**ФБГОУ ВПО Уральский государственный педагогический университет**

**В.Ю. Бодряков, Н.Г. Фомина**

# Интегральное мчисление

**Индивидуальные домашние задания по дисциплине «Математический анализ. Часть 3. Интегральное исисление»**

Екатеринбург 2012

Составители: В.Ю. Бодряков, Н.Г. Фомина

Индивидуальные домашние задания по дисциплине "Математический анализ. Часть 3. Интегральное исчисление". Екатеринбург, Изд-во УрГПУ, 2012, 23 с.

Индивидуальные домашние задания (ИДЗ) по дисциплине "Математический анализ. Часть 3. Интегральное исчисление"предназначены для студентов очной и заочной форм обучения математического факультета УрГПУ, изучающих курс математического анализа. Работа содержит 10 ИДЗ по 25 вариантов в каждом, содержащих различные задания по теме "Интегральное исчисление". Самостоятельное решение индивидуальных заданий дает возможность углубить теоретические знания, отработать практические навыки интегрирования и освоить приложения интегрального исчисления. Во введении к работе приведены подробные примеры решения типовых заданий по теме с необходимыми методическими указаниями.

Рецензент:

# Введение. Методические указания к решению заданий

## I. Интегрирование путем замены переменной

**Пример 1.** Проинтегрировать выражение $\displaystyle\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx$.

**Решение.** Выполним почленное деление подынтегрального выражения. В результате будем иметь $\displaystyle\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{\ln(x-1)}{x-1}dx$. Представим второе слагаемое в виде $\displaystyle\int \frac{\ln(x-1)}{x-1}dx = \int \ln(x-1)d(\ln(x-1))$ и, делая замену переменной $x-1=t$, получим $\displaystyle\int \frac{1}{t}\,dt + \int \ln t d(\ln t) = \ln t + \frac{\ln^2 t}{2} + C$. Возвращаясь к исходной переменной $x$, запишем окончательно

**Ответ:** $\displaystyle\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx = \ln|x-1| + \frac{\ln^2|x-1|}{2} + C$.

## II. Интегрирование по частям

**Пример 2.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}\,dx$

**Решение:** Интегрирование будем вести по частям в соответствии с формулой

$$\int U dV = U\cdot V - \int V dU.$$

Тогда представим $\begin{cases} U = \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}, & dV = dx \\ dU = \dfrac{5d\,x}{1+(5x-1)}, & V = x. \end{cases}$ После преобразования $dU$ получим

$$x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - \int dx = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - x + C.$$

**Ответ:** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}\,dx = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{5x-1} - x + C$.

## III. Интегрирование дробно-рациональной функции

**Пример 3.** Вычислить интеграл от дробно-рациональной функции

$$\int \frac{3x^2+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx.$$

**Решение.** Интеграл от дробно-рациональной функции может быть вычислен с помощью следующего алгоритма:

а) убедиться, что подынтегральная функция — правильная дробь. Если это не так - необходимо выделить целую часть;

б) разложить выделенную правильную дробь на элементарные дроби с неопределенными коэффициентами;

в) найти неопределенные коэффициенты в числителях элементарных дробей;

г) проинтегрировать полученные элементарные дроби.

В данном случае подынтегральное выражение

$$\frac{3x^2 + x + 46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx$$

является правильной дробью (степень числителя меньше степени знаменателя) и может быть разложено на элементарные дроби следующим образом:

$$\frac{3x^2 + x + 46}{(x-1)^2(x^2+9)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+9}.$$

Приводя выражение к общему знаменателю, получаем

$$\frac{A(x-1)(x^2+9) + B(x^2+9) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+9)} = \frac{3x^2 + x + 46}{(x-1)^2(x^2+9)}.$$

Сравнивая числители исходного и полученного выражения, для нахождения неопределенных коэффициентов можем записать систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 & : \ A + C = 0 \\ x^2 & : \ B - A - 2C + D = 3 \\ x & : \ 9A + C - 2D = 1 \\ x^0 & : \ 9B - 9A + D = 46. \end{cases}$$

Из системы уравнений находим $A = -0,3$; $B = 5$; $C = 5$; $D = -0,17$. Нахождение интегралов, содержащих элементарные дроби, теперь не представляет затруднений:

$$\int \frac{-0,3}{x-1}\,dx = -0,3\ln|x-1| + C;$$

$$\int \frac{5}{(x-1)^2}\,dx = -\frac{5}{x-1} + C;$$

$$\int \frac{5x - 0,17}{x^2+9}\,dx = 5\int \frac{x - 0,034}{x^2+9}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x - 0,68}{x^2+9}\,dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int\left(\frac{2x}{x^2+9} - \frac{0,68}{x^2+9}\right)dx = \frac{5}{2}\ln(x^2+9) - \frac{17}{30}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$$

Объединяя полученные результаты, записываем ответ.

**Ответ:**

$$\int \frac{3x^2+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)} = -0,3\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + \frac{5}{2}\ln(x^2+9) - \frac{17}{30}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

**IV. Интегрирование выражений вида** $R(\sin x, \cos x)dx$

**Пример 4.** Вычислить интегралы:

$$a) \int \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx;$$

$$b) \int\limits_0^\pi 2^4\sin^2 x\cos^4 x\,dx.$$

**Решение.** а). Интегрирование выражений вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где $R$ — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, преобразуются в интегралы от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}(x/2) = t$.

Тогда имеем

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка дает возможность перейти от интеграла вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ к интегралу от дробно-рациональной функции, но часто такая замена ведет к громоздким выражениям. При определенных условиях эффективными оказываются более простые подстановки:

• *Если выполняется равенство* $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка $\cos x = t$.

• *Если выполняется равенство* $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\sin x = t$.

• *Если выполняется равенство* $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)dx$, то подстановка $tgx = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$.

В данном случае для нахождения интеграла $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx$ применим универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}(x/2) = t$.

Тогда

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2t\,dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+t}{t^2+1}.$$

Так как дробь неправильная, то, выделяя целую часть, получим

$$\int \left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)\,dt = \int \left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)\,dt = t+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-\operatorname{arctg} t+C.$$

Возвращась к исходной переменной будем иметь

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx = \operatorname{tg}(x/2)-\ln|\cos(x/2)|-x/2+C.$$

b). Во втором примере рассмотрим важный частный случай, когда общее выражение $\int R(\sin x, \cos x)dx$ имеет вид $\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$. В этом частном случае если $m$ нечетно, следует применить подстановку $\cos x = t$. Если нечетно $n$, следует применить подстановку $\sin x = t$. Если оба показателя $m$ и $n$ — четные неотрицательные числа (в частности, одно из них может быть равным нулю), то выполняют замену по известным тригонометрическим формулам: $\sin^2 x = \dfrac{1-cos2x}{2}, cos^2x = \dfrac{1+cos2x}{2}$.

В данном случае

$$\int_0^\pi 2^4\sin^2 x\cdot\cos^4 x dx = \int_0^\pi 2^4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$=2\int_0^\pi (1+2\cos 2x+\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx = 2\int_0^\pi (1,5+\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}+\cos^3 2x)dx =$$

$$=\left(3x+\sin 2x+\frac{\sin 4x}{4}\right)\Bigg|_0^\pi + 2\int_0^\pi \cos^3 2x dx = 3\pi + 2\int_0^\pi \cos^2 2x\cdot\frac{1}{2}d\sin 2x =$$

$$=3\pi+\int_0^\pi (1-\sin^2 2x)d\sin 2x = 3\pi+\left(\sin 2x+\frac{\sin^3 2x}{3}\right)\Bigg|_0^\pi = 3\pi$$

**Ответ:**

$a)\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx = \operatorname{tg}(x/2)-\ln|\cos(x/2)|-x/2+C;$

$b)\displaystyle\int_0^\pi 2^4\sin^2 x\cos^4 x\,dx = 3\pi.$

**V. Интегрирование некоторых иррациональных функций**
**Пример 5.** Вычислить определенный интеграл от иррациональной функции: $\int\limits_1^{64} \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}\, dx.$

**Решение.** Интеграл вида $R(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \cdots, x^{\alpha_k})dx$, где $R$ — рациональная функция от $x^{\alpha_i}$, $\quad \alpha_i = p_i/q_i$ — рациональные дроби $(i = 1, 2, \ldots, k)$, сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^q$, где $q$ — наименьшее общее кратное $(HOK)$ знаменателей дробей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. В нашем случае $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 6$, так что наименьшее общее кратное их знаменателей $q = HOK(2,3,6) = 6$. Замена переменной $x = t^6$ приводит к интегралу от дробно-рациональной функции, который вычисляется, как описано в **примере 3**:

$$\int\limits_1^{64} \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}\, dx = \int\limits_1^{2} \frac{(1-t+2t^3\cdot 6t^5)}{t^6+2t^9+t^8}\, dt = 6\int\limits_1^{2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2-t+1}\right) dt.$$

**Ответ:**

$$\int\limits_1^{64} \frac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4t-1}{\sqrt{7}}\bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{7} - \operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{7}}\right) \approx 0,2732.$$

**VI. Интегрирование дифференциального бинома**

**Пример 6.** Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\cdot\sqrt[15]{x^4}}dx.$

**Решение.** Интеграл вида $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где $m, n$ и $p$ — рациональные числа, называется интегралом от дифференциального бинома. Как показано Чебышевым, интеграл от дифференциального бинома выражается через дробно-рациональную функцию. Однако, интеграл может быть выражен в элементарных функциях, лишь в следующих трех случаях.

• *Если $p$ целое число. Здесь имеем интеграл от дробно-рациональной функции.*

• *Если $\frac{m+1}{n}$ — целое число. В этом случае применяется подстановка $a+bx^n = z^s$, где $s$ — знаменатель дроби $p$.*

• *Если $p + \frac{m+1}{n}$ целое число. В этом случае применяется подстановка $ax^{-n} + b = z^s$, где $s$ — знаменатель дроби $p$.*

Перепишем интеграл в виде $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\cdot\sqrt[15]{x^4}}dx = \int x^{-19/15}(1+x^{1/5})^{1/3}dx$. Здесь $m = -19/15, n = 1/5, p = 1/3$, так как $p + (m+1)/n = -1$, то имеет место третья подстановка Чебышева. Сделаем рекомендованную замену переменной $ax^{-1/5} + b = z^3$, откуда, выразив $x$ через $z$, получаем $x = 1/(z^3-1)^{-5}, dx = -15z^2/(z^3-1)^{-6}$. В результате интеграл принимает вид $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\cdot\sqrt[15]{x^4}}dx = -15\int z^3dz$, и без труда вычисляется.

**Ответ:** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\cdot\sqrt[15]{x^4}}dx. = -15\frac{(1+\sqrt[5]{x})^4}{4\sqrt[5]{x^4}} + C.$

**VII. Вычисление площади фигуры, заданной в декартовых координатах.**

**Пример 7.** Вычислить площадь $S$ фигуры, ограниченной графиками функций, заданных в декартовых координатах: $y = (x+1)^2$ и $y^2 = x+1$.

*Решение:* Для вычисления площади фигуры, ограниченной графиками функций, заданных в декартовых координатах: $y = (x+1)^2$ и $y^2 = x+1$, построим их (рис. 1).

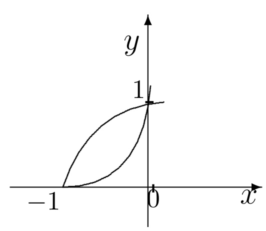


Рис. 1. Фигура, ограниченная графиками функций $y = (x+1)^2$ и $y^2 = x+1$.

Легко установить, что графики пересекаются в точках $(0;1)$ и $(-1;0)$, ограничивая некоторую фигуру. Площадь фигуры вычисляем как

$$S = \int\limits_{-1}^{0} (\sqrt{x+1} - (x+1)^2)\,dx = \left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{3}(x+1)^3\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}.$$

**Ответ:** Площадь фигуры $S$ равна $1/3$.

## VII. Вычисление площади фигуры, заданной в полярных координатах

**Пример 8.** Вычислить площадь $S$ фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $\rho = \sqrt{3}\cos 4\varphi$ и $\rho = 3/2 \qquad (\rho \leqslant 3/2)$.

**Решение:** Для вычисления площади фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах: $\rho = \sqrt{3}\cos 4\varphi$ и $\rho = 3/2$ $(\rho \leqslant 3/2)$, построим ее (рис. 2).

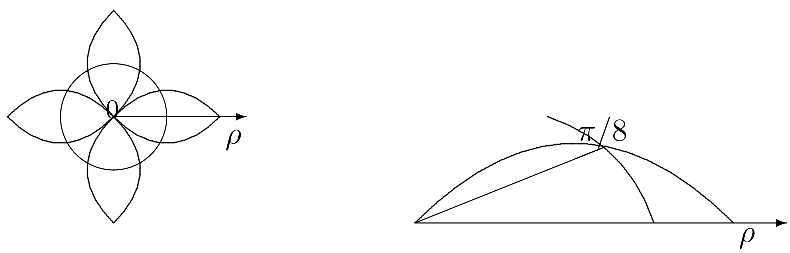


Рис. 2. Фигура, ограниченная графиками функций, заданных в полярных координатах: $\rho = \sqrt{3}\cos 4\varphi$ и $\rho = 3/2$. (Справа фрагмент $1/8$ части фигуры.)

Область определения функции $\rho = \sqrt{3}\cos 4\varphi$ — промежуток $[-\pi/8; \pi/8]$ без учета периода. Ограниченная линиями крестообразная фигура состоит из четырех областей — «лепестков», очевидно, равных по площади симметричных относительно биссектрис координатных углов и симметричных относительно осей координат. Решив уравнение $\sqrt{3}\cos 4\varphi = 3/2$, найдемточкупересечения кривых $\varphi\pi/12$. Найдем площадь $S_1$ одной восьмой части фигуры в промежутке от 0 до $\pi/8$, вычислив интегралы соответствующих фигур в полярных координатах: $S_1 = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int\limits_0^{\pi/12} (3/2)^2 d\varphi + \int\limits_{\pi/12}^{\pi/8} (\sqrt{3}\cos 4\varphi)^2 d\varphi\right) =$ $\dfrac{9}{4}\varphi\Big|_{\pi/12}^{\pi/8} - \dfrac{3}{2}\displaystyle\int\limits_{\pi/12}^{\pi/8} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi = 3\left(\dfrac{\pi}{24} - \dfrac{\sqrt{3}}{64}\right)$. Площадь всей фигуры S вычислим как $S = 8S_1 = \pi - 3\sqrt{3}/8$.

**Ответ:** $S = \pi - 3\sqrt{3}/8$.

## VIII. Вычисление объема тела с заданной площадью поперечного сечения

**Пример 8.** Вычислить объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**Решение:**Воспользуемся тем, что площадь фигуры $G$ получаемой в сечении эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости $Oyz$ и отстоящей от нее на расстоянии $x_0$, где $0 \leqslant x_0 \leqslant a$, равна

$$S(x_0) = \pi bc\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right).$$

В самом деле, граница фигуры $G$ — эллипс, задаваемый уравнениями

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}, \quad x = x_0.$$

Полуоси этого эллипса равны $b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$. Используя формулу площади эллипса, найдем искомый объем эллипсоида.

$$V = 2\int\limits_0^a S(x)dx = 2\pi bc\int\limits_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

**Ответ:** объем эллипсоида равен $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

## IX. Приложения интегрального исчисления

**Пример 9.** Найти силу давления воды на стенку плотины, представляющей собой параболический сегмент, заданный уравнением $y = |x|^3$ (рис. 4). Высота уровня воды $h = 12$ м, плотность воды $\rho = 1000$ кг м$^{-3}$, ускорение свободного падения $g = 9,81$ м$\cdot$ с$^{-2}$.

У к а з а н и е. Согласно закону Паскаля давление воды на глубине $z$ равно $p = gz$.

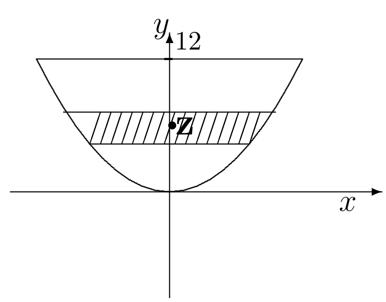


Рис. 4. Вид прямо на стенку плотины, заданную уравнением $y = |x|^3$. Уровень воды $h = 12$ м.

**Решение:** Рассмотрим малую горизонтальную полоску стенки плотины высотой $dy$ с координатами от $y$ до $y+dy$. Ее ширина от $x_1 = -\sqrt[3]{y}$ до $x_2 = +\sqrt[3]{y}$

равна $\Delta x = x_2 - x_1 = 2\sqrt{y}$. Соответственно, площадь этой полоски равна $dS = \Delta x \cdot dy = 2\sqrt[3]{y}dy$. Сила давления воды на эту полоску составляет $dF = pdS = \rho gzdS = \rho g(h-y) \cdot 2\sqrt[3]{y}dy$. Для нахождения полной силы давления воды на стенку плотины остается проинтегрировать по высоте: $F = \int\limits_0^h dF = \int\limits_0^h pdS = \int\limits_0^h \rho gzdS = \int\limits_0^h g(h-y) \cdot 2\sqrt[3]{y}dy = 2\rho g \int\limits_0^h (h-y)\sqrt[3]{y}dy = (9/14)\rho gh^{7/3} \approx 2,079 \cdot 10^6$.

**Ответ:** $F = 2\int\limits_0^h g(h-y)\sqrt[3]{y}dy = (9/14)\rho gh^{7/3} \approx 2,079 \cdot 10^6$ Н.

## Индивидуальные домашние задания

### ИДЗ-I. Интегрирование путем замены переменной

*Проинтегрировать выражения:*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ $\quad\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2}dx.$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-1)^{1/2}}$ $\quad\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2}dx.$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ $\quad\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx.$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$ $\quad\displaystyle\int \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$
5. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^4+x^2+1)^{1/2}}$ $\quad\displaystyle\int \frac{x-(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}dx.$
6. $\displaystyle\int \frac{(\arccos x)^2-1}{(1-x^2)^{1/2}}dx$ $\quad\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx.$
7. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \ln\cos x dx$ $\quad\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{(1-x^2)^{1/2}}.$
8. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)dx}{\cos^2 x+1}$ $\quad\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}dx.$
9. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^2}$ $\quad\displaystyle\int \frac{x+1/x}{(x^2+1)^{1/2}}dx.$

10. $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx \qquad \int \frac{xdx}{x^4+1}.$

11. $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^3}dx \qquad \int \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx.$

12. $\displaystyle\int \frac{x\cos x-\sin x}{(x\sin x)^2}dx \qquad \int \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx.$

13. $\displaystyle\int \frac{2x^3-x}{x^4+1}dx \qquad \int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx.$

14. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^4-x^2-1)^{1/2}} \qquad \int \frac{x+cosx}{x^2+2\sin x}dx.$

15. $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-1)^{1/3}} \qquad \int \frac{xdx}{x^2+4}.$

16. $\displaystyle\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx \qquad \int \frac{dx}{x(x^2+1)^{1/2}}.$

17. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^5} \qquad \int \frac{2\sin x-\cos x}{(2\cos x+\sin x)^2}dx.$

18. $\displaystyle\int \frac{4\operatorname{arctg} x-x}{1+x^2}dx \qquad \int \frac{\sin x-3\cos x}{(\cos x+3\sin x)^3}dx.$

19. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+9}dx \qquad \int \frac{xdx}{(x^4-x^2-4)}.$

20. $\displaystyle\int \frac{x-\cos x}{x^2-2\sin x}dx \qquad \int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx.$

21. $\displaystyle\int \frac{2\cos x+4\sin x}{(2\sin x-4\cos x)^3}dx \qquad \int \frac{x+\cos x}{x^3+3\sin x}dx.$

22. $\displaystyle\int \frac{8x+\operatorname{arctg} x}{4+x^2}dx \qquad \int \frac{1/(2\sqrt{x})+3}{(\sqrt{x}+3x)^2}dx.$

23. $\displaystyle\int \frac{1/(\sqrt{x})+1}{(2\sqrt{x}+x)^2}dx \qquad \int \frac{\sin x-\cos 2x}{(\cos x+2\sin 2x)^2}dx.$

24. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^4+16} \qquad \int \frac{2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx.$

25. $\displaystyle\int \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+4}}dx \qquad \int \frac{5x^3+2x}{x^4+2}dx.$

## ИДЗ-2. Интегрирование по частям

*Проинтегрировать выражения:*

1. $\displaystyle\int (4-3x)e^{-3x}dx \qquad \int_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3xdx.$

2. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx$ $\int\limits_{-2}^{0}(x^2+5x+6)\cos 2x dx.$

3. $\int (4+3x)e^{3x}dx$ $\int\limits_{-1}^{0}(x^2+4x+3)\cos 3x dx.$

4. $\int (4x-2)\cos 2x dx$ $\int\limits_{-2}^{0}(x+2)^2\cos 3x dx.$

5. $\int (4-16x)\sin 4x dx$ $\int\limits_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\cos x dx.$

6. $\int (5x-2)e^{3x}dx$ $\int\limits_{0}^{\pi}(2x^2+4x+7)\cos 2x dx.$

7. $\int (1-6x)e^{2x}dx$ $\int\limits_{0}^{\pi}(9x^2+9x+11)\cos 3x dx.$

8. $\int \ln(x^2+4)dx$ $\int\limits_{0}^{\pi}(8x^2+16x+17)\cos 4x dx.$

9. $\int \ln(4x^2+1)dx$ $\int\limits_{0}^{2\pi}(3x^2+5)\cos 2x dx.$

10. $\int (2-4x)\sin 2x dx$ $\int\limits_{0}^{2\pi}(2x^2-15)\cos 3x dx.$

11. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\,dx$ $\int\limits_{0}^{2\pi}(3-7x^2)\cos 2x dx.$

12. $\int (4x-3)e^{-3x}dx$ $\int\limits_{0}^{2\pi}(1-8x^2)\cos 4x dx.$

13. $\int (2-9x)e^{-3x}dx$ $\int\limits_{-1}^{0}(x^2+4x+3)\sin 3x dx.$

14. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x+2}\,dx$ $\int\limits_{0}^{3}(x^2-3)\sin 2x dx.$

15. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx \qquad \int\limits_0^{\pi}(x^2-3x+2)\sin x dx.$

16. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}dx \qquad \int\limits_0^{\pi/2}(x^2-5x+6)\sin 3x dx.$

17. $\int (5x+2)\cos 2x dx \qquad \int\limits_{-3}^{0}(x^2+6x+9)\sin 2x dx.$

18. $\int (3x-2)\cos 5x dx \qquad \int\limits_0^{\pi/4}(x^2+17,5)\sin 2x dx.$

19. $\int (x\sqrt{2}-3)\cos 2x dx \qquad \int\limits_0^{\pi/2}(1-5x^2)\sin x dx.$

20. $\int (4x+72)\cos 3x dx \qquad \int\limits_{\pi/4}^{3}(3x-x^2)2\sin 2x dx.$

21. $\int (2x-5)\cos 4x dx \qquad \int\limits_0^{1}(x+1)\ln^2(x+1)dx.$

22. $\int (8-3x)\cos 5x dx \qquad \int\limits_2^{3}(x-1)^3\ln^2(x-1)dx.$

23. $\int (5+x)\sin 3x dx \qquad \int\limits_{-1}^{0}(x+2)^2\ln^2(x+2)dx.$

24. $\int (2-3x)\sin 2x dx \qquad \int\limits_0^{2}(2x+1)^2\ln^2(x+1)dx.$

25. $\int (6-x)\cos 5x dx \qquad \int\limits_0^{1}x^2e^{3x}dx.$

## ИДЗ-3. Интегрирование дробно-рациональной функции

1. $\int \frac{(x^5+1)dx}{x^2(x^2+1)} \quad \int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx;$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^4}dx \qquad \int \frac{x^2-17}{x^2-4x+3}dx;$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)} \qquad \int \frac{2x^3+25}{x^2-x-2}dx;$

4. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx \qquad \int \frac{x^3-1}{x^2+x-6}dx;$

5. $\displaystyle\int \frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x-1)}dx \qquad \int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}dx;$

6. $\displaystyle\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx \qquad \int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx;$

7. $\displaystyle\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+1)^2(x^2+2)}dx \qquad \int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx;$

8. $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x+2)^2(x^2+x-1)}dx \qquad \int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx;$

9. $\displaystyle\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx \qquad \int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}dx;$

10. $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+2)}dx \qquad \int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}dx;$

11. $\displaystyle\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+2)^2(x^2+4)}dx \qquad \int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx;$

12. $\displaystyle\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx \qquad \int \frac{x^3+3x^2-12}{x(x-4)(x-2)}dx;$

13. $\displaystyle\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}dx \qquad \int \frac{x^3-x^2+1}{x^2-x}dx;$

14. $\displaystyle\int \frac{x^3+5x^2+12x+41}{(x+2)^2(x^2+4)}dx \qquad \int \frac{x^3+3x^2-1}{x^2-2x}dx;$

15. $\displaystyle\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}dx \qquad \int \frac{2x^3-8x^2+3}{x^2+2x}dx;$

16. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx \qquad \int \frac{3x^3-12x^2-7}{x^2+5x}dx;$

17. $\displaystyle\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}dx \qquad \int \frac{-x^3+25x^2+1}{x^2+3x}dx;$

18. $\displaystyle\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{\phantom{x}}dx \qquad \int \frac{-x^3+9x^2+4}{x^2+x}dx;$

19. $\displaystyle\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx \qquad \int \frac{2x^3-40x-8}{x(x-2)(x+4)}dx;$

20. $\displaystyle\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx \qquad \int \frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)}dx;$

21. $\displaystyle\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+2x+2)(x^2+2)}dx \quad \int \frac{x^3-x^2-12x-2}{x(x-2)(x+1)}dx;$

22. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx \quad \int \frac{x^3}{x^2(x^2+1)}dx;$

23. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx \quad \int \frac{x^2}{1-x^4}dx;$

24. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}dx \quad \int \frac{2x^3+25}{x^2-x-2}dx;$

25. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3-x^2+x-1}dx \quad \int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx.$

## ИДЗ-4. Интегрирование выражений вида $R(\sin x, \cos x)dx$

*Проинтегрировать выражения:*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)} \quad \int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx;$

2. $\displaystyle\int \frac{\cos dx}{2+\cos x} \quad \int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^6 x \cos^2 x dx;$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+cosx)} \quad \int\limits_{0}^{2\pi} \sin^4 x \cos^4 x dx;$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)} \quad \int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x dx;$

5. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^2} \quad \int\limits_{0}^{2\pi} 2^8 \sin^2 x/2 \cos^6 x/2 dx;$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2^8 \sin^8 2x dx;$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\sin x)} \quad \int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^6 2x \cos^2 2x dx;$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-\cos x+\sin x)^2}$ $\qquad \displaystyle\int\limits_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x/2 \cos^4 x/2dx;$

9. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$ $\qquad \displaystyle\int\limits_{)}^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx;$

10. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x+\sin x)}$ $\qquad \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \cos^8 x/4dx;$

11. $\displaystyle\int \frac{(\sin x-\cos x)dx}{(1-\cos x+\sin x)}$ $\qquad \displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \cos^8 5x dx;$

12. $\displaystyle\int \frac{(1+\cos x)dx}{(1-\cos x+\sin x)}$ $\qquad \displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x/2dx;$

13. $\displaystyle\int \frac{(1+\sin x)dx}{(1-\cos x+\sin x)}$ $\qquad \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{0} 2^4 \sin^6 3x \cos^2 3x dx;$

14. $\displaystyle\int \frac{(1+\sin x)dx}{(1-\sin x)^2}$ $\qquad \displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^4 x/3 \cos^4 x/3dx;$

15. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x+\sin x)}$ $\qquad \displaystyle\int\limits_0^{1} 2^4 \sin^2 \pi x \cos^6 \pi x dx;$

16. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$ $\qquad \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \cos^8 x/5dx;$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$ $\qquad \displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^8 x;$

18. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$ $\qquad \displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin^8 x/4dx;$

19. $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x+\sin^x)^2}$ $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^4 3x \cos^4 3x dx;$

20. $\displaystyle\int \frac{(1-\sin x)dx}{\cos x(1+\cos x)}$ $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 2^8 \sin^2 x/3 \cos^6 x/3 dx;$

21. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}$ $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \cos^8 3x dx;$

22. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x)^2}$ $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \sin^8 2x dx$

23. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{(1-\sin x+\cos x)^2}$ $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^6 x/4x \cos^2 x/4 dx;$

24. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x dx}{1+\cos x+\sin x)^2}$ $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^4 x/8 \cos x/8 dx;$

25. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos x+\sin x)^2}$ $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{0} 2^8 \sin^2 4x \cos^6 4x dx.$

## ИДЗ-5. Интегрирование некоторых иррациональных функций

*Проинтегрировать выражения:*

1. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x+1}+4\sqrt{1-x})(3x+1)^2}dx;$ 2. $\displaystyle\int\limits_{16/15}^{4/3} \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}dx;$

3. $\displaystyle\int\limits_{-14/15}^{-7/8} \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}dx;$ 4. $\displaystyle\int\limits_{6}^{9} \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}dx;$

5. $\displaystyle\int\limits_{0}^{4} e^{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}\frac{dx}{(5+x)\sqrt{25-x^2}};$ 6. $\displaystyle\int\limits_{8}^{12} \sqrt{\frac{6-x}{x-14}}dx;$

7. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}};$

8. $\int\limits_{\frac{5}{2}}^{\frac{10}{3}} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(x-2)^2}dx;$

9. $\int\limits_{\frac{4}{15}}^{\frac{7}{8}} \frac{5\sqrt{x+24}}{(x+24)^2\sqrt{x}}dx;$

10. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}dx;$

11. $\int\limits_{0}^{10} \sqrt{\frac{4-x}{x-12}dx};$

12. $\int\limits_{0}^{2} \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+2}}{(\sqrt{2x+2}+4\sqrt{2-x})(2x+x)^2}dx;$

13. $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+2};$

14. $\int\limits_{0}^{3} e^{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \frac{dx}{(4+x)\sqrt{16-x^2}};$

15. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}dx;$

16. $\int\limits_{-\frac{5}{3}}^{1} \frac{x+\sqrt[3]{3x+5}+2}{\sqrt{3x+5}+1}dx;$

17. $\int\limits_{2}^{3} \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}dx};$

18. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x+25}}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}dx;$

19. $\int\limits_{-1}^{1} e^{\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{4-x^2}};$

20. $\int\limits_{0}^{2} \frac{4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2}}{(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x})(3x+2)^2}dx;$

21. $\int\limits_{3}^{5} \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx;$

22. $\int\limits_{\frac{1}{24}}^{\frac{1}{3}} \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}dx;$

23. $\int\limits_{9}^{15} \sqrt{\frac{6-x}{x-18}}dx;$

24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{4\sqrt{1-x}-\sqrt{2x+1}}{(\sqrt{2x+1}+4\sqrt{1-x})(2x+1)^2}dx;$

25. $\int\limits_{0}^{64} \frac{(2+\sqrt[3]{x})}{(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\sqrt{x}}dx.$

**ИДЗ-6. Интегрирование диффернциальных биномов**

*Проинтегрировать выражения:*

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx;$ 2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}dx;$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[2]{x}}dx;$ 4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}dx;$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\sqrt[9]{x}}dx;$ 6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx;$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[9]{x}}dx;$ 8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx;$

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx;$ 10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx;$

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx;$ 12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x\ \sqrt[12]{x^7}}dx;$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}}dx;$ 14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}}dx;$

15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}dx;$ 16. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\sqrt[4]{x}}dx;$

17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[8]{x})^6}}{x\ \sqrt[10]{x}}dx;$ 18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^6}}{x\sqrt[5]{x^3}}dx;$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2\sqrt[5]{x}}dx;$ 20. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\ \sqrt[20]{x^7}}dx;$

21. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[5]{x^2})^3}}{x^2\ \sqrt[25]{x}}dx;$ 22. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^2\sqrt[5]{x}}dx;$

23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\ \sqrt[15]{x}}dx;$ 24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\sqrt[3]{x}}dx;$

25. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2\sqrt[5]{x^2}}dx.$

**ИДЗ-7. Вычислить площадь фигур, ограниченных графиками функций:**

1. $y=(x-2)^3, y=4x-8$;
2. $y=\sqrt{4-x^2}, y=0, x=0, x=1$;
3. $y=4-x^2, y=x^2-2x$;
4. $y=x\sqrt{36-x^2}, y=0(0\leqslant x\leqslant 6)$;
5. $y=x\sqrt{9-x^2}, y=0$;
6. $y=x^2\sqrt{16-x^2}, y=0(0\leqslant x\leqslant 4)$;
7. $y=\arccos x, y=0, x=0$;
8. $y=x^2\sqrt{16-x^2}, y=0(0\leqslant x\leqslant 4)$;
9. $x=4-y^2, x=y^2-2y$;
10. $y=\cos x\sin^2 x, y=0(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2})$;
11. $y=\sqrt{e^x-1}, y=0, x=0$;
12. $y=2x-x^2+3, y=x^2-4x+3$;
13. $y=\cos^2 x\sin x, y=0$;
14. $y=x/(1+\sqrt{x}), y=0, x=1$;
15. $y=x\operatorname{arctg} x, y=0, x=\sqrt{3}$;
16. $y=x^2\sqrt{8-x^2}, y=0(0\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2})$;
17. $y=(x-1)^2, y^2=x-1$;
18. $y=x\sqrt{4-x^2}, y=0(0\leqslant x\leqslant 2)$;
19. $x=\arccos y, y=0, x=0$;
20. $y=\dfrac{1}{1+\cos x}, y=0, x=\frac{\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{2}$;
21. $x=(y-2)^3, x=4y-8$;
22. $y=\cos^5 x\sin 2x, y=0(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2})$;
23. $y=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}, y=0, x=1$;
24. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x+\ln x}}, y=0, x=1, x=e^3$;
25. $x=\dfrac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}, x=0, y=1$.

**ИДЗ-8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах:**

1. $r=4\cos 3\alpha, \quad r=2(r\geqslant 2)$.
2. $r=\cos 2\alpha$.
3. $r=\sqrt{3}\cos\alpha, \quad r=\sin\alpha$.
4. $r=4\sin 3\alpha, r=2(r\geqslant 2)$.
5. $r=2\cos 3\alpha, \quad r=2\sqrt{3}\sin\alpha, (0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2})$.
6. $r=\cos 3\alpha$.
7. $r=6\sin\alpha, \quad r=3(r\geqslant 3)$.
8. $r=\cos 3\alpha$.
9. $r=\sqrt{2}\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})$.
10. $r=\sqrt{2}\sin(\alpha-\pi/4)$.
11. $r=6\cos 3\alpha, \quad r=3(r\geqslant 3)$.
12. $r=1/2+\sin\alpha$.
13. $r=\sin\alpha$.
14. $r=\sqrt{2}\sin(3\alpha)$.
15. $r=\cos\alpha, \quad r=2\cos\alpha$.
16. $r=\sin\alpha, \quad r=2\sin\alpha$.
17. $r=1+\sqrt{2}\cos\alpha$.
18. $r=1/2+\cos\alpha$.
19. $r=1+\sqrt{2}\sin\alpha$.
20. $r=(5/2)\sin\alpha$.
21. $r=(3/2)\cos\alpha$.
22. $r=4\cos 4\alpha$.
23. $r=\sin 6\alpha$.
24. $r=2\cos\alpha, \quad r=3\sin\alpha$.
25. $r=2\sin 4\alpha$.

**ИДЗ-9. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:**

1. $\frac{x^2}{9}+y^2=1, z=y, z=0 (y\geqslant 0).$
2. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{25}=1, z=\frac{y}{\sqrt{3}}, z=0 (y\geqslant 0).$
3. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1, z=0, z=3.$
4. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=-1, z=12.$
5. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1, z=1, z=0.$
6. $x^2+y^2=9, z=y, z=0 (y\geqslant 0).$
7. $z=x^2+9y^2, z=3.$
8. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-z^2=1, z=0, z=3.$
9. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{64}=-1, z=16.$
10. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1, z=2, z=0.$
11. $z=4x^2+9y^2, z=6.$
12. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{100}=-1, z=20.$
13. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}-z^2=1, z=0, z=2.$
14. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=-1, z=12.$
15. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1, z=3, z=0.$
16. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{16}=1, z=y\sqrt{3}, z=0 (y\geqslant 0).$
17. $z=x^2+5y^2, z=5.$
18. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1, z=0, z=4.$
19. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1, z=20.$
20. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{64}=1, z=4, z=0.$
21. $z=x^2+4y^2, z=2.$
22. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1, z=y\sqrt{3}, z=0 (y\geqslant 0).$
23. $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1, z=0, z=3.$
24. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{100}=-1, z=20.$
25. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{100}=1, z=5, z=0.$

**ИДЗ-9. Вычислить силу, силу давления воды на плотину, сечение которой имеет форму: а)равнобедренной трапеции (1-10); б)параболического сегмента (11-20); с)треугольника (21-25).**

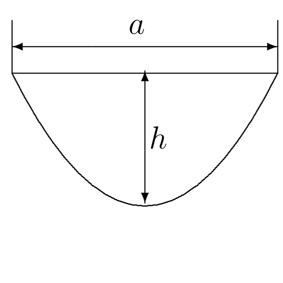


Рис.5

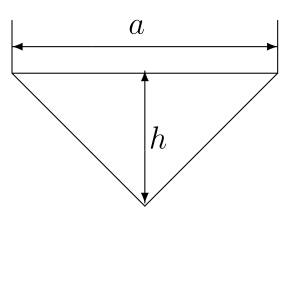


Рис.6

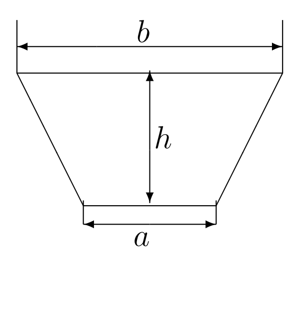


Рис.7

(Смотри соответственно рис 5, 6, 7). Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м$^3$, ускорение свободного падения $g$ положить равным $10$ м/с$^2$.

Указание: давление на глубине $x$ должно быть равно $\rho g x$.

1. $a = 4,5$ м, $b = 6,6$ м, $h = 3,0$ м;
2. $a = 4,5$ м, $b = 6,6$ м, $h = 3,0$ м;
3. $a = 5,1$ м, $b = 7,8$ м, $h = 3,0$ м;
4. $a = 5,4$ м, $b = 8,4$ м, $h = 3,0$ м;
5. $a = 5,7$ м, $b = 9,0$ м, $h = 4,0$ м;
6. $a = 6,0$ м, $b = 9,6$ м, $h = 4,0$ м;
7. $a = 6,3$ м, $b = 10,8$ м, $h = 4,0$ м;
8. $a = 6,6$ м, $b = 10,8$ м, $h = 4,0$ м;
9. $a = 6,9$ м, $b = 11,4$ м, $h = 5,0$ м;
10. $a = 7,2$ м, $b = 12,0$ м, $h = 5,0$ м;
11. $da = 4,5$ м, $b = 6,6$ м, $h = 3,0$ м;
12. $a = 4,5$ м, $b = 6,6$ м, $h = 3,0$ м;
13. $a = 5,1$ м, $b = 7,8$ м, $h = 3,0$м;
14. $a = 5,4$ м, $b = 8,4$ м, $h = 3,0$ м;
15. $a = 5,7$ м, $b = 9,0$ м, $h = 4,0$ м;
16. $a = 6,0$ м, $b = 9,6$ м, $h = 4,0$ м;
17. $a = 6,3$ м, $b = 10,8$ м, $h = 4,0$ м;
18. $a = 6,6$ м, $b = 10,8$ м, $h = 4,0$ м;
19. $a = 6,9$ м, $b = 11,4$ м, $h = 5,0$ м;
20. $a = 7,2$ м, $b = 12,0$ м, $h = 5,0$ м;
21. $a = 6,6$ м, $h = 3,0$ м;
22. $a = 6,6$ м, $h = 3,0$ м;
23. $a = 7,8$ м, $h = 3,0$ м;
24. $a = 8,4$ м, $h = 3,0$ м;
25. $a = 9,0$ м, $h = 4,0$ м.