Индивидуальное задание

«Определение основных кинематических характеристик движения материальной точки»

Уравнения движения точки **М** заданы параметрами x=x(t), y=y(t). По заданным уравнениям движения точки М установить вид траектории ее движения и для момента времени $t=t_1$ (сек) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорение, а также радиус кривизны траектории в данной точке.

Необходимые для решения данные приведены в таблице 1.

АЛГОРИТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА КИНЕМАТИКУ ТОЧКИ

При решении задач на определение кинематических характеристик движения материальной точки полезно придерживаться следующего алгоритма:

1) выбрать систему координат;

2) составить уравнение движения точки в избранной системе координат:

3) по уравнениям движения точки определить проекции скорости на оси координат, а также, скорость по модулю и направлению;

4) зная проекции скорости на оси координат, определить проекции ускорения на эти оси и ускорение по модулю и направлению.

Если траектория движения задана, то целесообразно применять естественную форму уравнений движения и определять ускорения точки через проекции на оси естественного триэдра.

Пример выполнения задания. Исходные данные:

$$x = cht = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t});$$

$$y = sht = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t});$$

t=0, x и y – в см, t в сек.

РЕШЕНИЕ. 1. Определение вида траектории. Уравнение движения задано в параметрической форме. Исключив параметр времени, получим уравнение траектории в координатной форме. Для этого возведем в квадрат левые и правые части уравнений и вычтем из первого уравнения второе. Получим

$$x^2 - y^2 = 1$$

- каноническое уравнение гиперболы. Точка **M** находится в правой части гиперболы. **M(1,0)** (РИС.1)

2.Определение скорости точки. Вектор скорости будем искать в виде:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad ,$$

где V_X, V_Y - проекции вектора скорости на оси координат,

$$v_x = x' = sh = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$v_y = y' = ch = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

При t=0 $V_X = 0$ СМ/С, $V_Y = 1$ см/с.

Вектор скорости направлен по касательной к траектории в данной точке траектории (см. рис.1).

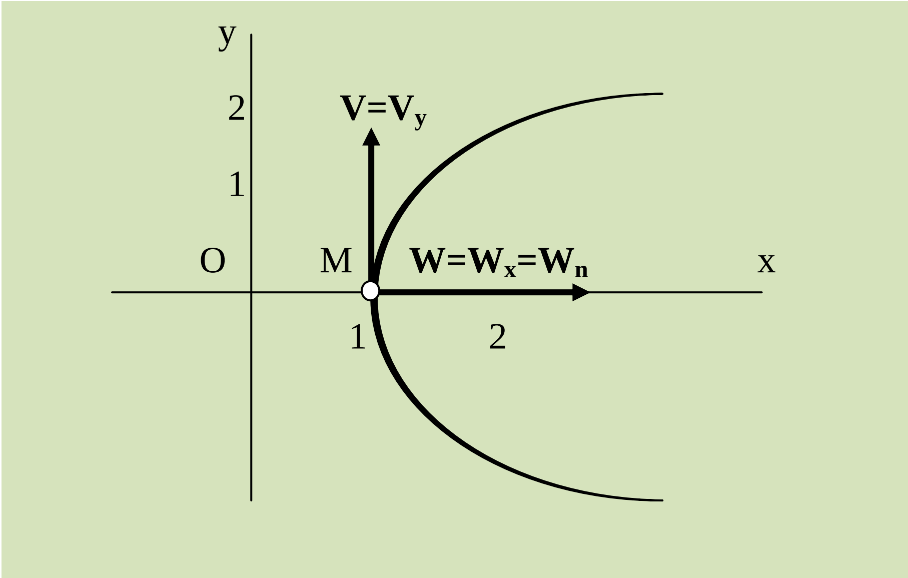

Рисунок 1 – График движения точки и ее кинематические характеристики

Вектор ускорения будем искать в виде

$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j}\ ,$$

\где w_X, w_Y - проекции вектора ускорения на оси координат.

$$w_x = x'' = (sht)' = cht$$

$$w_y = y'' = (cht)' = sht$$

Для момента времени t=0 $w_X = 1$ см/с^2, $w_Y = 0$ см/с^2.

Модуль полного ускорения точки определим как

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}\ .$$

При t=0, w=1см/с^2.

3. Определение касательного и нормального ускорения. Касательная составляющая ускорения по определению есть производная от функции скорости по времени

$$w^{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v}.$$

Для момента времени t=0 $w^{\tau} = 0$ см/с^2

Нормальная составляющая ускорения определится как

$$w^{n} = \frac{v_x w_y - v_y w_x}{v}.$$

Для момента времени t=0 w^{n} =1СМ/С^2.

Имея в виду, что

$$w^{n} = \frac{v^2}{\rho},$$

определим радиус кривизны траектории в данной точке

$$\rho = \frac{v^2}{w^n} = 1 \text{ см}$$

Полученные результаты отражены на рисунке1

Таблица 1 – Исходные данные вариантов задания

номер варианта	Уравнения Движения		t ,
№	$x = x(t)$ cm	y = y(t) cm	сек
1	$2-3t-6t^2$	$3-\frac{3t}{2}-3t^2$	0
2	$cht=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$	$sht=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$	0
3	$3\sin\pi t$	$2\cos 2\pi t$	1/2
4	$sht=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$	$cht=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$	0
5	$2t+1$	$-4/(t+1)$	2
6	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
7	$-4t^2-4$	$3t+1$	1
8	$2\cos(\pi t/6)$	$4\sin(\pi t/6)-3$	1
9	$5\sin(\pi t^2/4)$	$-5\cos(\pi t^2/4)$	2
10	$2\sin^2(\pi t/3)+2$	$4\cos^2(\pi t/3)-2$	1
11	$\sin(\pi t/6)$	$2\cos(\pi t/3)$	1
12	$2t$	$2/(t-4)$	2
13	$2/(t-4)$	$2t$	3
14	$-5/(2t+1)$	$2t+1$	2
15	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	1
16	$8/t$	$2/t-4$	2
17	$-2\cos(3\pi/4)-3$	$3\sin(3\pi/4)-4$	1
18	$5t^2-3$	$t-3$	1
19	$ch\pi t$	$sh\pi t$	0
20	$3t^2-t-2$	$4t^2-4t/3-2$	2
21	$-5\sin^2(\pi t/2)-2$	$\cos^2(\pi t/2)-3$	1/3
22	$sh2t=\frac{1}{2}(e^{2t}-e^{-2t})$	$ch2t=\frac{1}{2}(e^{2t}+e^{-2t})$	1/2

23	e^t	t	2
24	$2t+4$	$-4/(t+2)$	2
25	$2/(t+2)$	$-2+3t$	2
26	$3/2\cos(\pi t/2)-2$	$2\sin(\pi t/2)-3$	1/2
27	$-3\sin(\pi t)\cos(\pi t)$	$4\cos(2\pi t)-2$	1/4
28	$t-3$	$\frac{3}{t}-3$	2
29	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	2
30	$-coc(\pi t^2/3)-3$	$\sin(\pi t/3+1$	1