

### Индивидуальное домашнее задание (3 модуль)

1. В условиях задачи 10 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите:
  - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$
  - 3) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\mu$ , математическое ожидание и ковариацию случайных величин  $\mu_1$  и  $\mu_2$
2. В условиях задачи 12 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите
  - 1) Математическое ожидание и дисперсию случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 2) Ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
  - 3) Математическое ожидание случайной величины  $\mu$ .
3. В условиях задачи 10 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите:
  - 1) условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ ;
  - 2) условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$ ;
4. В условиях задачи 12 ИДЗ 1 (2 модуль) найдите условное математическое ожидание с.в.  $\eta$  при условии  $\xi$  и условное математическое ожидание с.в.  $\xi$  при условии  $\eta$ .
5. Выполните следующие задания:
  - 1) По заданным плотностям  $p_\xi(x)$  и  $p_\eta(y)$  найдите характеристические функции  $f_\xi(t)$  и  $f_\eta(t)$  случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ ; характеристическую функцию  $f_\mu(t)$  случайной величины  $\mu = \xi + \eta$
  - 2) По заданной характеристической функции  $f_\xi(t)$  вычислите математическое ожидание случайной величины  $\xi$  и дисперсию случайной величины  $\xi$ .
6. Посетитель тира платит  $a$  рублей за выстрел. При попадании в девятку получает выигрыш  $b$  рублей, при попадании в десятку получает выигрыш  $c$  рублей. Если стрелок не попадает ни в девятку, ни в десятку, то деньги ему не выплачиваются. Вероятности попадания в девятку, десятку и промаха равны  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  соответственно. Число посетителей равно  $n$ .  
С помощью **неравенства Чебышева**:
  - 1) найдите границы, в которых будет лежать суммарная прибыль владельца тира с вероятностью не менее  $\alpha$ ;
  - 2) найдите число посетителей тира, чтобы вероятность отклонения суммарной прибыли от среднего размера суммарной прибыли на величину не меньше  $\beta$  % (от средней суммарной прибыли) равнялась  $p$С помощью **центральной предельной теоремы** оцените вероятность того, что
  - 1) размер убытка у владельца тира будет лежать в пределах от  $m_1$  до  $m_2$  рублей;
  - 2) что суммарная прибыль окажется в пределах от  $n_1$  до  $n_2$  рублей.
7. По заданным выборкам  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  объема  $n = 50$  найти и построить:
  - 1) минимальный и максимальный элементы выборки, разброс выборки, статистический ряд;
  - 2) гистограмму, полигон относительных частот, эмпирическую функцию распределения (для выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$ );
  - 3) выборочные характеристики: среднее, дисперсию (смещенную и несмещенную) (по выборке и по статистическому ряду), медиану.
8. Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью  $p_\xi(x)$  с неизвестным параметром. Найдите оценку неизвестного параметра методом моментов.
9. а) Известно, что выборка  $X_1, X_2, \dots, X_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-\left(x\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

б) Известно, что выборка  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  подчиняется теоретическому распределению с заданной плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a\pi x^2}} e^{-\frac{(\ln x - b)^2}{2a}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

с неизвестными параметрами  $(a, b)$ .

Найдите оценку максимального правдоподобия этих параметров

**10.** С помощью критерия отношения правдоподобия проверьте:

- 1) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  дискретному распределению с заданными параметрами.
- 2) гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  непрерывному распределению с заданными параметрами.

**11.** С помощью критерия  $\chi^2$  проверьте:

- 1) гипотезу о принадлежности выборки  $X_1, X_2, \dots, X_n$  к заданному дискретному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).
- 2) гипотезу о принадлежности выборки  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  заданному непрерывному распределению (с помощью метода моментов найдите параметры распределения).

**Распределение баллов (15 баллов)**

<b>Задача 1</b>	<b>Задача 2</b>	<b>Задача 3</b>	<b>Задача 4</b>	<b>Задача 5</b>	<b>Задача 6</b>
<b>1, 5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1 балл</b>	<b>1 балл</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>

<b>Задача 7</b>	<b>Задача 8</b>	<b>Задача 9</b>	<b>Задача 10</b>	<b>Задача 11</b>
<b>1,5 балл</b>	<b>1 балл</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>	<b>1,5 балла</b>

11.	5.	Независимые непрерывные случайные величины $\xi$ и $\eta$ имеют плотности распределения $p_{\xi}(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x < 0, \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ и $p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}y, & 2 \leq y \leq 4 \\ 0, & y < 2, \quad y > 4 \end{cases}$ $f(t) = \frac{4e^{-t^2}}{4 - (it)^2}$																																					
	6.	$a = 200, b = 300, c = 600, \quad p_1 = 0,3, p_2 = 0.15, p_3 = 0.55, \quad n = 500,$ $\alpha = 0.7, \quad \beta = 25, \quad p = 0.15$ $m_1 = 0, \quad m_2 = 1000, \quad n_1 = 3000, \quad n_2 = 7000$																																					
	7.	Выборка $X_1, \dots, X_n$ 9 5 4 4 5 3 3 5 4 8 4 3 4 5 9 8 6 8 3 6 6 7 5 4 7 5 8 9 5 4 7 7 4 5 6 7 6 7 7 6 6 9 6 4 4 4 6 6 6 7 Выборка $Y_1, \dots, Y_n$ 0.33 2.44 1.86 8.31 1.24 8.37 15.17 1.70 4.70 4.03 0.71 0.34 0.12 4.50 0.32 5.60 3.91 2.57 1.69 3.19 2.20 2.41 1.18 4.99 0.23 6.97 0.28 5.94 17.81 3.73 9.77 6.98 5.36 1.26 13.17 0.86 5.36 0.68 1.46 2.88 0.66 0.38 5.55 11.49 6.92 0.37 3.01 0.88 7.25 6.19																																					
	8.	Выборка $X_1, \dots, X_n$ – имеет плотность распределения $f(x) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-p)\lambda_2^2 x e^{-\lambda_2 x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ При заданных значениях параметров $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 1$ найти оценку параметра $p$ . Таблица частот <table><tr><td>интер-валы</td><td>0-0.8</td><td>0.8-1.6</td><td>1.6-2.4</td><td>2.4-3.2</td><td>3.2-4.0</td><td>4.0-4.8</td><td>4.8-5.6</td><td>5.6-6.4</td><td>6.4-7.2</td><td>7.2-8.0</td></tr><tr><td>частоты</td><td>218</td><td>117</td><td>84</td><td>49</td><td>28</td><td>13</td><td>9</td><td>5</td><td>5</td><td>2</td></tr></table>	интер-валы	0-0.8	0.8-1.6	1.6-2.4	2.4-3.2	3.2-4.0	4.0-4.8	4.8-5.6	5.6-6.4	6.4-7.2	7.2-8.0	частоты	218	117	84	49	28	13	9	5	5	2															
	интер-валы	0-0.8	0.8-1.6	1.6-2.4	2.4-3.2	3.2-4.0	4.0-4.8	4.8-5.6	5.6-6.4	6.4-7.2	7.2-8.0																												
частоты	218	117	84	49	28	13	9	5	5	2																													
9.	По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров $a$ и $b$ <table><tr><td>интер-валы</td><td>1.1-1.9</td><td>1.9-2.7</td><td>2.7-3.5</td><td>3.5-4.3</td><td>4.3-5.1</td><td>5.1-5.9</td><td>5.9-6.7</td></tr><tr><td>частоты</td><td>26</td><td>112</td><td>139</td><td>117</td><td>64</td><td>31</td><td>11</td></tr></table> По заданной таблице частот найти оценку ММП параметров $a$ и $b$ <table><tr><td>интер-валы</td><td>0.0-8.0</td><td>8.0-16.0</td><td>16.0-24.0</td><td>24.0-32.0</td><td>32.0-40.0</td><td>40.0-48.0</td><td>48.0-56.0</td><td>56.0-64.0</td><td>64.0-72.0</td><td>72.0-80.0</td></tr><tr><td>частоты</td><td>8</td><td>271</td><td>427</td><td>189</td><td>77</td><td>21</td><td>4</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	интер-валы	1.1-1.9	1.9-2.7	2.7-3.5	3.5-4.3	4.3-5.1	5.1-5.9	5.9-6.7	частоты	26	112	139	117	64	31	11	интер-валы	0.0-8.0	8.0-16.0	16.0-24.0	24.0-32.0	32.0-40.0	40.0-48.0	48.0-56.0	56.0-64.0	64.0-72.0	72.0-80.0	частоты	8	271	427	189	77	21	4	2	0	1
интер-валы	1.1-1.9	1.9-2.7	2.7-3.5	3.5-4.3	4.3-5.1	5.1-5.9	5.9-6.7																																
частоты	26	112	139	117	64	31	11																																
интер-валы	0.0-8.0	8.0-16.0	16.0-24.0	24.0-32.0	32.0-40.0	40.0-48.0	48.0-56.0	56.0-64.0	64.0-72.0	72.0-80.0																													
частоты	8	271	427	189	77	21	4	2	0	1																													
10.	Гипотеза $H_0$ --- распределение Пуассона $Pois(\lambda = 7)$ Гипотеза $H_1$ --- распределение Пуассона $Pois(\lambda = 8), \alpha = 0.095$ 5 8 5 5 10 7 6 7 9 7 8 7 7 6 8 6 3 7 5 9 11 9 6 10 5 12 5 7 9 3 5 12 7 7 5 4 3 6 7 9 4 4 5 10 4 12 2 6 11 8  Гипотеза $H_0$ --- экспоненциальное распределение $Exp(\lambda = 0.4)$ Гипотеза $H_1$ --- экспоненциальное распределение $Exp(\lambda = 0.5), \alpha = 0.065$ 3.98 1.23 0.77 1.59 3.51 2.46 1.45 1.37 1.34 4.15 0.74 0.15 0.29 6.95 0.76 0.27 3.92 0.22 7.84 5.09 0.15 1.75 2.97 2.57 4.35 1.29 2.96 1.15 0.05 1.46 0.80 4.00 1.58 2.56 1.17 2.44 0.50 0.87 1.82 1.13 0.11 2.49 0.08 1.26 0.53 1.43 3.55 3.27 1.29 1.98																																						

11.	<p>Биномиальное распределение с неизвестными параметрами <math>p</math> и <math>k</math>, <math>\alpha = 0.05</math></p> <p>Выборка <math>X_1, \dots, X_n</math></p> <p>9 5 4 4 5 3 3 5 4 8</p> <p>4 3 4 5 9 8 6 8 3 6</p> <p>6 7 5 4 7 5 8 9 5 4</p> <p>7 7 4 5 6 7 6 7 7 6</p> <p>6 9 6 4 4 4 6 6 6 7</p> <p>Гамма-распределение с параметрами <math>\gamma</math> и <math>\lambda</math>, <math>\alpha = 0.1</math></p> <p>Выборка <math>Y_1, \dots, Y_n</math></p> <p>0.33 2.44 1.86 8.31 1.24 8.37 15.17 1.70 4.70 4.03</p> <p>0.71 0.34 0.12 4.50 0.32 5.60 3.91 2.57 1.69 3.19</p> <p>2.20 2.41 1.18 4.99 0.23 6.97 0.28 5.94 17.81 3.73</p> <p>9.77 6.98 5.36 1.26 13.17 0.86 5.36 0.68 1.46 2.88</p> <p>0.66 0.38 5.55 11.49 6.92 0.37 3.01 0.88 7.25 6.19</p>
-----	--