

## Семинар 7. Подготовка к контрольной работе. Двойные интегралы.

### Подготовка к контрольной работе №2

1. Найдите частную производную функцию  $\sin(x2^y)$  по  $x$

**Решение:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sin(x2^y) = 2^y \cdot \cos(x2^y)$$

**Ответ:**  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2^y \cdot \cos x2^y$

2. Найдите смешанную частную производную функцию  $\sin(x2^y)$  второго порядка

**Решение:**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2^y \cdot \cos x2^y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} (2^y \cdot \cos x2^y) = 2^y \cdot \ln 2 \cdot \cos(x2^y) + (-x \cdot 2^y \cdot \ln 2 \cdot \sin(x2^y) \cdot 2^y) \\ &= 2^y \cdot \ln 2 \cdot (\cos(x2^y) - x \cdot 2^y \cdot \sin(x2^y)) \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2^y \cdot \ln 2 \cdot (\cos(x2^y) - x \cdot 2^y \cdot \sin(x2^y))$

3. Составьте уравнения касательной плоскости к функции  $z = x^2 + 2y^2 - xy$  в точке  $(1,2)$ .

**Решение:**

Уравнение касательной плоскости:

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b) + f(a, b)$$

$$f(a, b) = f(1, 2) = 1^2 + 2 \cdot 2^2 - 1 \cdot 2 = 7$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 2y^2 - xy) = 2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 2y^2 - xy) = 4y - x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4 \cdot 2 - 1 = 7$$

Получаем уравнение касательной плоскости:

$$z = 0 \cdot (x - 1) + 7 \cdot (y - 2) + 7 = 7y - 14 + 7 = 7y - 7$$

$$z = 7(y - 1)$$

**Ответ:**  $z = 7(y - 1)$

4. Найдите точки экстремума квадратичной функции  $z = x^2 + 4xy + y^2 - x - 2y$

**Решение:**

Найдем стационарные точки системы заданной квадратичной формы из системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 1 = 0 \\ 4x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Точка  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  – стационарная точка.

Чтобы определить тип данной стационарной точки, воспользуемся критерием Сильвестра:

Квадратичная функция имеет:	$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$
строгий минимум	+	+
нестрогий минимум	0	+
строгий максимум	+	-
нестрогий максимум	0	-
седло	-	Неважно

Матрица квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель и след матрицы квадратичной формы

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -12 < 0$$

Следовательно точка  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  – седло.

**Ответ:** экстремумов нет

5. Найдите стационарные точки функции  $(x - 2y)e^{2xy}$

**Решение:**

Найдем стационарные точки системы заданной квадратичной формы из системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{2xy} + 2ye^{2xy}(x - 2y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{2xy} + 2xe^{2xy}(x - 2y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} e^{2xy}(1 + 2y(x - 2y)) = 0 \\ 2e^{2xy}(-1 + x(x - 2y)) = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} 1 + 2y(x - 2y) = 0 \\ -1 + x(x - 2y) = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} 1 + 2yx - 4y^2 = 0 \\ -1 + x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ -1 + x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \\
& \begin{cases} (x - 2y)(x + 2y) = 0 \\ x^2 - 2xy = 1 \end{cases} \\
& \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 - 2xy = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x^2 - 2xy = 1 \end{cases} \\
& \begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 - 4y^2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -2y \\ 4y^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \\
& \begin{cases} x = -2y \\ y^2 = \frac{1}{8} \end{cases} \\
& \begin{cases} x = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}
\end{aligned}$$

**Ответ:**  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

6. Определите тип стационарной точки  $(0,0)$  функции  $z = x^2 + 2xy + 4y^2 + y^3 + xy^2$

**Решение:**

Для определения типа стационарной точки необходимо составить матрицу Гесса и найти собственные значения полученной матрицы в заданной точке.

Матрица Гесса:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Найдем частные производные второго порядка и смешанную производную

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + 2y + y^2, & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2 \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= 2x + 8y + 3y^2 + 2xy, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 8 + 6y + 2x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2 + 2y
\end{aligned}$$

Получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+2y \\ 2+2y & 8+6y+2x \end{pmatrix}$$

В точке (0,0) матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Определим знаки собственных значений по критерию Сильвестра:

Квадратичная функция имеет:	$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$	Знак собственных значений
строгий минимум	+	+	Оба с.з. строго больше 0
нестрогий минимум	0	+	Одно из с.з. равно 0, второе строго больше 0
строгий максимум	+	-	Оба с.з. строго меньше 0
нестрогий максимум	0	-	Одно из с.з. равно 0, второе строго меньше 0
седло	-	Неважно	С.з. имеют разные знаки

Найдем определитель и след матрицы

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = 12 > 0$$

$$\text{tr} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = 2 + 8 = 10 > 0$$

Следовательно, по критерию Сильвестра точка (0,0) – строгий минимум.

**Ответ:** строгий минимум

7. Укажите наибольшее значение, которое принимает функция  $z = x^2 + 2xy - 2y^2$  на единичной окружности  $x^2 + y^2 = 1$ ?

**Решение:**

Найдем собственные значения матрицы квадратичной формы. Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдем ее собственные значения:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Таким образом, по теореме заданная функция на окружности меняется между значениями от  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$  до  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ . Наибольшее значение:  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

**Ответ:**  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

8. Укажите координаты точек, в которых функция  $z = x^2 + 2xy - 2y^2$ , рассматриваемая на единичной окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , принимает наименьшее значение

**Решение:**

Найдем собственные значения матрицы квадратичной формы. Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдем ее собственные значения:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Таким образом, по теореме заданная функция на окружности меняется между значениями от  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$  до  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ .

Наименьшее значение функции – это минимальное собственное значение:  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

Найдем координаты точки при  $\lambda = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$  из системы:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)x + y = 0 \\ x + \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)x + y = 0 \\ x + \left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}\right)y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)x \\ x^2 + \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)^2 x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)x \\ x^2 + \frac{22 + 2\sqrt{13}}{4}x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)x \\ \frac{26 + 2\sqrt{13}}{4}x^2 = 1 \\ x = \pm \frac{2}{\sqrt{26 + 2\sqrt{13}}} \\ y = \mp \frac{3 + \sqrt{13}}{\sqrt{26 + 2\sqrt{13}}} \end{cases}$$

**Ответ:**  $\left(\pm \frac{2}{\sqrt{26+2\sqrt{13}}}; \mp \frac{3+\sqrt{13}}{\sqrt{26+2\sqrt{13}}}\right)$

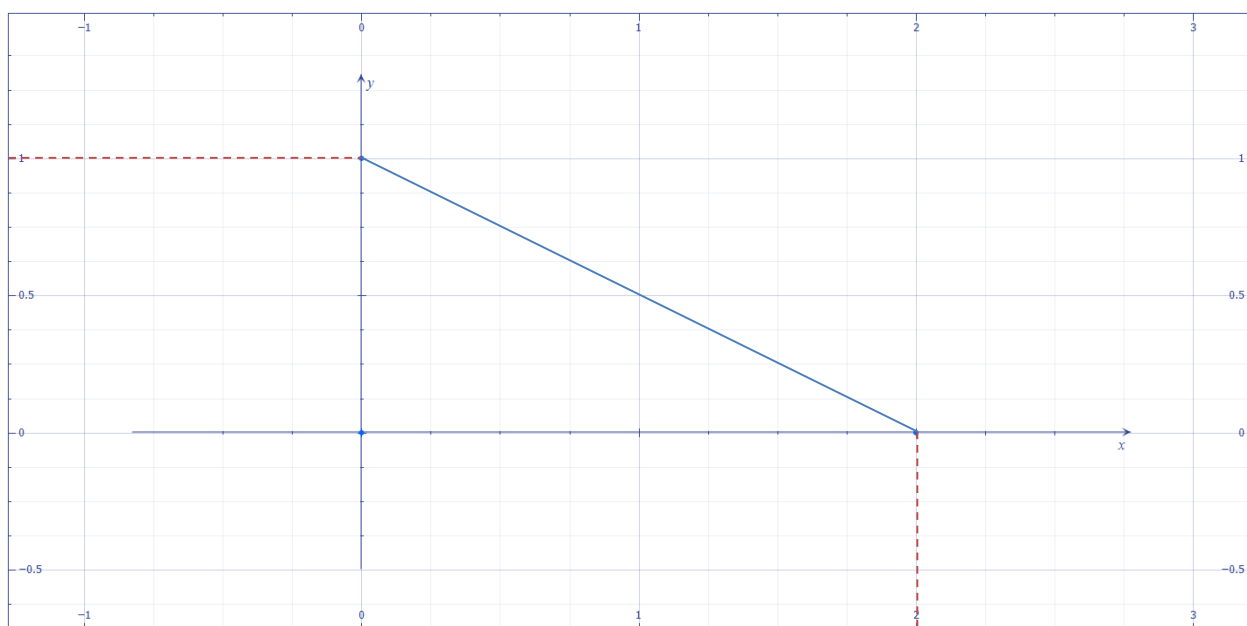
9. Вычислите интеграл

$$\iint_T xy dx dy$$

по треугольнику Т с вершинами (0,0); (2,0); (0,1).

**Решение:**

Область интегрирования (0,0); (2,0); (0,1)



По графику видно, что  $x$  меняется от 0 до 2, а  $y$  меняется от 0 до прямой, которая соединяет точки (2,0); (0,1). Найдем эту прямую (уравнение прямой  $y = ax + b$ ) из системы:

$$\begin{cases} 0 = 2 \cdot a + b \\ 1 = 0 \cdot a + b \\ b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Таким образом,  $y$  меняется от 0 до прямой  $y = -\frac{1}{2}x + 1$ .

Исходный двойной интеграл можно свести к повторному:

$$\begin{aligned}
 \iint_T xy dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^{-\frac{x}{2}+1} xy dy = \int_0^2 dx \left( x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{-\frac{x}{2}+1} \right) = \int_0^2 dx x \left( \frac{\left(-\frac{x}{2}+1\right)^2}{2} - \frac{0}{2} \right) \\
 &= \int_0^2 dx x \left( \frac{\frac{x^2}{4} - x + 1}{2} \right) = \frac{1}{2} \int_0^2 dx x \left( \frac{x^2}{4} - x + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left( \frac{x^3}{4} - x^2 + x \right) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{16}{16} - \frac{8}{3} + \frac{2}{2} - \left( \frac{0}{16} - \frac{0}{3} + \frac{0}{2} \right) \right) = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

**Ответ:**  $-\frac{1}{3}$

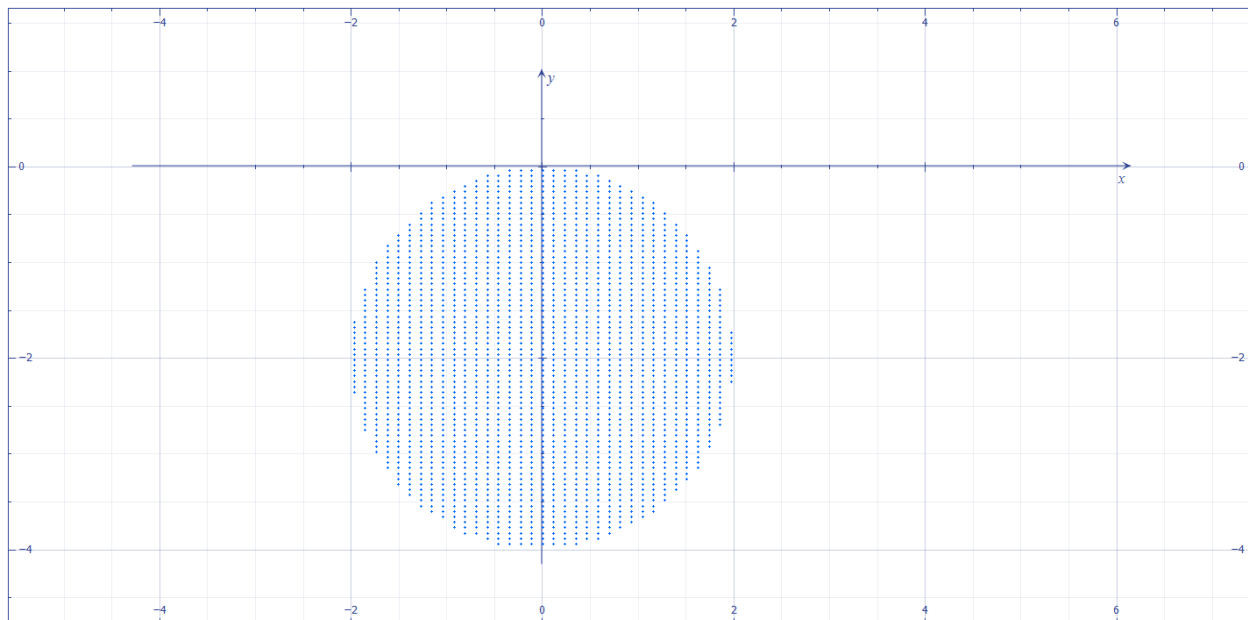
10. Вычислите интеграл

$$\iint_K y dx dy$$

по кругу  $x^2 + y^2 + 4y < 0$ .

**Решение:**

Область интегрирования



Для вычисления двойного интеграла перейдем в полярную систему координат:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$dx dy = r dr d\varphi$$

$$x^2 + y^2 + 4y = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + 4r \sin \varphi = r^2 + 4r \sin \varphi$$

$$r^2 + 4r \sin \varphi < 0, \quad r < -4 \sin \varphi$$

Таким образом, область интегрирования в полярной системе координат

$$K' = \{0 \leq r < -4 \sin \varphi, \quad \pi \leq \varphi < 2\pi\}$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \iint_K y dx dy &= \iint_{K'} r \sin \varphi r dr d\varphi = \int_{\varphi=\pi}^{2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{-4 \sin \varphi} r^2 \sin \varphi dr = \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \left( \frac{r^3}{3} \sin \varphi \Big|_0^{-4 \sin \varphi} \right) \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \left( -\frac{64}{3} \sin^3 \varphi \sin \varphi - \frac{0}{4} \sin^3 \varphi \sin \varphi \right) = -\frac{64}{3} \int_{\pi}^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi \\ &= -\frac{64}{3} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4} d\varphi = -\frac{16}{3} \int_{\pi}^{2\pi} \left( 1 - 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi \\ &= -\frac{16}{3} \int_{\pi}^{2\pi} \left( \frac{3}{2} - 2 \cos 2\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = -\frac{16}{3} \left( \frac{3}{2} \varphi - 2 \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 4\varphi}{8} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\ &= -\frac{16}{3} \left( \frac{3}{2} 2\pi - \frac{3}{2} \pi \right) = -8\pi \end{aligned}$$

$$\sin^4 \varphi = \left( \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4}$$

$$\cos^2 2\varphi = \frac{1 + \cos 4\varphi}{2}$$

**Ответ:**  $-8\pi$

## Двойные интегралы

1. Вычислите интеграл

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy$$

**Решение:**

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy &= \int_0^1 x dx \frac{y^3}{3} \Big|_{x^2}^x = \int_0^1 x dx \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3} \right) = \frac{1}{3} \int_0^1 (x^4 - x^7) dx = \frac{1}{3} \left( \frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \Big|_0^1 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{40} \end{aligned}$$



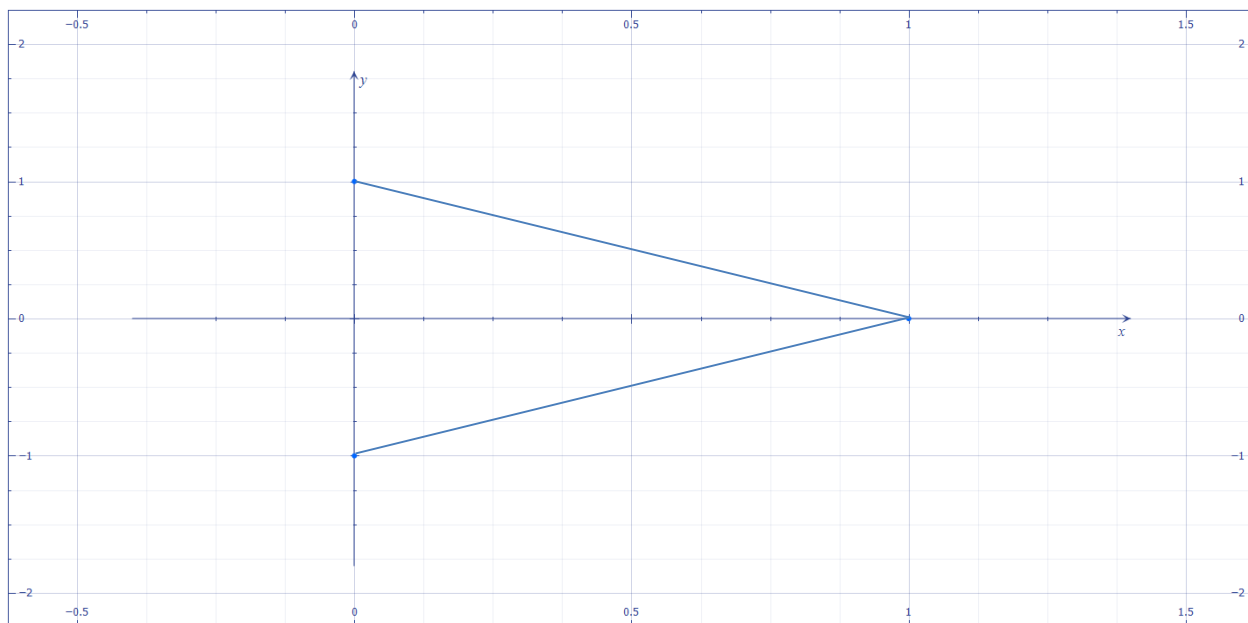
2. Вычислите интеграл

$$\iint_T x^2 y dx dy$$

по треугольнику Т с вершинами  $(0,1)$ ;  $(1,0)$ ;  $(0,-1)$ .

**Решение:**

Построим область интегрирования



Переменная  $x$  меняется от 0 до 1, а переменная  $y$  меняется от прямой, соединяющей точки  $(0,-1)$  и  $(1,0)$  до прямой, соединяющей точки  $(0,1)$  и  $(1,0)$ .

Уравнение первой прямой найдем из системы:

$$\begin{cases} -1 = 0 \cdot a + b \\ 0 = 1 \cdot a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Первая прямая  $y = x - 1$ .

Уравнение второй прямой найдем из системы:

$$\begin{cases} 1 = 0 \cdot a + b \\ 0 = 1 \cdot a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Вторая прямая  $y = -x + 1$ .

Таким образом,  $y$  меняется от прямой  $y = x - 1$  до прямой  $y = -x + 1$ . Вычислим двойной интеграл:

$$\begin{aligned} \iint_T x^2 y dx dy &= \int_0^1 x^2 dx \int_{x-1}^{-x+1} y dy = \int_0^1 x^2 dx \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x-1}^{-x+1} = \int_0^1 x^2 dx \left( \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} \right) \\ &= \int_0^1 x^2 dx \left( \frac{1-2x+x^2}{2} - \frac{1-2x+x^2}{2} \right) = \int_0^1 x^2 dx (0) = 0 \end{aligned}$$

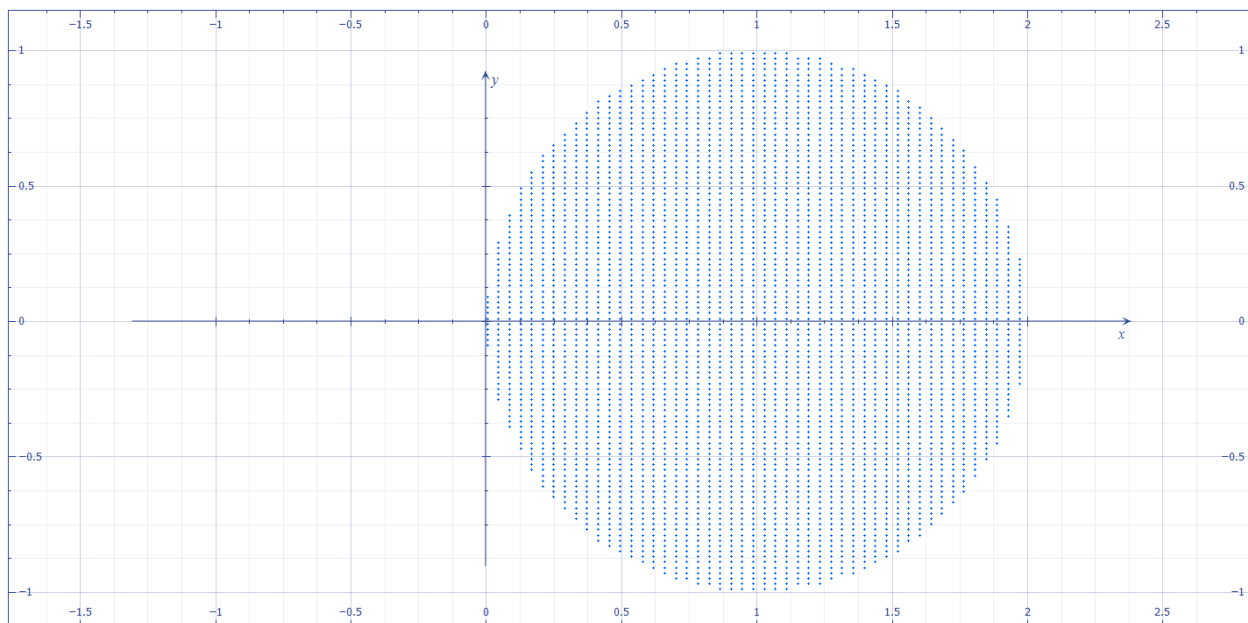
3. Вычислите интеграл

$$\iint_K (x^2 + y^2) dx dy$$

в круге  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ .

**Решение:**

Область интегрирования



Для вычисления двойного интеграла перейдем в полярную систему координат:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2$$

$$dx dy = r dr d\varphi$$

$$x^2 - 2x + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi - 2r \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 - 2r \cos \varphi$$

$$r^2 - 2r \cos \varphi = 0$$

$$r = 2 \cos \varphi$$

Таким образом, область интегрирования в полярной системе координат

$$K' = \left\{ 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Вычислим двойной интеграл

$$\begin{aligned}
\iint_K (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 r dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^3 dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2 \cos \varphi} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{256 \cos^4 \varphi}{4} = 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4} d\varphi \\
&= 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi \\
&= 16 \left( \frac{3}{2} \varphi + \frac{2\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 16 \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{-\pi}{2} \right) = 24\pi
\end{aligned}$$