Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра компьютерных систем в управлении и проектировании (КСУП)

В. М. Зюзьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Учебное методическое пособие

2015

Корректор: Осипова Е. А.

Зюзьков В. М.
Математическая логика и теория алгоритмов: учебное методическое пособие. — Томск: Факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2015. — 80 с.

Содержание

1 Введение

В результате изучения дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» студенты должны:

- освоить формальный язык математической логики для математических утверждений;
- освоить базовые понятия теории множеств;
- изучить теорию и методы математической логики и теории алгоритмов;
- научиться решать задачи определенного вида, связанные с формальным языком, логикой высказываний, теорией множеств и теорией алгоритмов.

Данное пособие содержит практический материал, предназначенный для обучения студентов умению решать задачи по математической логике и теории алгоритмов. Из всей программы курса выбрано несколько тем, усвоение которых, на наш взгляд, требует умения решать задачи определенного вида.

Что значит владение точными предметами? Это и есть умение решать задачи, причем не столько стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности.

Неизвестны какие бы то ни было правила мышления, которые точно предписывали бы мышлению наиболее целесообразные пути. Если бы подобные правила и были возможны, вряд ли они были бы очень полезны. Наилучшие правила мышления нельзя получить как-то извне, их нужно выработать так, чтобы они вошли в плоть и кровь и действовали с силой инстинкта. Поэтому для развития мышления действительно полезным является только его упражнение.

Для практического освоения математической логики и теории алгоритмов предлагаемые для студентов задачи делятся на две неравноценные группы: задачи по теме «Предикаты и интерпретации» должны помочь студентам правильно ответить на тесты по указанной теме — такие тесты включены в первую контрольную работу (тестовую). Остальные рассматриваемые задачи относятся к темам, включенным во вторую контрольную работу (письменную). Рассматриваются решения типичных задач по темам: 1) «операции с множествами», 2) «отношения», 3) «отображения», 4) «эквивалентность и порядок», 5) «логика высказываний», 6) «язык логики предикатов», 7) «математическая индукция», 8) «сравнение скорости роста».

В последнем разделе приводятся варианты заданий для второй контрольной работы.

2 Как решать задачи

Рассмотрим задачи из некоторых избранных областей математической логики и теории алгоритмов. Конечно, решение задач во многом является творческим процессом, но тем не менее некоторые рекомендации, как решать задачи, можно все-таки сформулировать. Кроме того, примеры решения также являются полезными.

Удачные решения сложных проблем обычно находят те студенты, которые, сознательно или подсознательно, применяют общие правила решения задач. Следующие рекомендации принадлежат Д. Пойа[1].

Понимание постановки задачи	
Нужно ясно понять задачу.	*Что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие?* Возможно ли удовлетворить условию? Достаточно ли условие для определения неизвестного? Или недостаточно? Или чрезмерно? Или противоречиво? Сделайте чертеж. Введите подходящие обозначения. Разделите условия на части. Постарайтесь записать их.
Составление плана решения	
Нужно найти связь между данными и неизвестным. Если не удается сразу обнаружить эту связь, возможно, полезно будет	Встречались ли вы с этой задачей ранее? Хотя бы в слегка измененной форме? *Знаете ли вы какую-нибудь родственную задачу?* Знаете ли вы какие-нибудь теоремы, которые могли быть полезны?

[1] Пойа Дьёрдь. Как решать задачу. М., 2010. 208 с.

рассмотреть вспомогательные задачи. *Вы должны придумать для себя план как решить задачу.*	*Рассмотрит неизвестное.* Попытайтесь найти знакомую задачу с тем же или подобным неизвестным. *Вы обнаружили задачу, связанную с вашей и уже решенную. Можете ли вы использовать это?* Можете ли вы использовать ее результаты? Можете ли вы использовать ее методы? Не следует ли вам внести какой-нибудь вспомогательный элемент, чтобы можно было воспользоваться прежней задачей? Нельзя ли иначе сформулировать задачу? Еще иначе? Вернитесь к определениям. Если вы не можете решить предложенную задачу, то попытайтесь сначала решить сходную задачу. Можете ли вы представить подобную задачу, но более легкую для решения? А более общую задачу? А может более специализированную? Или аналогичную? Можете ли вы решить часть задачи? Сохраните только часть условия, отбросив остальную часть: насколько определенным окажется тогда неизвестное; как оно сможет меняться? Можете ли вы получить что-нибудь полезное из данных? Нельзя ли придумать другие данные, из которых можно было бы определить неизвестное? Нельзя ли изменить неизвестные, или данные, или, если необходимо, и то и другое так, чтобы новое неизвестное и данные оказались ближе друг к другу?

	Все ли данные вами использованы? Все ли условия? Приняты ли вами во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче?
Выполнение плана	
Нужно осуществить план решения.	Осуществляя план решения, *контролируйте каждый свой шаг.* Ясно ли вам, что предпринятый вами шаг правилен? Сумеете ли вы доказать, что он правилен?
Взгляд назад — анализ решения	
Нужно изучить найденное решение.	Нельзя ли *проверить результат*? Нельзя ли проверить ход решения? Нельзя ли получить результат иначе? Нельзя ли усмотреть его с одного взгляда? Нельзя ли в какой-нибудь другой задаче использовать полученный результат или метод решения?

Сейчас перейдем к конкретным задачам. Для краткости в дальнейшем будем использовать иногда сокращения:

1) вместо слов «следует», «влечет» и т. п. будем писать символ $\Rightarrow$;

2) вместо слов «тогда и только тогда, когда» будем писать символ $\Leftrightarrow$.

2.1 Операции с множествами

Задача 1. Равны ли два множества $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ и $\{1, 2, 3\}$?

Решение. Нет, первое множество содержит два элемента $\{1, 2\}$ и $\{2, 3\}$, а второе — три элемента 1, 2 и 3.

Задача 2. Доказать, что если конечное множество A содержит n элементов, то множество-степень $P(A)$ содержит 2^n элементов.

Решение. Докажем с помощью математической индукции по числу элементов n.

Базис индукции. Если $n = 0$, то множество A пустое и $P(A) = \{\varnothing\}$ и утверждение выполнено.

Индуктивный переход. Пусть утверждение доказано для всех множеств с k элементами, докажем, что оно выполнено и для множеств с $k+1$ элементами.

Пусть $A = \{x_1, x_2,\ldots, x_k, x_{k+1}\}$ и $B = \{x_1, x_2,\ldots, x_k\}$. Множество всех подмножеств A, не содержащих элемент x_{k+1}, равно $P(B)$. Любое подмножество A, содержащее x_{k+1}, можно получить из соответствующего подмножества B, добавив элемент x_{k+1}. Поэтому и таких подмножеств A столько же, сколько элементов $P(B)$. Общее количество элементов в $P(A)$ тогда равно $2^k + 2^k = 2^{k+1}$. Индуктивный переход доказан, и тем самым доказано искомое утверждение.

Задача 3. Доказать, что для любых множеств A и B имеем $A \cup (A \cap B) = A$.

Решение. Если множество A пустое, то равенство очевидно. Пусть теперь произвольное $x \in A$. Имеем $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (A \cap B)$ (так как $A \subseteq A \cup (A \cap \cap B)) \Rightarrow A \subseteq A \cup (A \cap B)$. Наоборот, $x \in A \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in A$, или $x \in A \cap \cap B \Rightarrow X \in A$, или $(x \in A$ и $x \in B) \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \cup (A \cap B) \subseteq A$. Поэтому $A \cup (A \cap B) = A$.

Задача 4. Перечислить все элементы каждого из следующих множеств: а) $\{x| \, x \subseteq \{1\}\}$; б) $\{x \mid x \subseteq \{1, 2\}\}$; в) $\{x \mid x \subseteq \{1, 2, 3\}\}$; г) $\{x \mid x \subseteq \varnothing\}$.

Решение: а) элементы $\{1\}$, $\varnothing$; б) элементы $\{1,2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\varnothing$; в) элементы $\{1,2,3\}$, $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{1,3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\varnothing$; г) элемент $\varnothing$.

Задача 5. Перечислите все подмножества множества A: а) $A = \{\{1,2\}, \{3\}, 1\}$; б) $A = \{\{1\}, \{2\}, 1\}$; в) $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

Решение: а) подмножества: A, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,2\}, 1\}$, $\{\{3\}, 1\}$, $\{\{1,2\}\}$, $\{\{3\}\}$, $\{1\}$, $\varnothing$; б) подмножества: A, $\{\{1\},\{2\}\}$, $\{\{1\}, 1\}$, $\{\{2\}, 1\}$, $\{\{1\}\}$, $\{\{2\}\}$, $\{1\}$, $\emptyset$; в) подмножества: A, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $\varnothing$.

Задача 6. Вставьте между множествами символ $\in$ или $\subseteq$ так, чтобы получилось истинное высказывание: а) $\{1,2\}$? $\{1,2, \{1\}, \{2\}\}$; б) $\{1\}$? $\{1, \{1,2\}\}$; в) $\{1,2\}$? $\{1, 2, \{1,2\}\}$; г) $\varnothing$? $\{1,2,\{1\},\{\varnothing\}\}$; д) $\varnothing$? $\{\{\varnothing\}\}$; е) $\varnothing$? $\{\varnothing\}$.

Решение: а) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$; б) $\{1\} \subseteq \{1, \{1, 2\}\}$; в) $\{1, 2\} \subseteq$ $\subseteq \{1, 2, \{1, 2\}\}$, или $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$; г) $\varnothing \subseteq \{1, 2, \{1\}, \{\varnothing\}\}$; д) $\varnothing \subseteq$ $\subseteq \{\{\varnothing\}\}$; е) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$, или $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

Задача 7. Докажите следующее утверждение: $A \subset B$ и $B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$.

Решение. Пусть $x \in A \Rightarrow x \in B$ (так как $A \subset B$) $\Rightarrow x \in C$ (так как $B \subseteq C$) $\Rightarrow A \subseteq C$. Докажем теперь, что $A \neq C$. Так как $A \subset B$, то найдется $x \in B$, не принадлежащий $A \Rightarrow$ этот $x \in C$ (так как $B \subseteq C$). Поэтому $A \subset C$.

Задача 8. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\neg A$, $\neg B$ для а) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $U = \{0, 1, \ldots, 9\}$; б) $A = \{x \mid x$ делится на $2\}$, $B = \{x \mid x$ делится на $3\}$, $U = \mathbf{N}$ — множество натуральных чисел.

Решение: а) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A =$ $= \{4, 5\}$, $\neg A = \{0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\neg B = \{0, 1, 6, 7, 8, 9\}$; б) $A \cup B = \{x \mid x$ делится на 2 или на $3\}$, $A \cap B = \{x \mid x$ делится на $6\}$, $A \setminus B = \{x \mid x$ делится на 2 и не делится на $3\}$, $B \setminus A = \{x \mid x$ делится на 3 и не делится на $2\}$, $\neg A = \{x \mid x$ не делится на $2\}$, $\neg B = \{x \mid x$ не делится на $3\}$.

Задача 9. Докажите, что $\neg(A \setminus B) = \neg A \cup B$.

Доказательство. Пусть $x \in \neg(A \setminus B) \Leftrightarrow x \notin A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A$ и $x \in B)$ или $x \notin A \Leftrightarrow x \in A \cap B$ или $x \in \neg A \Leftrightarrow x \in \neg A \cup (A \cap B) = (\neg A \cup A) \cap (\neg A \cup B) =$ $= U \cap (\neg A \cup B) \Leftrightarrow x \in \neg A \cup B$.

Задача 10. Найдите множество X, удовлетворяющее следующему условию: $A \setminus (A \setminus X) = \varnothing$.

Решение. Из условия имеем $A \subseteq A \setminus X \Rightarrow A \cap X = \emptyset \Rightarrow$ наибольшее множество X, которое не имеет общих элементов с A, есть абсолютное дополнение к A, т. е. $X = \neg A$.

При решении задач подобного рода следует догадаться, каким будет искомое множество. Если имеется более одного уравнения для неизвестного множества, то ищите независимо решение для каждого уравнения, а общее решение есть пересечение найденных множеств. В любом случае найденное решение проверьте — подставьте найденное множество в уравнение (или уравнения).

Задача 11. Найдите соответствующее характеристическое свойство для каждого множества: а) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$; б) {м, о, н, е, ж, т, с, в}; в) $[-2, 3]$.

Решение: а) $\{x \mid x$ — простое число меньшее $20\}$; б) $\{x \mid x$ является буквой слова «множество»$\}$; в) $\{x \mid x \in [-2, 3]\}$.

Задача 12. Приведите пример множеств A, B и C таких, чтобы выполнялись условия $A \in B$, $B \notin C$, $A \subseteq C$.

Одно из решений: $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$, $C = \{1, 2\}$.

Задача 13. Доказать тождество $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Доказательство. (Используем тождества алгебры множеств и тот факт, что $X \setminus Y = X \cap \neg Y$ для произвольных X и Y.) $A \setminus (B \setminus C) = A \cap \neg(B \cap \neg C) =$ $= A \cap (\neg B \cup C)) = (A \cap \neg B) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

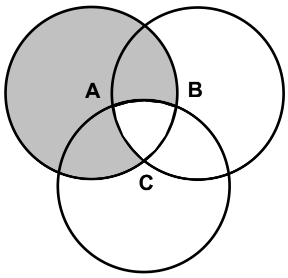
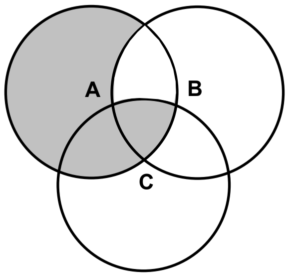
Задачи со словами «проверить тождество…» решаются так:

1) сначала ищется контрпример (как правило, с помощью диаграммы Эйлера), т. е. множества, для которых указанное тождество не выполняется; 2) если контрпример найден, то делаем заключение — тождество неверно; 3) если котрпример не найден, то следует доказать справедливость тождества.

Аналогично следует поступать, когда требуется проверить не тождество, а какое-то другое отношение.

Задача 14. Проверить булево тождество $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \setminus C)$.

Решение.

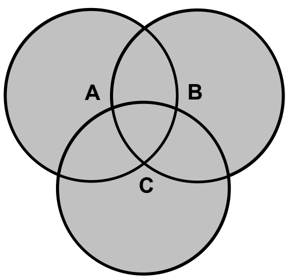
Диаграмма Эйлера для левого множества $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	Диаграмма Эйлера для правого множества $A \setminus (B \setminus C)$
	

Диаграммы показывают, что в данном частном случае множества $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ и $A \setminus (B \setminus C)$ не равны. Следовательно, равенство множеств $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \setminus C)$ не выполняется в общем случае.

Задача 15. Проверить булево тождество

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

Решение. Построим диаграмму Эйлера для левого множества:



Построим диаграмму Эйлера для множества $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$:

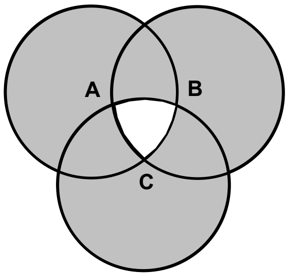
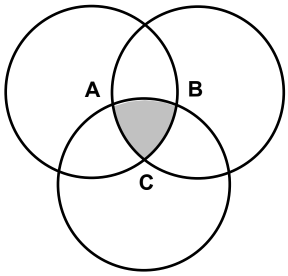
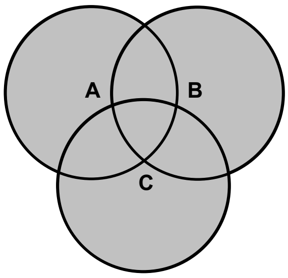


Диаграмма Эйлера для множества $(A \cap B \cap C)$ выглядит так:



Следовательно, диаграмма Эйлера для множества $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup$ $\cup\ (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$ получается как:



Таким образом, для данных множеств A, B и C тождество выполняется.

Докажем, что оно выполняется в общем случае. Поскольку $A \setminus B$, $B \setminus C$, $C \setminus A$ и $A \cap B \cap C$ являются подмножествами множества $A \cup B \cup C$, то объединение этих подмножеств также является подмножеством $A \cup B \cup C$. Таким образом, видим, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) \subseteq A \cup B \cup C$. Осталось доказать противоположное включение.

Пусть $x \in A \cup B \cup C$. Докажем, что

$$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

Мы можем считать, что $x \in A$, если это не так, то аналогичное рассуждение проходит для $x \in B$ или $x \in C$.

Итак, пусть $x \in A$; имеется два варианта: a) $x \notin B$ и b) $x \in B$.

Вариант a. Если $x \notin B$, то $x \in A \setminus \mathrm{B}$ и, следовательно,

$$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

Утверждение доказано.

Вариант b. Имеем $x \in B$. Здесь снова имеется два варианта: $b1$) $x \notin C$ и $b2$) $x \in C$.

Подвариант $b1$. Имеем $x \in B$ и $x \notin C$, тогда $x \in B \setminus C$, и, следовательно, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$. Утверждение доказано.

Подвариант $b2$. Имеем $x \in C$, $x \in B$ и $x \in A$, тогда $x \in A \cap B \cap C$, и, следовательно, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$. Утверждение доказано.

Задача 16. Проверить, что $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \neg B \cup C$.

Решение. Сначала следует попробовать опровергнуть это утверждение, т. е. найти такие множества A, B и C, чтобы выполнялось отношение $A \cap B \subseteq C$, но не выполнялось $A \subseteq \neg B \cup C$, или, наоборот, выполнялось $A \subseteq \neg B \cup C$ и не выполнялось $A \cap B \subseteq C$. После безуспешных попыток найти такие множества следует доказать данное утверждение.

Доказательство распадается на два этапа.

1. Докажем сначала, что $A \cap B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq \neg B \cup C$. Таким образом, пусть $A \cap B \subseteq C$ выполнено, докажем, что $A \subseteq \neg B \cup C$. Поскольку требуется доказать включение множеств, то возьмем произвольный элемент $x \in A$ и убедимся, что $x \in \neg B \cup C$. Элемент x может принадлежать B и может не принадлежать B. Если $x \in B$, то $x \in A \cap B$. Так как дано, что $A \cap B \subseteq C$, то получаем $x \in C$ и, тем более, $x \in \neg B \cup C$. Теперь рассмотрим случай, когда $x \notin B$, тогда $x \in \neg B$ и, тем более, $x \in \neg B \cup C$.

2. Докажем теперь, что $A \subseteq \neg B \cup C \Rightarrow A \cap B \subseteq C$. Таким образом, пусть $A \subseteq \neg B \cup C$ выполнено, докажем, что $A \cap B \subseteq C$. Поскольку требуется доказать включение множеств, то возьмем произвольный элемент $x \in A \cap B$ и убедимся, что $x \in C$. Имеем, если $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и, по условию, $x \in \neg B \cup C$. Так как одновременно $x \in B$, то $x \notin \neg B$ и, следовательно, $x \in C$. Доказательство закончено.

Задача 17. Проверить тождество $A \ \Delta \ (B \ \Delta \ C) = (A \ \Delta \ B) \ \Delta \ C$.

Решение. Сначала следует попробовать опровергнуть это утверждение, т. е. найти такие множества A, B и C, чтобы диаграммы Эйлера для множеств $A \Delta (B \Delta C)$ и $(A \Delta B) \Delta C$ были разные. После безуспешных попыток найти такие множества следует доказать данное утверждение.

Используя основные тождества алгебры множеств, преобразуем левую и правую часть к одному множеству.

1. Начнем с левой части. $A \ \Delta \ (B \ \Delta \ C)$ = (по определению Δ) $(A \setminus (B \Delta C)) \cup ((B \Delta C) \setminus A) = (A \cap \neg(B \Delta C)) \cup ((B \Delta C) \cap \neg A)$ = (по определению Δ) $(A \cap \neg((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B))) \cup (((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B)) \cap$ $\cap \neg A)$. Преобразуем отдельно множества $(A \cap \neg((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B)))$ и $(((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B)) \cap \neg A)$.

a) $(A \cap \neg((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B))$ = (закон де Моргана) $(A \cap (\neg(B \cap$ $\cap \neg C) \cap \neg(C \cap \neg B))$ = (по закону де Моргана) $(A \cap ((\neg B \cup \neg\neg C) \cap (\neg C \cup$ $\cup \neg\neg B)) = (A \cap ((\neg B \cup C) \cap (\neg C \cup B))$ = (многократно применяя закон дистрибутивности) $(A \cap \neg B \cap \neg C) \cup (A \cap \underline{\neg B \cap B}) \cup (A \cap \underline{C \cap \neg C})) \cup (A \cap$ $\cap C \cap B)$ = (так как подчеркнутые множества — пустые) $(A \cap \neg B \cap \neg C) \cup$ $\cup (A \cap C \cap B)$.

b) Аналогично преобразуя множество $((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B)) \cap \neg A$, получаем множество $(\neg A \cap B \cap \neg C) \cup (\neg A \cap C \cap \neg B)$. Таким образом, левая часть преобразована к множеству

$$(A \cap \neg B \cap \neg C) \cup (A \cap C \cap B) \cup (\neg A \cap B \cap \neg C) \cup (\neg A \cap C \cap \neg B).$$

2. Теперь преобразуем правую часть. $(A \Delta B) \Delta C$ = (так как операция Δ коммутативна) $C \Delta (B \Delta A)$. Последнее множество совпадает с множеством $A \Delta (B \Delta C)$ при взаимной замене переменных A и C. Поэтому заключаем, что $(A \Delta B) \Delta C$ преобразуется к множеству, полученному из

$$(A \cap \neg B \cap \neg C) \cup (A \cap C \cap B) \cup (\neg A \cap B \cap \neg C) \cup (\neg A \cap C \cap \neg B)$$

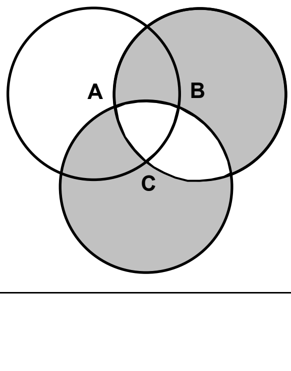
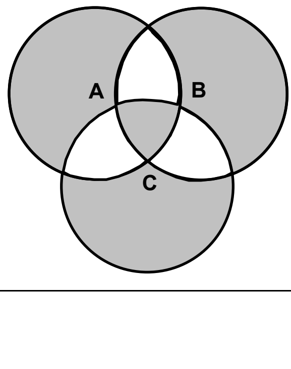
при взаимной замене переменных A и C. Таким образом, $(A \Delta B) \Delta C =$ $= (C \cap \neg B \cap \neg A) \cup (C \cap A \cap B) \cup (\neg C \cap B \cap \neg A) \cup (\neg C \cap A \cap \neg B)$.

Множества, полученные в результате преобразования левой и правой части, совпали (если учитывать коммутативность пересечения и объединения). Следовательно, тождество доказано.

Задача 18. Проверить тождество

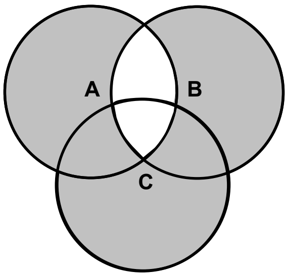
$$A \Delta (B \Delta C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B) \setminus (A \cap C) \setminus (B \cap C).$$

Решение. Построим диаграмму Эйлера для левого множества в два этапа:

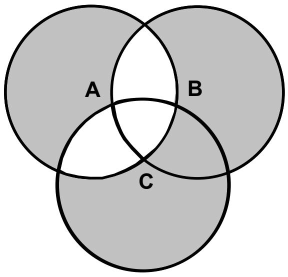
Диаграмма для множества $B \Delta C$	Диаграмма для множества $A \Delta (B \Delta C)$
	

Теперь построим диаграмму для правого множества в три этапа:

<table>
<tr><th>Диаграмма для множества
$(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B)$</th><th>Диаграмма для множества
$(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B) \setminus (A \cap C)$</th></tr>
<tr><td>



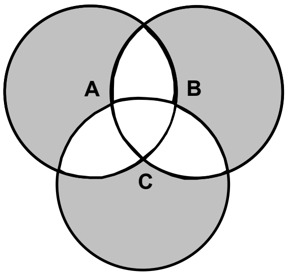
</td><td>



</td></tr>
</table>

И окончательная диаграмма для множества

$$(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B) \setminus (A \cap C) \setminus (B \cap C):$$



Диаграммы показывают, что в данном частном случае множества $A \Delta (B \Delta C)$ и $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B) \setminus (A \cap C\ ) \setminus (B \cap C)$ не равны. Следовательно, тождество не выполняется в общем случае.

2.2 Отношения

Задача 19. Пусть $A = \{0, 1\}$. Перечислите элементы множеств A^2, A^3.

Решение. $A^2 = \{<0, 0>, <0, 1>, <1, 0>, <1, 1>\}$; $A^3 = \{<0, 0, 0>, <0, 0, 1>, <0, 1, 0>, <0, 1, 1>, <1, 0, 0>, <1, 0, 1>, <1, 1, 0>, <1, 1, 1>\}$.

Задача 20. Определим упорядоченную пару $<a, b>$ как множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Убедимся, что такое формальное теоретико-множественное определение вполне соответствует нашему неформальному определению упорядоченной пары. Для этого достаточно доказать, что для любых элементов $<a, b> = <c, d>$ тогда и только тогда, когда $a = c, b = d$.

Решение. Доказательство. Пусть $<a, b> = <c, d> \Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow$ множества должны быть поэлементно равны и равенство возможно только в ситуации $\{a\} = \{c\}$ и $\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow a = c$ и $\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow a = c$ и $b = d$.

Задача 21. Пусть $A \subseteq C$, $B \subseteq C$. Докажите, что

$$A \times B = (A \times C) \cap (C \times B).$$

Решение. Пусть $<a, b> \in A \times B \Rightarrow a \in A, b \in B \Rightarrow (a \in A, b \in C)$ и $(a \in C, b \in B)$ (так как, $A \subseteq C, B \subseteq C$) $\Rightarrow <a, b> \in A \times C$ и $<a, b> \in C \times B \Rightarrow$ $<a, b> \in (A \times C) \cap (C \times B)$. Наоборот, пусть $<a, b> \in (A \times C) \cap (C \times B) \Rightarrow$ $<a, b> \in A \times C, <a, b> \in C \times B \Rightarrow a \in A, b \in B \Rightarrow <a, b> \in A \times B$.

Задача 22. Докажите, что подмножество C множества $A \times B$ является прямым произведением некоторого подмножества $A1$ множества A и подмножества $B1$ множества B тогда и только тогда, когда для любых $<a, b> \in C$, $<c, d> \in C$ следует, что $<a, d>, <c, b> \in C$.

Доказательство. Пусть $A1 \subseteq A$, $B1 \subseteq B$, $C = A1 \times B1$. Возьмем $<a, b> \in C, <c, d> \in C \Rightarrow a, c \in A1, b, d \in B1 \Rightarrow <a, d>, <c, b> \in A1 \times B1 = C$. Наоборот, пусть выполнено условие: для любых $<a, b> \in C$, $<c, d> \in C$ следует, что $<a, d>, <c, b> \in C$. Докажем теперь, что в качестве $A1$ и $B1$ можно взять соответственно область определения D и область значения R отношения, которое задается множеством пар C. Пусть $<a, d> \in D \times R \Rightarrow$ существуют такие b и c, что $<a, b> \in C$ и $<c, d> \in C$ (это выполняется по определению D и R) $\Rightarrow <a, d> \in C \Rightarrow D \times R \subseteq C$. Отношение $C \subseteq D \times R$ очевидно выполняется, поэтому $D \times R = C$.

Задача 23. Пусть A, B, C, D — непустые множества. Докажите, что а) $A \subseteq B$ и $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$, б) $A \times C = B \times D \Leftrightarrow A = B$ и $C = B$.

Решение. а) Пусть $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$. Тогда $<a, c> \in A \times C \Rightarrow a \in A$, $c \in C \Rightarrow a \in B, c \in D$ (так как $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$) $\Rightarrow <a, c> \in B \times D$. В другую сторону. Пусть $A \times C \subseteq B \times D$. Тогда $a \in A, c \in C \Rightarrow <a, c> \in A \times C \Rightarrow <a, c> \in B \times D \Rightarrow a \in B, c \in D \Rightarrow A \subseteq B$ и $C \subseteq D$. Случай б) является следствием а).

Задача 24. Докажите тождество $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Доказательство. $<x, y> \in (A \setminus B) \times C \Leftrightarrow x \in A \setminus B, y \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$ и $y \in C \Leftrightarrow <x, y> \in A \times C$ и $<x, y> \notin B \times C \Leftrightarrow <x, y> \in (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Задача 25. Докажите, что $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Доказательство. $<x, y> \in (A \times B) \cup (C \times D) \Rightarrow <x, y> \in A \times B$ или $<x, y> \in C \times D \Rightarrow (x \in A$ или $x \in C)$ и $(y \in B$ или $y \in D)$, что влечет желаемый результат $<x, y> \in (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Задача 26. Пусть **R** есть множество вещественных чисел. Для каждого из следующих подмножеств X множества $\mathbf{R}^2$ определите, является ли оно декартовым произведением двух подмножеств из R.

(a) $\{<x, y> \mid x$ — целое число$\}$.

(b) $\{<x, y> \mid 0 \leq y \leq 1\}$.

(c) $\{<x, y> \mid y > x\}$.

(d) $\{<x, y> \mid x$ — не целое число и y — целое число$\}$.

(e) $\{<x, y> \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

Решение.

(a) $X = \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$, где **Z** — множество целых чисел.

(b) $X = \mathbf{R} \times [0,1]$.

(c) Воспользуемся утверждением, доказанным в задаче 22. Имеем $<3, 5>$ и $<1, 2>$ принадлежат X, но $<3, 2>$ не принадлежит X. Поэтому X не может быть декартовым произведением двух подмножеств **R**.

(d) $X = (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}$, где **Z** — множество целых чисел.

(e) Воспользуемся утверждением, доказанным в задаче 22. Имеем пары $<0, 1/\sqrt{2}>$ и $<1/\sqrt{2}, 0>$ принадлежат X, но $<1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}>$ не принадлежит X. Поэтому X не может быть декартовым произведением двух подмножеств **R**.

Задача 27. Для бинарного отношения $\rho = \{<x, y> \mid x^2 + y^2 < 1\}$ найдите D_ρ и R_ρ.

Решение. $D_\rho = \{x|$ существует y такой, что $x^2 + y^2 < 1\} = \{x \mid -1 < x < 1\}$. Точно так же $R_\rho = \{y \mid -1 < y < 1\}$.

Задача 28. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{3\}\}$. Для бинарного отношения $\rho = \{<a, X> \in A \times B \mid a \in X\}$ найдите D_ρ и R_ρ.

Решение. $D_\rho = \{a \in A \mid$ существует $X \in B$ такой, что $a \in X\} = \{1, 2, 3,5\}$. $R_\rho = \{X \in B \mid$ существует элемент $a \in A$ такой, что $a \in X\} = B$.

Задача 29. Какими свойствами обладает отношение $x\ \rho\ y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$, определенное на множестве действительных чисел?

Решение. Имеем а) для любого x выполнено $x^2 + x = x^2 + x \Rightarrow \rho$ рефлексивно; б) если $x^2 + x = y^2 + y \Rightarrow y^2 + y = x^2 + x \Rightarrow \rho$ симметрично; в) $x^2 + x = y^2 + y$ и $y^2 + y = z^2 + z \Rightarrow x^2 + x = z^2 + z \Rightarrow \rho$ транзитивно; г) проверим антисимметричность: имеем $2^2 + 2 = (-3)^2 + (-3)$ и 2 не равно $-3 \Rightarrow \rho$ не антисимметрично.

Ответ: отношение рефлексивно, симметрично, транзитивно, не антисимметрично.

Задача 30. Какими свойствами обладает отношение ρ, определенное на множестве всех прямых плоскости: $x\ \rho\ y \Leftrightarrow x$ пересекается с y?

Ответ: отношение рефлексивно, симметрично, не транзитивно, не антисимметрично.

Задача 31. Какими свойствами обладает отношение ρ, определенное на множестве всех прямых плоскости: $x\ \rho\ y \Leftrightarrow x$ не пересекается с y?

Ответ: отношение не рефлексивно, симметрично, не транзитивно, не антисимметрично.

Задача 32. Пусть ρ — отношение на множестве X. Докажите:

а) ρ симметрично $\Leftrightarrow \rho^{-1} = \rho$;

б) ρ транзитивно $\Leftrightarrow \rho \circ \rho \subseteq \rho$;

в) ρ рефлексивно $\Rightarrow \rho \subseteq \rho \circ \rho$;

г) ρ рефлексивно и транзитивно $\Rightarrow \rho = \rho \circ \rho$.

Доказательство.

а) Пусть ρ симметрично. Возьмем $<x, y> \in \rho^{-1} \Leftrightarrow <y, x> \in \rho$ (по определению ρ^{-1}) $\Leftrightarrow < x, y> \in \rho$ (так как ρ симметрично). Пусть теперь $\rho^{-1} = \rho$. Тогда, $<x, y> \in \rho \Leftrightarrow <x, y> \in \rho^{-1} \Leftrightarrow <y, x>\in\rho \Leftrightarrow \rho$ симметрично.

б) Пусть ρ транзитивно. Тогда $<x, y> \in \rho \circ \rho \Rightarrow$ существует такое z, что $<x, z> \in \rho$ и $<z, y> \in \rho \Rightarrow <x, y> \in \rho$ (так как ρ транзитивно). Пусть теперь $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. Тогда $<x, y> \in \rho$, $<y, z> \in \rho \Rightarrow <x, z> \in \rho \circ \rho \Rightarrow <x, z> \in \rho$ (по условию, $\rho \circ \rho \subseteq \rho$) $\Rightarrow \rho$ транзитивно.

в) Пусть ρ рефлексивно. Тогда $<x, y> \in \rho \Rightarrow <x, x> \in \rho$ (так как ρ рефлексивно) и $<x, y> \in \rho \Rightarrow <x, y> \in \rho \circ \rho$ (по определению композиции отношений).

г) Это утверждение следует из б) и в).

Задача 33. Какова характеристическая особенность декартовой диаграммы рефлексивного (симметричного, антисимметричного) отношения, определенного на множестве вещественных чисел **R**?

Решение. Декартова диаграмма отношения ρ — это множество таких точек (x, y) плоскости, что $<x, y> \in \rho$. Поэтому для рефлексивного отношения декартова диаграмма содержит прямую $y = x$; для симметричного отношения декартова диаграмма симметрична относительно прямой $y = x$; для антисимметричного отношения декартова диаграмма не содержит ни одной пары точек (x, y) и (y, x), $x \neq y$, симметричных относительно биссектрисы первой четверти.

Задача 34. Пусть $\rho_1 = \{<x, y> \in R \times R \mid x \times y > 0\}$, $\rho_2 = \{<x, y> \in R \times R \mid x + y$ — целое число$\}$. Найти $\rho_1 \circ \rho_2$.

Решение. $\rho_1 \circ \rho_2 = \{<x, y> \mid$ существует такое z, что $<x, z> \in \rho_2$ и $<z, y> \in \rho_1\} = \{<x, y> \mid$ существует такое z, что $x + z$ — целое число и $z \times y > 0\}$. Если $y \neq 0$, то такое z всегда найдется. Поэтому $\rho_1 \circ \rho_2 = \mathrm{R} \times (\mathrm{R} \setminus \{0\})$.

Задача 35. Пусть $\rho_1 = \{<x, y> \in R \times R \mid x \times y > 0\}$, $\rho_2 = \{<x, y> \in R \times R \mid x = y^2\}$. Найти $\rho_1 \circ \rho_2$.

Решение. $\rho_1 \circ \rho_2 = \{<x, y> \mid$ существует такое z, что $<x, z> \in \rho_2$ и $<z, y> \in \rho_1\} = \{<x, y> \mid$ существует такое z, что $x = z^2$ и $z \times y > 0\} = \{<x, y> \mid x > 0 \,\&\, y \neq 0\}$.

Задача 36. Пусть ρ и φ — бинарные отношения, определенные на некотором множестве. Тогда $(\varphi \setminus \rho)^{-1} = \varphi^{-1} \setminus \rho^{-1}$.

Доказательство. Пусть $<x, y> \in (\varphi \setminus \rho)^{-1} \Leftrightarrow <y, x> \in \varphi \setminus \rho \Leftrightarrow <y, x> \in \varphi$ и $<y, x> \notin \rho \Leftrightarrow <x, y> \in \varphi^{-1}$ и $<x, y> \notin \rho^{-1} \Leftrightarrow <x, y> \in \varphi^{-1} \setminus \rho^{-1}$.

Задача 37. Пусть $x \,\rho\, y \Leftrightarrow x^2 = y^2$. Определите ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$.

Решение. Отношение ρ — рефлексивное, симметричное и транзитивное. Поэтому (см. задачу 32) $\rho^{-1} = \rho$, $\rho \circ \rho = \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1} = (\rho \circ \rho)^{-1} = \rho$.

Задача 38. Пусть ρ — бинарное отношение на A и $e = \{<x, x> \mid x \in A\}$. Доказать, что $\rho = e \Leftrightarrow \rho \circ \varphi = \varphi \circ \rho = \varphi$ для любого отношения φ на A.

Доказательство. Пусть $\rho \circ \varphi = \varphi \circ \rho = \varphi$ для любого отношения φ на $A \Rightarrow$ для $\varphi = e$ имеем $\rho = \rho \circ e = e$ (по определению e и по условию). Обратно, по определению e, имеем $e \circ \varphi = \varphi \circ e = e$ для любого отношения φ на A.

Задача 39. Какое обратное отношение к отношению «быть отцом»?

Решение. Имеем $<x, y> \in \rho \Leftrightarrow$ «x — отец y» $\Leftrightarrow <y, x> \in \rho^{-1} \Leftrightarrow$ «y — отец x». Поэтому обратное отношение есть «x — сын или дочь мужчины y».

Задача 40. Построить композицию следующих отношений («Быть A» означает «x является A для y»): быть родителем, быть отцом. Рассмотрите две различные композиции в зависимости от порядка членов.

Решение. Имеем $<x, y> \in \rho \Leftrightarrow$ «x — родитель y», $<x, y> \in \varphi \Leftrightarrow$ «x — отец y». Поэтому $\varphi \circ \rho = \{<x, y> \mid$ существует z такой, что $<x, z> \in \rho$ и $<z, y> \in \varphi\} = \{<x, y> \mid$ существует z такой, что x — родитель z и z — отец $y\} = \{<x, y> \mid x$ — родитель отца $y\}$, $\rho \circ \varphi = \{<x, y> \mid$ существует z такой, что

$<x, z> \in \varphi$ и $<z, y> \in \rho\} = \{<x, y> \mid$ существует z такой, что x — отец z и z — родитель $y\} = \{<x, y> \mid x$ — дедушка $y\}$.

Задача 41. На множестве $S = \{1, 3, 6, 9\}$ задано отношение R, определяемое как $<m, n> \in R$ тогда и только тогда, когда $m + n$ — четное число.

А) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар.

Б) Является ли отношение R:

1) рефлексивным?

2) симметричным?

3) транзитивным?

4) антисимметричным?

Решение. А) $R = \{<1, 3>, <3, 1>, <1, 1>, <3, 3>, <9, 9>, <9, 1>, <9, 3>, <3, 9>\}$. Б) Отношение R — не рефлексивно, так как, например, $<6, 6> \notin R$. Отношение R — симметричное. Отношение R — транзитивное, чтобы убедиться в этом, достаточно перебрать все пары. Отношение R — не антисимметричное, так как $<3, 1>, <3, 1> \in R$, но $1 \neq 3$.

2.3 Отображения

Задача 42. Укажите все сюръективные отображения множества $A = \{1, 2, 3\}$ на множество $B = \{a, b\}$. Решение удобно изобразить диаграммой (рис. 1).

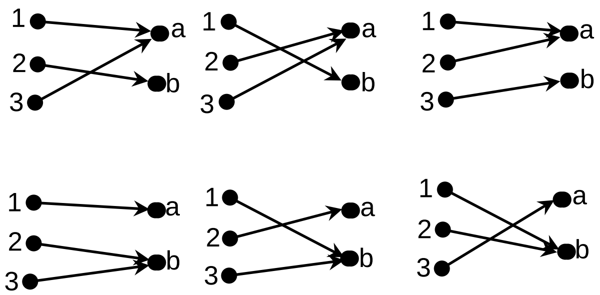


Рис. 1 — Все сюръективные отображения f: $A \to B$

Задача 43. Найдите все отображения множества $A = \{1, 2\}$ в себя, укажите, какие из них инъективные, сюръективные.

Решение удобно изобразить диаграммой (рис. 2).

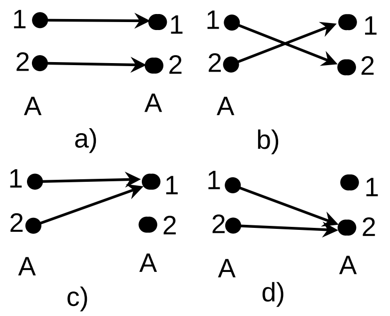


Рис. 2 — Все отображения *A* в себя:

а) и b) инъективные и сюръективные отображения;

c) и d) отображения, которые не являются ни сюръективными,

ни инъективными

Задача 44. Пусть X — конечное множество и отображение f: $X \to X$ инъективно. Доказать, что тогда f биективно.

Доказательство. Достаточно показать, что отображение сюръективно, т. е. область значений совпадает с X. Из конечности и инъективности отображения f следует, что количество элементов во множестве значений должно быть такое же, как и в X, но это множество значений является подмножеством X, поэтому любой элемент из X должен быть значением некоторого элемента при отображении f.

Задача 45. Характеристическая функция множества A определяется следующим образом

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A \\ 0, \text{ если } x \notin A \end{cases}$$

Доказать:

a) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\,\chi_B(x)$;

b) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\,\chi_B(x)$;

c) $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$;

d) $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x)\,\chi_B(x)$.

Доказательство.

a) Пусть $x \in A \cap B \Rightarrow \chi_{A\cap B}(x)=1$. С другой стороны, $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A,\ x \in B \Rightarrow \chi_A(x)\,\chi_B(x) = 1\times 1 = 1$. Пусть $x \notin A \cap B \Rightarrow \chi_{A\cap B}(x) = 0$. С другой стороны, $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ или $x \notin B \Rightarrow \chi_A(x)\,\chi_B(x) = 0$.

c) Очевидно, так как $x \in A \Leftrightarrow x \notin \neg A$.

b) Из *a*) и *c*) и $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_C(x)$, где $C = \neg(\neg A \cap \neg B)$, следует, что $\chi_{A\cup B}(x) = 1 - \chi_{\neg A\cap\neg B}(x) = 1 - (1 - \chi_A(x))\,(1 - \chi_B(x)) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\,\chi_B(x)$.

d) Доказывается аналогично.

Для задач с образами и прообразами множеств при отображениях во многих случаях достаточно руководствоваться следующими свойствами.

Пусть $f\colon X \to Y$ и $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$, тогда имеем:

a) $y \in f(A) \Leftrightarrow$ существует такой $x \in A$, что $y = f(x)$;

b) $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$;

c) $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$ (обратное утверждение в общем случае не выполняется).

Задача 46. Пусть $f\colon X \to Y$ и A, B — подмножества Y. Доказать, что $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Доказательство. $X \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A$ или $f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ или $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Задача 47. Пусть $A = \{a_1, a_2,\dots, a_n\}$ — конечное множество. Определим отображение

$f\colon P(A) \to \{0, 1\}^n$ следующим образом:

$f(B) = \langle\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_n\rangle$, где $\alpha_i = 0$, если $a_i \notin B$, и $\alpha_i = 1$, если $a_i \in B$.

Докажите, что f — биекция.

Доказательство. Докажем сначала, что f — сюръективное отображение. Пусть $<\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n> \in \{0, 1\}^n$. Нетрудно видеть, что если возьмем в качестве B множество тех элементов $a_i \in A$, для которых $\alpha_i = 1$, то $f(B) =$ $= <\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n>$. Теперь докажем инъективность. Пусть B_1 и B_2 — два различных непустых подмножества $A \Rightarrow$ существует элемент $a_i \in A$, $a_i \in (B_1 \cup$ $\cup B_2) \setminus (B_1 \cap B_2) \Rightarrow \alpha_i = 1$ принадлежит $f(B_1)$ или $f(B_2)$, но не одновременно $\Rightarrow$ $f(B_1) \neq f(B_2)$. Если же, скажем, B_1 — пустое множество, а B_2 — нет, то $f(B_1)$ состоит из одних нулей, $f(B_2)$ — нет. Биективность f доказана.

Задача 48. Найдите прообраз множества $\{0\}$ при следующих отображениях $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $x \to \sin(x)$;

b) $x \to \lg(x^2+1)$;

c) $x \to x^2+2x+1$.

Решение. $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = 0\}$. Поэтому: *a*) $\{\pi n \mid n$ — целое$\}$; *b*) $\{0\}$; *c*) $\{-1\}$.

Задача 49. Какие отображения инъективны, сюръективны?

a) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\to x^2 + 3x + 5$;

b) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\to x^{15}(x^2 - 1)$;

c) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\to 2^{3x+1}$;

d) f: $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $<a, b> \to a + b$, $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел;

e) f: $\mathbf{Z}\to \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, $a \to <a, a>$;

f) f: $P(A) \to \mathbf{N}$, $f(X)$ = количество элементов в X, $\mathbf{N}$ — множество неотрицательных целых чисел, A — конечное множество.

Решение.

a) f — не сюръективно (не принимает значения меньшие минимума функции), не инъективно (любое значение принимает в двух точках);

b) f — сюръективно (так как $\lim f$ в $+\infty$ и $-\infty$ равен соответственно $+\infty$ и $-\infty$, т. е. функция пробегает все значения), не инъективно, так как $f(-1) = f(1) = 0$;

c) f — не сюръективна (так как всегда больше 0), инъективна (существует обратная функция на положительной оси);

d) f — сюръективна, но не инъективна, так как любое целое число можно несколькими способами представить в виде суммы двух слагаемых;

e) f — не сюръективна, инъективна;

f) f — не сюръективна (значение $f(X)$ не может быть больше количества элементов в A), не инъективна, если A содержит более одного элемента (значения f совпадают на подмножествах A с одинаковым количеством элементов).

2.4 Эквивалентность и порядок

Задача 50. Пусть отношение ρ определено на множестве $\mathbf{N}^2$ ($\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел $\{1, 2, 3,\ldots\}$): $\langle x, y\rangle \,\rho\, \langle u, v\rangle \Leftrightarrow x + v = y + u$. Доказать, что ρ — отношение эквивалентности.

Доказательство. Для любого $\langle x, y\rangle \in \mathbf{N}^2$ имеем $x + y = y + x \Rightarrow \rho$ рефлексивно. Пусть $\langle x, y\rangle \,\rho\, \langle u, v\rangle \Rightarrow x + v = y + u \Rightarrow u + y = v + x \Rightarrow \langle u, v\rangle \,\rho\, \langle x, y\rangle \Rightarrow \rho$ симметрично. Пусть $\langle x, y\rangle \,\rho\, \langle u, v\rangle$ и $\langle u, v\rangle \,\rho\, \langle w, z\rangle \Rightarrow x + v = y + u$ и $u + z = v + w \Rightarrow$ (сложим два равенства почленно) $x + z = y + w \Rightarrow \langle x, y\rangle \,\rho\, \langle w, z\rangle \Rightarrow \rho$ транзитивно. Доказательство закончено.

Задача 51. Если ρ и φ — отношения эквивалентности на X, то $\rho \cap \varphi$ также отношение эквивалентности на X.

Доказательство. Для любого $x \in X$ имеем $\langle x, x\rangle \in \rho$ и $\langle x, x\rangle \in \varphi$ (из-за рефлексивности ρ и φ) $\Rightarrow \langle x, x\rangle \in \rho \cap \varphi \Rightarrow \rho \cap \varphi$ рефлексивно. Пусть $\langle x, y\rangle \in \rho \cap \varphi \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \rho$ и $\langle x, y\rangle \in \varphi \Rightarrow \langle y, x\rangle \in \rho$ и $\langle y, x\rangle \in \varphi$ (из-за симметричности ρ и φ) $\Rightarrow \langle y, x\rangle \in \rho \cap \varphi \Rightarrow \rho \cap \varphi$ симметрично.

Пусть $<x, y> \in \rho \cap \varphi$ и $<y, z> \in \rho \cap \varphi \Rightarrow <x, y> \in \rho$, $<x, y> \in \varphi$, $<y, z> \in \rho$, $<y, z> \in \varphi \Rightarrow <x, z> \in \rho$ $<x, z> \in \varphi$ (из-за транзитивности ρ и φ) $\Rightarrow <x, z> \in \rho \cap \varphi \Rightarrow$ $\rho \cap \varphi$ транзитивно $\Rightarrow \rho \cap \varphi$ — отношение эквивалентности.

Задача 52. Если ρ и φ — отношения эквивалентности на X, то $\rho \cup \varphi$ — отношение эквивалентности на $X \Leftrightarrow \rho \cup \varphi = \rho \circ \varphi$.

Доказательство. а) Пусть $\rho \cup \varphi$ — отношение эквивалентности на X, докажем, что $\rho \cup \varphi = \rho \circ \varphi$. Пусть $<x, y> \in \rho \cup \varphi \Rightarrow <x, y> \in \rho$ или $<x, y> \in$ $\in \varphi \Rightarrow$ для определенности будем считать, что $<x, y> \in \rho$ (точно так же доказывается в случае $<x, y> \in \varphi$) $\Rightarrow <x, x> \in \varphi$ (так как φ рефлексивно) и $<x, y> \in \rho \Rightarrow <x, y> \in \rho \circ \varphi$ (по определению композиции). В обратную сторону, из $<x, y> \in \rho \circ \varphi \Rightarrow$ существует такой $z \in X$, что $<x, z> \in \varphi$ и $<z, y> \in \rho \Rightarrow$ $<x, z> \in \varphi \cup \rho$ и $<z, y> \in \rho \cup \varphi \Rightarrow <x, y> \in \rho \cup \varphi$ (поскольку $\rho \cup \varphi$ — отношение эквивалентности и, следовательно, транзитивно).

б) Пусть $\rho \cup \varphi = \rho \circ \varphi$ (поскольку ρ и φ входят в $\rho \cup \varphi$ симметричным образом, то также имеем $\rho \cup \varphi = \varphi \circ \rho$), докажем, что $\rho \cup \varphi$ — отношение эквивалентности на X. Имеем $(\rho \cup \varphi)^{-1} = (\rho \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \rho^{-1} = \varphi \circ \rho =$ $= \varphi \cup \rho = \rho \cup \varphi \Rightarrow \rho \cup \varphi$ симметрично (см. задачу 32 из примеров задач с отношениями). Докажем транзитивность $\rho \cup \varphi$, для этого убедимся (снова задача 32), что $(\rho \cup \varphi) \circ (\rho \cup \varphi) \subseteq \rho \cup \varphi$. Имеем $(\rho \cup \varphi) \circ (\rho \cup \varphi) = (\rho \circ \varphi) \circ (\rho \circ \varphi) =$ $=$ (используем ассоциативность композиции) $\rho \circ (\varphi \circ \rho) \circ \varphi = \rho \circ (\rho \circ \varphi) \circ \varphi =$ $= (\rho \circ \rho) \circ (\varphi \circ \varphi) = \rho \circ \varphi$. Осталось теперь доказать, что $\rho \cup \varphi$ рефлексивно. Пусть $x \in X \Rightarrow <x, x> \in \rho$ и $<x, x> \in \varphi$ (так как φ и ρ рефлексивны) $\Rightarrow$ $<x, x> \in \rho \cup \varphi$. Доказательство закончено.

Задача 53. Если ρ — частичный порядок на X, то ρ^{-1} также частичный порядок на X.

Доказательство. Рефлексивность: $<x, x> \in \rho \Leftrightarrow <x, x> \in \rho^{-1}$. Антисимметричность: пусть $<x, y> \in \rho^{-1}$ и $<y, x> \in \rho^{-1} \Rightarrow <y, x> \in \rho$ и $<x, y> \in \rho \Rightarrow$

$x = y$. Транзитивность: пусть $<x, y> \in \rho^{-1}$ и $<y, z> \in \rho^{-1} \Rightarrow <y, x> \in \rho$ и $<z, y> \in \rho \Rightarrow <z, x> \in \rho \Rightarrow <x, z> \in \rho^{-1}$.

Задача 54. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. На множестве $P(A)$ задано бинарное отношение $X \rho Y \Leftrightarrow$ «множества X и Y имеют равное количество элементов». Докажите, что это отношение эквивалентности, и найдите классы эквивалентности.

Решение. Рефлексивность: $X \rho X$ для любого подмножества A. Симметричность: $X \rho Y \Leftrightarrow$ «множества X и Y имеют равное количество элементов» $\Leftrightarrow Y \rho X$. Транзитивность: $X \rho Y$ и $Y \rho Z \Leftrightarrow$ «множества X и Y имеют равное количество элементов» и «множества Z и Y имеют равное количество элементов» $\Rightarrow$ «множества X и Z имеют равное количество элементов» $\Rightarrow X \rho Z$. Классы эквивалентности: $\{A\}$, $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\varnothing$.

Задача 55. Докажите, что $M = \{\{1\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4, 6, 7\}\}$ — разбиение множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Перечислите все элементы отношения эквивалентности ρ, соответствующего разбиению M.

Решение. Каждый элемент из A принадлежит какому-то элементу из M, причем только одному, следовательно, M — разбиение A. $\rho = \{<1, 1>, <2, 2>, <5, 5>, <2, 5>, <5, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <6, 6>, <7, 7>, <4, 7>, <7 ,4>, <4, 6>, <6, 4>, <6, 7>, <7, 6>\}$.

Задача 56. Докажите, что отношение делимости на множестве натуральных чисел **N** является отношением частичного порядка. Является ли это отношение линейным порядком? Является ли отношением частичного порядка отношение делимости на множестве целых чисел **Z**?

Решение. Для краткости вместо «a делит b (a делитель b)» будем писать $a|b$. Рефлексивность: $a|a$. Антисимметричность: $a|b$ и $b|a \Rightarrow a = b$ (так как для натуральных чисел $a|b \Rightarrow a \le b$). Транзитивность: $a|b$ и $b|c \Rightarrow a|c$. Отношение делимости является частичным порядком на множестве **N**.

Линейным порядком не является, так как, например, ложно 2|3 и ложно 3|2.

Отношение делимости на множестве целых чисел **Z** не является отношением частичного порядка — не выполнена антисимметричность: 1|–1 и –1|1.

Задача 57. Построить линейный порядок: а) на множестве $\mathbf{N}^2$; б) на множестве $\mathbf{N} \cup \mathbf{N}^2 \cup \ldots \cup \mathbf{N}^k \cup \ldots$ = {все конечные последовательности из натуральных чисел}.

Решение. а) Определим отношение линейного порядка ρ на $\mathbf{N}^2$ следующим образом: $\langle x, y\rangle \ \rho \ \langle z, w\rangle \Leftrightarrow (x < z) \vee ((x = z) \ \& \ (y \le w))$. б) Отношением частичного порядка на множестве всех конечных последовательностей натуральных чисел будет лексикографический порядок.

Задача 58. Пусть $T = \{5, 3, 7\}$. На множестве $T \times T$ задано отношение R, определяемое следующим образом: $\langle a, b\rangle \ R \ \langle c, d\rangle$, если $a - b = c - d$.

а) Показать, что R есть отношение эквивалентности.

б) Описать классы эквивалентности.

Решение. а) Рефлексивность: для любого $\langle a, b\rangle \in T \times T$ имеем $a - b = a - b$, т. е. $\langle a, b\rangle \ R \ \langle a, b\rangle$. Симметричность: пусть $\langle a, b\rangle \ R \ \langle c, d\rangle \Rightarrow a - b = c - d \Rightarrow c - d = a - b \Rightarrow \langle c, d\rangle \ R \ \langle a, b\rangle$. Транзитивность: $\langle a, b\rangle \ R \ \langle c, d\rangle$ и $\langle c, d\rangle \ R \ \langle w, z\rangle \Rightarrow a - b = c - d$ и $c - d = w - z \Rightarrow$ (сложим два равенства) $a - b = w - z \Rightarrow \langle a, b\rangle \ R \ \langle w, z\rangle$. Следовательно, R — отношение эквивалентности.

б) Классы эквивалентности: $[\langle 5, 5\rangle] = \{\langle x, y\rangle \in T \times T \mid x - y = 0\} = \{\langle 5, 5\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 7, 7\rangle\} = [\langle 3, 3\rangle] = [\langle 7, 7\rangle]$;

$[\langle 5, 3\rangle] = \{\langle x, y\rangle \in T \times T \mid x - y = 2\} = \{\langle 5, 3\rangle, \langle 7, 5\rangle\} = [\langle 7, 5\rangle]$;

$[\langle 3, 5\rangle] = \{\langle x, y\rangle \in T \times T \mid x - y = -2\} = \{\langle 3, 5\rangle, \langle 5, 7\rangle\} = [\langle 5, 7\rangle\}$;

$[\langle 3, 7\rangle] = \{\langle x, y\rangle \in T \times T \mid x - y = -4\} = \{\langle 3, 7\rangle\}$;

$[\langle 7, 3\rangle] = \{\langle x, y\rangle \in T \times T \mid x - y = 4\} = \{\langle 7, 3\rangle\}$.

Таким образом, классами эквивалентности являются следующие множества: {<5, 5>, <3, 3>, <7, 7>}, {<5, 3>, <7, 5>}, {<3, 5>, <5, 7>}, {<3, 7>} и {<7, 3>}.

2.5 Логика высказываний

Пусть дана некоторая формула F логики высказываний, и надо выяснить, является ли формула F тавтологией.

Простой метод доказательства — использовать таблицу истинности. Хорошо, если эта таблица небольшая, но когда высказывательных переменных много, то такой подход трудоемок.

В случае, когда F имеет вид $F_1 \supset F_2$, желательно использовать метод доказательства от противного. Вы предполагаете, что формула F ложна и, делая отсюда выводы, приходите к противоречию или определяете значения переменных, при которых формула ложна. Для формул указанного вида ложность $F_1 \supset F_2$ однозначно определяет: F_1 — истинна, а F_2 — ложна.

Задача 59. Является ли формула $((P \supset Q)\ \&\ P) \supset Q$ тавтологией?

Решение. Предположим, что $((P \supset Q)\ \&\ P) \supset Q$ ложна при некоторых значениях высказывательных переменных P и Q. Представим наши рассуждения в виде таблицы. Каждая следующая строчка таблицы есть логическое следствие предыдущей строки.

$((P \supset Q)\ \&\ P) \supset Q$ = **Л**	
$(P \supset Q)\ \&\ P$ = **И**	Q = **Л**
$P \supset Q$ = **И**, P = **И**	
И $\supset Q$ = **И** (подставили в формулу **И** вместо P)	
$\boldsymbol{Q}$ = **И**	

Получили противоречие (Q = **И** и Q = **Л** одновременно), следовательно, исходное предположение о ложности $((P \supset Q)\& P) \supset Q$ неверно и формула $((P \supset Q) \& P) \supset Q$ всегда истинна.

Задача 60. Является ли тавтологией формула

$$((P \supset Q) \& (\neg R \supset \neg Q) \& (T \supset \neg R)) \supset (P \supset \neg T)?$$

Решение. Предположим, что формула

$$((P \supset Q) \& (\neg R \supset \neg Q) \& (T \supset \neg R)) \supset (P \supset \neg T)$$

ложна при некоторых значениях высказывательных переменных P, Q, R и T.

$((P \supset Q) \& (\neg R \supset \neg Q) \& (T \supset \neg R)) \supset (P \supset \neg T)$= **Л**	
$(P \supset Q) \& (\neg R \supset \neg Q) \& (T \supset \neg R)$ = **И**	$P \supset \neg T$ = **Л**
$P \supset Q$ = И, $\neg R \supset \neg Q$ = И, $T \supset \neg R$ = И	P = **И**, $\neg T$ = **Л**
И $\supset Q$ = **И**, $\neg R \supset \neg Q$ = **И**, **И** $\supset \neg R$ = **И** (подставили в формулы **И** вместо P и T)	
Q = **И**, $\neg R$ = **И**, $\neg R \supset \neg Q$ = **И**	
И $\supset \neg$**И** = **И** (подставили в формулы **И** вместо Q и $\neg R$)	
И ⊃ Л = И. Но это невозможно!	

Пришли к противоречию, следовательно, исходная формула — тавтология.

Задача 61. Является ли формула $((P \supset Q) \& \mathrm{P}) \supset (Q \supset \neg P)$ тавтологией?

Решение. Предположим, что формула $((P \supset Q) \& P) \supset (Q \supset \neg P)$ ложна при некоторых значениях высказывательных переменных P и Q.

$((P \supset Q)\ \&\ P) \supset (Q \supset \neg P) =$ **Л**	
$(P \supset Q)\ \&\ P =$ **И**	$Q \supset \neg P =$ **Л**
$P \supset Q =$ **И**, $P =$ **И**	$Q =$ **И**, $\neg P =$ **Л**
И $\supset Q =$ **И** (подставили в формулу **И** вместо P)	
$Q =$ **И**	

Получили значения переменных ($Q =$ **И** и $P =$ **И**), при которых формула $((P \supset Q)\ \&\ P) \supset (Q \supset \neg P) =$ **Л**, следовательно, эта формула не является тавтологией.

При проверке на тавтологичность формул вида $F_1 \sim F_2$ следует поступать по-другому. Имеем $F_1 \sim F_2$ — тавтология тогда и только тогда, когда формулы F_1 и F_2 равносильны. Поэтому надо попробовать преобразовать F_1 к F_2 (или наоборот), используя основные равносильности.

Задача 62. Является ли тавтологией формула

$$((P \supset Q)\ \&\ (R \supset Q)) \sim ((P \vee R) \supset Q)\ ?$$

Решение. $(P \supset Q)\ \&\ (R \supset Q) \equiv$ (Учебное пособие, глава 4, § 3, теорема 3, равносильность 17) $(\neg P \vee Q)\ \&\ (\neg R \vee Q) \equiv$ (коммутативность $\vee$) $(Q \vee \neg P)\ \&\ (Q \vee \vee \neg R) \equiv$ (дистрибутивность $\vee$ относительно $\&$) $Q \vee (\neg P\ \&\ \neg R) \equiv$ (закон де Моргана) $Q \vee \neg(P \vee R) \equiv$ (коммутативность $\vee$) $\neg(P \vee R) \vee Q \equiv$ (снова равносильность 17) $(P \vee R) \supset Q$. Равносильность доказана. Следовательно,

$$((P \supset Q)\ \&\ (R \supset Q)) \sim ((P \vee R) \supset Q)$$

есть тавтология.

Задача 63. Что можно сказать об истинностном значении высказывания $(\neg P\ \&\ \neg Q) \sim (P \vee Q)$, если $P \supset Q$ ложно?

Решение. Из того, что $P \supset Q$ ложно, получаем $P =$ **И**, $Q =$ **Л**. Подставляем эти истинностные значения вместо P и Q в искомую формулу

$(\neg P \,\&\, \neg Q) \sim (P \vee Q)$ и получаем $(\neg\mathbf{И} \,\&\, \neg\mathbf{Л}) \sim (\mathbf{И} \vee \mathbf{Л}) = (\mathbf{Л} \,\&\, \mathbf{И}) \sim \mathbf{И} =$ $= \mathbf{Л} \sim \mathbf{И} = \mathbf{Л}$. Следовательно, формула $(\neg P \,\&\, \neg Q) \sim (P \vee Q)$ ложна.

Задача 64. Доказать выполнимость формулы $\neg(P \supset \neg P)$.

Решение. Пусть $\neg(P \supset \neg P) = \mathbf{И}$. Тогда $P \supset \neg P = \mathbf{Л}$, следовательно, $P = \mathbf{И}$. Мы пришли к значению переменной P, при котором исходная формула истинна. Следовательно, формула $\neg(P \supset \neg P)$ выполнима. Если бы пришли к противоречию, то это означало бы, что исходная формула не может быть истинной, следовательно, не является выполнимой.

Задача 65. При каких значениях переменных X, Y, Z формула

$$((X \supset (Y \,\&\, Z)) \supset (\neg Y \supset \neg X)) \supset \neg Y$$

ложна?

Решение. $((X \supset (Y \,\&\, Z)) \supset (\neg Y \supset \neg X)) \supset \neg Y = \mathbf{Л} \Leftrightarrow$ $(X \supset (Y \,\&\, Z)) \supset (\neg Y \supset \neg X) = \mathbf{И}$, $\neg Y = \mathbf{Л}$. Таким образом, $Y = \mathbf{И}$ и после подстановки **И** вместо Y имеем $(X \supset Z) \supset (\mathbf{Л} \supset \neg X) = \mathbf{И} \Leftrightarrow (X \supset Z) \supset \mathbf{И} = \mathbf{И}$ $\Leftrightarrow$ $X \supset Z = \mathbf{И}$ или $X \supset Z = \mathbf{Л}$. Следовательно, $Y = \mathbf{И}$ и для любых значений X и Z формула ложна.

Задача 66. Доказать, что $A \sim B \equiv \neg A \sim \neg B$.

Решение. Имеем $A \sim B \equiv (A \,\&\, B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B)$. С другой стороны, используя ту же равносильность, $\neg A \sim \neg B \equiv (\neg A \,\&\, \neg B) \vee (\neg\neg A \,\&\, \neg\neg B) \equiv$ $\equiv (\neg A \,\&\, \neg B) \vee (A \,\&\, B)$. Следовательно, $A{\sim}B \equiv \neg A{\sim}\neg B$.

Задача 67. Построить формулу от трех переменных, которая истинна в том и только том случае, когда ровно две переменные ложны.

Решение: $(\neg X \,\&\, \neg Y \,\&\, Z) \vee (\neg X \,\&\, Y \,\&\, \neg Z) \vee (X \,\&\, \neg Y \,\&\, \neg Z)$.

Задача 68. Выразить $A \vee B$ через A, B и символ $\supset$.

Решение: $A \vee B \equiv (A \supset B) \supset B$.

Задача 69. Мальчик решил в воскресенье закончить чтение книги, сходить в музей или кино, а если будет хорошая погода — пойти на реку выкупаться. В каком случае можно сказать, что решение мальчика не выполнено? Запишите формулу истинную тогда и только тогда, когда решение мальчика не выполнено (отрицания должны содержаться лишь в простых высказываниях).

Решение. Введем простые высказывания: $A \equiv$ «закончил чтение книги»; $B \equiv$ «сходил в музей»; $C \equiv$ «сходил в кино»; $D \equiv$ «стоит хорошая погода»; $E \equiv$ «искупался на реке». Утверждение о том, что мальчик выполнил решение, представляется формулой $A \,\&\, (B \vee C) \,\&\, (D \supset E)$. Отрицание этой формулы означает, что мальчик решение не выполнил. Имеем

$$\neg(A \,\&\, (B \vee C) \,\&\, (D \supset E)) \equiv \neg A \vee \neg(B \vee C) \vee \neg(D \supset E) \equiv$$
$$\equiv \neg A \vee (\neg B \,\&\, \neg C) \vee (D \,\&\, \neg E).$$

Последняя формула является искомой.

Задача 70. Подозреваются в совершении преступления Жан и Пьер. На суде выступили четыре свидетеля со следующими заявлениями:

1) Пьер не виноват;

2) Жан не виноват;

3) из первых двух показаний, по меньшей мере, одно истинно;

4) показания третьего свидетеля ложны.

Следствие установило, что четвертый свидетель прав. Кто преступники?

Решение. Простые высказывания «Пьер виноват» и «Жан виноват» обозначим высказывательными переменными P и G. Тогда показания свидетелей представляются формулами: 1) $\neg P$; 2) $\neg G$; 3) $\neg P \vee \neg\neg G$; 4) $\neg(\neg P \vee \neg G)$. Имеем $\neg(\neg P \vee \neg G) =$ **И** $\Rightarrow \neg\neg P \& \neg\neg G =$ **И** $\Rightarrow$ P&G = **И** $\Rightarrow$ Пьер и Жан оба виноваты в преступлении.

Задача 71. Обосновать метод доказательства «разбором случаев»: для того, чтобы доказать формулу $(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \supset B$, необходимо и достаточно доказать формулу $(A_1 \supset B) \,\&\, (A_2 \supset B) \,\&\ldots\&\, (A_n \supset B)$.

Доказательство. Пусть формула $(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \supset B$ ложна (то, что мы начинаем доказательство, предполагая, что формула ложна, а не истинна, продиктовано тем обстоятельством, что при этом выборе доказательство короче), тогда формула B ложна, а $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ истинна. Следовательно, существует такое i $(1 \le i \le n)$, что A_i истинна и поэтому $A_i \supset B$ ложна. Отсюда следует, формула $(A_1 \supset B)$ & $(A_2 \supset B)$ &…& $(A_n \supset B)$ ложна.

В обратную сторону. Пусть формула $(A_1 \supset B)$ & $(A_2 \supset B)$ & … & $(A_n \supset B)$ ложна. Следовательно, существует такое i $(1 \le i \le n)$, что $A_i \supset B$ ложна. Отсюда получаем, что A_i истинна и B ложна и, следовательно, $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ истинна и, наконец, $(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \supset B$ ложна.

2.6 Переводы с естественного языка на формальный и обратно (язык логики предикатов)

При решении следующих задач сначала следует выбрать универсум, содержащий объекты (сущности), о которых говорится в предложении. В некоторых случаях одним универсумом не обойтись. После этого следует выбрать предикатные символы для обозначения свойств объектов (одноместные предикаты) и/или отношений между объектами универсума (универсумов). Количество используемых предикатов следует минимизировать[2], но и не следует впадать в другую крайность, когда высказывание представляется одним многоместным предикатом. Когда речь идет о конкретных объектах (указаны собственные имена), то следует вводить константы для обозначения этих объектов. Следующие примеры показывают способ оформления решения.

[2] «Не следует создавать сущностей больше необходимого числа» — принцип «бритва Оккама». Оккам Уильям (ок. 1285—1349), английский философ-схоласт, логик.

Задача 72. Все, что сделано из золота, драгоценно.

Универсум: M = {украшения}. Предикаты: $Z(x) \equiv$ «x сделано из золота», $D(x) \equiv$ «x — драгоценная вещь».

Формула: $\forall x\ (Z(x) \supset D(x))$

Задача 73. Все замки отпираются и запираются.

Универсум: M = {технические устройства}. Предикаты: $Z(x) \equiv$ «x — замок», $O(x) \equiv$ «x может открываться», $C(x) \equiv$ «x может закрываться».

Формула: $\forall x\ (Z(x) \supset O(x)\ \&\ C(x))$

Задача 74. Все свиньи прожорливы.

Универсум: M = {животные}. Предикаты: $S(x) \equiv$ «x — свинья», $E(x) \equiv$ «x — много ест».

Формула: $\forall x\ (S(x) \supset E(x))$

Задача 75. Чтобы не быть собакой, достаточно быть кошкой.

Универсум: M = {животные}. Предикаты: $D(x) \equiv$ «x — собака», $C(x) \equiv$ «x — кошка».

Формула: $\forall x\ (C(x) \supset \neg D(x))$

Задача 76. Гамлет и Клавдий ненавидят друг друга.

Универсум: M = {люди}. *Гамлет* и *Клавдий* — константы. Предикат: $A(x, y) \equiv$ $\equiv$ «x ненавидит y».

Формула: $A(\textit{Клавдий}, \textit{Гамлет})\ \&\ A(\textit{Гамлет}, \textit{Клавдий})$

Задача 77. Не все студенты отличники или спортсмены.

Универсум: M = {люди}. Предикаты: $T(x) \equiv$ «x — студент», $O(x) \equiv$ «x — отличник», $S(x) \equiv$ «x — спортсмен».

Формула: $\exists x\ T(x)\ \&\ \neg O(x)\ \&\ \neg S(x)$

Задача 78. Ни одна тачка не комфортабельна.

Универсум: M = {транспортное средство}. Предикаты: $T(x) \equiv$ «x — тачка», $C(x) \equiv$ «x — комфортабельно».

Формула: $\forall x\ (T(x) \supset \neg C(x))$

Задача 79. Ни один ребенок не любит прилежно заниматься.

Универсум: M = {люди}. Предикаты: $B(x) \equiv$ «x — ребенок», $L(x) \equiv$ «x — любит прилежно заниматься».

Формула: $\forall x\ (B(x) \supset \neg L(x))$

Задача 80. Логика часто ставит меня в тупик.

Универсумы: M_1 = {науки}, M_2 = {люди}. Предикат: $A(x, y) \equiv$ «наука x часто ставит в тупик человека y». «Логика» и «я» — константы.

Формула: $A(\text{\textit{Логика}}, \text{\textit{я}})$

Задача 81. Число делится на 25 в том и только в том случае, когда оно делится на 50 либо дает при делении на 50 остаток 25.

Универсум: **N** = натуральные числа. Предикат: $O(x, y, z) \equiv$ «x при делении на y дает остаток z».[3]

Формула: $\forall x\ (O(x, 25, 0) \sim O(x, 50, 0) \vee O(x, 50, 25))$

Задача 82. Молодо — зелено.

Универсум: M = {люди}. Предикаты: $B(x) \equiv$ «x — молодой», $G(x) \equiv$ «x — малоопытный».

Формула: $\forall x\ (B(x) \supset G(x))$

Задача 83. Все лекарства имеют отвратительный вкус.

Универсум: M = {средства, которые принимаются внутрь}. Предикаты: $L(x) \equiv$ «x — лекарство», $B(x) \equiv$ «x имеет отвратительный вкус».

Формула: $\forall x\ (L(x) \supset B(x))$

Задача 84. Ни у одной ящерицы нет волос.

Универсум: M = {животные}. Предикаты: $B(x) \equiv$ «x — ящерица», $G(x) \equiv$ «x имеет волосы».

Формула: $\forall x\ (B(x) \supset \neg G(x))$

---

[3] Совершенно излишне для записи этого высказывания заводить три различных предиката: «x делится на 25», «x делится на 50», «x при делении на 50 дает в остатке 25».

Задача 85. Некоторые лекции невозможно понять.

Универсум: M = {публичные выступления}. Предикаты: $B(x) \equiv$ «x — лекция», $G(x) \equiv$ «x — понимаемое выступление».

Формула: $\exists x\,(B(x)\ \&\ \neg G(x))$

В задачах, где идет речь о количестве каких-то объектов, следует использовать предикат «=».

Исключительно важную роль в языке математики играет утверждение единственности x, удовлетворяющего данному условию A (например, часто приходится доказывать, что решение задачи единственно).

На самом деле, обычно подразумевается не только то, что решение задачи единственно, но и то, что она имеет решение, т. е. доказывается не только единственность, а существование и единственность объекта, удовлетворяющего свойству A. При аккуратных формулировках это необходимо оговаривать.

Единственность «в чистом виде» выражается следующим образом:

$$\forall x, y(A(x)\ \&\ A(y) \supset x = y).$$

Заметим, что утверждение «x, удовлетворяющее A, единственно», вообще говоря, **не предполагает, что оно существует**, что задача вообще имеет решение. Чисто формально, предыдущая формула истинна и в том случае, когда x, удовлетворяющих A, вообще нет. Поэтому эту формулу точнее читать «есть не более одного x, удовлетворяющего $A(x)$».

А утверждение «существует единственное x, такое, что $A(x)$» выражается в форме

$$\exists x\, A(x)\ \&\ \forall x, y(A(x)\ \&\ A(y) \supset x = y).$$

Но эта не самая выразительная запись утверждения о единственности. Гораздо выразительнее $\exists x \forall y(A(y) \supset x = y)$.

Итак, то, что существует единственное x, удовлетворяющее $A(x)$, означает, что условие $A(x)$ на самом деле сводится к равенству этому единственному x.

Общий способ получить утверждение «существует не более n таких x, что $A(x)$»:

$$\exists x_1,\ldots, x_n(\forall y\ (A(y) \sim x_1 = y \vee \ldots \vee x_n = y)).$$

Но здесь мы не утверждаем, что этих различных x ровно n: если x и y обозначены по-разному, то это отнюдь не означает, что они принимают различные значения: они имеют право принимать разные значения, но имеют право принять и одинаковые.

Итак, мы приходим к необходимости уметь формулировать различие. Если $x = y$ означает равенство, неразличимость, совпадение предметов, то соответственно $\neg(x = y)$, обычно обозначаемое $x \neq y$, — их различие. Итак, сказать, что есть не менее двух различных решений задачи, очень просто:

$$\exists x, y\ (x \neq y \ \&\ A(x) \ \&\ A(y)).$$

Так же просто сказать и то, что их ровно два:

$$\exists x, y\ (x \neq y \ \&\ \forall z\ (A(z) \sim z = x \vee z = y)).$$

Подобным образом можно написать формулы и для большего числа решений.

Задача 86. Перевести на формальный язык

У уравнения $ax^2 + bx + c + \varepsilon \sin x = 0$ не менее трех решений.

Искомая формула:

$\exists x\ \exists y\ \exists z\ (x \neq y \ \&\ y \neq z \ \&\ z \neq x \ \&\ ax^2 + bx + c + \varepsilon \sin x = 0 \ \&$

$ay^2 + by + c + \varepsilon \sin y = 0 \ \&\ az^2 + bz + c + \varepsilon \sin z = 0)$

Задача 87. Перевести на естественный язык

$\exists x, y\ \forall z\ (D(\text{Ваня}, z) \supset x = z \vee y = z)$, где D — дружит.

Перевод: «У Вани не больше двух друзей».[4]

Задача 88. Перевести на естественный язык

$\forall x\ (x \neq a\ \&\ x \neq b \supset f(x) \neq 0)$

Перевод: Функция f равна 0, может быть, только в точках a и b.

Задача 89. Рассмотрим в качестве универсума множество всех людей и введем константы Холмс (Шерлок Холмс) и Мориарти. Пусть предикат $A(x, y)$ истинен только тогда, когда «человек x может победить человека y». Переведем на формальный язык утверждения, связанные с борьбой Холмса против преступников.

- *Холмс может победить любого, кто может победить Мориарти.*

$\forall x\ (A(x, \text{Мориарти}) \supset A(\text{Холмс}, x))$

- *Холмс может победить любого, кого может победить Мориарти.*

$\forall x\ (A(\text{Мориарти}, x) \supset A(\text{Холмс}, x))$

- *Если Мориарти может быть побежден, то Холмс сможет победить Мориарти.*

$\exists x\ A(x, \text{Мориарти}) \supset A(\text{Холмс}, \text{Мориарти})$

- *Если каждый человек может победить Мориарти, то и Холмс сможет.*

$\forall x\ A(x, \text{Мориарти}) \supset A(\text{Холмс}, \text{Мориарти})$

- *Любой победитель Холмса может победить Мориарти.*

$\forall x\ (A(x, \text{Холмс}) \supset A(x, \text{Мориарти}))$

- *Ни один человек не сможет победить Холмса, пока он не сможет победить Мориарти.*

$\forall x\ (\neg A(x, \text{Мориарти}) \supset \neg A(x, \text{Холмс}))$

- *Каждый может победить кого-то, кто не может победить Мориарти.*

---

[4] Перевод на русский язык должен быть не только правильным, но и литературным. Никуда не годится перевод: «Существуют такие x и y, что любой друг Вани есть x или y».

$\forall x\ \exists y\ (A(x, y)\ \&\ \neg A(y, \text{Мориарти}))$

- *Каждый может победить любого, кто не может победить Мориарти.*

$\forall x\ \forall y\ (\neg A(y, \text{Мориарти}) \supset A(x, y))$

- *Любой человек, победивший Холмса, может победить и человека, которого может победить и Холмс.*

$\forall x\ (A(x, \text{Холмс}) \supset \forall y(A(\text{Холмс}, y)\ \supset A(x, y)))$

Задача 90. Рассмотрим несколько утверждений, связанных с предикатом на множестве людей $K(x, y)$ с интерпретацией «человек x знает человека y».

- *Каждый знает кого-нибудь.*

$\forall x\ \exists y\ K(x, y)$

- *Кто-то знает каждого.*

$\exists x\ \forall y\ K(x, y)$

- *О некоторых знает каждый.*

$\exists x\ \forall y\ K(x, y)$

- *Каждый знает кого-то, кто его не знает.*

$\forall x\ \exists y\ (K(x, y)\ \&\ \neg K(y, x))$

- *Есть кто-то, знающий каждого, кто его знает.*

$\exists x \forall y\ (K(y, x) \supset K(x, y))$

Задача 91. Тело движется равномерно и прямолинейно в том и только в том случае, когда на него не действуют силы или равнодействующая действующих на тело сил равна нулю.

Решение.

Логика высказываний:

A: «Тело движется равномерно и прямолинейно».

B: «На тело не действуют силы».

C: «Равнодействующая действующих на тело сил равна нулю».

Формула: $A \sim (B \vee C)$

Логика предикатов:

Универсум: физические тела.

Предикат $A_1(x) \Leftrightarrow$ «тело x движется равномерно».

Предикат $A_2(x) \Leftrightarrow$ «тело x движется прямолинейно».

Предикат $B(x) \Leftrightarrow$ «на тело x не действуют силы».

Предикат $C(x) \Leftrightarrow$ «на тело x действуют силы, равнодействующая которых равна нулю».

Формула: $\forall x((A_1(x) \& A_2(x)) \sim (B(x) \vee C(x)))$

Задача 92. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Решение.

Логика высказываний:

A: «Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

Формула: A

Логика предикатов:

Три универсума: множество прямоугольных треугольников, множество отрезков прямых, множество положительных действительных чисел.

Предикат $A(t, x, y, z) \Leftrightarrow$ «отрезки x и y — катеты, а z — гипотенуза прямоугольного треугольника t».

Функция $d(x)$ вычисляет длину отрезка x.

Формула: $\forall t, x, y, z((A(t, x, y, z) \supset d(x)^2 + d(y)^2 = d(z)^2)$

Задача 92. Либо каждый любит кого-нибудь, либо не один не любит всех, либо некто любит всех, и кто-то не любит никого.

Универсум: люди; предикат $A(x, y)$ выражает отношение «x любит y». Выразим сначала подформулы:

«каждый любит кого-нибудь» — $\forall x \exists y\, A(x, y)$;

«некто любит всех» — $\exists x \forall y\, A(x, y)$;

«не один не любит всех» — $\neg\exists x\forall y\, A(x, y)$;

«кто-то не любит никого» — $\exists x\forall y\, \neg A(x, y)$.

Окончательная формула: $\forall x\exists y\, A(x, y) \vee \neg\exists x\forall y\, A(x, y) \vee (\exists x\forall y\, A(x, y)\ \&\ \exists x\forall y\, \neg A(x, y))$.

Задача 93. Ты можешь обманывать кого-то все время, ты можешь обманывать всех некоторое время, но ты не можешь обманывать всех все время.

Универсум: люди; предикаты: $A(x, y)$ выражает отношение «x обманывает y некоторое время», $B(x, y)$ выражает отношение «x обманывает y все время». В этой фразе речь идет не о конкретном человеке (константа «ты»), а любом, кто занимается обманом. Создадим сначала подформулы:

«ты можешь обманывать кого-то все время» — $\exists y\, B(x, y)$;

«ты можешь обманывать всех некоторое время» — $\forall y\, A(x, y)$;

«ты не можешь обманывать всех все время» — $\neg\forall y\, B(x, y)$.

Окончательная формула: $\forall x((\exists y\, B(x, y) \vee \forall y\, A(x, y)) \supset \neg\forall y\, B(x, y))$.

Задача 94. Если всякий разумный философ — циник и только женщины являются разумными философами, то тогда, если существуют разумные философы, некоторые из женщин циники.

Универсум: люди; предикаты: $F(x) \equiv$ «x — разумный философ», $W(x) \equiv$ «x — женщина», $\mathrm{C}(x) \equiv$ «x — циник». Определим подформулы:

«всякий разумный философ — циник» — $\forall x\, (F(x) \supset \mathrm{C}(x))$;

«только женщины являются разумными философами» — $\forall x\, (F(x) \supset W(x))$;

Предложению «если существуют разумные философы, некоторые из женщин циники» соответствует формула $\exists x\, F(x) \supset \exists x\, (F(x)\ \&\ W(x))$.

Окончательная формула:

$(\forall x\, (F(x) \supset \mathrm{C}(x))\ \&\ \forall x\, (F(x) \supset W(x))) \supset (\exists x\, F(x) \supset \exists x\, (F(x)\ \&\ W(x)))$

Задача 95. Гипотеза Гольдбаха: любое четное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел.[5]

Универсум — **N**. Будем использовать предикаты: $P(x)$ — «x — простое число», $x|y$ — «x — делитель y», константу — число 2, функциональный символ «+». Тогда гипотезу можно записать в виде

$\forall n\ ((2|n)\ \&\ \neg(n = 2) \supset \exists k, m\ (P(k)\ \&\ P(m)\ \&\ (n = m + k))$

2.7 Предикаты и интерпретация

После того, как высказывание записано в виде формулы языка первого порядка, во многих случаях необходимо определить истинностное значение такой формулы. Для этого предварительно должна быть задана интерпретация формулы. Во-первых, мы должны зафиксировать универсум — множество объектов, которые именуют термы в формуле (переменные, константы и иногда более сложные термы). Во-вторых, мы должны определиться, какие отношения между объектами и свойства объектов выражают используемые в формуле предикаты. Подробно об этом говорится в § 3 главы 5 учебного пособия.

Одну и ту же формулу можно интерпретировать бесконечным числом способов. Следующий пример показывает это.

Рассмотрим три формулы:

1) $A(x, y)$;
2) $\forall y\ A(x, y)$;
3) $\exists x\ \forall y\ \ A(x, y)$.

1. Возьмем в качестве области интерпретации множество целых положительных чисел и интерпретируем $A(x, y)$ как $x \le y$. Тогда первая формула — это предикат $x \le y$, который принимает истинное значение для всех пар a, b

[5] Кристиан Гольдбах (1690—1764), немецкий математик, предложил эту задачу Эйлеру в письме. Одна из самых известных нерешенных математических проблем.

целых положительных чисел, таких, что $a \le b$. Вторая формула выражает свойство: «для каждого целого положительного числа y имеем $x \le y$», которое выполняется только при $x = 1$. Наконец, третья формула — это истинное высказывание о существовании наименьшего целого положительного числа.

2. Если бы в качестве области интерпретации мы рассматривали множество целых чисел, то третья формула была бы ложным высказыванием.
3. Возьмем в качестве области интерпретации множество людей и интерпретируем $A(x, y)$ как «x — женщина-предок y». Тогда первая формула — это предикат, который принимает истинное значение для всех пар a, b людей, таких, что a является прародительницей b. Вторая формула выражает свойство: «для каждого человека y имеем x — прародительница y», которое ложно при всех x. (Если даже считать, что библейская Ева существовала, то A(Ева, Ева) — ложно.) Наконец, третья формула — это ложное высказывание о существовании единственной прародительницы всех людей, в том числе и самой себя.

Возьмем стандартную интерпретацию языка элементарной арифметики $<\{\mathbf{0}\}, \{S, +, \times\}, \{=\}>$. Формула $\exists y\ (y = S(x + x))$ выражает предикат «x — нечетно». Формула $\exists z\ (y = x + z)$ выражает предикат «$x \le y$». Предикат $x = 0$ можно выразить двумя разными формулами: $x = \mathbf{0}$ и $x + x = x$.

Задача 96. Выразите в стандартной интерпретации элементарной арифметики свойства и отношения натуральных чисел:

1) свойство: $n = 1$;
2) отношение: a делит b;
3) свойство: n представимо в виде суммы трех квадратов;
4) свойство: $n = 7$;
5) отношение: $x > y$;
6) отношение: a и b — взаимно просты;

7) отношение: q есть частное при делении a на b;
8) отношение: r есть остаток при делении a на b;
9) свойство: x — простое число;
10) свойство: коммутативность сложения;
11) свойство: n — степень двойки. Подсказка: степени двойки характеризуются тем, что все их неединичные делители четны.

Решение.

1. Возможны варианты формулы: $S(\mathbf{0}) = x$ и $\forall\, y(y \times x = y)$.
2. Очевидная формула: $\exists x\ (a \times x = b)$.
3. $\exists x\, y\, z\ (n = x \times x + y \times y + z \times z)$.
4. $S(S(S(S(S(S(\mathbf{0}))))))$.
5. $\exists z\ (\neg(z = \mathbf{0})\ \&\ (x = y + z))$.
6. $\neg\exists x\ (\neg($«$x > 1$»$)\ \&$ «x делит a», & «x делит b», где формулы в кавычках определенны в пунктах 2) и 5).
7. $\exists r((a = b \times q + r)\ \&$ «$0 \le r$» & «$b > r$»), где формулы в кавычках определенны ранее.
8. $\exists q((a = b \times q + r)\ \&$ «$0 \le r$» & «$b > r$»), где формулы в кавычках определенны ранее.
9. («$x > 1$») & ($\forall y$ ((«y делит x») $\supset ((y = S(\mathbf{0})) \vee (y = x)))$, где формулы в кавычках определенны ранее.
10. $\forall x\, y\, z\ ((x + y = z) \supset (y + z = z))$.
11. $\forall x(($«$x > 1$»$)\ \&$ «x делит n» $\supset \exists y\ (x = y + y))$, где формулы в кавычках определенны ранее.

Рассмотрим задачи вычисления истинностного значения формул при заданной интерпретации. Задачи такого рода встречаются среди вопросов первой тестовой контрольной.

Задача 97. На интерпретации из двух предметов, варьируя предикат P, проверьте, всегда ли истинны следующие формулы:

1. $\forall x \exists y\, P(x, y) \supset \forall y \exists x\, P(x, y)$,
2. $\forall x \exists y\, P(x, y) \supset \exists x \forall y\, P(x, y)$,
3. $\exists x \forall y\, P(x, y) \supset \forall x \exists y\, P(x, y)$,
4. $\forall y\, P(y, y) \supset \forall x \exists y\, P(x, y)$.

Решение. Пусть область интерпретации $M = \{a, b\}$. Тогда P есть одно из подмножеств $M \times M$: мы отождествляем предикат P с бинарным отношением на M, т. е. с множеством упорядоченных пар $<x, y>$, для которых $P(x, y) =$ **И**. Выбирая различные P, можно проверить требуемые свойства. Всего число различных P равно $2^4 = 16$, каждое P содержит не более четырех упорядоченных пар.

1. Формула $\forall x \exists y\, P(x, y)$ будет истинной, если пары из P в качестве первых компонентов имеют оба элемента $\{a, b\}$. Формула $\forall y \exists x\, P(x, y)$ будет истинной, если пары из P в качестве вторых компонентов имеют оба элемента a и b. Пусть P есть $\{<a, a>, <b, a>\}$. Для такой интерпретации формула $\forall x \exists y\, P(x, y)$ истинна. Но формула $\forall y \exists x\, P(x, y)$ ложна, так как не существует пары в P для $y = b$. Следовательно, формула $\forall x \exists y\, P(x, y) \supset$ $\supset \forall y \exists x\, P(x, y)$ ложна в интерпретации $\{<a, a>, <b, a>\}$.

2. Формула $\forall x \exists y\, P(x, y)$ будет истинной, если пары из P в качестве первых компонентов имеют оба элемента a и b. Формула $\exists x \forall y\, P(x, y)$ будет ложной, если найдется такое значение x, что не для всех y пара $<x, y> \in P$. Пусть P есть множество $\{<a, a>, <b, b>\}$. Тогда нетрудно видеть, что в такой интерпретации формула $\forall x \exists y\, P(x, y) \supset \exists x \forall y\, P(x, y)$ ложна.

3. Формула $\exists x \forall y\ P(x, y)$ будет истинной, если найдется такое значение x, что для всех y пара $<x, y> \in P$. Формула $\forall x \exists y\ P(x, y)$ будет ложной, если какой-то из элементов a или b не является первым компонентом пар из P. Возьмем интерпретацию $\{<a, a>, <a, b>\}$.Тогда формула $\exists x \forall y\ P(x, y)$ есть истина, а $\forall x \exists y\ P(x, y)$ есть ложна, следовательно, вся импликация ложна.

4. Формула $\forall y\ P(y, y)$ будет истинной, если пары $<a, a>$ и $<b, b>$ принадлежат P. Формула $\forall x \exists y\ P(x, y)$ будет ложной, если не существует пары в P с каким-то значением x в качестве первого компонента пары. Но если $<a, a>$ и $<b, b>$ принадлежат P, то формула $\forall x \exists y\ P(x, y)$ истинна. Поэтому формула $\forall y\ P(y, y) \supset \forall x \exists y\ P(x, y)$ всегда истина по свойствам импликации.

Задача 97. Задан некоторый язык первого порядка с константами a и b и одноместными предикатными символами P и Q. Пусть задана интерпретация, носитель которой состоит из двух элементов $\{a, b\}$. Интерпретация предикатов: $P(a) = 0$, $P(b) = 1$; $Q(a) = 1$, $Q(b) = 0$. Найдите истинностные значения формул в данной интерпретации (1 — истина, 0 — ложь):

1) $\exists x\ \forall y(P(x) \supset P(y))$;

2) $\exists x\ (P(b) \vee Q(x))$;

3) $\forall x\ (P(b) \supset Q(x))$.

Решение. 1) $\exists x\ \forall y(P(x) \supset P(y))$. Запишем в таблицу все возможные значения подформулы $P(x) \supset P(y)$:

Значения для x и y	Подформула $P(x) \supset P(y)$	Значение подформулы $P(x) \supset P(y)$
$x = a, y = a$	$P(a) \supset P(a)$	1
$x = a, y = b$	$P(a) \supset P(b)$	1
$x = b, y = a$	$P(b) \supset P(a)$	0
$x = b, y = b$	$P(b) \supset P(b)$	1

Формула $\forall y(P(a) \supset P(y)) \equiv \forall y(0 \supset P(y))$ является истинной для любого y. Поэтому $\exists x\ \forall y(P(x) \supset P(y))$ есть истина ($x = a$).

2) $\exists x\ (P(b) \vee Q(x))$. Запишем в таблицу все возможные значения подформулы $P(b) \vee Q(x)$:

Значения для x	Подформула $P(b) \vee Q(x)$	Значение подформулы $P(b) \vee Q(x)$
$x = a$	$P(b) \vee Q(a)$	1
$x = b$	$P(b) \vee Q(b)$	1

Следовательно, формула $\exists x\ (P(b) \vee Q(x))$ истина.

3) $\forall x\ (P(b) \supset Q(x))$. Запишем в таблицу все возможные значения подформулы $P(b) \supset Q(x)$:

Значения для x	Подформула $P(b) \supset Q(x)$	Значение подформулы $P(b) \supset Q(x)$
$x = a$	$P(b) \supset Q(a)$	1
$x = b$	$P(b) \supset Q(b)$	0

Следовательно, формула $\forall x\ (P(b) \supset Q(x))$ ложна, так как $P(b) \supset Q(x)$ ложна, если положить $x = b$.

Задача 98. Раймонд Смаллиан встретил на острове рыцарей и лжецов человека, который произнес высказывание:
«Если на острове есть рыцари, то я рыцарь».
Есть ли рыцари на острове?

Решение. Пусть $P(x)$ — истина, если житель острова x является рыцарем. Обозначим через a имя встреченного человека. Тогда его высказывание записывается формулой $\exists x\ P(x) \supset P(a)$. Пусть a — рыцарь, тогда обе формулы $\exists x\ P(x) \supset P(a)$ и $\exists x\ P(x)$ истинные.

Пусть a — лжец, тогда обе формулы $P(a)$ и $\exists x\ P(x) \supset P(a)$ ложные. Следовательно, формула $\exists x\ P(x)$ истинна. Вывод: мы не можем сказать, кого встретил Смаллиан, но на острове есть рыцари.

Задача 99. Раймонд Смаллиан встретил на острове рыцарей и лжецов человека, который произнес высказывание:
«Если на острове есть лжецы, то я лжец».
Есть ли лжецы на острове?

Решение. Пусть $P(x)$ — истина, если житель острова x является рыцарем. Обозначим через a имя встреченного человека. Тогда его высказывание записывается формулой $\exists x\ \neg P(x) \supset \neg P(a)$. Пусть a — рыцарь, тогда обе формулы $\exists x\ \neg P(x) \supset \neg P(a)$ и $P(a)$ истинные. Поэтому по свойству контропозиции истинной является формула $P(a) \supset \neg\exists x\ \neg P(x)$. Следовательно, формула $\neg\exists x\ \neg P(x)$ истинна, $\exists x\ \neg P(x)$ ложна. И на острове нет лжецов.

Пусть a — лжец, тогда обе формулы $\exists x\ \neg P(x) \supset \neg P(a)$ и $P(a)$ ложные. Следовательно, формула $\neg P(a)$ истинна. Но тогда по свойствам импликации формула $\exists x\ \neg P(x) \supset \neg P(a)$ не может быть ложной.

Следовательно, a — рыцарь и на острове нет лжецов.

Следующие задачи 100—109 взяты из книги.[6] Раймонд Смаллиан однажды посетил целый архипелаг островов, на которых жили только рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Смаллиан заинтересовался количеством рыцарей и лжецов на отдельных островах. Кроме того, он хотел выяснить, есть ли какая-нибудь связь между курильщиками и лжецами. Будем говорить, что два аборигена (жители острова) являются людьми одного типа, если они оба лжеца или оба рыцаря. Это соглашение распространяется на любое количество людей.

[6] Smullyan R.M. Logical labyrinths. — A K Peters, 2009. — 327 p.

Задача 100. На первом острове, который он посетил, все жители сказали одно и то же: «Все мы здесь принадлежим одному типу». Какой можно сделать вывод о жителях этого острова?

Решение. Пусть высказанное утверждение ложно. Тогда жители острова — разного типа, и среди них рыцари утверждают, что они одного типа с лжецами. Получили противоречие. Рассмотрим другой вариант: утверждение истинно. Тогда получаем решение задачи: все жители острова — рыцари и они говорят об этом.

Задача 101. На следующем острове все жители сказали: «Некоторые из нас рыцари и некоторые лжецы». Каков состав этого острова?

Решение. Пусть высказанное утверждение истинно. Тогда среди жителей острова есть и рыцари, и лжецы. Причем лжецы в данном утверждении говорят правду. Это невозможно. Рассмотрим другой вариант: утверждение ложно. Тогда все жители острова — лжецы и, как должно быть, они говорят ложь.

Задача 102. На следующем острове Смаллиан в какой-то день опросил всех жителей, за исключением одного, кто спал. Они все сказали: «Все мы лжецы». На следующий день Смаллиан встретил жителя, спавшего за день до этого, и спросил его: «Правда ли, что все жители этого острова являются лжецами?» Житель ответил («да» или «нет»). Какой ответ он дал?

Решение. Среди сказавших нет рыцарей, так как тогда бы он говорил о себе ложь. Следовательно говорящие были лжецами, но для того, чтобы их утверждение было ложным, необходимо, чтобы спящий был рыцарь. Этот рыцарь на следующий день, очевидно, ответил на вопрос «нет».

Задача 103. На следующем острове Смаллиан был особенно заинтересован в курении аборигенов. Они все сказали то же самое: «Все рыцари на этом острове курят». Какой можно сделать вывод о распределении рыцарей и лжецов на острове и их отношению к курению?

Решение. Пусть предикат $K(x)$ истинен, если островитянин x есть рыцарь, а предикат $S(x)$ истинен, если x курит. Тогда высказанное утверждение можно записать в виде формулы $\forall x(K(x) \supset S(x))$. Если эта формула ложна, то все жители острова — лжецы. И для некоторого лжеца x_0 формула $K(x_0) \supset S(x_0)$ должна быть ложной. Но по свойству импликации это возможно только тогда, когда $K(x_0)$ — истина. Получили противоречие. Значит все жители острова — рыцари и они курят.

Задача 104. На следующем острове каждый из жителей сказал: «Некоторые лжецы на этом острове курят». Что можно узнать из этого?

Решение. Пусть предикат $L(x)$ истинен, если островитянин x есть лжец, а предикат $S(x)$ истинен, если x курит. Тогда высказанное утверждение можно записать в виде формулы $\exists x(L(x)\ \&\ S(x))$. Если эта формула истина, то каждый житель есть рыцарь и он утверждает о том, что есть лжецы на острове. Получили противоречие. Значит, все жители острова являются лжецами. Так как мы знаем, что для любого x формула $L(x)$ — истина, то в силу того, что лжецы высказывают ложь, необходимо, чтобы $\exists xS(x)$ было ложью. Ответ: все жители острова лжецы и ни один из них не курит.

Задача 105. На следующем острове все жители были одного типа, и каждый из них сказал: «Если я курю, то все жители этого острова курят». Что можно узнать из этого?

Решение. Пусть предикат $S(x)$ истинен, если островитянин x курит. Для каждого жителя x_0 острова мы можем записать его утверждение в виде формулы $S(x_0) \supset \forall xS(x)$. Если эта формула ложь, то $S(x_0)$ — истина, а $\forall xS(x)$ — ложь. Но поскольку для каждого x_0 формула $S(x_0)$ должна быть истиной, поэтому формула $\forall xS(x)$ ложной не может быть. Следовательно, любой житель x_0 острова есть рыцарь и формула $S(x_0) \supset \forall xS(x)$ является истинной. Если $S(x_0)$ — ложь, то все курить не могут и, следовательно,

$\forall xS(x)$ — ложь. Если $S(x_0)$ — истина, то по свойству импликации, $\forall xS(x)$ — истина. Получили, что все жители острова рыцари и либо они все не курят, либо все курят.

Задача 106. На следующем острове все жители были одного типа, и каждый из них сказал: «Если любой житель этого острова курит, то и я курю». Что можно узнать из этого?

Решение. Используя предикат S из предыдущих задач, мы можем записать высказанное каждым жителем x_0 острова утверждение в виде формулы $\forall xS(x) \supset S(x_0)$. Эта формула ложной быть не может, поэтому все жители острова есть рыцари. А что касается курения, то здесь ничего сказать нельзя. Может быть любое распределение курильщиков на острове, в том числе все могут быть некурящими или все могут курить.

Задача 107. На следующем острове также все были одного и того же типа, и каждый сказал: «Некоторые из нас курят, но я нет». Что отсюда следует.

Решение. Используя предикат S из предыдущих задач, мы можем записать высказанное каждым жителем x_0 острова утверждение в виде формулы $\exists xS(x) \,\&\neg\, S(x_0)$. Если эта формула истина для любого x_0, то тогда получаем, что все жители острова не курят, но есть курящие среди них. Получили противоречие. Поэтому формула должна быть ложной. Поэтому жители острова лжецы. Если бы часть жителей была курящей, а другая — некурящей, то тогда формула была бы истинной для некурящего x_0. Но эта формула будет ложной, если все курят или все не курят. Ответ: на острове живут лжецы, они все курят, или все не курят, но точнее сказать нельзя.

Задача 108. Предположим, что на том же острове вместо ответа в задаче 8 каждый житель сделал следующие два утверждения: «Некоторые из нас курят» и «Я не курю». Что бы вы заключили из этого?

Решение. Пусть все жители острова — рыцари. Тогда оба утверждения есть истина и, в частности, каждый говорит, что он некурящий, но это противоречит тому, что некоторые из них курят. Пусть теперь все жители острова есть лжецы. Тогда из высказывания «Некоторые из нас курят» получаем, что все не курят, но это делает истинным высказывание «Я не курю». Снова противоречие. Жители острова не могут сделать эти высказывания при данных условиях задачи.

Задача 109. Следующий остров населяли два племени — племя А и племя В. Каждый человек из племени А сказал: «Все жители этого острова — рыцари» и «Все мы курим». Каждый человек племени В сказал: «Некоторые из жителей этого острова есть лжецы» и «Никто на этом острове не курит». Что отсюда следует?

Решение. Утверждение «Все жители этого острова — рыцари» может быть истиной, а может быть ложью. Пусть это истина. Тогда оба племени состоят из рыцарей и рыцари племени *B* высказали ложь: «Некоторые из жителей этого острова есть лжецы». Противоречие. Следовательно, люди племени *A* высказывают ложь, т. е. они лжецы. Поэтому «Некоторые из жителей этого острова есть лжецы» — истина, и племя *B* состоит из рыцарей. Ответ: племя *A* — лжецы, племя *B* — рыцари, и никто не курит на острове.

2.8 Математическая индукция

Много примеров доказательства с помощью математической индукции приведено в главе 7 «Математическое доказательство» учебного пособия. Рассмотрим еще две задачи.

Задача 110. Функция Аккермана (см. учебное пособие, глава 8). Определим последовательность одноместных функций F_n: $\mathbf{N}\to \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ следующим образом:

$F_0(x) = x + 1$;

$F_{n+1}(x) = F_n(F_n(\ldots F_n(1)\ldots))$, (*)

где справа функция F_n применяется $x + 1$ раз.

Докажите:

1) $F_1(x + 1) = F_0(F_1(x))$;

2) $F_{n+1}(x + 1) = F_n(F_{n+1}(x))$;

3) $F_1(x) = x + 2$;

4) $F_2(x) = 2x + 3$;

5) $F_3(x) = 2^{x+3} - 3$;

6) $F_4(x) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{x+3 \text{ раза}} - 3$.

Решение.

1. Имеем в силу (*) равенства

$$F_1(x) = \underbrace{F_0(F_0(\ldots F_0(1)..))}_{F_0 \text{ повторяется } x+1 \text{ раз}},$$

$$F_1(x+1) = \underbrace{F_0(F_0(\ldots F_0(1)..))}_{F_0 \text{ повторяется } x+2 \text{ раза}}.$$

Поэтому получаем $F_1(x + 1) = F_0(F_1(x))$.

2. Проводим математическую индукцию по n. Базис индукции для $n = 0$ доказан в пункте 1). Для доказательства индуктивного перехода предположим, что для $n = k$ выполнено $F_{k+1}(x + 1) = F_k(F_{k+1}(x))$. Имеем в силу (*)

$$F_{k+2}(x+1) = \underbrace{F_{k+1}(F_{k+1}(\ldots F_{k+1}(1)..))}_{F_{k+1} \text{ повторяется } x+2 \text{ раза}},$$

$$\underbrace{F_{k+1}(F_{k+1}(\ldots F_{k+1}(1)..))}_{F_{k+1} \text{ повторяется } x+1 \text{ раз}} = F_{k+2}(x).$$

Отсюда получаем $F_{k+2}(x + 1) = F_{k+1}(F_{k+2}(x))$.

3. Проводим математическую индукцию по x. Базис индукции для $x = 0$:

$F_1(0) = F_0(1) = 2$. Для доказательства индуктивного перехода предположим, что для $x = y$ выполнено $F_1(y) = y + 2$. Имеем по свойству 2) $F_1(y + 1) = F_0(F_1(y)) = F_0(y + 2) = y + 2 + 1 = (y + 1) + 2$. Что и требовалось доказать.

4. Проводим математическую индукцию по x. Базис индукции для $x = 0$:

$F_2(0) = F_1(1) =$ (используем 3)) $= 3 = 2\cdot 0 + 3$. Для доказательства индуктивного перехода предположим, что для $x = y$ выполнено $F_2(y) = 2y + 3$. Имеем по свойству 2) $F_2(y + 1) = F_1(F_2(y)) = F_1(2y + 3) = 2y + 3 + 2 = 2(y + 1) + 3$. Что и требовалось доказать.

5. Проводим математическую индукцию по x. Базис индукции для $x = 0$:

$F_3(0) =$ (используем (*)) $F_2(1) =$ (используем 4)) $= 5 = 2^{0+3} - 3$. Для доказательства индуктивного перехода предположим, что для $x = y$ выполнено $F_3(y) = 2^{y+3} - 3$. Имеем по свойству 2) $F_3(y + 1) = F_2(F_3(y)) = F_2(2^{y+3} - 3) = 2(2^{y+3} - 3) + 3 = 2^{(y+1)+3} - 3$. Что и требовалось доказать.

6. Проводим математическую индукцию по x. Базис индукции для $x = 0$:

$F_4(0) =$ (используем (*)) $F_3(1) =$ (используем 5)) $= 13 = 2^{2^2} - 3$. Для доказательства индуктивного перехода предположим, что для $x = y$ выполнено

$F_4(y) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{y+3\text{ раза}} - 3$. Имеем по свойству 2) $F_4(y + 1) = F_3(F_4(y)) = 2^{F_4(y)+3} - 3 =$

$= 2^{\left(\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{y+3\text{ раза}} - 3\right)+3} - 3 = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{y+4\text{ раза}} - 3$. Что и требовалось доказать.

Задача 111. Определим множество $S \subseteq \mathbf{N}^2$ следующим образом. Пара $<0, 0> \in S$. Если $<m, n> \in S$, то $<m+2, n+3> \in S$. Докажите, что для всех $<m, n> \in S$ число $m + n$ делится на 5.

Решение. Базис индукции — пара <0, 0>. Очевидно, 0 + 0 делится на 5. Индуктивный переход: пусть для пары $<m, n> \in S$ сумма $m + n$ делится на 5, тогда для пары $<m + 2, n + 3> \in S$ очевидно число $m + 2 + n + 3$ делится на 5. Что и требовалось доказать.

2.9 Сравнение скорости роста

Говорят, что функция g **мажорирует** функцию f, если существует действительное число k и целое положительное число m, такое, что $|f(n)| \leq k\,|g(n)|$ для всех $n \geq m$. Если g мажорирует f, это обозначается как $f(n) = O(g(n))$. Символ $O(g(n))$ читается как **«*O* большое от *g*(*n*)»**; при этом говорят, что $f(n)$ имеет порядок O большое от $g(n)$.

Для того чтобы убедиться в справедливости $f(n) = O(g(n))$, существуют два строгих способа:

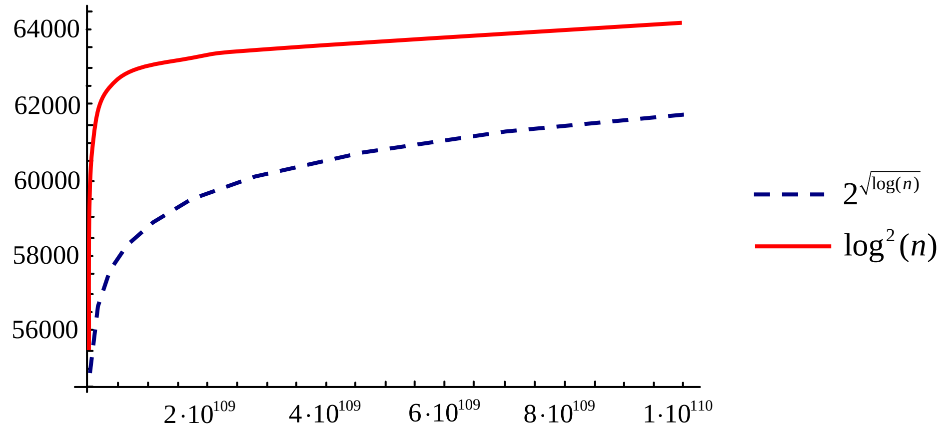
1) доказать, что, начиная с некоторого n_0, для всех больших значений n имеем $f(n) \leq c\,(g(n))$, где c — некоторое положительное число;

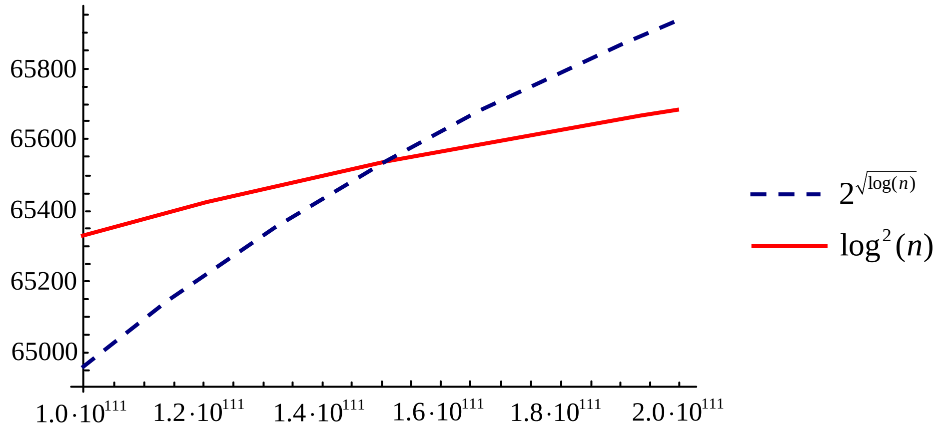
2) обнаружить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} < \infty$.

Второй способ надежен, если предел существует.

Можно, конечно, для сравнения роста двух функций построить их графики. Но всегда есть опасность, что график одной функции пересечет график другой функции при очень больших значениях аргумента. Следующий пример показателен.

Пусть $f(x) = \log^2 x$ и $g(x) = 2^{\sqrt{\log x}}$. Вот как ведут себя эти функции в двух диапазонах:





Весьма полезны результаты о сравнении скорости роста конкретных функций из учебного пособия (глава 9 §1). Важно помнить также, что отыскивая асимптотически верхнюю оценку для суммы, мы можем отбрасывать члены меньшего порядка, которые при больших n становятся малыми по сравнению с основным слагаемым. Заметим также, что коэффициент при старшем члене роли не играет (его можно считать равным 1).

Задача 112. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость.

$f_1(n) = n!$;

$f_2(n) = n^2$;

$f_3(n) = \ln n$;

$f_4(n) = n (\ln n)$.

Решение. Для этих функций правильный порядок следующий:

$\ln n = O(n (\ln n))$, $n (\ln n) = O(n^2)$, $n^2 = O(n!)$.

3 Варианты заданий для текстовой контрольной работы

Контрольная работа состоит из 20 вариантов по 8 заданий в каждом.

Выбор варианта контрольной работы осуществляется по общим правилам с использованием следующей формулы:

$$V = (N \times K) \text{ div } 100,$$

где V — искомый номер варианта,

N — общее количество вариантов,

div — целочисленное деление,

при $V = 0$ выбирается максимальный вариант,

K — код варианта.

Вариант 1

1.	Следующее утверждение для произвольных множеств докажите или опровергните $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
2.	Является ли тавтологией формула $((A \vee B)\ \&\ (A \vee C)\ \&\ (B \vee D)\ \&\ (C \vee D)) \sim ((A\ \&\ D) \vee (B\ \&\ C))$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Все девочки боятся лягушек и мышей.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда они одновременно пересекают третью либо не пересекают её.*
5.	Для бинарного отношения $x\ \rho\ y \Leftrightarrow$ «x перпендикулярна y», определенного на множестве всех прямых плоскости, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6.	Для бинарного отношения $X\ \rho\ Y \Leftrightarrow$ «$X \subset Y$» (X и Y — множества из целых чисел) выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
7.	Докажите, используя математическую индукцию, для положительных целых n равенство $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $n! + 200n$, $10000 \ln n$, $(\ln n)^2$, $n^2 + \ln n$, $10^6\ n$.

Вариант 2

1.	Проверить для произвольных множеств, что $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$.
2.	Является ли тавтологией формула $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Логарифмы всех положительных рациональных чисел иррациональны.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Доисторические ящеры при встречах уступали дорогу друг другу*.
5.	Пусть ρ и φ — бинарные отношения на некотором множестве. Докажите, что $(\rho \cup \varphi)^{-1} = \rho^{-1} \cup \varphi^{-1}$.
6.	Пусть f: $x \to x + 1$ и g: $x \to 2^x$ — отображения **R** в **R**. Найдите отображения $f \circ g \circ f$, $f \circ f \circ g$, $f \circ g \circ g$ и $g \circ f \circ g$. Являются ли отображениями **R** в **R** отношения f^{-1} и g^{-1}?
7.	Докажите, используя математическую индукцию, равенство $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ для целых $n \geq 2$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $\ln(n!) + 700$, $0.001 \times 2^{2^n}$, $\ln(\ln n) + 10^{100}$, $0.2 \times 4^{\ln n}$, $n^3/250$.

Вариант 3

1.	Проверить для произвольных множеств, что $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$.
2.	Что можно сказать об истинностном значении высказывания $p \supset \neg t$, если формулы $p \supset q$, $\neg s \supset \neg q$ и $t \supset \neg s$ истинны?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Некоторые финансисты — мошенники, но не все.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Прапорщики любят порядок, и не только они.*
5.	Найдите композиции $\rho \circ \varphi$ и $\varphi \circ \rho$, где $\rho = \{<x, y> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y = 0\}$, $\varphi = \{<x, y> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x \times y < 0\}$, **R** — множество вещественных чисел.
6.	Докажите, что если ρ — отношение эквивалентности на некотором множестве X, то ρ^{-1} — также отношение эквивалентности на X.
7.	Докажите, используя математическую индукцию для чисел Фибоначчи $\mathrm{fib}(m + n) = \mathrm{fib}(m - 1)\,\mathrm{fib}(n) + \mathrm{fib}(m)\,\mathrm{fib}(n + 1)$. (По определению, $\mathrm{fib}(1) = \mathrm{fib}(2) = 1$, $\mathrm{fib}(n) = \mathrm{fib}(n - 1) + \mathrm{fib}(n - 2)$ для $n > 2$) Подсказка: индукция по n, базовые случаи $n = 1$ и $n = 2$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $250n$, $\sqrt{n} + n$, $\frac{ne^n}{1000}$, $n^2(\ln n)^{1000}$, $4 - 10n + 2n^2$.

Вариант 4

1.	Следующее утверждение для произвольных множеств докажите или опровергните $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
2.	Является ли формула $((p \supset q)$ & $(q \supset p)$ & $(p \vee r)$ & $\neg r) \supset p$ тавтологией?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Кошки бывают только белые и серые.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Так как 60 делится на 2 и на 3, то 60 делится на некоторые числа, отличные от 60.*
5.	Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ «$x + y$ делится нацело на 3», определенного на множестве **Z** целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6.	Докажите, что отношение $\langle a, b\rangle \rho \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ есть отношение эквивалентности на множестве вещественных чисел. Найдите классы эквивалентности и изобразите их на координатной плоскости.
7.	Используя математическую индукцию, докажите равенство $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ для целого $n > 0$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $\sqrt{n}+n$, $\frac{ne^n}{1000}$, $n^2(\ln n)^{1000}$, $n^3 - 100n^2$, $\ln n$.

Вариант 5

1.	Проверить, что $A \Delta B = C \Leftrightarrow B \Delta C = A \Leftrightarrow C \Delta A = B$. (Подсказка: используйте ассоциативность Δ, задача 17 из раздела «Как решать задачи. Операции с множествами».)
2.	Формула $(p \supset q)$ & $(q \supset r)$ & $\neg (p \supset r)$ — тавтология, противоречие или не то и не другое?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Синус и косинус равны друг другу тогда и только тогда, когда равны тангенс и котангенс.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Не все решения уравнения* $\sin 5x = 0$ *иррациональны*.
5.	Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ «$x^2 + y^2 = 1$», определенного на множестве **Z** целых чисел.
6.	На множестве $\{2, 0, 4\} \times \{2, 0, 4\}$ задано отношение R, определяемое следующим образом: $\langle a, b\rangle R \langle c, d\rangle$, если $a - b = c - d$. а) Показать, что R есть отношение эквивалентности. б) Описать классы эквивалентности.
7.	Используя математическую индукцию, докажите для целого $n \geq 0$, что $8^{n+2} + 9^{2n+1}$ делится на 73.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $10^6 \ln (\ln n)$, 10^{10}, n^2, $4^{\ln n}/200$, n^3.

Вариант 6

1.	Проверить тождество для произвольных множеств: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
2.	Является ли тавтологией формула $((P \supset Q) \mathbin{\&} (R \supset Q) \mathbin{\&} (T \supset (P \vee R)) \mathbin{\&} T) \supset Q$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Волки и люди боятся друг друга*.
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Все рыцари сражались друг с другом на поединках*.
5.	Пусть ρ и φ — антисимметричные отношения на некотором множестве. Докажите, что $(\rho \cap \varphi)^{-1}$ — антисимметричное отношение.
6.	Доказать тождество для любой функции f: $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.
7.	Числа Фибоначчи определяются следующим рекуррентным правилом: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ для $k \geq 0$. Докажите с помощью математической индукции, что для любого натурального $n \geq 0$ имеем $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $200e^n$, $10^6 n^2$, $4^{\ln n}$, $n^3/10$, 1000000.

Вариант 7

1.	Определить операции $\cup$ и \ (каждую по отдельности) через операции Δ и $\cap$.
2.	Является ли тавтологией формула $((p \supset q) \;\&\; (p \vee r) \;\&\; \neg r) \supset \neg p$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Для любого натурального числа найдется большее его простое число.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Все лягушки, увидев аиста, прыгают и квакают.*
5.	Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ «x перпендикулярна y», определенного на множестве всех прямых плоскости, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6.	На множестве **R** вещественных чисел задано отношение $a \rho b \Leftrightarrow a^2 = b^2$. Докажите, что это отношение эквивалентности, и найдите классы эквивалентности.
7.	Используя математическую индукцию, докажите, что $1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $2^{2^n}/1000$, $0.0001\,2^{2^{n+1}}$, $0.001\left(\frac{3}{2}\right)^n$, 0.001, $25n^3$.

Вариант 8

1.	Следующее утверждение докажите или опровергните (опровергнуть можно на частном примере): $A \in B$ и $B \in C \Rightarrow A \in C$.
2.	Является ли тавтологией формула $((P \supset Q)\ \&\ (R \supset Q)\ \&\ (T \supset (P \vee R))\ \&\ \neg T) \supset Q$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Зайцы не всегда глупее лис.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Все честные ученые уважают друг друга.*
5.	Для бинарного отношения $x\ \rho\ y \Leftrightarrow$ «$y = \|x\|$», определенного на множестве вещественных чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6.	Докажите, что композиция инъективных отображений есть инъективное отображение.
7.	Используя математическую индукцию, докажите, что $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} = \dfrac{1-r^n}{1-r}$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $1000\sqrt{n}$, $0.01n^3$, 666, 554 ln (ln n), $0.001n!$.

Вариант 9

1.	Следующее утверждение докажите или опровергните: $A \cap B \subseteq C$ и $A \cup B \subseteq C \Rightarrow A \cap C = \varnothing$.
2.	Является ли тавтологией формула $((p \supset q) \vee (r \supset s)) \supset ((p \;\&\; r) \supset (q \vee s))$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Простое число, отличное от 2, нечетно.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Любое число, большее 1, можно представить в виде произведения различных чисел.*
5.	Покажите, что равенство $\rho \circ \varphi = \varphi \circ \rho$ верно не для любых бинарных отношений.
6.	На множестве $\{1, 5, 9\} \times \{1, 5, 9\}$ задано отношение R, определяемое следующим образом: $<a, b>\ R\ <c, d>$, если $a - b = c - d$. а) Показать, что R есть отношение эквивалентности. б) Описать классы эквивалентности.
7.	Используя математическую индукцию, докажите для целого $n \geq 0$, что число $3^{2n+3} + 2^n$ делится на 7.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $\ln n,\ n! + n,\ 10n \ln(\ln n),\ 23n^2 + 12345,\ 0.12345(\ln n)^{\ln n}$.

Вариант 10

1.	Проверить для произвольных множеств, что $\neg(A \cap B \cap C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.
2.	Что можно сказать об истинностном значении высказывания $p \supset \neg s$, если $p \supset q \equiv$ И, $\neg s \supset \neg q \equiv$ Л?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Если число делится на два числа, то оно делится на их произведение.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Если вчера Петров прогулял два занятия, то сегодня только одно.*
5.	Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x\ \rho\ y \Leftrightarrow$ «$x^2 = y^2$», определенного на множестве **R** вещественных чисел.
6.	Найдите $f(A)$, где $A = \{<x, y> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = 2x + 3\}$ для следующих отображений: а) f: $<x, y> \to <x, -y>$; б) f: $<x, y> \to <y - 2, x + 2>$. Изобразите на плоскости множества A и $f(A)$.
7.	Используя математическую индукцию, докажите для целого $n \geq 1$, что $\sum_{k=1}^{n} n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $2^{\ln n}/10^6$, e, $10^6\sqrt{\ln n}$, $(\ln n)^2/100$, $1000\,2^{\sqrt{\ln n}}$.

Вариант 11

1.	Проверить для произвольных множеств, что $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap B \subseteq C$.
2.	Является ли тавтологией формула $((p \mathbin{\&} q) \supset r) \sim (p \supset (q \supset r))$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Всякое четное число, большее 2, есть сумма двух простых чисел.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Хотя 60 делится на 2, 3, 4, 5 и 6, но это не означает, что 60 делится на любое натуральное число.*
5.	Для бинарного отношения $X \rho Y \Leftrightarrow$ «$X \cap Y = \varnothing$» (X и Y — множества из целых чисел) выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6.	Пусть f: $x \to x^2 + 1$ и g: $x \to x^3$ — отображения **R** в **R**. Найдите отображения $f \circ g$ и $g \circ f$.
7.	Используя математическую индукцию, докажите для целого $n \geq 1$, что $\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $n/134$, $\sqrt{n} + n$, $\frac{ne^n}{1000}$, $n^2(\ln n)^{1000}$, $1 + n^2(100 + n)$.

Вариант 12

1.	Определить операции $\cup$ и $\cap$ (каждую по отдельности) через операции разность \ и симметрическая разность Δ.
2.	Является ли тавтологией формула $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Некоторые индейцы были храбрее белых.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Полицейские замешаны в преступлениях, но не все.*
5.	Для бинарного отношения $x\,\rho\,y \Leftrightarrow$ «$x^2 + y^2 = 1$», определенного на множестве **R** вещественных чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6.	Пусть f: $x \to x+1$ и g: $x \to 2^x$ — отображения **R** в **R**. Найдите отображения $f \circ g \circ f$, $f \circ f \circ g$, $f \circ g \circ g$ и $g \circ f \circ g$. Являются ли отображениями **R** в **R** отношения f^{-1} и g^{-1}?
7.	Используя математическую индукцию, докажите для целого $n \geq 1$, что $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $6 + n/1000$, $\ln(\ln n)$, $(\ln n)^2$, $n^2 + 1000n$, 2^n.

Вариант 13

1.	Определить операции $\cap$ и \ (каждую по отдельности) через операции Δ и $\cup$.
2.	Является ли тавтологией формула $\neg (p \sim q) \sim (\neg (p \supset q) \vee \neg (q \supset p))$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Все первокурсники и второкурсники пришли на лекцию.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Все философы критиковали друг друга.*
5.	Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ «$y = \|x\|$», определенного на множестве **R** вещественных чисел.
6.	Доказать тождество для любой функции f: $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
7.	Используя математическую индукцию, докажите для целого $n \geq 0$, что число $3^{3n+3} - 26n - 27$ делится на 169.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $100 \ln n$, $10^6 n$, $(1+n)!/10^6$, $10^6 \ln (n!)$, $10^6 \times 2^{\frac{\ln n}{2}}$.

Вариант 14

1.	Проверить для произвольных множеств, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$.
2.	Является ли тавтологией формула $((p \supset q) \,\&\, (r \supset s)) \supset ((p \vee r) \supset (q \vee s))$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Два натуральных числа, делящиеся друг на друга, равны.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Если Ромео и Джульетта не любят друг друга, то никто никого не любит взаимно.*
5.	Для бинарного отношения $X \rho Y \Leftrightarrow$ «$X \setminus Y \neq \varnothing$», определенного на множестве всех подмножеств множества целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6.	На множестве **N** натуральных чисел задано бинарное отношение $a \rho b \Leftrightarrow$ «последняя цифра в десятичной записи числа a совпадает с последней цифрой числа b». Доказать, что ρ есть отношение эквивалентности. Сколько элементов в фактор-множестве $\mathbf{N}/\rho$?
7.	Используя математическую индукцию, докажите для целого $n \geq 1$, что $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $100\left(\frac{3}{2}\right)^n$, $2^{\sqrt{\ln n}}/20$, $300(\ln n)^{\ln n}$, $n!/4000$, $50000n \ln n$.

Вариант 15

1.	Проверить для произвольных множеств, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = A \cup (B \cup C)$.
2.	Является ли формула $((p \supset (q \supset r))\ \&\ (\neg t \vee p)\ \&\ \neg q) \supset (t \supset r)$ тавтологией?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Некоторые школьники — отличники или спортсмены.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Некоторые прямые параллельны.*
5.	Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x\ \rho\ y \Leftrightarrow$ «$2x = 3y$», определенного на множестве $\mathbf{Z}$ целых чисел.
6.	На множестве σ всех отображений $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ определено отношение $f\ \rho\ g \Leftrightarrow$ «существует $c \in \mathbf{R}$, такое, что для всех $x \in \mathbf{R}$ имеем $f(x) = g(x) + c$». Докажите, что ρ — отношение эквивалентности и найдите классы эквивалентности.
7.	Используя математическую индукцию, докажите для целого $n \geq 0$, что $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ делится на 8.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $2345\sqrt{n}$, 6666, $n^2 + \ln n$, $23n^2 + 1000n$, $2000n \ln n$.

Вариант 16

1.	Следующее утверждение докажите или опровергните (опровергнуть можно на частном примере с помощью диаграммы Эйлера): если $A \subseteq \neg(B \cup C)$ и $B \subseteq \neg(A \cup C)$, то $B = \varnothing$.
2.	Что можно сказать об истинностном значении высказывания $p \supset v$, если формулы $(p \vee q) \supset (r \vee s)$ и $(s \vee r) \supset v$ истинны?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Сумма любого числа, отличного от нуля, с обратным к нему числом больше 2.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Для делимости целого числа на 8 необходима делимость на 4.*
5.	Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ «y делится нацело на x», определенного на множестве положительных целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6.	На множестве $\{4, 10, 7\} \times \{4, 10, 7\}$ задано отношение R, определяемое следующим образом: $<a, b>$ R $<c, d>$, если $a - b = c - d$. а) Показать, что R есть отношение эквивалентности. б) Описать классы эквивалентности.
7.	Числа Люка удовлетворяют такому же рекуррентному отношению, как и числа Фибоначчи $f(n + 2) = f(n) + \mathrm{f}(n - 1)$, но с другими начальными условиями $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ (для чисел Фибоначчи $\mathrm{fib}(1) = \mathrm{fib}(2) = 1$). Докажите, используя математическую индукцию, соотношение $f(n) = \mathrm{fib}(n - 1) + \mathrm{fib}(n + 1)$ для $n > 1$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $10n^3$, $1000(\ln n)^2$, $n^2 + 3000\ln n$, $2^n/123$, $50\sqrt{n}$.

Вариант 17

1.	Следующее утверждение для произвольных множеств докажите или опровергните $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$.
2.	Является ли тавтологией формула $(p \supset q) \supset ((p \,\&\, r) \supset (q \,\&\, r))$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Для любого натурального числа существует большее, делящееся на* n.
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Если бы все боялись друг друга, то ни один человек не был бы счастлив.*
5.	Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ «$x \le y + 1$», определенного на множестве **Z** целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6.	Найдите $f(A)$, где $A = \{<x, y> \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = 2x + 3\}$ для следующих отображений: а) f: $<x, y> \to <y, x>$; б) f: $<x, y> \to <-y, -x>$. Изобразите на плоскости множества A и $f(A)$.
7.	Используя математическую индукцию, докажите для целого $n \ge 1$, что $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): e^n, $2^{\sqrt{\ln n}} + 2000$, 2^n, 123456, $10^6\, n$.

Вариант 18

1.	Проверить тождество $A \Delta (A \Delta B) = B$. (Подсказка: используйте ассоциативность Δ, задача 17 из раздела «Как решать задачи. Операции с множества».)
2.	Что можно сказать об истинностном значении высказывания $p \supset (\neg r \supset \neg q)$, если $p \supset (q \supset r)$ имеет значение истина?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Два целых числа могут делиться друг на друга, но не быть равными.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Не все студенты отличники или спортсмены.*
5.	Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ «$x \times y > 1$», определенного на множестве **R** вещественных чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6.	Пусть f — отображение **R** в **R**. Рассмотрим отношение $a \rho b \Leftrightarrow f(a) \le f(b)$. Приведите примеры таких отображений f, для которых отношение ρ является отношением частичного порядка, и примеры таких f, что ρ не является отношением частичного порядка
7.	Используя математическую индукцию, докажите для целого $n \ge 1$, что $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $2^{2^n}/1000$, $100n^{\ln(\ln n)}$, $n\,2^n$, $e^n/500$, $2^{2^{n+1}}/1000$.

Вариант 19

1.	Докажите, что $B = (\neg A \cap B) \cup (\neg B \cap A) \Rightarrow A = \varnothing$. (Подсказка. Доказывайте от противного: предположите, что существует $x \in A$. Рассмотрите два случая: a) $x \notin B$ и b) $x \in B$ и придите в обоих случаях к противоречию. Это покажет, что $A = \varnothing$.)
2.	Является ли тавтологией формула $((P \supset Q)\ \&\ (Q \supset P)\ \&\ (P \vee R)\ \&\ \neg R) \supset P$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *При некоторых отрицательных x функция f(x) принимает рациональные значения.*
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Так как 60 делится на 2, 3, 4, 5 и 6, то 60 делится на любое натуральное число.*
5.	Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x\ \rho\ y \Leftrightarrow$ «$5x = 3y$», определенного на множестве **Z** целых чисел.
6.	Даны отображения $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$: f: $x \to \sin x$ и g: $x \to x^2$. Найдите $f \circ g$ и $g \circ f$.
7.	Числа Фибоначчи определяются следующим рекуррентным правилом: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ для $k \geq 0$. Докажите с помощью математической индукции, что для любого натурального $n \geq 0$ имеем $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $2^{\ln n}/100$, $20\ e$, $\ln(n!)/300$, $2^{\frac{\ln n}{2}}$, $2^{2^n}/10^{100}$.

Вариант 20

1.	Следующее утверждение для произвольных множеств докажите или опровергните $(\neg A \cap B) \cup (\neg B \cap A) \subseteq B$.
2.	Является ли тавтологией формула $((P \supset Q)\ \&\ (Q \supset P)\ \&\ (P \vee R)\ \&\ R) \supset P$?
3.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Некоторые зубные врачи боятся маленьких девочек*.
4.	Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: *Все волки, кроме бешенных, боятся людей*.
5.	Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x\ \rho\ y \Leftrightarrow$ «x и y имеют общий делитель > 1», определенного на множестве положительных целых чисел.
6.	Пусть A — непустое конечное множество. Рассмотрим отношение $X\ \rho\ Y$ на подмножествах $A \Leftrightarrow$ «число элементов в X меньше или равно числу элементов в Y». Является ли ρ отношением частичного порядка?
7.	Докажите для натурального $n \geq 7$: $3^n < n!$.
8.	Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)): $135\sqrt{\ln n}$, $892.6(\ln n)^2$, $2^n/10^6$, $10^6 2^{\frac{\ln n}{2}}$, $10^{20}\ln(\ln n)$.