

Рассмотрена методика расчета установившихся процессов в линейных электрических цепях при периодических несинусоидальных ЭДС, токах и напряжениях. Большая часть рассмотренных случаев иллюстрируется численными примерами.

Приведено задание для студентов дневного и заочного отделения направления 140200.62 «Электроэнергетика».

Методические указания могут быть использованы для обеспечения дистанционной формы обучения, в целях поддержания текущего учебного процесса.

Оглавление

I. Содержание расчётно-графической работы «Расчёт линейных электрических цепей при несинусоидальных периодических ЭДС, напряжениях и токах».....	3
II. Практические рекомендации к выполнению расчётно-графической работы	4
Причины отклонения переменных токов от синусоидальной формы.....	4
Представление несинусоидальных периодических ЭДС, напряжений и токов рядами Фурье.....	4
Виды симметрии. Определение коэффициентов ряда Фурье функций, обладающих симметрией.....	5
Действующие значения периодических несинусоидальных ЭДС, токов и напряжений.....	8
Расчёт мгновенных значений токов и напряжений в электрических цепях при действии несинусоидальных ЭДС или напряжений....	8
Мощности в цепи несинусоидального тока.....	14
Зависимость формы кривой тока от характера цепи при несинусоидальном напряжении.....	18
Пример выполнения расчётно-графической работы №4. Рекомендации по использованию файла-шаблона (приложение). Расчет РГР с помощью программы Mathcad.....	26
Исходные данные. Схемы, параметры элементов.....	30
Контрольные вопросы и упражнения.....	34
Литература.....	36

II. Практические рекомендации к выполнению расчётно-графической работы

2.1. Причины отклонения переменных токов от синусоидальной формы.

Во многих линейных электрических цепях как однофазных, так и трехфазных ЭДС, напряжение и токи изменяются синусоидально с одинаковой частотой. Для анализа электромагнитных процессов разработан ряд эффективных методов расчета таких цепей. Однако на практике в реально существующих электротехнических и, особенно, радиотехнических устройствах форма кривых ЭДС, напряжений и токов не является синусоидальной, оставаясь в то же время периодической. Методам расчета таких цепей посвящаются настоящие методические указания.

Причин отклонения кривых токов и напряжений от синусоидальной формы много. Иногда как, например, в генераторах синусоидальной ЭДС, отклонение кривой ЭДС от синусоидальной формы связано с особенностями конструктивного выполнения таких генераторов. Здесь, безусловно, отклонение формы кривой ЭДС от синусоидальной - явление нежелательное и это отклонение стремятся свести к минимуму. Часто появление в цепи несинусоидальных напряжений, токов связано с включением в цепь различных нелинейных элементов: нелинейных катушек индуктивности, сопротивлений, конденсаторов, выпрямителей. В ряде случаев, особенно в радиотехнике, импульсной технике и связи, сами генераторы конструируются так, чтобы напряжения и токи в электрической цепи были бы заведомо несинусоидальны. Наконец, включение в электрическую цепь генераторов синусоидальной ЭДС разной частоты также приводит к появлению несинусоидальных напряжений и токов в цепи.

Задачей анализа (расчета) разветвленной электрической цепи при воздействии на вход цепи периодических несинусоидальных напряжений (ЭДС) является определение токов в отдельных ее ветвях, расчет мощностей, анализ форм кривых токов и напряжений в виде графиков.

2.2. Представление несинусоидальных периодических ЭДС, напряжений и токов рядами Фурье.

Периодические ЭДС, напряжения и токи можно представить в виде рядов Фурье, которые в общем случае содержат постоянную составляющую, основную или первую гармонику, имеющую период равный периоду самой несинусоидальной функции, и высшие гармоники, частота которых в целое число раз больше частоты первой гармоники.

Например, для периодической ЭДС можем написать:

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) + \dots$$

Здесь E_0 - постоянная составляющая ЭДС, $E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ - основная или первая гармоника, $E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ - высшая гармоника порядка k (k - гармоника), E_{km} - амплитуда и ψ_k - начальная фаза k -ой гармоники.

Заметим, что разложение в ряд Фурье возможно для функций удовлетворяющих условиям Дирихле, т.е. имеющих за полный период конечное число макси-

мумов и минимумов. Этим условиям всегда удовлетворяют ЭДС, напряжения и токи в цепях.

Для вычисления коэффициентов ряда Фурье целесообразно его члены представить через синусы и косинусы без начальных фаз.

$$E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = E_{km} \cos \psi_k \sin k\omega t + E_{km} \sin \psi_k \cos k\omega t = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t$$

Таким образом:

$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos k\omega t$$

Имея B_k и C_k , нетрудно вычислить амплитуду и начальную фазу

$$E_{km} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2} \text{ и } tg \psi_k = \frac{C_k}{B_k}$$

Постоянная составляющая E_0 и коэффициенты B_k и C_k , как известно из курса математики, определяются с помощью формул:

$$E_0 = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt, B_k = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \sin k\omega t dt, C_k = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \cos k\omega t dt$$

Приведенные формулы для постоянной составляющей и коэффициентов B_k и C_k позволяют найти эти величины, когда функция задана аналитически. Нередко мы располагаем кривыми э.д.с, тока или напряжения, заданными в виде графиков. В этом случае для нахождения ряда Фурье воспользуемся методом приближенного гармонического анализа.

При разложении функции $f(t)$ в ряд Фурье необходимо пользоваться приемами, облегчающими нахождение коэффициентов ряда. При наличии того или иного вида симметрии в кривых тока или напряжения некоторые коэффициенты в разложении в ряд Фурье обращаются в нуль.

2.3. Виды симметрии. Определение коэффициентов ряда Фурье функций, обладающих симметрией.

1) Если функция $f(t)$ симметрична относительно оси абсцисс, то ряд Фурье не содержит постоянной составляющей и четных гармоник (рис. 1).

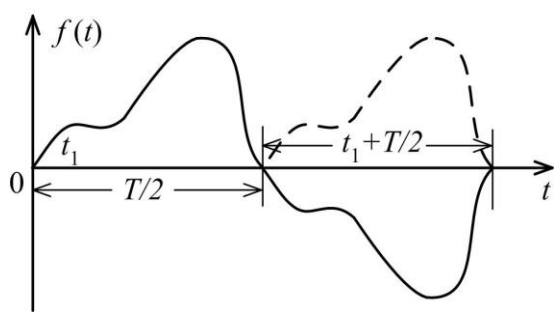


Рис. 1

$$f(t) = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + B_5 \sin 5\omega t + \dots + C_1 \cos \omega t + C_3 \cos 3\omega t + C_5 \cos 5\omega t + \dots$$

или

$$f(t) = A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + A_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots$$

- 2) При симметрии относительно оси ординат (рис. 2) $f(t)=f(-t)$ нетрудно убедиться, что при этом $B_1=B_2=B_3=\dots=B_k=\dots=0$ и разложение в ряд Фурье имеет вид

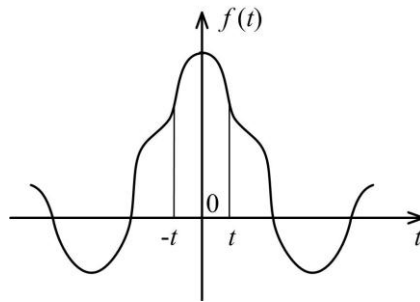


Рис. 2

$$f(t) = A_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots + C_k \cos k\omega t + \dots$$

- 3) Если кривая симметрична относительно начала координат (рис. 3), то $f(t) = -f(-t)$. В этом случае $A_0=B_1=B_2=C_3=\dots=C_k=\dots=0$ и ряд Фурье имеет вид

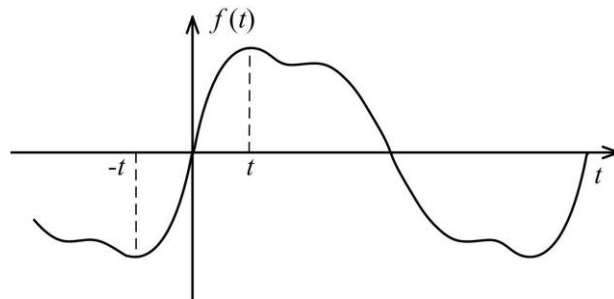


Рис. 3

$$f(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots + B_k \sin k\omega t + \dots$$

- 4) Если кривая симметрична относительно начала координат и относительно оси абсцисс, то ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + B_5 \sin 5\omega t + \dots$$

Необходимо специально указать, что многие периодические несинусоидальные функции могут быть приведены к тому или иному виду симметрии изменением масштаба как по оси абсцисс, так и по оси ординат, а так же переносом координатных осей.

Пример 1

Разложить периодический ток в ряд Фурье (рис. 4)

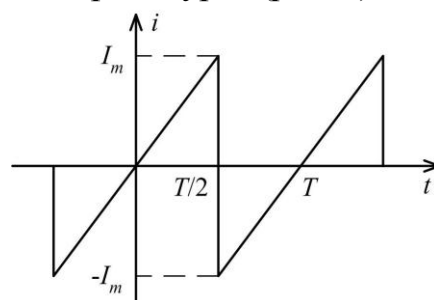


Рис. 4

Решение.

Поскольку заданная функция тока симметрична относительно начала координат, то $A_0=0$, $C_k=0$, т. е. в разложении в ряд Фурье присутствуют только синусные составляющие. Для нахождения коэффициентов B_k достаточно на интервале $0 \leq t \leq T/2$ представить аналитически заданную в виде графика функцию, $i(t) = \frac{2\text{Im}}{T}t$

тогда

$$B_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} i(t) \sin k \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{2\text{Im}}{T} t \sin k \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{8\text{Im}}{T^2} \left[\frac{\sin k \frac{2\pi}{T} t}{\left(k \frac{2\pi}{T} t\right)^2} - \frac{t \cos k \frac{2\pi}{T} t}{k \frac{2\pi}{T} t} \right]_0^{T/2} =$$
$$= \frac{8\text{Im}}{T^2} \left(-\frac{T^2}{4\pi k} \cos k\pi \right) = -\frac{2\text{Im}}{k\pi} (-1)^k,$$

где $k=1,2,3\dots$

Пример 2

Э.Д.С генератора имеет вид, показанный на рис. 5. Найти разложение $e(t)$ в ряд Фурье.

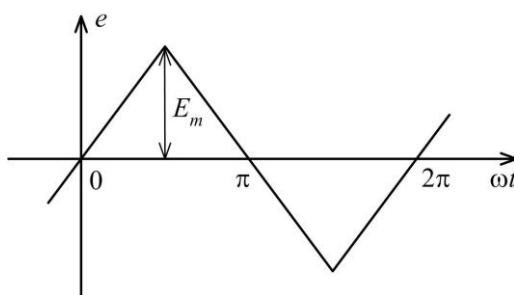


Рис. 5

Решение.

Так как функция $e(t)$ симметрична относительно оси абсцисс и относительно начала координат, то $A_0=0$, $C_k=0$, $B_{2k}=0$, т.е. ряд Фурье будет содержать только нечетные синусные составляющие.

Аналитический вид функции на интервале $0 \leq \omega t \leq \pi/2$ имеет вид $e(t) = \frac{2E_m}{\pi} \omega t$, так как в этом случае по оси абсцисс мы откладываем ωt

$$B_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{2E_m}{\pi} \omega t \cdot \sin(2k+1)\omega t(\omega t) \right] = \frac{8E_m}{\pi^2} \left[\frac{\sin(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2} - \frac{\omega t \cos(2k+1)\omega t}{2k+1} \right]_0^{\pi/2} =$$
$$= \frac{8E_m}{\pi^2} \frac{\sin(2k+1)\pi/2}{(2k+1)^2} = \frac{8E_m(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2}$$

Ряд Фурье принимает вид:

$$e(t) = \frac{8E_m}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t \right) B.$$

2.4. Действующие значения периодических несинусоидальных токов, напряжений и Э.Д.С.

Действующее значение периодического тока определяется как среднее квадратичное за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

Раскладывая $i(t)$ в ряд Фурье, имеем:

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} i^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T (i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k + \dots)^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt = \sum_{q,s=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_q \cdot i_s dt = \sum_{q,s=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt = \\ &= \sum_{q,s=0}^{\infty} I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_K^2 + \dots, \end{aligned}$$

так как при $q \neq s$ $\int_0^T i_q \cdot i_s dt = 0$.

Действительно, при $q \neq s$ мы получаем здесь интегралы от синусоидальных функций за целое число $(q-s)$ и $(q+s)$ периодов. Такие интегралы равны нулю.

Итак, имеем:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_K^2 + \dots},$$

т.е. действующее значение периодического несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей и действующих значений всех гармоник.

Аналогично находим для периодических несинусоидальных напряжений и Э.Д.С.:

$$U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \text{ и } E = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} E_k^2}$$

2.5. Расчет мгновенных значений токов и напряжений в электрических цепях при действии несинусоидальных Э.Д.С. или напряжений.

В случае линейных цепей применим принцип наложения. Основываясь на нем, можно предложить следующий метод расчета мгновенных значений токов.

Раскладываем заданные периодические несинусоидальные Э.Д.С. или напряжения в ряд Фурье:

$$e = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_k + \dots$$

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots$$

Находим как функции времени мгновенные значения токов $i_0, i_1, i_2, i_3, \dots, i_k$, возникающих в некоторой ветви цепи под действием в отдельности каждой составляющей Э.Д.С. $e_0, e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ или напряжений $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$.

Суммируя найденные таким путем мгновенные значения токов, получаем искомый ток в рассматриваемой цепи в виде $i = i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k + \dots$

Так как каждая составляющая является либо постоянной величиной, либо синусоидальной функцией времени, то для расчета каждой из них в отдельности могут быть применены все методы, изложенные в предыдущих главах. Весьма целесообразно для расчета каждой синусоидальной составляющей в отдельности воспользоваться комплексным методом расчета.

Пример 3.

К зажимам линейной электрической цепи (рис. 6) приложено несинусоидальное напряжение

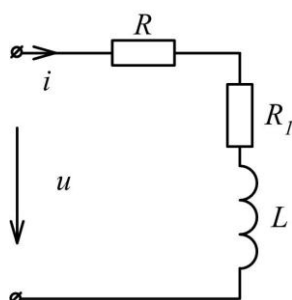


Рис. 6

$$u(t) = [240 + 400 \sin \omega t + 50 \sin(3\omega t + 30^\circ)] \text{ В}$$

Параметры цепи: $r=30 \text{ Ом}$; $r_1=18 \text{ Ом}$; $\omega L=18,9 \text{ Ом}$.

Определить мгновенное значение тока в цепи $i(t)$.

1). Постоянная составляющая тока

$$i^{(0)} = \frac{u^{(0)}}{R + R_1} = \frac{240}{48} = 5 \text{ А.}$$

2). Первая гармоника тока

$$\dot{I}_m^{(1)} = \frac{\dot{U}_m^{(1)}}{Z_{\Sigma}^{(1)}}, \text{ где}$$

$\dot{U}_m^{(1)}$ - комплексная амплитуда первой гармоники напряжения;

$Z_{\Sigma}^{(1)}$ - комплексное эквивалентное сопротивление цепи первой гармоники;

$\dot{I}_m^{(1)}$ - комплексная амплитуда первой гармоники тока.

$$\dot{I}_m^{(1)} = \frac{400}{48 + j18,9} = \frac{400}{51,6 e^{j21,5^\circ}} = 7,75 e^{-j21,5^\circ}$$

Мгновенное значение первой гармоники тока

$$i^{(1)} = 7,75 \sin(\omega t - 21,5^\circ) \text{ А.}$$

3). Третья гармоника тока

$$\dot{i}_m^{(3)} = \frac{\dot{U}_m^{(3)}}{Z_3^{(3)}} = \frac{50e^{j30^\circ}}{48 + j56,7} = \frac{50e^{j30^\circ}}{74,3e^{j49,7^\circ}} = 0,67e^{-j19,7^\circ} \text{ A};$$

Мгновенное значение тока третьей гармоники

$$i^{(3)} = 0,67 \sin(3\omega t - 19,7^\circ) \text{ A};$$

Мгновенное значение тока в цепи

$$i(t) = i^{(0)} + i^{(1)} + i^{(3)} = 5 + 7,75 \sin(\omega t - 21,5^\circ) + 0,67 \sin(3\omega t - 19,7^\circ) \text{ A}$$

Пример 4.

К электрической цепи, схема которой приведена на рис. 7, приложено напряжение:

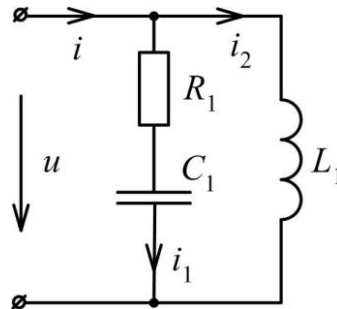


Рис. 7

$$u(t) = 41,7 \cos(\omega t + 3,5^\circ) + 5,6 \sin(3\omega t + 30^\circ) \text{ В.}$$

$$r_1 = 5 \text{ Ом}; \quad \omega L_1 = 9,8 \text{ Ом}; \quad \frac{1}{\omega c_1} = 19 \text{ Ом.}$$

Определить мгновенные значения токов ветвей.

1). Первая гармоника

$$u^{(1)} = 41,7 \cos(\omega t + 3,5^\circ) = 41,7 \sin(\omega t + 93,5^\circ) \text{ В.}$$

$$\dot{U}_m^{(1)} = 41,7e^{j93,5^\circ} \text{ В.}$$

$$Z_1^{(1)} = R_1 - j \frac{1}{\omega c_1} = 5 - j19 = 19,65e^{-j75,3^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_2^{(1)} = j\omega L_1 = j9,8 = 9,8e^{j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_3^{(1)} = \frac{Z_1^{(1)} \cdot Z_2^{(1)}}{Z_1^{(1)} + Z_2^{(1)}} = \frac{19,65e^{-j75,3^\circ} \cdot 9,8e^{j90^\circ}}{5 - j19 + j9,8} = \frac{192,6e^{j14,7^\circ}}{10,5e^{-j61,5^\circ}} = 18,3e^{j76,2^\circ} \text{ Ом.}$$

$$\dot{i}_m^{(1)} = \frac{\dot{U}_m^{(1)}}{Z_3^{(1)}} = \frac{41,7e^{j93,5^\circ}}{18,3e^{j76,2^\circ}} = 2,27e^{j17,3^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{1m}^{(1)} = \frac{\dot{U}_m^{(1)}}{Z_1^{(1)}} = \frac{41,7e^{j93,5^\circ}}{19,65e^{-j75,3^\circ}} = 2,12e^{j168,8^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{2m}^{(1)} = \frac{\dot{U}_m^{(1)}}{Z_2^{(1)}} = \frac{41,7e^{j93,5^\circ}}{9,8e^{j90^\circ}} = 4,25e^{j3,5^\circ} \text{ A.}$$

Мгновенные значения токов первой гармоники

$$i^{(1)} = 2,27 \sin(\omega t + 17,3^\circ) \text{ A},$$

$$i_1^{(1)} = 2,12 \sin(\omega t + 168,8^{\circ}) \text{ A},$$

$$i_2^{(1)} = 4,25 \sin(\omega t + 3,5^{\circ}) \text{ A}.$$

2). Третья гармоника

$$u^{(3)} = 5,6 \sin(\omega t + 3,5^{\circ}) \text{ A}.$$

Комплексные сопротивления третьей гармоники:

$$Z_1^{(3)} = R_1 - j \frac{1}{3\omega C_1} = 5 - j6,33 = 8,07 e^{-j51,7^{\circ}} \text{ Ом};$$

$$Z_2^{(3)} = j3\omega L_1 = 29,4 e^{j90^{\circ}} \text{ Ом};$$

$$Z_3^{(3)} = \frac{Z_1^{(3)} \cdot Z_2^{(3)}}{Z_1^{(3)} + Z_2^{(3)}} = \frac{8,07 e^{-j51,7^{\circ}} \cdot 29,4 e^{j90^{\circ}}}{5 - j6,33 + j29,4} = \frac{237,3 e^{j38,3^{\circ}}}{23,6 e^{j77,8^{\circ}}} = 10,1 e^{-j39,5^{\circ}} \text{ Ом}.$$

$$\dot{i}_m^{(3)} = \frac{\dot{U}_m^{(3)}}{Z_3^{(3)}} = \frac{5,6 e^{j30^{\circ}}}{10,1 e^{-j39,5^{\circ}}} = 0,55 e^{j69,5^{\circ}} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{1m}^{(3)} = \frac{\dot{U}_m^{(3)}}{Z_1^{(3)}} = \frac{5,6 e^{j30^{\circ}}}{8,07 e^{-j51,7^{\circ}}} = 0,7 e^{j81,7^{\circ}} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{2m}^{(3)} = \frac{\dot{U}_m^{(3)}}{Z_2^{(3)}} = \frac{5,6 e^{j30^{\circ}}}{29,4 e^{j90^{\circ}}} = 0,19 e^{-j60^{\circ}} \text{ A}.$$

Мгновенные значения токов третьей гармоники:

$$i^{(3)} = 0,55 \sin(3\omega t + 69,5^{\circ}) \text{ A};$$

$$i_1^{(3)} = 0,7 \sin(3\omega t + 81,7^{\circ}) \text{ A};$$

$$i_2^{(3)} = 0,19 \sin(\omega t - 60^{\circ}) \text{ A}.$$

Результирующие токи в ветвях:

$$i = i^{(1)} + i^{(3)} = 2,27 \sin(\omega t + 17,3^{\circ}) + 0,55 \sin(3\omega t + 69,5^{\circ}) \text{ A};$$

$$i_1 = i_1^{(1)} + i_1^{(3)} = 2,12 \sin(\omega t + 168,8^{\circ}) + 0,7 \sin(3\omega t + 81,7^{\circ}) \text{ A};$$

$$i_2 = i_2^{(1)} + i_2^{(3)} = 4,25 \sin(\omega t + 3,5^{\circ}) + 0,19 \sin(3\omega t - 60^{\circ}) \text{ A}.$$

Пример 5.

К электрической цепи, схема которой показана на рис. 8, приложено напряжение

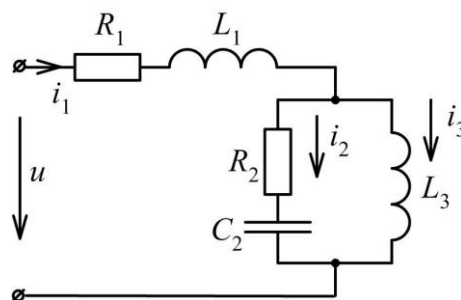


Рис. 8

$$u(t) = 41,7 \cos(\omega t + 3,5^{\circ}) + 5,59 \sin(3\omega t - 30^{\circ}) - 0,6 \sin 5\omega t \text{ В}.$$

Рассчитать мгновенные значения токов, найти их действующие значения, если

$$R_1=20\text{Ом}; R_2=5\text{Ом}; \omega L_1=3\text{Ом}; \omega L_3=9,8\text{Ом}; \frac{1}{\omega c_1}=19\text{Ом}; \omega=314\text{с}^{-1}.$$

Выполним расчет для каждой из гармоник приложенного напряжения в отдельности символическим методом.

Расчет первой гармоники

$$u^{(1)} = 41,7 \sin(\omega t + 3,5^\circ) \text{В}, \dot{U}_m^{(1)} = 41,7 e^{j3,5^\circ} \text{В}.$$

Комплексные сопротивления ветвей для первой гармоники

$$Z_1^{(1)} = R_1 + j\omega L_1 = (20 + j3) = 20,3 e^{j8,53^\circ} \text{Ом};$$

$$Z_2^{(1)} = R_2 - j \frac{1}{\omega c_2} = 5 - j19 = 19,6 e^{-j75,2^\circ} \text{Ом};$$

$$Z_3^{(1)} = j\omega L_3 = 9,8 e^{j90^\circ} \text{Ом}.$$

Комплексное сопротивление параллельного участка

$$Z_{23}^{(1)} = \frac{Z_2^{(1)} \cdot Z_3^{(1)}}{Z_2^{(1)} + Z_3^{(1)}} = \frac{19,6 e^{-j75,2^\circ} \cdot 9,8 e^{j90^\circ}}{5 - j19 + j9,8} = \frac{192,1 e^{j14,8^\circ}}{10,5 e^{-j61,5^\circ}} = 18,3 e^{j76,3^\circ} = (4,33 + j17,8) \text{Ом}. \quad \text{Эквива-}$$

лентное комплексное сопротивление всей цепи

$$Z_{\Sigma}^{(1)} = Z_1 + Z_{23} = 20 + j3 + 4,33 + j17,8 = 24,33 + j20,8 = 32 e^{j40,5^\circ} \text{Ом}.$$

$$\text{Ток } i_{1m}^{(1)} = \frac{\dot{U}_m^{(1)}}{Z_{\Sigma}^{(1)}} = \frac{41,7 e^{j3,5^\circ}}{32 e^{j40,5^\circ}} = 1,3 e^{-j37^\circ} = 1,04 - j0,78 \text{А}.$$

Напряжение на параллельном участке

$$\dot{U}_{23m}^{(1)} = i_{1m}^{(1)} Z_{23}^{(1)} = 1,3 e^{-j37^\circ} \cdot 18,3 e^{j76,3^\circ} = 23,8 e^{j39,3^\circ} \text{В}.$$

Токи

$$i_{2m}^{(1)} = \frac{\dot{U}_{23m}^{(1)}}{Z_2^{(1)}} = \frac{23,8 e^{j39,3^\circ}}{19,6 e^{-j75,2^\circ}} = 1,21 e^{j114,5^\circ} = -0,502 + j1,1 \text{А},$$

$$i_{3m}^{(1)} = \frac{\dot{U}_{23m}^{(1)}}{Z_3^{(1)}} = \frac{23,8 e^{j39,3^\circ}}{9,8 e^{j90^\circ}} = 2,42 e^{-j50,7^\circ} = 1,53 - j1,87 \text{А}.$$

Проверка

$$i_{1m}^{(1)} = i_{2m}^{(1)} + i_{3m}^{(1)}$$

$$1,04 - j0,78 = -0,502 + j1,1 + 1,53 - j1,87$$

$$1,04 - j0,78 = 1,03 - j0,77$$

Первый закон Кирхгофа сходится в пределах допустимой точности $(1 \div 3)\%$ расчета.

Мгновенные значения токов первой гармоники.

$$i_1^{(1)} = 1,3 \sin(\omega t - 37^\circ) \text{А};$$

$$i_2^{(1)} = 1,21 \sin(\omega t + 114,5^\circ) \text{А};$$

$$i_3^{(1)} = 2,42 \sin(\omega t - 50,7^\circ) \text{А}.$$

Расчёт третьей гармоники.

$$Z_1^{(3)} = R_1 + j3\omega L_1 = 20 + j9 = 21,9 e^{j24,2^\circ} \text{Ом};$$

$$Z_2^{(3)} = R_2 - j \frac{1}{3\omega C_2} = 5 - j6,33 = 8,1e^{-j51,7^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_3^{(3)} = j3\omega L_3 = j29,4 = 29,4e^{j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_{23}^{(3)} = \frac{Z_2^{(3)} \cdot Z_3^{(3)}}{Z_2^{(3)} + Z_3^{(3)}} = \frac{8,1e^{-j51,7^\circ} \cdot 29,4e^{j90^\circ}}{5 - j6,33 + j29,4} = \frac{238,1e^{j38,3^\circ}}{5 + j23,1} = \frac{238,1e^{j38,3^\circ}}{23,6e^{j77,8^\circ}} = 10,1e^{-j39,5^\circ} =$$

$$= 7,79 - j6,42 \text{ Ом};$$

$$Z_3^{(3)} = Z_1^{(3)} + Z_{23}^{(3)} = 20 + j9 + 7,79 - j6,42 = 27,79 + j2,58 = 27,9e^{j5,3^\circ} \text{ Ом}.$$

Токи и напряжения.

$$\dot{i}_{1m}^{(3)} = \frac{\dot{U}_m^{(3)}}{Z_3^{(3)}} = \frac{5,59e^{j150^\circ}}{27,9e^{j5,3^\circ}} = 0,2e^{j144,7^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{U}_{23m}^{(3)} = \dot{i}_{1m}^{(3)} Z_{23}^{(3)} = 0,2e^{j144,7^\circ} \cdot 10,1e^{-j39,5^\circ} = 2,02e^{j105,2^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{i}_{2m}^{(3)} = \frac{\dot{U}_{2m}^{(3)}}{Z_2^{(3)}} = \frac{2,02e^{j105,2^\circ}}{8,1e^{-j51,7^\circ}} = 0,25e^{j157^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{i}_{3m}^{(3)} = \frac{\dot{U}_{2m}^{(3)}}{Z_3^{(3)}} = \frac{2,02e^{j105,2^\circ}}{29,4e^{j90^\circ}} = 0,068e^{j15,2^\circ} \text{ А}.$$

Мгновенные значения токов и напряжений третьей гармоники.

$$i_1^{(3)} = 0,2 \sin(3\omega t + 144,3^\circ) \text{ А};$$

$$i_2^{(3)} = 0,25 \sin(3\omega t + 157^\circ) \text{ А};$$

$$i_3^{(3)} = 0,068 \sin(3\omega t + 15,2^\circ) \text{ А};$$

$$u_{23}^{(3)} = 0,02 \sin(3\omega t + 105,2^\circ) \text{ В}.$$

Расчёт пятой гармоники.

$$u^{(5)} = -0,6 \sin 5\omega t = 0,6 \sin(5\omega t + 180^\circ) \text{ В}.$$

Сопротивления пятой гармоники.

$$Z_1^{(5)} = 20 + j15 = 25e^{j36,9^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_2^{(5)} = R_2 - j \frac{1}{5\omega C_2} = 5 - j3,8 = 6,3e^{-j37,2^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_3^{(5)} = j5\omega L_3 = 49e^{j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_{23}^{(5)} = \frac{Z_2^{(5)} \cdot Z_3^{(5)}}{Z_2^{(5)} + Z_3^{(5)}} = \frac{6,3e^{-j37,2^\circ} \cdot 49e^{j90^\circ}}{5 - j3,8 + j49} = \frac{308,7e^{j52,8^\circ}}{45,5e^{j83,7^\circ}} = 6,78e^{-j30,7^\circ} = 5,81 - j3,46 \text{ Ом};$$

$$Z_3^{(5)} = Z_1^{(5)} + Z_{23}^{(5)} = 20 + j15 + 5,81 - j3,46 = 25,81 + j11,54 = 28,3e^{j24,1^\circ} \text{ Ом}.$$

Токи пятой гармоники.

$$\dot{i}_{1m}^{(5)} = \frac{\dot{U}_m^{(5)}}{Z_3^{(5)}} = \frac{0,6e^{j180^\circ}}{28,3e^{j24,1^\circ}} = 0,021e^{j156^\circ} \text{ А}.$$

Дальнейшие расчёты выполняются аналогично, но величины токов пятой гармоники существенно меньше токов первой и третьей гармоник. Токами пятой гармоники можно пренебречь. Результирующие токи в ветвях

$$i_1 = 1,3 \sin(\omega t - 37^\circ) + 0,2 \sin(3\omega t + 144,3^\circ) \text{ А};$$

$$i_2 = 1,21 \sin(\omega t - 144,5^\circ) + 0,25 \sin(3\omega t + 157^\circ) \text{ A};$$

$$i_3 = 2,42 \sin(\omega t - 50,7^\circ) + 0,068 \sin(3\omega t + 15,2^\circ) \text{ A}.$$

Действующие значения токов ветвей

$$I_1 = \sqrt{\frac{1,3^2}{2} + \frac{0,2^2}{2}} = 0,93 \text{ A};$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{1,21^2}{2} + \frac{0,25^2}{2}} = 0,87 \text{ A};$$

$$I_3 = \sqrt{\frac{2,42^2}{2} + \frac{0,068^2}{2}} = 1,71 \text{ A}.$$

2.6. Мощности в цепи несинусоидального тока.

Активная мощность в цепи периодического тока определяется как среднее за период от мгновенной мощности $p=ui$, т.е.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt$$

Представляя периодические напряжения и токи рядами Фурье

$$u(t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots,$$

$$i(t) = i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k + \dots,$$

и подставляя в формулу мощности,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + \dots)(i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k + \dots) dt = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k \cdot i_k dt +$$

$$+ \sum_{\substack{q=0 \\ s=0 \\ q \neq s}}^{q=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_q \cdot i_s dt = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_k \cdot i_k dt = \sum_{k=0}^{k=\infty} P_k$$

Таким образом,

$$P = \sum_{k=0}^{k=\infty} P_k = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_k + \dots = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + \dots + U_k I_k \cos \varphi_k + \dots,$$

т.е. активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях равна сумме активных мощностей постоянных и всех гармонических составляющих тока и напряжения.

Реактивная мощность

$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots = \sum_{k=0}^{k=\infty} Q_k,$$

где $Q_k = U_k I_k \sin \varphi_k$ - реактивная мощность к-ой гармоники.

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \cdot \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}$$

Если в кривой тока в электрической цепи отсутствуют гармоники, которые есть в кривой напряжения, то активная и реактивная мощности этих гармоник равны нулю, но свой вклад в величину полной мощности эти гармоники вносят, так как они повышают действующее значение той функции, где они есть.

Поэтому, в отличие от синусоидального режима, в цепи периодического несинусоидального тока.

$$P^2 + Q^2 \neq S^2$$

Коэффициент мощности при несинусоидальном токе и напряжении обозначается α и находится из соотношения $P = UI\alpha$,

$$\text{где } \alpha = \frac{P}{UI} = \frac{\sum_{k=1}^{k=\infty} P_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{k=\infty} U_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{k=\infty} I_k^2}}.$$

Поскольку $\alpha=1$ только если цепь содержит одни активные сопротивления, то в цепях, содержащих катушки индуктивности и конденсаторы всегда $\alpha < 1$. В таких цепях появление высших гармоник в напряжениях и токах приводит к снижению коэффициента мощности по сравнению со случаем, когда ток и напряжение при тех же действующих значениях синусоидально.

Пример 6

В электрической цепи (рис. 9)

$$u = 180 \sin \omega t + 60 \sin 3\omega t + 40 \sin(5\omega t + 18^\circ) \text{ В}; \quad f = 50 \text{ Гц};$$

$$i = 1,428 \sin(5 \cdot 314t + 85,4^\circ) + 6 \sin 3 \cdot 314t + 0,78 \sin(5 \cdot 314t + 96,7^\circ) \text{ А}.$$

Определить действующее значение напряжения и тока, активную мощность и коэффициент мощности.

Решение

1. Действующее значение напряжения

$$U^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{180}{1,41} = 127 \text{ В}; \quad U^{(3)} = \frac{60}{\sqrt{2}} = 42,5 \text{ В}; \quad U^{(5)} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 28,4 \text{ В};$$

$$U = \sqrt{U^{(1)2} + U^{(3)2} + U^{(5)2}} = \sqrt{127^2 + 42,5^2 + 28,4^2} = 137 \text{ В}.$$

2. Действующее значение тока

$$I^{(1)} = \frac{1,43}{\sqrt{2}} = 1 \text{ А}; \quad I^{(3)} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,25 \text{ А}; \quad I^{(5)} = \frac{0,78}{\sqrt{2}} = 0,55 \text{ А};$$

$$I = \sqrt{1^2 + 4,25^2 + 0,55^2} = 4,4 \text{ А}.$$

3. Активная мощность

$$\underline{P} = P_1 + P_3 + P_5 = U^{(1)} I^{(1)} \cos \varphi_1 + U^{(3)} I^{(3)} \cos \varphi_3 + U^{(5)} I^{(5)} \cos \varphi_5 = 127 \cdot 1 \cos 85,4^\circ + 42,5 \cdot 4,25 \cos 0^\circ + 28,4 \cdot 0,55 \cos(-60^\circ) = 10,2 + 180,6 + 7,81 = 198,6 \text{ Вт}.$$

4. Коэффициент мощности

$$\alpha = \frac{P}{UI} = \frac{198,6}{137 \cdot 4,4} = 0,329$$

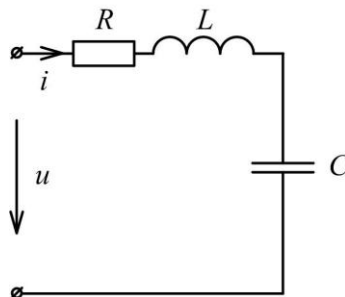


Рис. 9

Пример 7

Дана цепь (рис. 10), в которой действует несинусоидальная ЭДС $e = 200 + 100 \sin(\omega t + 45^\circ) + 60 \sin(2\omega t - 10^\circ)$. Определить активную и полную мощности, если $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = 40 \text{ Ом}$; $\omega L = 20 \text{ Ом}$; $\frac{1}{\omega C} = 60 \text{ Ом}$.

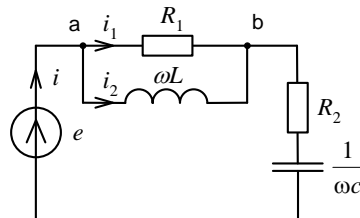


Рис. 10

Решение

1. Расчёт постоянной составляющей:

$i^{(0)} = i_1^{(0)} = i_2^{(0)} = 0$, т.к. конденсатор постоянную составляющую не пропускает.

2. Расчёт первой гармоники:

$$z_{ab}^{(1)} = \frac{R_1 \cdot j\omega L}{R_1 + j\omega L} = \frac{20 \cdot 20e^{j90^\circ}}{20 + j20} = \frac{400e^{j90^\circ}}{20\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = (10 + j10) \text{ Ом},$$

$$z_{\Sigma}^{(1)} = z_{ab}^{(1)} + R_2 - j\frac{1}{\omega C} = 10 + j10 + 40 - j60 = 50 - j50 = 50\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\text{Ток первой гармоники } \dot{i}_m^{(1)} = \frac{\dot{E}_m^{(1)}}{Z_{\Sigma}^{(1)}} = \frac{100e^{j45^\circ}}{50\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} \text{ А},$$

мгновенное значение $i^{(1)} = \sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ А}$.

3. Расчёт второй гармоники:

$$z_{ab}^{(2)} = \frac{R_1 \cdot j2\omega L}{R_1 + j2\omega L} = \frac{20 \cdot 40e^{j90^\circ}}{20 + j40} = \frac{800e^{j90^\circ}}{44,7e^{j63,4^\circ}} = 17,9e^{j26,6^\circ} = 16 + j8 \text{ Ом},$$

$$z_{\Sigma}^{(2)} = z_{ab}^{(2)} + R_2 - j\frac{1}{2\omega C} = 16 + j8 + 40 - j30 = 56 - j22 = 60,16e^{-j21,5^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\text{Ток второй гармоники } \dot{i}_m^{(2)} = \frac{\dot{E}_m^{(2)}}{Z_{\Sigma}^{(2)}} = \frac{60e^{-j10^\circ}}{60,16e^{-j21,5^\circ}} = 1e^{j11,5^\circ} \text{ А}.$$

3. Определяем действующее значение ЭДС и тока

$$E = \sqrt{E^{(0)^2} + E^{(1)^2} + E^{(2)^2}} = \sqrt{200^2 + \frac{100^2}{2} + \frac{60^2}{2}} = 216,4 \text{ В.}$$

$$I = \sqrt{1^2 + 0,707^2} = 1,224 \text{ А.}$$

5. Мощности

$$S = E \cdot I = 216,4 \cdot 1,224 = 264,8 \text{ ВА.}$$

$$P = E^{(0)}I^{(0)} + E^{(1)}I^{(1)} \cos \varphi_1 + E^{(2)}I^{(2)} \cos \varphi_2 = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cos(-45^\circ) + \frac{60}{\sqrt{2}} \cdot 0,707 \cos(-21,5^\circ) =$$

$$= 50,2 + 26,1 = 76,2 \text{ Вт;}$$

Пример 8.

Для схемы рис.11 вычислить полную и активную мощности, коэффициент мощности

$$J(t) = 1 + 3 \sin(\omega t + 10^\circ) + 5 \sin(3\omega t - 25^\circ) \text{ А.}$$

$$R_1 = 40 \text{ Ом; } x_1 = 60 \text{ Ом; } R_2 = 40 \text{ Ом; } x_2 = 40 \text{ Ом.}$$

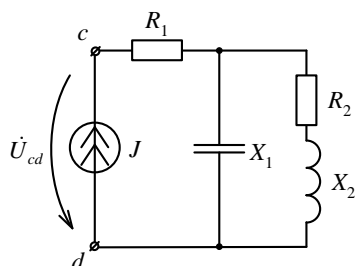


Рис. 11

Решение:

1. Расчёт постоянной составляющей

$$U_{cd}^{(0)} = J \cdot (R_1 + R_2) = 1 \cdot 80 = 80 \text{ В.}$$

2. Расчёт первой гармоники

$$J^{(1)} = 3 \sin(\omega t + 10^\circ) \text{ А.}$$

$$z_{ae}^{(1)} = \frac{(R_2 + jx_2) \cdot (-jx_1)}{R_2 + jx_2 - jx_1} = \frac{(40 + j40) \cdot 60e^{-j90^\circ}}{40 + j40 - j60} = \frac{56,4e^{j45^\circ} \cdot 60e^{-j90^\circ}}{44,7e^{-j26,56^\circ}} = 75,7e^{-j18,44^\circ} =$$

$$= (71,8 - j23,9) \text{ Ом,}$$

$$z_{\varnothing}^{(1)} = z_{ae}^{(1)} + R_1 = 40 + 71,8 - j23,9 = 111,8 - j23,9 = 114,3e^{-j12,1^\circ} \text{ Ом;}$$

$$\dot{U}_{cdm}^{(1)} = \dot{J}_m^{(1)} \cdot z_{\varnothing}^{(1)} = 3e^{j10^\circ} \cdot 114,3e^{-j12,1^\circ} = 342,9e^{-j2,1^\circ} \text{ В.}$$

$$u_{cd} = 342,9 \sin(\omega t - 2,1^\circ) \text{ В.}$$

3. Расчёт третьей гармоники.

$$J(t) = 5 \sin(3\omega t - 25^\circ) \text{ А.}$$

$$z_{as}^{(3)} = \frac{(R_2 + j3\omega L_2) \cdot \left(-j \frac{1}{3\omega c_1}\right)}{R_2 + j3\omega L_2 - j \frac{1}{3\omega c_1}} = \frac{(40 + j120) \cdot 20e^{-j90^\circ}}{40 + j120 - j20} = \frac{126,5e^{j71,6^\circ} \cdot 20e^{-j90^\circ}}{107,7e^{-j68,2^\circ}} = 23,5e^{-j86,6^\circ} =$$

$$= (1,4 - j23,5) \text{ Ом.}$$

$$z_9^{(3)} = z_{as}^{(3)} + R_1 = 40 + 1,4 - j23,5 = 41,4 - j23,5 = 47,6e^{-j29,6^\circ} \text{ Ом.}$$

$$\dot{U}_{cdm}^{(3)} = \dot{I}_m^{(3)} \cdot Z_9^{(3)} = 5e^{-j25^\circ} \cdot 47,6e^{-j29,6^\circ} = 238e^{-j54,6^\circ} \text{ В.}$$

4. Мгновенное значение несинусоидального напряжения u_{cd}

$$u_{cd} = 80 + 342,9 \sin(\omega t - 2,1^\circ) + 2,38 \sin(3\omega t - 54,6^\circ) \text{ В.}$$

$$J(t) = 1 + 3 \sin(\omega t + 10^\circ) + 5 \sin(3\omega t - 25^\circ) \text{ А.}$$

5. Вычислим мощности и коэффициент мощности.

$S = U_{cd} \cdot I$, где I - действующее значения источника тока.

$$U_{cd} = \sqrt{80^2 + 243,2^2 + 168,7^2} = 306,6 \text{ В.}$$

$$I = \sqrt{1^2 + 2,12^2 + 3,54^2} = 4,24 \text{ А.}$$

Полная мощность

$$S = 306,6 \cdot 4,24 = 1301 \text{ ВА}$$

Активная мощность

$$P = U_{cd}^{(0)} I^{(0)} + U_{cd}^{(1)} I^{(1)} \cos \varphi_1 + U_{cd}^{(3)} I^{(3)} \cos \varphi_3 = 80 \cdot 1 + 243,2 \cdot 2,12 \cos(-12,1^\circ) + 168,7 \cdot 3,54 \cos(-29,7^\circ) = 80 + 504,12 + 518,7 = 1102,8 \text{ Вт.}$$

Коэффициент мощности

$$\alpha = \frac{P}{S} = \frac{1102,8}{1301} = 0,847.$$

2.7. Зависимость формы кривой тока от характера цепи при несинусоидальном напряжении.

Сопrotивление электрической цепи зависит от частоты и, следовательно, является разным для различных гармоник. Потому форма кривой тока в цепи отличается по форме от кривой напряжения. Так, если электрическая цепь содержит только индуктивную катушку, то в общем случае $z(jk\omega) = R(k\omega) + jx_L(k\omega)$.

Как активное сопротивление R такой катушки, так и индуктивное оказываются зависящими от частоты. Если при не очень высоких частотах можно пренебречь поверхностным эффектом и считать активное сопротивление катушки одинаковым для всех гармоник, тогда

$$Z(jk\omega) = R + jk\omega L.$$

Модуль этого сопротивления и угол сдвига фаз между напряжением и током на катушке

$$Z(k\omega) = \sqrt{R^2 + (k\omega L)^2}, \quad \text{tg}(k\omega) = \frac{k\omega L}{R}.$$

оказываются зависящими от номера гармоники.

Как следует из этих выражений, с увеличением k модуль сопротивления увеличивается за счёт увеличения индуктивного сопротивления. В связи с этим содержание высших гармоник в кривой тока и индуктивной катушке, выраженное в долях первой гармоники, меньше, чем в кривой приложенного к катушке несинусоидального напряжения. Индуктивная катушка сглаживает кривую тока. Этим пользуются в практических целях для сглаживания кривой тока после выпрямителей, включая между выпрямителем и нагрузкой индуктивную катушку.

В отличие от индуктивной катушки, модуль комплексного сопротивления конденсатора

$$Z(k\omega) = \frac{1}{k\omega C}$$

с увеличением k уменьшается. Поэтому высшие гармоники тока в такой цепи могут достигать больших значений. Конденсатор искажает кривую тока по сравнению с кривой напряжения.

В сложной цепи на форму кривой тока может влиять и конфигурация цепи. Так, если в цепи для гармоники номера k имеет место резонанс токов, то сопротивление цепи k -ой гармоники будет максимальным и эта гармоника в кривой тока будет выражена слабо. Способность электрической цепи пропускать или задерживать различные гармоники используется при проектировании так называемых электрических фильтров.

Пример 9

Определить показания приборов, измеряющих действующие значения в электрической цепи, изображённой на рис.12, если

$$u(t) = 100 + \sqrt{2} \cdot 120 \sin \omega t + \sqrt{2} \cdot 50 \sin 3\omega t \text{ В,}$$

$$\frac{1}{\omega C_1} = 3,375 \text{ Ом; } \omega L = 3 \text{ Ом; } R = 6 \text{ Ом; } \frac{1}{\omega C_2} = 27 \text{ Ом.}$$

Рис. 12

Решение

Найдём напряжения и токи в цепи рис.12 для постоянной составляющей, первой и третьей гармоник в отдельности. Затем воспользуемся принципом наложения и определим мгновенные значения периодических токов и напряжений. Найдём их действующие значения. Это и будут показания соответствующих приборов.

1. Расчёт для постоянной составляющей.

Постоянная составляющая напряжения $U=100\text{В}$. В ветвь а-1 включён конденсатор, поэтому сопротивление этой ветви и, следовательно, эквивалентное сопротивление всех ветвей постоянному току равно бесконечности, т.е. $R_{\text{экв}}=\infty$. Токи постоянной составляющей в ветвях равны нулю, напряжение на конденсаторе C_1 равно постоянной составляющей приложенного напряжения.

Итак, для постоянной составляющей имеем

$$I_1^{(0)} = I_2^{(0)} = I_3^{(0)} = 0, \quad U_{a1}^{(0)} = 100\text{В}, \quad U_{12}^{(0)} = 0.$$

2. Расчёт первой гармоники.

Действующее значение напряжения первой гармоники $U^{(1)}=120$. Комплексное сопротивление участка 1-2

$$z_{12}^{(1)} = \frac{j\omega L \cdot \left(-j \frac{1}{\omega c_2}\right)}{j\omega L - j \frac{1}{\omega c_2}} = \frac{j3 \cdot (-j27)}{j3 - j27} = j3,375 \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи

$$Z_3^{(1)} = R - j \frac{1}{\omega c_1} + Z_{12}^{(1)} = 6 - j3,375 + j3,375 = 6 \text{ Ом}.$$

Поскольку $Z_3^{(1)} = R = 6 \text{ Ом}$, в цепи имеет место резонанс напряжений на первой гармонике. Резонанс возникает потому, что емкостное сопротивление ветви а-1 равно и противоположно сопротивлению участка 1_2.

Ток:

$$I_1^{(1)} = \frac{U^{(1)}}{R} = \frac{120}{6} = 20 \text{ А}.$$

Напряжения:

$$U_{c1}^{(1)} = I_1^{(1)} \frac{1}{\omega c_1} = 20 \cdot 3,375 = 67,5 \text{ В},$$

$$U_{12}^{(1)} = U_{c1}^{(1)} = 67,5 \text{ В}, \quad U_R^{(1)} = U^{(1)} = 120 \text{ В},$$

$$U_{a1}^{(1)} = \sqrt{120^2 + 67,5^2} = 137,8 \text{ В}.$$

Токи:

$$I_2^{(1)} = \frac{U_{12}^{(1)}}{\omega L} = \frac{67,5}{3} = 22,5 \text{ А},$$

$$I_3^{(1)} = \frac{U_{12}^{(1)}}{\frac{1}{\omega c_2}} = \frac{67,5}{27} = 2,5 \text{ А}.$$

3. Расчет третьей гармоники

Действующее значение напряжения третьей гармоники $U^{(3)}=50\text{В}$.

Комплексное сопротивление участка 1_2

$$z_{12}^{(3)} = \frac{3j\omega L \cdot \left(-j \frac{1}{3\omega c_2}\right)}{3j\omega L - j \frac{1}{3\omega c_2}} = \frac{j9 \cdot (-j9)}{j9 - j9} = \infty.$$

В цепи на участке 1_2 на третьей гармонике имеет место резонанс токов. Поэтому, $Z_9^{(3)} = Z_{12}^{(3)} = \infty$. Всё напряжение третьей гармоники приложено к участку 1_2.

Ток:

$$I_1^{(3)} = 0.$$

Напряжения:

$$U_{a1}^{(3)} = 0, \quad U_{12}^{(3)} = 50 \text{ В.}$$

Токи:

$$I_2 = I_3 = \frac{U_{12}^{(3)}}{3\omega L} = \frac{50}{9} = 5,55 \text{ А.}$$

Напомним, что при резонансе токи $I_2^{(3)}$ и $I_3^{(3)}$ находятся в противофазе, поэтому ток $I_1^{(3)} = 0$.

Теперь можно определить действующие значения напряжений и токов ветвей.

$$U_{a1} = \sqrt{100^2 + 137,8^2} = 170 \text{ В,}$$

$$U_{12} = \sqrt{67,5^2 + 50^2} = 84 \text{ В,}$$

$$I_1 = 20 \text{ А,}$$

$$I_2 = \sqrt{22,5^2 + 5,55^2} = 23,2 \text{ А,}$$

$$I_3 = \sqrt{2,5^2 + 5,55^2} = 6,1 \text{ А.}$$

Следовательно, вольтметры V_1 и V_2 показывают 170 и 84 вольта, соответственно. Амперметры A_1 , A_2 , A_3 показывают 20; 23,2; 6,1 ампер, соответственно

Данный пример со всей очевидностью показывает влияние конфигурации цепи на режим токов и напряжений. Наличие конденсатора в ветви a-1 и резонанса токов на участке 1_2 привело к тому, что ток i_1 содержит только первую гармонику, т.е. является синусоидальным. Напряжение на этой ветви является несинусоидальным.

Пример10.

Электрическая цепь, схема которой изображена на рис. 13, подключена к однополупериодному выпрямителю.

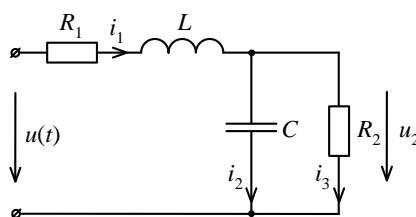


Рис. 13

Напряжение выпрямителя $U(t)$ изменяется по закону:

$$U(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega t, & \text{при } 0 \leq t \leq T/2 \\ 0, & \text{при } T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Найти мгновенные и действующие значения токов в ветвях цепи и напряжения на резисторе R_2 . Вычислить активную мощность, потребляемую на резисторе R_2 , если $U_m=250\text{В}$, $\omega=314\text{с}^{-1}$, $R_1=50\text{Ом}$, $\omega L_1=86\text{Ом}$, $1/\omega C=120\text{В}$, $R_2=150\text{Ом}$.

Определить долю второй гармоники по отношению к первой в напряжении на резисторе R_2 . Построить график этого напряжения.

Решение.

Представим напряжение рядом Фурье. Напряжение U задано аналитически, поэтому для определения коэффициентов ряда воспользуемся формулами Эйлера. Заданная функция напряжения не обладает ни одним из видов симметрии, поэтому

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t dt = \frac{U_m}{T} \left(-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right) \Big|_0^{T/2} = \frac{U_m}{T} \left(-\cos \frac{\omega T}{2} + \cos 0 \right) = \frac{U_m}{\pi}$$

Так как $T\omega = 2\pi$, $\cos \frac{\omega T}{2} = \cos \pi = -1$.

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t \sin k\omega t dt$$

При $k=1$ имеем

$$B_1 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m (\sin \omega t)^2 dt = \frac{2U_m}{T} \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^{T/2} = \frac{2U_m}{T} \left(\frac{T}{4} - \frac{1}{4\omega} \sin \omega T \right) = \frac{U_m}{2},$$

так как $\sin \omega T = \sin 2\pi = 0$.

При $k \neq 1$ найдём

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t \sin k\omega t dt = \frac{2U_m}{T} \left[\frac{\sin \omega(1-k)t}{2\omega(1-k)} - \frac{\sin \omega(1+k)t}{2\omega(1+k)} \right] \Big|_0^{T/2} = 0$$

так как $\omega \frac{T}{2} = \pi$, $\sin(1-k)\pi = \sin(1+k)\pi = 0$

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t \cos k\omega t dt$$

При $k=1$ имеем

$$C_1 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t \cos \omega t dt = \frac{U_m}{\omega T} \sin^2 \omega t \Big|_0^{T/2} = 0$$

При $k \neq 1$ найдём

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t \cos k\omega t dt = \frac{2U_m}{T} \left[-\frac{\cos \omega(1-k)t}{2\omega(1+k)} - \frac{\cos \omega(1-k)t}{2\omega(1-k)} \right] \Big|_0^{T/2} =$$

$$= \frac{U_m}{\omega T} \left[-\frac{\cos \omega(1-k)T/2}{1+k} - \frac{\cos \omega(1-k)T/2}{1-k} + \frac{\cos 0}{1+k} + \frac{\cos 0}{1-k} \right].$$

$$\text{Так как } \cos \frac{\omega T}{2}(1+k) = \cos \pi(1+k) = \begin{cases} +1 \text{ при } k = 2n+1 \\ -1 \text{ при } k = 2n \end{cases}$$

$$\cos \frac{\omega T}{2}(1-k) = \cos \pi(1-k) = \begin{cases} +1 \text{ при } k = 2n+1 \\ -1 \text{ при } k = 2n \end{cases}$$

То

$$C_k = C_{2n} = -\frac{U_m}{2\pi} \left(\frac{2}{1+2n} + \frac{2}{1-2n} \right) = \frac{2U_m}{\pi(1-2n)(1+2n)}.$$

Окончательно ряд Фурье для заданного напряжения $U(t)$ имеет вид:

$$U(t) = \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \sin \omega t - \frac{2U_m}{\pi} \left(\frac{\cos 2\omega t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4\omega t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6\omega t}{5 \cdot 7} + \dots \right) = \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \sin \omega t -$$

$$- \frac{2U_m}{\pi} \left(\frac{\sin(2\omega t + 90^\circ)}{1 \cdot 3} + \frac{\sin(4\omega t + 90^\circ)}{3 \cdot 5} + \dots \right).$$

График выданного напряжения $U(t)$, постоянной составляющей, первых двух гармонических составляющих и результирующей кривой представлен на рис.14.

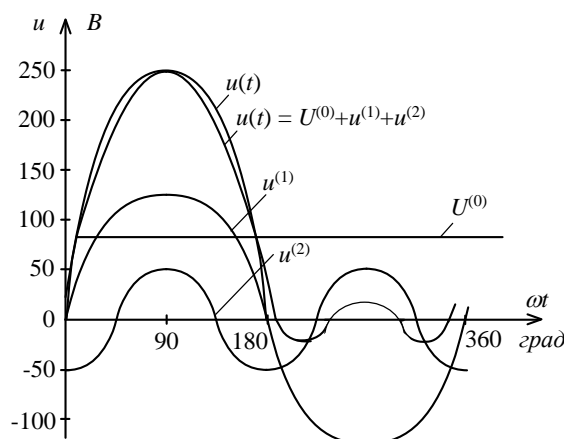


Рис. 14

Для дальнейших расчётов будем учитывать постоянную составляющую, первую и вторую гармоники.

1. Расчёт для постоянной составляющей.

$$U^{(0)} = \frac{U_m}{\pi} = 79,58 \text{ В},$$

$$I_1^{(0)} = I_3^{(0)} = \frac{U^{(0)}}{R_1 + R_2} = \frac{79,58}{155} = 0,51 \text{ А},$$

$$I_2^{(0)} = 0,$$

$$U_2^{(0)} = I_3^{(0)} R_2 = 0,51 \cdot 150 = 77 \text{ В}.$$

Расчёт для каждой из гармонических составляющих выполним символическим методом. Для первой гармоники имеем:

$$U_m^{(1)} = \frac{U_m}{2} = 125 \text{ В},$$

$$U_m^{(1)} = 125 \text{ В},$$

$$Z_1^{(1)} = R_1 + j\omega L_1 = 5 + j86 = 86,1e^{j86,70^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_2^{(1)} = \frac{1}{j\omega C} = 120e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_3^{(1)} = R_2 = 150 \text{ Ом};$$

$$Z_{23}^{(1)} = \frac{Z_2^{(1)} \cdot Z_3^{(1)}}{Z_2^{(1)} + Z_3^{(1)}} = 93,6e^{-j51,3^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_{\text{экв}}^{(1)} = Z_1^{(1)} + Z_{23}^{(1)} = 64,8e^{j11,5^\circ} \text{ Ом}.$$

Ток

$$I_{1m}^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{Z_{\text{экв}}^{(1)}} = 1,93e^{-j62,9^\circ} \text{ А}.$$

Напряжение

$$U_{2m} = I_{1m} Z_{23}^{(1)} = 180,5e^{-j62,9^\circ} \text{ В}.$$

Токи

$$I_{2m}^{(1)} = \frac{U_{2m}^{(1)}}{Z_2^{(1)}} = 1,5e^{j27,1^\circ} \text{ А},$$

$$i_2 = 1,5 \sin(\omega t + 27,1^\circ) \text{ А},$$

$$I_{3m}^{(1)} = \frac{U_{2m}^{(1)}}{Z_3^{(1)}} = 1,2e^{-j62,9^\circ} \text{ А},$$

$$i_3 = 1,2 \sin(\omega t - 62,9^\circ) \text{ А}.$$

Для второй гармоники имеем

$$U_{2m}^{(2)} = \frac{2U_m}{3\pi} = 53,1 \text{ В},$$

$$U_{2m}^{(2)} = 53,1 \text{ В}.$$

$$Z_1^{(2)} = R_1 + j2\omega L_1 = 5 + j172 = 172,1e^{j88,3^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_2^{(2)} = \frac{1}{2\omega C} = 60e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$Z_3^{(2)} = R_2 = 150 \text{ Ом};$$

$$Z_{23}^{(2)} = \frac{Z_2^{(2)} \cdot Z_3^{(2)}}{Z_2^{(2)} + Z_3^{(2)}} = 55,7e^{-j68^\circ} \text{ Ом}.$$

Ток

$$I_{1m}^{(2)} = \frac{U_m^{(2)}}{Z_{\text{экв}}^{(2)}} = -0,41e^{j12,1^\circ} \text{ А}.$$

Напряжение

$$U_{2m}^{(2)} = I_{1m}^{(2)} Z_{23}^{(2)} = -24e^{-j55,9^\circ} \text{ В}.$$

Токи

$$I_{2m}^{(2)} = \frac{U_{2m}^{(2)}}{Z_2^{(2)}} = -0,4e^{j31,1^\circ} \text{ А},$$

$$I_{3m}^{(2)} = \frac{U_{2m}^{(2)}}{Z_3^{(2)}} = -0,16e^{-j55,9^\circ} \text{ A.}$$

Мгновенные значения токов

$$i_1(t) = 0,51 + 1,93\sin(\omega t - 11,5^\circ) - 0,41\sin(2\omega t + 12,1^\circ) \text{ A,}$$

$$i_2(t) = 1,5\sin(\omega t - 27,1^\circ) - 0,4\sin(2\omega t + 34,1^\circ) \text{ A,}$$

$$i_3(t) = 0,51 + 1,2\sin(\omega t - 62,9^\circ) - 0,16\sin(2\omega t + 55,5^\circ) \text{ A.}$$

Напряжения

$$U_{23}(t) = 77 + 180,5\sin(\omega t - 62,9^\circ) - 24,0\sin(2\omega t - 55,9^\circ) \text{ В.}$$

Действующие значения токов

$$I_1 = \sqrt{(I_1^{(0)})^2 + \left(\frac{I_{1m}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{1m}^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,49 \text{ A,}$$

$$I_2 = \sqrt{\left(\frac{I_{2m}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{2m}^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,1 \text{ A,}$$

$$I_3 = \sqrt{(I_3^{(0)})^2 + \left(\frac{I_{3m}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{3m}^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 0,996 \text{ A.}$$

$$U_2 = \sqrt{(U_2^{(0)})^2 + \left(\frac{U_{2m}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{2m}^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 148,9 \text{ В.}$$

Активная мощность, потребляемая резистором R_2 :

$$P_2 = (I_3^{(0)})^2 R_2 + \left(\frac{I_{3m}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 R_2 + \left(\frac{I_{3m}^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2 R_2 = 148,9 \text{ Вт.}$$

Графики напряжения на резисторе R_2 и тока в ёмкости приведены на рис.15,16.

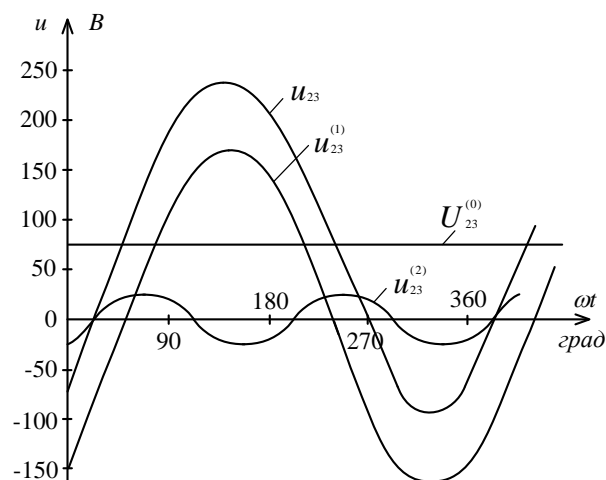


Рис. 15

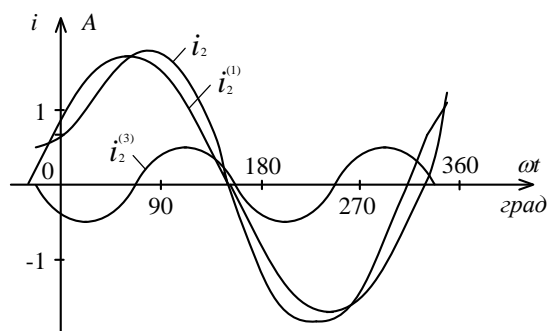


Рис. 16

При построении графиков необходимо помнить, что масштаб по оси абсцисс для k -той гармоники в k раз больше, чем для первой гармоники.

Определим содержание второй гармоники в долях первой.

В приложенном напряжении:

$$\frac{U_m^{(2)}}{U_m^{(1)}} = \frac{53,1}{125} = 0,425.$$

В токе первой ветви:

$$\frac{I_{1m}^{(2)}}{I_{2m}^{(1)}} = \frac{0,43}{1,93} = 0,223.$$

В напряжении на резисторе:

$$\frac{U_{2m}^{(2)}}{U_{2m}^{(1)}} = \frac{24}{180,5} = 0,133.$$

Расчёты показывают, что индуктивность первой ветви снижает содержание второй гармоники в токе i_1 почти в 2 раза. Дальнейшее снижение доли второй гармоники в напряжение на резисторе R_2 достигается включением параллельно резистору конденсатора. Доля тока высших гармоник, протекающего по конденсатору, выше чем резистора R_2 . Поэтому содержание напряжения второй гармоники в резисторе в 3,1 раза меньше чем в приложенном напряжении.

2.8. Пример выполнения расчетно-графической работы с помощью программы MathCad 2000.

К цепи рис. 17 приложено несинусоидальное напряжение $u(t) = 50,7 \sin(314t - 9,6^\circ) + 15,1 \sin(942t - 34,5^\circ) + 15,2 \sin(1570t + 44,6^\circ)$ В.

$R_2 = R_3 = 20 \text{ Ом}$, $R_1 = 40 \text{ Ом}$, $L = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$, $C = 18,8 \text{ мкФ}$.

Определить мгновенные значения всех токов и рассчитать P , Q , S , α .

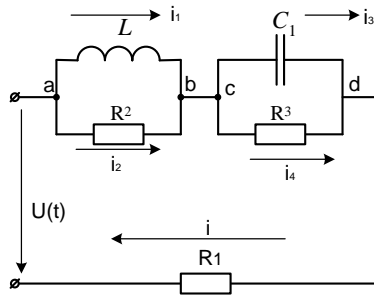


Рис. 17

1). Расчёт первой гармоники

$$\underline{Z}_{ab}^{(1)} = \frac{R_2 \cdot j\omega L}{R_2 + j\omega L} = \frac{20 \cdot 2,67e^{j90^\circ}}{20 + j2,67} = \frac{53,4e^{j90^\circ}}{20,2e^{j7,6^\circ}} = 2,64e^{j82,4^\circ} = 0,35 + j2,63 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{cd}^{(1)} = \frac{R_3 \cdot \left(-j \frac{1}{\omega C}\right)}{R_3 - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{20 \cdot 169,4e^{-j90^\circ}}{20 - j169,4} = \frac{3388e^{-j90^\circ}}{170,6e^{-j83,2^\circ}} = 19,85e^{-j6,8^\circ} = 19,72 - j2,33 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{\Sigma}^{(1)} = R_1 + \underline{Z}_{ab}^{(1)} + \underline{Z}_{cd}^{(1)} = 40 + 0,35 + j2,63 + 19,72 + j2,33 = 60,07 + j0,3 = 60,07e^{j0,3^\circ} \text{ Ом.}$$

$$\dot{U}_m^{(1)} = 50,7e^{-j9,6^\circ} \text{ В.}$$

Ток в цепи до разветвления:

$$\dot{i}_m^{(1)} = \frac{\dot{U}_m^{(1)}}{\underline{Z}_{\Sigma}^{(1)}} = \frac{50,7e^{-j9,6^\circ}}{60,07e^{j0,3^\circ}} = 0,84e^{-j9,9^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение:

$$i^{(1)} = 0,84 \sin(314t - 9,9^\circ) \text{ А.}$$

Для определения токов в параллельных ветвях найдём предварительно напряжения $\dot{U}_{m_{ab}}^{(1)}$ и $\dot{U}_{m_{cd}}^{(1)}$.

$$\dot{U}_{m_{ab}}^{(1)} = \dot{i}_m^{(1)} \cdot \underline{Z}_{ab}^{(1)} = 0,84e^{-j9,9^\circ} \cdot 2,65e^{j82,4^\circ} = 2,23e^{j72,5^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{m_{cd}}^{(1)} = \dot{i}_m^{(1)} \cdot \underline{Z}_{cd}^{(1)} = 0,84e^{-j9,9^\circ} \cdot 2,65e^{j82,4^\circ} = 2,23e^{j72,5^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{i}_{1m}^{(1)} = \frac{\dot{U}_{m_{ab}}^{(1)}}{j\omega L} = \frac{2,23e^{j72,5^\circ}}{2,67e^{j90^\circ}} = 0,84e^{-j6,7^\circ} \text{ А};$$

$$i_1^{(1)} = 0,84 \sin(314t - 6,7^\circ) \text{ А};$$

$$\dot{i}_{2m}^{(1)} = \frac{\dot{U}_{m_{ab}}^{(1)}}{R_2} = \frac{2,23e^{j72,5^\circ}}{20} = 0,11e^{j72,5^\circ} \text{ А};$$

$$i_2^{(1)} = 0,11 \sin(314t + 72,5^\circ) \text{ А};$$

$$\dot{i}_{3m}^{(1)} = \frac{\dot{U}_{m_{cd}}^{(1)}}{-j \frac{1}{\omega C}} = \frac{16,68e^{-j16,6^\circ}}{169,3e^{-90^\circ}} = 0,09e^{j73,4^\circ} \text{ А};$$

$$i_3^{(1)} = 0,09 \sin(314t + 73,4^\circ) \text{ А};$$

$$\dot{i}_{4m}^{(1)} = \frac{\dot{U}_{m_{cd}}^{(1)}}{R_3} = \frac{16,68e^{-j16,6^\circ}}{20} = 0,83e^{-j16,6^\circ} \text{ A};$$

$$i_4^{(1)} = 0,83\sin(314t - 16,6^\circ) \text{ A}.$$

2). Расчёт третьей гармоники.

При расчёте сопротивлений высших гармоник необходимо учитывать, что индуктивное сопротивление возрастает в “к” раз, а ёмкостное – уменьшаться “к” раз, где “к” - номер гармоники.

$$\underline{Z}_{ab}^{(3)} = \frac{R_2 \cdot j3\omega L}{R_2 + j3\omega L};$$

$$\underline{Z}_{ab}^{(3)} = 7,34e^{j68,1^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{cd}^{(3)} = \frac{R_3 \cdot \left(-j \frac{1}{3\omega C}\right)}{R_3 - j \frac{1}{3\omega C}} = 18,85e^{-j19,5^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_9^{(3)} = R_1 + \underline{Z}_{ab}^{(3)} + \underline{Z}_{cd}^{(3)} = 40 + 2,73 + j6,84 + 17,77 - j6,3 = 60,5^\circ \text{ Ом};$$

$$\dot{i}_m^{(3)} = \frac{\dot{U}_m^{(3)}}{\underline{Z}_9^{(3)}} = \frac{15,1e^{-j34,4^\circ}}{60,5e^{j0,5^\circ}} = 0,25e^{-j34^\circ} \text{ A};$$

$$i^{(3)} = 0,25\sin(942t - 34^\circ) \text{ A};$$

$$\dot{i}_{1m}^{(3)} = 0,23e^{-j56,7^\circ} \text{ A};$$

$$i_1^{(3)} = 0,23\sin(942t - 56,7^\circ) \text{ A};$$

$$\dot{i}_{2m}^{(3)} = 0,09e^{j32,2^\circ} \text{ A};$$

$$i_2^{(3)} = 0,09\sin(942t + 32,2^\circ) \text{ A};$$

$$\dot{i}_{3m}^{(3)} = 0,08e^{j35,6^\circ} \text{ A};$$

$$i_3^{(3)} = 0,08\sin(942t + 35,6^\circ) \text{ A};$$

$$\dot{i}_{4m}^{(3)} = 0,24e^{j64,4^\circ} \text{ A};$$

$$i_4^{(3)} = 0,24\sin(942t + 64,4^\circ) \text{ A}.$$

3). Не останавливаясь подробно на расчёте токов пятой гармоники, так как они рассчитываются аналогично, запишем результаты вычислений:

$$i_1^{(5)} = 0,21\sin(1570t + 10,4^\circ) \text{ A};$$

$$i_2^{(5)} = 0,14\sin(1570t + 100,4^\circ) \text{ A};$$

$$i_3^{(5)} = 0,13\sin(1570t + 103,5^\circ) \text{ A};$$

$$i_4^{(5)} = 0,22\sin(1570t + 13,5^\circ) \text{ A};$$

$$i^{(5)} = 0,25\sin(1570t + 44,1^\circ) \text{ A}.$$

4). Мгновенные значения токов.

$$i(t) = 0,84\sin(314t - 9,9^\circ) + 0,25\sin(942t - 34^\circ) + 0,25\sin(1570t + 44,1^\circ) \text{ A};$$

$$i_1(t) = 0,84\sin(314t - 6,7^\circ) + 0,23\sin(942t - 56,7^\circ) + 0,21\sin(1570t + 10,4^\circ) \text{ A};$$

$$i_2(t) = 0,11\sin(314t + 72,5^\circ) + 0,09\sin(942t + 32,2^\circ) + 0,14\sin(1570t + 100,4^\circ) \text{ A};$$

$$i_3(t) = 0,09\sin(314t + 73,4^\circ) + 0,08\sin(942t + 35,6^\circ) + 0,13\sin(1570t + 103,5^\circ) \text{ A};$$

$$i_4(t) = 0,83\sin(314t - 16,6^\circ) + 0,24\sin(942t + 64,4^\circ) + 0,22\sin(1570t + 13,5^\circ) \text{ A}.$$

Рассчитаем мощности:

$$S = UI = \sqrt{\left(\frac{50,7}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{15,1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{15,2}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{0,84^2}{2} + \frac{0,25^2}{2} + \frac{0,25^2}{2}} = 0,91 \cdot 38,9 = 35,4 \text{ ВА};$$

$$P = U^{(1)}I^{(1)} \cos \varphi_1 + U^{(3)}I^{(3)} \cos \varphi_3 + U^{(5)}I^{(5)} \cos \varphi_5 = \frac{50,7 \cdot 0,84}{2} \cos(0,3^\circ) + \frac{15,1 \cdot 0,25}{2} \cos(0,5^\circ) + \frac{15,2 \cdot 0,25}{2} \cos(0,5^\circ) = 25,1 \text{ Вт};$$

$$Q = \frac{50,7 \cdot 0,84}{2} \sin(0,3^\circ) + \frac{15,1 \cdot 0,25}{2} \sin(0,5^\circ) + \frac{15,2 \cdot 0,25}{2} \sin(0,5^\circ) = 0,185 + 0,016 \cdot 2 = 0,217 \text{ ВАР}.$$

$$\alpha = \frac{P}{S} = \frac{25,1}{35,4} = 0,71$$

Рекомендации к расчету цепей с периодическими несинусоидальными напряжениями и токами методом законов Кирхгофа в программе Mathcad.

При выполнении расчета следует придерживаться следующей последовательности:

1. Ввести исходные данные (сопротивления R , индуктивности L , емкости C , напряжения первой U_{m_1} и высших U_{m_2}, U_{m_3}, \dots гармоник, частота первой гармоники f и угловая частота первой гармоники ω). При этом следует учесть, что фазовый сдвиг необходимо вводить не в градусной, а в радианной мере. Для перевода нужно значение в градусах умножить на $\pi/180$. Мнимая единица $j = \sqrt{-1}$ вводится как «1j» без знака умножить между единицей и j .
2. Объявить тип неизвестных токов, то есть присвоить им комплексное значение ($I_{1m_1} := 1j, I_{2m_1} := 1j$, и т.д.).
3. Внутри блока решения системы уравнений (между ключевыми словами given и find) ввести систему уравнений, составленную по законам Кирхгофа для первой гармоники. При этом, при вводе системы уравнений, вместо знака численного равенства «=» (=) ставится знак логического равенства «≐» (Ctrl+=).
4. После определения искоемых токов, необходимо вывести значения их модулей и аргументов. По умолчанию значения аргумента выводятся в радианной мере. Для того, чтобы на экран выводились значения в градусах, необходимо в поле размерности ввести «deg».
5. Расчет токов высших гармоник производится по аналогично токам первой гармоники.

2.9. Исходные данные. Параметры элементов.

Задание к домашней работе.

1. Указанную на рис. кривую несинусоидального напряжения $U(t)$ разложить в

ряд Фурье (до трёх гармоник).

2. Построить суммарную составляющую $U'(t)$ по полученным гармоническим составляющим и убедиться в том, что она близка к $U(t)$.

3. Определить мгновенные и действующие значения токов в ветвях.

4. Определить мощности P, Q, S, T .

5. Построить кривую входного тока $i(t)$ и сравнить её с кривой входного напряжения $U(t)$.

Схемы электрических цепей приведены ниже (рис.). параметры электрических цепей и данные несинусоидальной кривой представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

	R_1 Ом	R_2 Ом	R_3 Ом	$L_{1,м}$ Гн	$L_{2,м}$ Гн	$C_{1,м}$ кФ	$C_{2,м}$ кФ
1	40	20	20	85	40	188	30
2	10	20	50	75,5	20	100	50
3	50	25	50	26,2	150	102	85,5
4	50	50	50	10,4	157	318	155
5	6	50	50	12,8	159	100	100
6	25	50	50	100	27	50	155
7	25	50	50	100	84	25	85,5
8	50	50	50	100	78	50	155
9	8	5	50	80	84	25	155

Таблица 2

Точки (В)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
а	100	90	80	60	70	40	50	80	100
в	80	60	50	40	100	50	80	90	70
с	-60	-50	-40	-30	-50	-60	-40	-90	-30

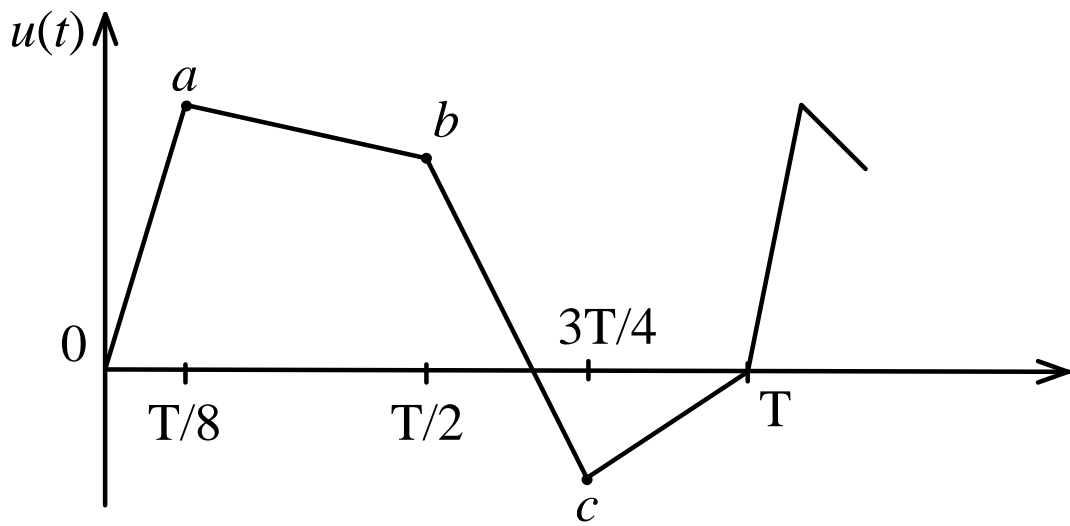
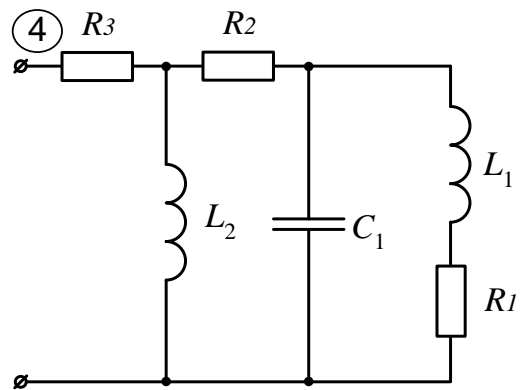
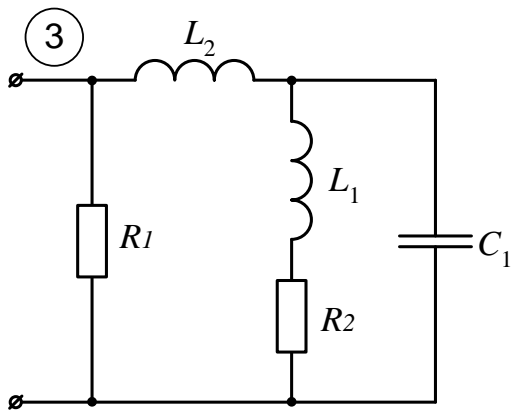
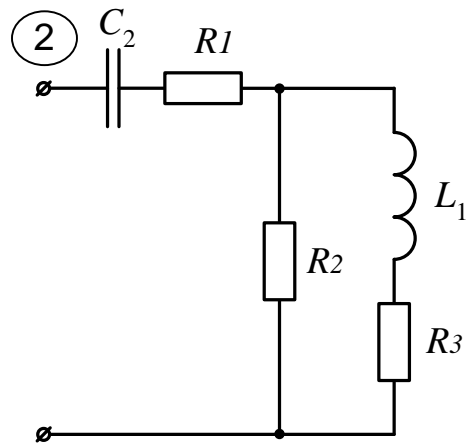
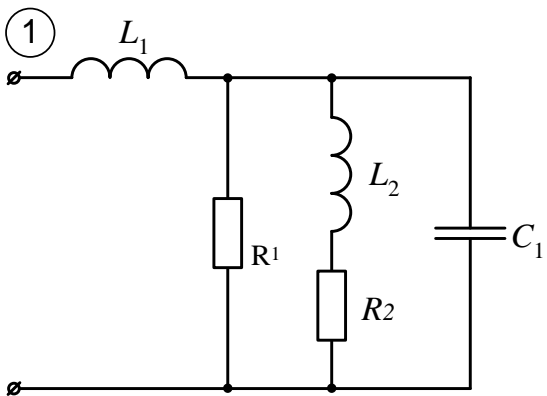


Рис. 18



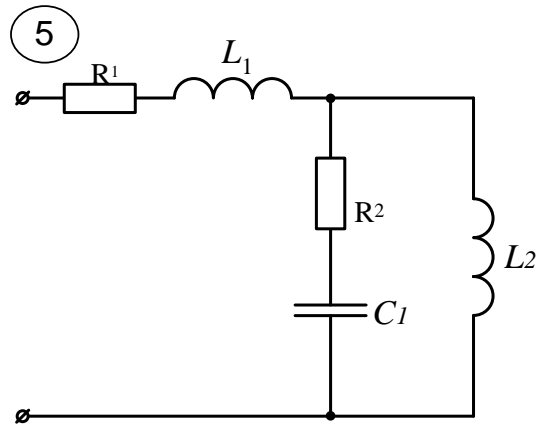
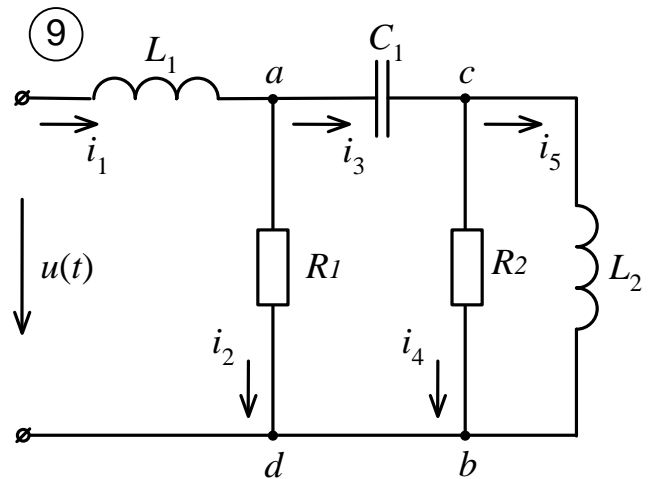
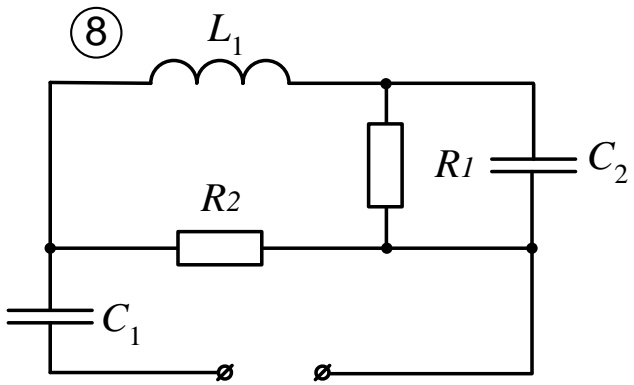
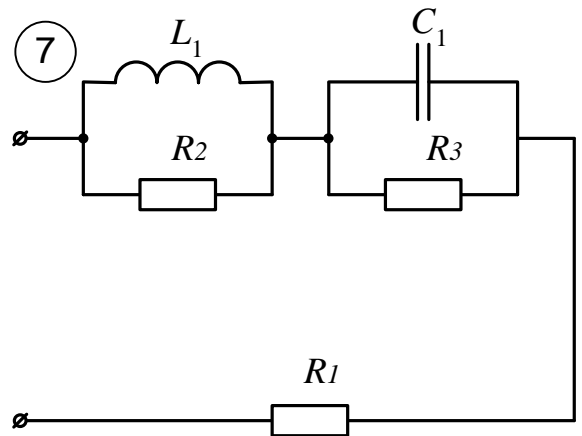
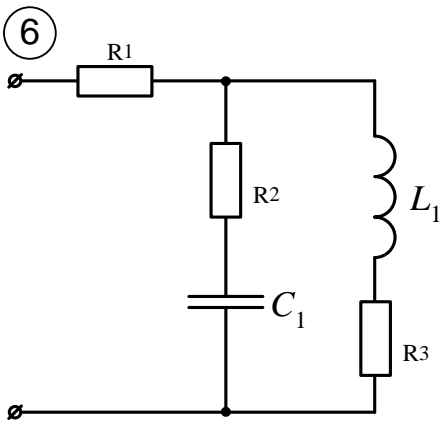


Рис. 19



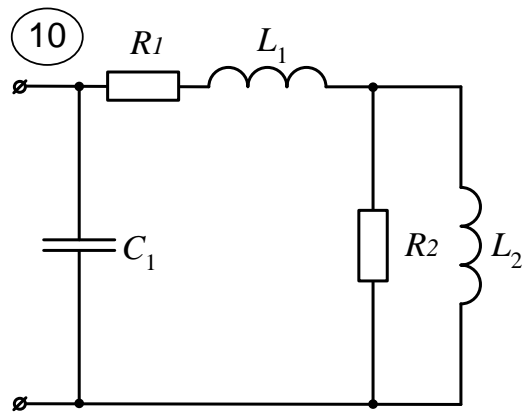


Рис. 20

Литература

1. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. М.: Энергия, 1970. Ч.1 – С.408-433.
2. Бубнов А.В., Куракина О.П., Фёдоров В.Л. Расчёт установившихся режимов линейных электрических цепей на ЭВМ с помощью программы MathCad. Методические указания. Омск 1999.
3. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. 4-ое изд. Учебник для вузов. Том1 СПб.: Питер, 2004. – 463с.
4. Любимова В.А. Расчёт установившихся режимов в разветвленных электрических цепях при периодических несинусоидальных напряжениях и ЭДС. Методические указания. Омск 1988.
5. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. М.: Л.: Энергия, 1996. Ч. Т. – С.282-302.
6. Торбенков Г.М. Электрические цепи при несинусоидальных токах и ЭДС. Методические разработки. Челябинск 1977.
7. Шебес М.Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах. М.: Высш. школа, 1967. – 475с.