{18} + 4i^{5}$,

$c)$ $\dfrac{(\sqrt{3} - i)^7 (1 + \sqrt{3}i)^5}{(1 - i)^8 (i - \sqrt{3})^{15}}$,

3. $a)$ $2x^2 + 2x + 15 = 0$,

$b)$ $x^5 - 1 = 0$,

4. $3x + 4y + xyi = \overline{(1 + 2i)}$,

5. $x_1 = 5 + i$,

6. $1 - \sin 28^\circ + i\cos 28^\circ$,

7. $\begin{cases} 1 \leqslant |z + 1 - i| \leqslant |5i|, \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant 0. \end{cases}$

Вариант 25.

1. $z = 5 + 2i$,

2. $a)$ $\dfrac{2 + 3i}{3 - 4i}$,

$b)$ $6i^{1044} + 8i^{123} - 3i^{13} + 2i^{6}$,

$c)$ $\dfrac{(2 + 2i)^{12} (\sqrt{3} - i)^{16}}{(3 - 3\sqrt{3}i)^5 (i + 1)^7}$,

3. $a)$ $3x^2 + 10x + 17 = 0$,

$b)$ $x^4 - 256 = 0$,

4. $\overline{(3xy - 7i)} = 2y + x + 6xi$,

5. $x_1 = 3 - 2i$,

6. $1 + \cos 28^\circ - i\sin 28^\circ$,

7. $\begin{cases} |1 - 3i| \leqslant |z - 2i| \leqslant |9i|, \\ \dfrac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Вариант 26.

1. $z = -7 + 3i$,

2. $a)$ $\dfrac{2 - 3i}{4 + 5i}$,

$b)$ $6i^{2124} + 7i^{299} - 3i^{46} + 2i^{5}$,

$c)$ $\dfrac{(2 + 2i)^{10} (\sqrt{3} - i)^{14}}{(3 - 3\sqrt{3}i)^5 (i + 1)^9}$,

3. $a)$ $5x^2 + 4x + 3 = 0$,

$b)$ $x^4 + 256 = 0$,

4. $\overline{(3x - 1 + yi)} = 6xy + 3i$,

5. $x_1 = 2 - 5i$,

6. $1 + \cos 24^\circ - i\sin 24^\circ$,

7. $\begin{cases} |3i| \leqslant |z - 2i| \leqslant |9i|, \\ \dfrac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Вариант 27.

1. $z = 3 - 5i$,

2. $a)$ $\dfrac{3 - 4i}{2 + 3i}$,

$b)$ $9i^{1004} - 5i^{507} - 3i^{45} + 7i^{6}$,

$c)$ $\dfrac{(5 - 5i)^4 (\sqrt{3} - i)^{13}}{(10 + 10\sqrt{3}i)^7 (i + 1)^3}$,

Вариант 28.

1. $z = 3 - 4i$,

2. $a)$ $\dfrac{4 - 3i}{3 + 2i}$,

$b)$ $8i^{1005} - 5i^{407} - 3i^{88} + 2i^{6}$,

$c)$ $\dfrac{(5 - 5i)^5 (\sqrt{3} - i)^{14}}{(1 + \sqrt{3}i)^3 (10 + 10i)^{10}}$,

Вариант 27.

3. *a*) $2x^2 - 10x + 15 = 0$,
b) $32x^5 - 243 = 0$,

4. $\overline{(1 + 3xy + ix)} = 9 + 7xyi$,

5. $x_1 = 1 + 3i$,

6. $1 + \cos 18° + i \sin 182°$,

7. $\begin{cases} |z + 1 - 3i| = 2, \\ \dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$

Вариант 28.

3. *a*) $2x^2 - 13x + 102 = 0$,
b) $32x^5 + 243 = 0$,

4. $\overline{(11xy - 2i)} = 5 + 3x - 2xi$,

5. $x_1 = -3 - i$,

6. $1 + \cos 32° - i \sin 32°$,

7. $\begin{cases} |z + 1 - 3i| = 2, \\ \dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$

Вариант 29.

1. $z = -4 - 2i$,

2. *a*) $\dfrac{11 - 10i}{2 + 9i}$,
b) $2i^{2157} - 5i^{251} + 2i^{48} - 3i^7$,
c) $\dfrac{(1 - i)^4 (7\sqrt{3} + 7i)^{11}}{(7I + 7)^{12} (\sqrt{3} + i)^5}$,

3. *a*) $3x^2 + 4x + 15 = 0$,
b) $64x^6 - 27 = 0$,

4. $\overline{(3 + x + y + 2i)} = 3x + 2iy$,

5. $x_1 = -3 - 8i$,

6. $1 + \sin 34° + i \cos 34°$,

7. $\begin{cases} |z + 1 - 3i| = 4, \\ -\dfrac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant 0. \end{cases}$

Вариант 30.

1. $z = 8 + 4i$,

2. *a*) $\dfrac{4 + 3i}{3 - 2i}$,
b) $2i^{2167} - 5i^{157} + 2i^{66} - 9i^8$,
c) $\dfrac{(7 - 7i)^5 (\sqrt{3} + i)^{12}}{(1 + i)^{13} (7\sqrt{3} + 7i)^6}$,

3. *a*) $x^2 - 8x + 13 = 0$,
b) $64x^6 + 27 = 0$,

4. $\overline{(5x - 2yi)} = 7x - y + 3i$,

5. $x_1 = -3 + 7i$,

6. $1 + \sin 54° + i \cos 54°$,

7. $\begin{cases} |z + 1 - 3i| = 4, \\ -\dfrac{\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant 0. \end{cases}$

3.2. Варианты второго типа

1. Нарисовать линию или область, удовлетворяющую заданному условию.

2. Вычислить или записать в алгебраической форме данное выражение.

3. Восстановить аналитическую функцию по данной ее вещественной или мнимой части.

4. Разложить данную функцию в указанном кольце в ряд Лорана.

5. Вычислить интеграл от данной функции по заданному контуру.

Вариант 1.

1. $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1}=0,$

2. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\,i\right),$

3. $u=x^3+3xy^2+xy,$
$w(1)=1-2i,$

4. $w=\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$
по степеням z
$\mathrm{K}:|z|>2,$

5. $\displaystyle\oint\limits_L\frac{(3z+2)\,dz}{(z+1)^2(z+2)},$
$L:|z+2i|=1,5.$

Вариант 2.

1. $|1+z|<|1-z|,$

2. $\operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi}{3}\,i\right),$

3. $v=3x^2y+2x-y^3,$
$w(0)=0,$

4. $w=\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$
по степеням $z+1$
$\mathrm{K}:0<|z+1|<3,$

5. $\displaystyle\oint\limits_L\frac{\mathrm{e}^z\,dz}{z^2(z+3)},$
$L:|z+3|=2.$

Вариант 3.

1. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a^2},$

2. $\operatorname{sh}\left(-\dfrac{\pi}{2}\,i\right),$

3. $u=x^2y^2+3x+2y+1,$
$w(0)=1,$

4. $w=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}}{z(z+1)}$
по степеням $z-1$
$\mathrm{K}:1<|z-1|<2,$

Вариант 4.

1. $|z-i|+|z+i|<4,$

2. $\ln(-1+i),$

3. $v=x+2y+3xy,$
$w(i)=3+2i,$

4. $w=\dfrac{2z}{z^2-2}$
по степеням $z-1$
$\mathrm{K}:-1\in\mathrm{K},$

Вариант 3.

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{(2z-1)\,dz}{(z^2+1)^2}$,
$L: |z| = 2.$

Вариант 4.

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{(3z+1)\,dz}{z^2-1}$,
$L: |z| = 2.$

Вариант 5.

1. $|z| > 1 - \mathrm{Re}\,z$,

2. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\,i\right)$,

3. $u = 3x^2y - y^3 + 2$,
$w(0) = 2 + i$,

4. $w = \dfrac{1}{(z^2-9)z^2}$

4. по степеням $z - 1$
$\mathrm{K}: \dfrac{1}{2} \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{(z^2+1)\,dz}{(z-i)(z+i)}$,
$L: |z + 3i| = 5.$

Вариант 6.

1. $\mathrm{Im}\dfrac{z-1}{z+6}$,

2. $\mathrm{ch}\left(\dfrac{3\pi}{4}\,i\right)$,

3. $v = x^2y^2 + 5xy$,
$w(1+i) = 3 + 5i$,

4. $w = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$

4. по степеням z
$\mathrm{K}: -\dfrac{3}{2} \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{\mathrm{e}^z\,dz}{(z+1)(2-z)^2}$,
$L: |z + i| = 10.$

Вариант 7.

1. $0 < \arg\dfrac{i-z}{z+i} < \dfrac{\pi}{2}$,

2. $\mathrm{e}^{3+\frac{\pi}{4}i}$,

3. $u = x^3 - 3xy^2 + x$,
$w(1) = 2 + i$,

4. $w = \dfrac{1}{z(z-3)^2}$
по степеням $z - 1$
$\mathrm{K}: 1 + 3i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{dz}{1+z^4}$,
$L: |z - 1| = 1.$

Вариант 8.

1. $\mathrm{Re}\,(z(1-i)) = \sqrt{2}$,

2. $\mathrm{ch}\left(\pm\dfrac{\pi i}{3} + 2k\pi i\right), k = 0, \pm 1$,

3. $v = x + 2y - 5xy$,
$w(i) = 2i$,

4. $w = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$
по степеням $z + 1$
$\mathrm{K}: 3i + 1 \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{z\mathrm{e}^{\frac{1}{3z}}\,dz}{z+3}$,
$L: |z| = 4.$

Вариант 9.

1. $-\dfrac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \dfrac{\pi}{2}$,

2. $\operatorname{sh}\left(\dfrac{13\pi}{6}\, i\right)$,

3. $v = xy + 9$,
$w(i) = -1 + 5i$,

4. $w = \dfrac{2z}{z^2 - 2i}$
по степеням z
$\mathrm{K} : -3i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$,
$L : |z - 1 - i| = 2$.

Вариант 10.

1. $|z-2| - |z+2| = 2$,

2. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\, i\right)$,

3. $u = x^3 + 6x^2y - 6xy^2 - 2y^3$,
$w(0) = 0$,

4. $w = \dfrac{z+i}{z^2}$
по степеням $z - i$
$\mathrm{K} : -i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^2}$,
$L : 2 < |z| < 4$.

Вариант 11.

1. $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$,

2. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\, i\right)$,

3. $u = x^2 - 3xy^2 + xy$,
$w(1) = 1 - 2i$,

4. $w = \dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$
по степеням z
$\mathrm{K} : 5i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{(3z+2)\, dz}{(z+1)^2(z+i)}$,
$L : |z + 2i| = 1,5$.

Вариант 12.

1. $|1+z| < |1-z|$,

2. $\operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi}{3}\, i\right)$,

3. $v = 3x^2y - y^3 - 2x$,
$w(1) = 1 - 2i$,

4. $w = \dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$
по степеням z
$\mathrm{K} : -5i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{(3z+2)\, dz}{(z+1)^2(z+i)}$,
$L : |z + 2i| = 1,2$.

Вариант 13.

1. $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a^2}$,

2. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\, i\right)$,

3. $u = x^2 - y^2 + 3x + 2y + 1$,
$w(0) = 1$,

Вариант 14.

1. $|z-i| - |z+i| < 4$,

2. $\ln(1+i)$,

3. $v = x + 2y + 3xy$,
$w(i) = 3 + 2i$,

Вариант 13.

4. $w = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(z+1)}$
по степеням $z-1$
$\mathrm{K}: -\dfrac{1}{2}i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint_L \frac{(2z-1)\,dz}{(z^2+1)z}$,
$L: |z| = 5$.

Вариант 14.

4. $w = \dfrac{2z}{z^2-2i}$
по степеням $z-1$
$\mathrm{K}: \dfrac{1}{2}i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint_L \frac{(3z+1)\,dz}{z^2-1}$,
$L: |z| = 2$.

Вариант 15.

1. $|z| > 1 - \mathrm{Re}z$,

2. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\,i\right)$,

3. $u = 3x^2y - y^3 + 2$,
$w(0) = 2 + i$,

4. $w = \dfrac{1}{(z^2-9)z}$
по степеням $z-1$
$\mathrm{K}: 2i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint_L \frac{(z^2+1)\,dz}{(z-i)(z+i)}$,
$L: |z| = 5$.

Вариант 16.

1. $\mathrm{Re}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$,

2. $\ln(-1+i)$,

3. $v = 3x^2y + 2x - y^3$,
$w(0) = 0$,

4. $w = \dfrac{z+i}{z^2}$
по степеням $z-i$
$\mathrm{K}: -i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint_L \frac{dz}{1+z^4}$,
$L: |z| = 2$.

Вариант 17.

1. $|z-2| - |z+2| = 2$,

2. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\,i\right)$,

3. $u = x^3 - 3xy^2 + x$,
$w(1) = 2 + i$,

4. $w = \dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$
по степеням $z+1$
$\mathrm{K}: 0 < |z+1| < 3$,

Вариант 18.

1. $\mathrm{Im}\dfrac{z-1}{z+6} = 0$,

2. $\mathrm{ch}\left(\dfrac{3\pi}{4}\,i\right)$,

3. $v = x + 2y + 3xy$,
$w(i) = 3 + 2i$,

4. $w = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z(z+1)}$
по степеням $z-1$
$\mathrm{K}: 1 < |z-1| < 2$,

Вариант 17.

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{(3z-1)\,dz}{z^2-1}$, $L: |z| = 5.$

Вариант 18.

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^2}$, $L: |z| = 2.$

Вариант 19.

1. $|1+z| < |1-z|$,

2. $\ln(1+i)$,

3. $v = x^2y^2 + 5xy$, $w(1+i) = 3+5i$,

4. $w = \dfrac{2z}{z^2-2i}$ по степеням $z-1$ $\mathrm{K}: \dfrac{1}{2}i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{(2z-1)\,dz}{(z^2+1)z}$, $L: |z| = 5.$

Вариант 20.

1. $|z-2| - |z+2| = 2$,

2. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\,i\right)$,

3. $u = x + 6x^2y - 6xy^2 - 2y$, $w(0) = 0$,

4. $w = \dfrac{z+i}{z^2}$ по степеням $z-i$ $\mathrm{K}: 1-2i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^2}$, $L: 2 < |z| < 4.$

Вариант 21.

1. $|1+z| < |1-z|$,

2. $\operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi}{3}\,i\right)$,

3. $v = 3x^2y - y^3 + 2x$, $w(0) = 0$,

4. $w = \dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ по степеням $z+1$ $\mathrm{K}: \dfrac{1}{2}i - 1 \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{\mathrm{e}^z\,dz}{z^2(z+3)}$, $L: |z+3| = 2.$

Вариант 22.

1. $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a^2}$,

2. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\,i\right)$,

3. $u = x^2 - y^2 + 3x + 2y + 1$, $w(0) = 1$,

4. $w = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}}{z(z+1)}$ по степеням $z-1$ $\mathrm{K}: \dfrac{3}{2} \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{(2z-1)\,dz}{z(z^2+1)}$, $L: |z| = 5.$

Вариант 23.

1. $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a^2}$,

Вариант 24.

1. $|z-i| - |z+i| < 4$,

Вариант 23.

2. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\,i\right)$,

3. $u = x^2 - y^2 + 3x + 2y + 1$,
$w(0) = 1$,

4. $w = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}}{z(z+1)}$
по степеням $z-1$
$\mathrm{K} : \dfrac{3}{2} \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{(2z-1)\,dz}{z(z^2+1)}$,
$L : |z| = 5$.

Вариант 24.

2. $\ln(-1+i)$,

3. $v = x + 2y + 3xy$,
$w(i) = 3 + 2i$,

4. $w = \dfrac{2z}{z^2 - 2i}$
по степеням $z-1$
$\mathrm{K} : -i \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{(3z+1)\,dz}{(z^2-1)}$,
$L : |z| = 4$.

Вариант 25.

1. $|z| > 1 - \mathrm{Re}z$,

2. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\,i\right)$,

3. $u = x^2 - y^2 + 5xy$,
$w(1+i) = 2 + i$,

4. $w = \dfrac{1}{z^2(z^2-9)}$
по степеням $z-1$
$\mathrm{K} : -\dfrac{1}{2} \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{(z^2+1)\,dz}{(z-i)(z+i)}$,
$L : |z + 3i| = 5$.

Вариант 26.

1. $\mathrm{Im}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$,

2. $\mathrm{ch}\left(\dfrac{3\pi}{4}\,i\right)$,

3. $v = x^2 - y^2 + 5xy$,
$w(1+i) = 3 + 5i$,

4. $w = \dfrac{1}{z^3 - 3z^2 + 2z}$
по степеням z
$\mathrm{K} : -\dfrac{3}{2} \in \mathrm{K}$,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{\mathrm{e}^z\,dz}{(z+i)(2-z)^2}$,
$L : |z + i| = 5$.

Вариант 27.

1. $|1 + z| = |1 - z|$,

2. $\mathrm{ch}\left(\dfrac{3\pi}{4}\,i\right)$,

3. $v = x^2 - y^2 + 5xy$,
$w(0) = 2 + i$,

Вариант 28.

1. $0 < \arg\dfrac{i-z}{z+1} < \dfrac{\pi}{2}$,

2. $\mathrm{e}^{3+\frac{\pi}{4}i}$,

3. $u = x^3 - 3xy^2 + x$,
$w(1) = 2 + i$,

Вариант 27.

4. $w = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$
по степеням z
K : $\dfrac{5}{4}i \in$ K,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{e^z\,dz}{(z+1)(2-z)^2}$,
$L : |z+i| = 10.$

Вариант 28.

4. $w = \dfrac{1}{z(z-3)^2}$
по степеням $z-1$
K : $5i - 1 \in$ K,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{dz}{1+z^4}$,
$L : |z-1| = 1.$

Вариант 29.

1. $\operatorname{Re}(z(1-i) = \sqrt{2}$,

2. $\operatorname{ch}\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\,i + 2k\pi i\right)$,

3. $v = x + 2y - 5xy$,
$w(i) = 2i$,

4. $w = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$
по степеням $z+1$
K : $1 - 3i \in$ K,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{z e^{\frac{1}{3z}}\,dz}{z+3}$,
$L : |z| = 6.$

Вариант 30.

1. $-\dfrac{\pi}{2} < \arg(z+i) < \dfrac{\pi}{2}$,

2. $\operatorname{sh}\left(\dfrac{13\pi}{6}\,i\right)$,

3. $v = xy + 5$,
$w(0) = 1 + 5i$,

4. $w = \dfrac{2z}{z^2 - 2i}$
по степеням z
K : $3i \in$ K,

5. $\displaystyle\oint\limits_L \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$,
$L : |z-1-i| = 2.$

О Г Л А В Л Е Н И Е

Файншмидт Виктор Лейбович, *Винник Петр Михайлович*, *Гусев Иван Васильевич*, *Согомонова Галина Аваковна*, *Тарасова Наталия Вячеславовна*

Функции комплексного аргумента

Редактор *Г.М. Звягина*
Корректор *Л.А. Петрова*
Компьютерный набор и верстка *В.Л. Файншмидта* и *Н.В. Тарасовой*
Подписано в печать 27.12.2013. Формат 60x84/16. Бумага документная.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7. Тираж 250 экз. Заказ №
Балтийский государственный технический университет
Типография БГТУ
190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д. 1