Задача 2

Представить функцию интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\\[2ex] 0, & x\notin\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

Решение:

Данная функция общего вида, тогда ее интеграл Фурье содержит и косинусы, и синусы. Формула интеграла Фурье для данной функции запишется в виде:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(A(\omega)\cos\omega x+B\left(\omega\right)\sin\omega x\right)d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos\omega x dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\cos\left(\omega-1\right)x+\cos\left(\omega+1\right)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\left(\omega-1\right)x}{\left(\omega-1\right)}+\frac{\sin\left(\omega+1\right)x}{1+\omega}\right)_0^{\pi/2}=\frac{\cos\dfrac{\pi\omega}{2}}{\pi\left(1-\omega^2\right)}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\sin\omega x dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\sin\left(\omega-1\right)x+\sin\left(\omega+1\right)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos\left(\omega-1\right)x}{\left(\omega-1\right)}-\frac{\cos\left(\omega+1\right)x}{1+\omega}\right)_0^{\pi/2}=\frac{\sin\dfrac{\pi\omega}{2}-w}{\pi\left(1-\omega^2\right)}$$

Итак, получим интеграл Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}\cos\omega x+\frac{1}{1-\omega^2}\left(\sin\frac{\pi\omega}{2}-w\right)\sin\omega x\right)d\omega$$