

Министерство образования и науки РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИ-  
ЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени С. М. КИРОВА»

---

*Кафедра механики*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания, учебная программа  
и контрольные задания к курсу для студентов  
заочной формы обучения по направлениям бакалавриата,  
включающим изучение теоретической механики

*6-е издание*

Санкт-Петербург  
2017

Рассмотрены и рекомендованы к изданию  
Институтом технологических машин и транспорта леса  
Санкт-Петербургского Государственного Лесотехнического Университета  
11 апреля 2017 г.

С о с т а в и т е л и :

кандидат технических наук, доцент **М. Н. Архипов**,  
доктор технических наук, профессор **Ю. А. Добрынин**

Отв. редактор

доктор технических наук, профессор **Ю. А. Добрынин**

Рецензент

**Кафедра механики СПбГЛТУ**

**Теоретическая механика:** методические указания, учебная программа и контрольные задания к курсу для студентов заочной формы обучения по направлениям бакалавриата, включающим изучение теоретической механики /сост.: М. Н. Архипов, Ю. А. Добрынин. – СПб.: СПбГЛТУ, 2019. – 40 с.

В методических указаниях приводятся: учебная программа, как основа освоения курса; варианты заданий двух контрольных работ для студентов заочной формы обучения по направлениям бакалавриата; примеры решения задач, входящих в контрольные работы. Типы задач и их количество из двух контрольных работ определяются преподавателем для каждого направления по рабочим программам дисциплины

Настоящие методические указания по сравнению с предыдущими изданиями переработаны, исправлены и переведены в электронную форму доцентом Архиповым М. Н. Авторы с благодарностью и уважением относятся к соавторам предыдущих изданий В. Б. Красносельскому и С. Я. Колтунову ушедшим из жизни несколько лет назад.

## 1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Теоретическая механика – наука о механическом движении. Курс теоретической механики состоит из трех основных разделов: статика, кинематика и динамика. В методических указаниях приведена учебная программа курса теоретической механики, основа которой соответствует рабочим программам направлений подготовки бакалавров. Необходимые учебники и ресурсы приведены в библиографическом списке [1, 2, 3, 4]. Приступая к решению заданий контрольных работ, следует изучить теоретический материал по теме. Затем разобрать примеры задач на эту тему в учебнике и задачу, приведенную в качестве примера решения в данных методических указаниях.

По курсу теоретической механики следует выполнить две контрольные работы: одну – по статике и кинематике, вторую – по динамике. Каждая контрольная работа состоит из пяти заданий. Количество заданий, входящих в контрольные работы, определяются преподавателем в соответствии с рабочей программой курса каждого направления подготовки бакалавров. Контрольные работы следует выполнять в отдельной тетради, на обложке которой написать название кафедры, наименование дисциплины, фамилию и инициалы студента, и шифр работы.

Шифр работы состоит из трёх цифр и формируется студентом самостоятельно. Первая цифра шифра соответствует дню рождения (ДР) студента по модулю 10, то есть число десятков отбрасывается. Вторая цифра шифра соответствует месяцу рождения (МР) студента, также по модулю 10. Третья цифра шифра соответствует последней цифре номера зачетной книжки (ПЦЗК), по которой выбирается схема или вариант задания. По первой цифре шифра (ДР) берутся данные для сил или момента времени. По второй цифре шифра (МР) берутся данные для размеров.

Например, если дата рождения студента 27 ноября, то исходные данные в таблице к этой задаче, соответствуют номеру 7 (27 по модулю 10 равно 7 – ДР) и 1 (ноябрь – 11 месяц, 11 по модулю 10 равно 1 – МР); если последняя цифра номера зачетной книжки 2, то последней цифрой шифра будет 2 – ПЦЗК (в заданиях брать схему или вариант 2). В данном случае шифр составляет число 712.

По ПЦЗ К студентом берётся схема для заданий С1, С2, Д2, Д3, Д4, Д5, механизм для заданий К2, К3, уравнения движения для задания К1 из соответствующих таблиц.

При оформлении контрольной работы нужно оставлять поля для замечаний рецензента. Выполняя контрольные работы, необходимо полностью переписать текст каждой задачи. При оформлении решения задачи

следует руководствоваться примером решения этого типа задач, приведенного в данных методических указаниях. Ход решения должен сопровождаться краткими пояснениями.

Аттестация студента в виде экзамена или зачета невозможна без выполненных и зачтенных контрольных работ (работы).

## 2. УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА

### 2.1. Введение

Теоретическая механика и ее место среди естественных наук. Механика как теоретическая база современной техники.

### 2.2. Статика твердого тела

#### *Введение в статику*

#### *Система сходящихся сил*

Предмет статики. Основные понятия и аксиомы статики. Связи и реакции связей. Система сходящихся сил. Проекция силы на ось и плоскость. Аналитический и геометрический способы нахождения равнодействующей. Условие и уравнения равновесия системы сходящихся сил. Теорема о равновесии трех непараллельных сил.

#### *Моменты силы относительно точки и оси*

Алгебраический момент силы относительно точки. Момент силы относительно оси. Частные случаи вычисления момента силы относительно оси. Векторный момент силы относительно точки. Теорема о проекции векторного момента силы относительно точки на ось.

#### *Теория пар сил*

Понятие пары сил. Алгебраический и векторный моменты пары сил. Свойства пар сил. Теорема о сложении двух и произвольного числа пар сил. Геометрическое и аналитическое условия равновесия системы пар сил.

#### *Произвольная система сил*

Главный вектор и главный векторный момент произвольной системы сил. Приведение силы к заданному центру. Теорема о приведении произвольной системы сил к заданному центру. Геометрические и аналитические условия равновесия произвольной системы сил. Произвольная плоская система сил как частный случай произвольной системы сил. Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил.

#### *Равновесие тела при наличии сил трения*

Трение скольжения. Коэффициенты трения скольжения, качения покоя. Равновесие катка на опорной поверхности. Момент сопротивления качению.

#### *Центр тяжести*

Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела. Координаты центров тяжести однородных тел (центры тяжести объема, площади, линии). Способы определения положения центров тяжести тел.

## **2.3. Кинематика**

### *Кинематика точки*

Введение в кинематику. Способы задания движения точки (векторный, координатный, естественный). Определение скорости и ускорения точки при векторном, координатном и естественном способах задания ее движения.

### *Простейшие движения твердого тела*

Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела, совершающего поступательное движение. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Уравнение вращательного движения, угловая скорость и угловое ускорение. Скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

### *Плоскопараллельное движение твердого тела*

Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. Свойства плоскопараллельного движения. Теорема о скоростях точек плоской фигуры и ее следствие. Мгновенный центр скоростей и способы определения его положения. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры.

### *Сложное движение точки*

Понятие о сложном движении точки. Относительное, переносное и абсолютное движения точки. Теорема о сложении скоростей. Теоремы о сложении ускорений при переносном поступательном и вращательном движениях. Ускорение Кориолиса.

## **2.4. Динамика**

### *Введение в динамику*

Предмет динамики. Основные понятия и определения. Основные законы механики Галилея-Ньютона. Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Две задачи динамики материальной точки и их решения. Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки.

### *Введение в динамику механической системы*

Механическая система. Классификация сил, действующих на механическую систему, Свойства внутренних сил. Масса механической системы. Центр масс и координаты центра масс. Момент инерции механической системы (тела) относительно оси. Радиус инерции, моменты инерции некоторых простых тел относительно оси. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей.

### *Общие теоремы динамики*

Теорема о движении центра масс и ее следствия. Количество движения и импульс силы. Теоремы об изменении количества движения материальной точки и механической системы. Моменты количества движения относительно точки и оси. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси. Теорема об изменении кинетического момента механической системы и ее следствия. Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения. Дифференциальное уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения тела. Элементарная работа силы. Работа силы на прямолинейном перемещении точки ее приложения. Мощность. Работа момента силы. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Кинетическая энергия тела при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях. Теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы.

### *Основы кинетостатики*

Метод кинетостатики для материальной точки. Метод кинетостатики для механической системы. Приведение к инерции твердого тела к простейшему виду.

### *Элементы аналитической механики*

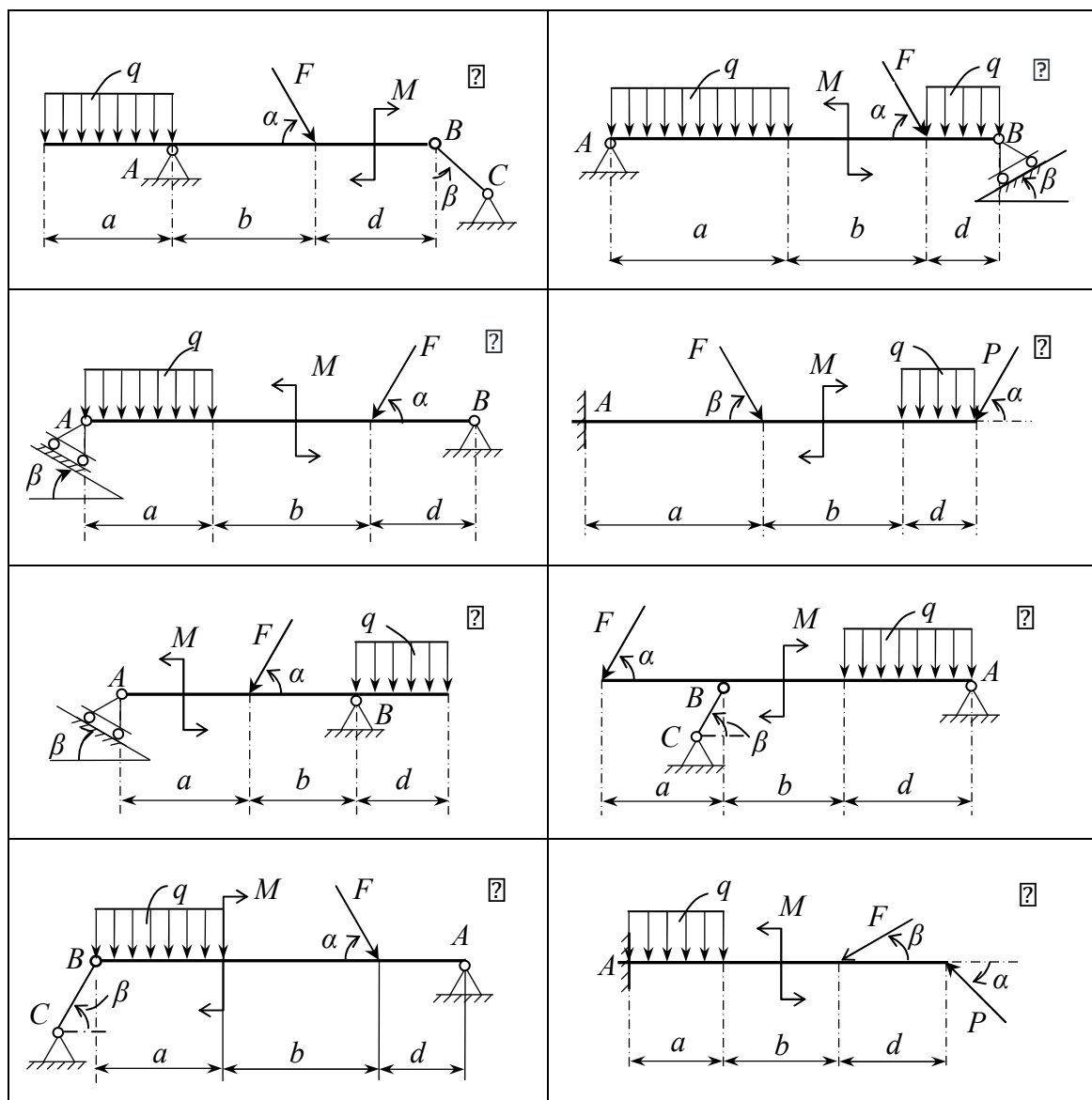
Классификация связей. Возможные перемещения механической системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики. Обобщенные координаты и число степеней свободы. Обобщенные силы. Уравнения Лагранжа второго рода.

## **3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1**

## Задание С1

**Тема: Равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил.**

На горизонтальную балку действуют: сосредоточенная сила  $F$ , пара сил с моментом  $M$  и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ . Определить реакции опор, пренебрегая весом балки и стержня  $BC$  (рис. 1, табл. 1), для схем 3, 7,  $P=F$ .





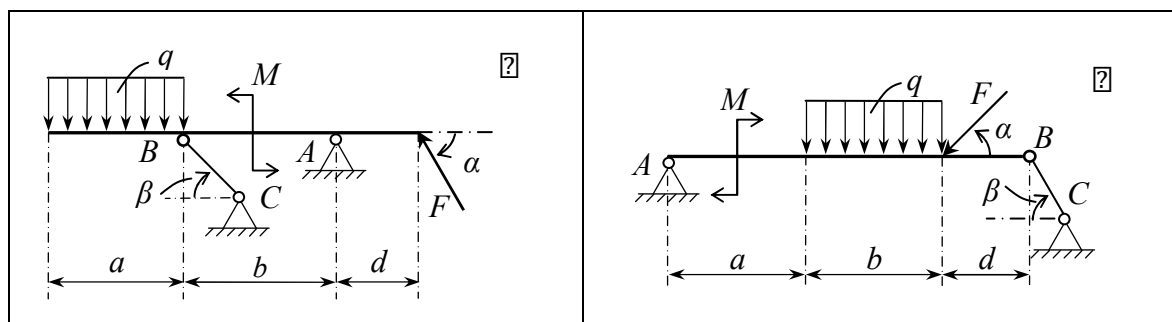


Рис. 1

Таблица 1

ДР	$F, kH$	$M, kH \cdot m$	$q, kH/m$	$\alpha, \text{град}$	МР	$\beta, \text{град}$	$a, m$	$b, m$	$d, m$	ПЦЗК
0	4	1	2	30	0	60	2	8	4	0
1	6	2	4	45	1	30	4	6	6	1
2	8	3	6	60	2	45	6	4	8	2
3	10	4	8	30	3	60	8	2	4	3
4	12	5	10	45	4	30	2	8	6	4
5	14	6	12	60	5	45	4	6	8	5
6	16	7	2	30	6	60	6	4	2	6
7	18	8	4	45	7	30	8	2	4	7
8	20	9	6	60	8	45	2	8	6	8
9	22	10	8	30	9	60	4	6	8	9

### Пример решения задания С1

Схема балки показана на рис.2,а.

Дано:  $F = 4 kH$ ;  $M = 5 kH \cdot m$ ;  $q = 2 \frac{kH}{m}$ ;  $a = 2 m$ ;  $b = 3 m$ ;  $d = 2 m$ ;

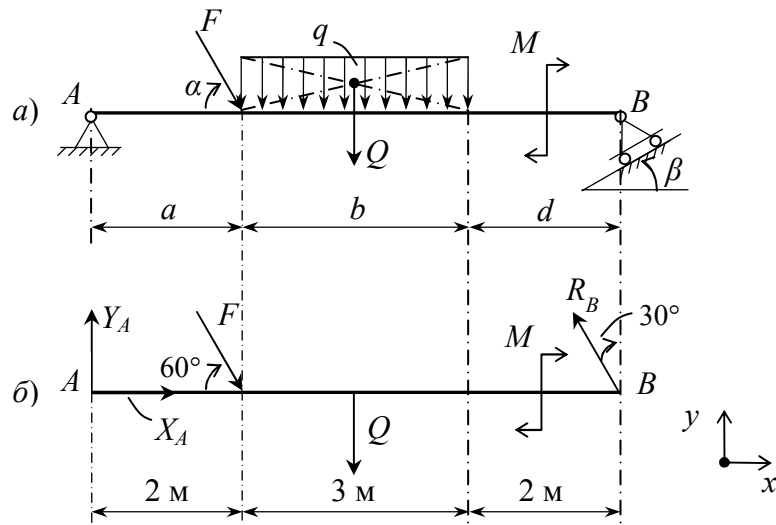
$\alpha = 60^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ .

Найти: реакции опор А и В.

### Решение

Составим расчетную схему для балки АВ. Освободим ее от связей, заменив их действием реакциями связей. Связи балки: неподвижный цилиндрический шарнир А и подвижная опора В. Также заменим равномерно распределенную нагрузку интенсивностью  $q$  равнодействующей, равной

$Q = q \cdot b = 2 \cdot 3 = 6 \text{ kH}$ , которую приложим в центре тяжести площади этой нагрузки. Расчетная схема балки АВ представлена на рис.2,б.



**Рис. 2**

Балка АВ находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил. В соответствии с этим составим три уравнения равновесия, приняв систему координат Оху:

$$\sum_{j=1}^n F_{jx} = 0; X_A + F \cdot \cos 60^\circ - R_B \cdot \sin 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n F_{jy} = 0; Y_A - F \cdot \sin 60^\circ - Q + R_B \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n M_A(\vec{F}_j) = 0; -F \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ - Q \cdot 3,5 - M + R_B \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3)

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{F \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ + Q \cdot 3,5 + M}{7 \cdot \sin 60^\circ} = \\ &= \frac{4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot 3,5 + 5}{7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 5,4 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Из уравнения (1)

$$X_A = -F \cdot \cos 60^\circ + R_B \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= -4 \cdot 0,5 + 5,4 \cdot 0,5 = 0,7 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2)

$$\begin{aligned} Y_A &= F \cdot \sin 60^\circ + Q - R_B \cdot \cos 30^\circ = \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 6 - 5,4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 4,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для проверки полученных значений опорных реакций составим дополнительное уравнение равновесия, равенство нулю суммы моментов относительно точки  $B$ :

$$\sum_{j=1}^n M_B(\vec{F}_j) = 0; -Y_A \cdot 7 + F \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ + Q \cdot 3,5 - M = 0.$$

$$\begin{aligned} -4,8 \cdot 7 + 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot 3,5 - 5 &\approx -33,6 + 17 + 21,5 - 5 = -38,6 + 38,5 = -0,1 \\ &\cong 0. \end{aligned}$$

Разница в 0,1 возникла за счет округления ( $\sqrt{3} \approx 1,7$ ) в процессе вычислений и составляет менее 5%.

Значит, реакции найдены, верно.

Ответ:  $X_A = 0,7 \text{ кН}$ ;  $Y_A = 4,8 \text{ кН}$ ;  $R_B = 5,4 \text{ кН}$ .

## Задание С2

**Тема: Равновесие составной конструкции под действием произвольной** плоской системы сил.

На составную конструкцию (система двух тел) действуют: сосредоточенная сила  $F$ , пара сил с моментом  $M$  и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ . Определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире  $C$ . (рис. 3, табл. 2).

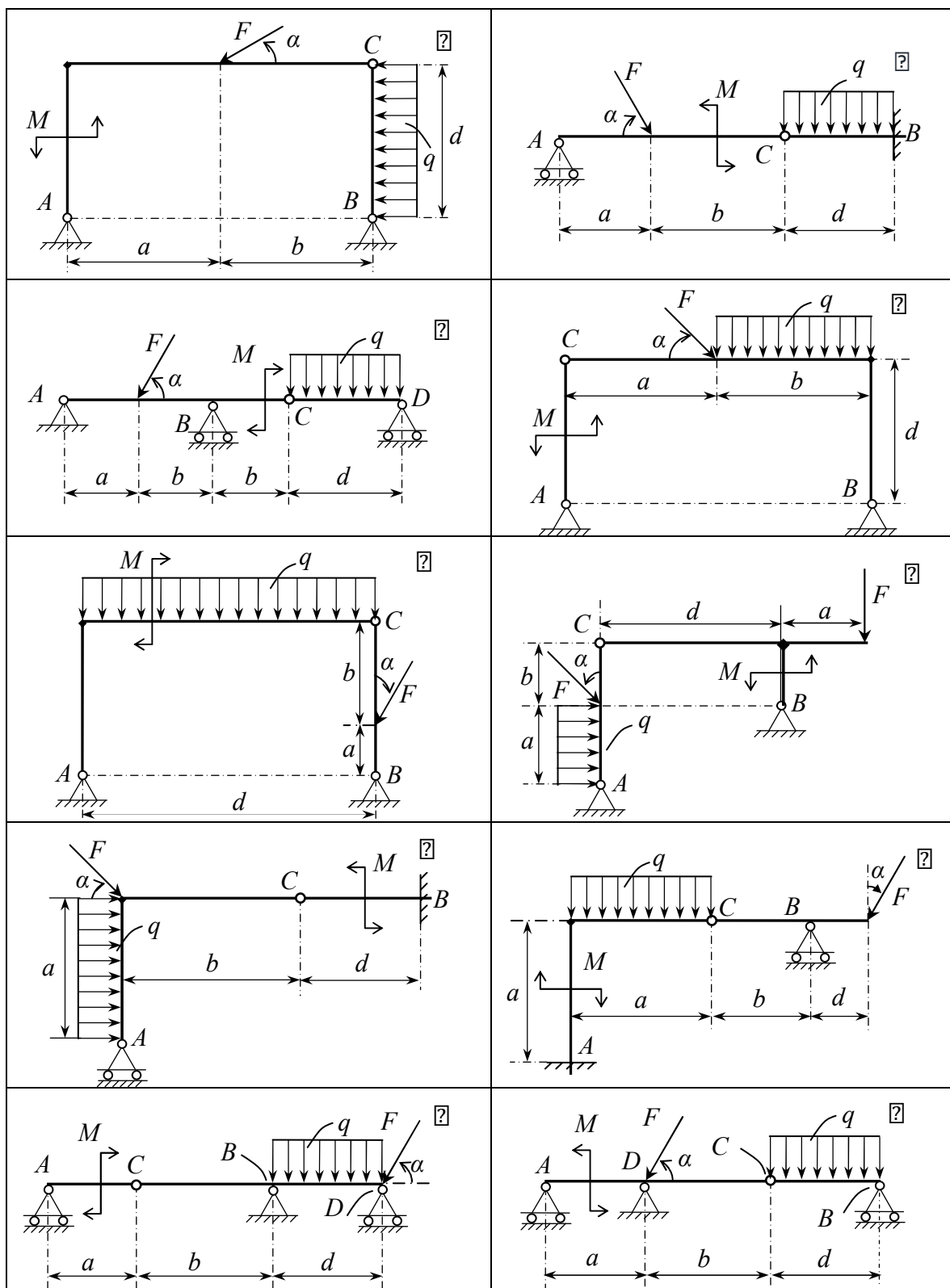


Рис. 3

Таблица 2

ДР	$F, \text{kH}$	$M, \text{kH}\cdot\text{м}$	$q, \text{kH}/\text{м}$	МР	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	$d, \text{м}$	$\alpha, \text{град}$	ПЦЗК
----	----------------	-----------------------------	-------------------------	----	---------------	---------------	---------------	-----------------------	------

0	4	3	2	0	2	3	4	30	0
1	6	5	2	1	4	3	2	45	1
2	8	3	3	2	3	4	2	60	2
3	5	9	3	3	3	2	4	30	3
4	7	8	4	4	4	2	3	120	4
5	9	5	6	5	2	4	3	150	5
6	10	3	3	6	1	5	2	45	6
7	12	4	5	7	2	3	6	60	7
8	3	7	2	8	3	5	2	150	8
9	14	9	4	9	2	6	3	120	9

### Пример решения задания С2

Схема составной конструкции показана на рис.4,*а*.

Дано:  $F = 2 \text{ кН}$ ;  $M = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $q = 5 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ;  $a = 3 \text{ м}$ ;  $b = 2 \text{ м}$ ;  
 $d = 4 \text{ м}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ .

Найти: реакции опор  $A$  и  $B$  и давление в промежуточном шарнире  $C$ .

### Решение

При рассмотрении равновесия составной конструкции в целом получается 4 неизвестных составляющих реакций в точках  $A$  и  $B$  и 2 неизвестные в шарнире  $C$  на три уравнения равновесия, которые можно составить для этой системы сил. Поэтому для решения задачи составную конструкцию надо разделить надве части по промежуточному шарниру  $C$  и составить ещё три уравнения равновесия для одной из частей. В месте разделения конструкции необходимо показать соответствующие реакции по взаимно противоположным направлениям для каждой из частей. Причем, соответствующие составляющие равны по величине, поэтому будем обозначать их с одной стороны со штрихом, с другой без штриха, при этом ( $X_C = X'_C$ ,  $Y_C = Y'_C$ ).

Расчетная схема из двух составных частей показана на рис. 4,*б*. Каждая из частей находится в равновесии под действием произвольной пло-

ской системы сил. Для каждой части конструкции составим по три уравнения равновесия, приняв систему координат  $Oxy$ .

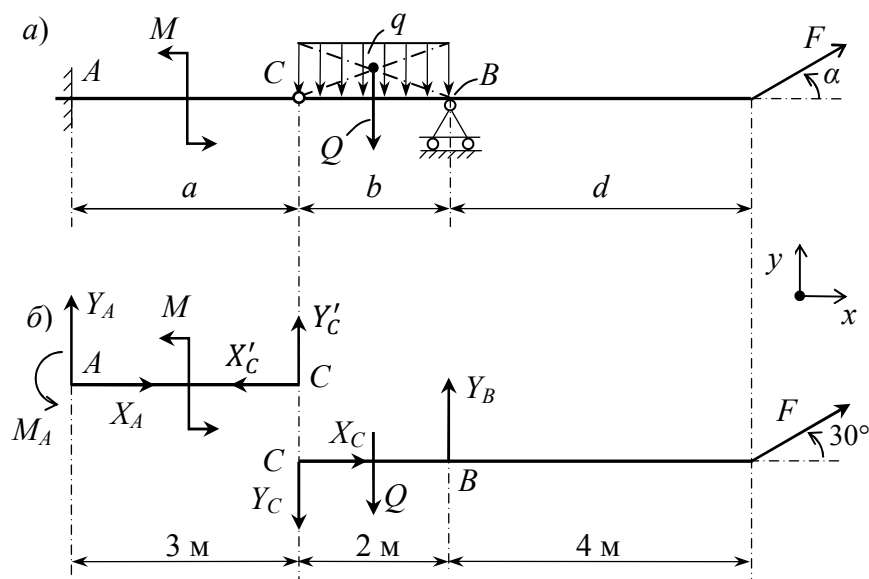


Рис. 4

На расчетной схеме вместо распределённой нагрузки интенсивностью  $q$  изображена сосредоточенная сила  $Q$ :  $Q = q \cdot b = 5 \cdot 2 = 10 \text{ kH}$ .

Рассмотрим равновесие правой части:

$$\sum_{j=1}^n F_{jx} = 0; X_C + F \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n F_{jy} = 0; -Y_C - Q + Y_B + F \cdot \sin 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n M_C(\vec{F}_j) = 0; -Q \cdot 1 + Y_B \cdot 2 + F \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим равновесие левой части:

$$\sum_{j=1}^n F_{jx} = 0; X_A - X'_C = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n F_{jy} = 0; Y_A + Y'_C = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n M_A(\vec{F}_j) = 0; M_A + M + Y'_C \cdot 3 = 0. \quad (6)$$

Из уравнения(1)  $X_C = -F \cdot \cos 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -1,7 \text{ kH}$ .

$$\text{Из (3)} \quad Y_B = \frac{Q \cdot 1 - F \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{10 \cdot 1 - 2 \cdot 6 \cdot 0,5}{2} = 2 \text{ кН.}$$

$$\text{Из (2)} \quad Y_C = -Q + Y_B + F \cdot \sin 30^\circ = -10 + 2 + 2 \cdot 0,5 = -7 \text{ кН.}$$

$$\text{Из (4)} \quad X_A = X'_C = -1,7 \text{ кН.}$$

$$\text{Из (5)} \quad Y_A = -Y'_C = 7 \text{ кН.}$$

$$\text{Из (6)} \quad M_A = -M - Y_C \cdot 3 = -7 - (-7) \cdot 3 = 14 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Для проверки полученных результатов можно составить уравнение моментов относительно какой-либо точки или уравнение проекций на какую-нибудь ось, как для всей конструкции, так и для отдельных частей. В любом из этих уравнений при равновесии и подстановке полученных значений реакций должно получиться тождественное равенство нулю.

Составим уравнение моментов для всей конструкции относительно точки  $B$ :

$$\sum_{j=1}^n M_B(\vec{F}_j) = 0; F \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ + Q \cdot 1 + M - Y_A \cdot 5 + M_A = 0;$$

$$2 \cdot 4 \cdot 0,5 + 10 \cdot 1 + 7 - 7 \cdot 5 + 14 \equiv 0; 0 \equiv 0.$$

Ответ:  $X_A = -1,7 \text{ кН}$ ;  $Y_A = 7 \text{ кН}$ ;  $M_A = 14 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $Y_B = 2 \text{ кН}$ ;  $X_C = -1,7 \text{ кН}$ ;

$Y_C = -7 \text{ кН}$ . Отметим, раз реакции  $X_C$  и  $Y_C$  получились отрицательными, значит их истинные направления противоположны принятым на схеме произвольно.

### Задание К1

**Тема: Кинематика точки.**

По заданным уравнениям движения точки  $M$  найти уравнение траектории этой точки и для момента времени  $t_1$  вычислить скорость, полное, нормальное, касательное ускорения точки и радиус кривизны траектории.

По полученным данным построить в масштабе траекторию точки. Для заданного момента  $t_1$  найти положение точки на траектории и построить в соответствующих масштабах векторы скорости и ускорения точки.

Для выполнения задания К1 необходимо принять по последней цифре шифра (ПЦЗК) в таблице 3 уравнения движения точки  $M$ , а по дню рождения (ДР), принять значение времени  $t_1$ .

Таблица 3

ПЦЗК	Уравнения движения		ДР	Величина
	$x = f_1(t), \text{ см}$	$y = f_2(t), \text{ см}$		$t_1, \text{ с}$

0	$x = 4 \cos(\pi/3)t - 1$	$y = 4 \sin(\pi/3)t$	0	1
1	$x = 2 \sin^2(\pi/6)t - 3$	$y = -2 \cos^2(\pi/6)t$	1	2
2	$x = 5t^2 + 4$	$y = 3t$	2	3
3	$x = 1 + 2 \cos(\pi/4)t$	$y = 3 \sin(\pi/4)t$	3	4
4	$x = 6t$	$y = 2t^2 - 4$	4	2
5	$x = 5 \cos(\pi/6)t$	$y = 3 \sin(\pi/6)t$	5	3
6	$x = 3 \cos^2(\pi/4)t$	$y = 3 \sin^2(\pi/4)t$	6	1
7	$x = 3t^2 - 1$	$y = 6t$	7	4
8	$x = 4 \cos(\pi/3)t + 2$	$y = 4 \sin(\pi/3)t - 2$	8	3
9	$x = 3t$	$y = 9t^2 + 1$	9	2

### Пример решения задания К1

Дано: уравнения движения:  $x = 2t$ ;  $y = t^2 + 1$ ; ( $t$  в секундах,  $x, y$  в сантиметрах); момент времени  $t_1 = 1,5$  с.

Найти: уравнение траектории движения точки и построить траекторию, положение точки на траектории для заданного момента времени  $t = t_1$ , скорость, полное ускорение, касательное ускорение, нормальное ускорение и радиус кривизны траектории в данной точке

### Решение

Для определения уравнения траектории точки из уравнений движения исключим время  $t$ . Находим  $t$  из первого уравнения движения и подставим его значение во второе уравнение

$$t = \frac{x}{2}; y = \frac{x^2}{4} + 1.$$

Уравнение траектории:  $y = \frac{x^2}{4} + 1$  – парабола ( $x > 0, y > 0$ ).

После построения траектории движения точки определяем её координаты для заданного момента времени  $t_1$  (взять из таблицы 3).

$$x = 2t = 2 \cdot 1,5 = 3 \text{ см}; y = t^2 + 1 = 1,5^2 + 1 = 3,25 \text{ см}.$$

Найдем скорость точки по проекциям скорости на оси координат:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \dot{x} = 2; \dot{y} = 2t;$$



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2};$$

$$v = \sqrt{2^2 + (2t)^2} = 2\sqrt{1 + t^2} \text{ см/с.}$$

Прит  $t_1 = 1,5$  с:

$$\dot{x} = 2 \text{ см/с}; \dot{y} = 3 \text{ см/с}; v = \sqrt{13} \approx 3,61 \text{ см/с.}$$

Найдем ускорение точки также по проекциям:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \ddot{x} = 0; \ddot{y} = 2 \text{ см/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = a_y; a = 2 \text{ см/с}^2.$$

В данном случае полное ускорение не зависит от момента времени, поскольку вторая производная равна постоянной величине.

При определении касательного и нормального ускорения следует иметь в виду, что эти определения ускорений не полные, а сокращённые, так сказать рабочие. Правильно их называть так: проекция ускорения точки на ось касательной  $a_\tau$  и проекция ускорения точки на ось главной нормали  $a_n$ . На рис 5 показаны естественные оси « $\tau$ » и « $n$ ». Ось « $\tau$ » направляется по вектору скорости  $\vec{v}$ , которая всегда направляется по касательной к траектории в данной точке, а ось главной нормали « $n$ » под прямым углом к оси « $\tau$ » в сторону вогнутости траектории. Оси « $\tau$ » и « $n$ » образуют соприкасающуюся плоскость, в которой лежит вектор полного ускорения точки  $\vec{a}$ , определённого координатным способом и, следовательно, на естественную ось « $b$ » – ось бинормали, направленную перпендикулярно соприкасающейся плоскости, не проектируется ( $a_b = 0$ ). Особенностью осей « $\tau$ », « $n$ », « $b$ » является то, что они двигаются вместе с точкой, их ещё называют осями Эйлера или осями естественного трёхгранника.

Найдем касательное и нормальное ускорения точки:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(2\sqrt{1+t^2})}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Для  $t = t_1 = 1,5$  с:

$$a_\tau = \frac{2 \cdot 1,5}{\sqrt{1 + 1,5^2}} = \frac{3}{\sqrt{3,25}} \approx 1,66 \text{ см/с}^2.$$

Полное ускорение точки:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Из этой формулы получим выражение для нормального ускорения:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2^2 - (1,66)^2} \approx 1,11 \text{ см/с}^2.$$

Можно для вычислений касательного и нормального ускорений также использовать формулы:

$$a_\tau = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y}}{v};$$

$$a_\tau = \frac{2 \cdot 0 + 2t \cdot 2}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad a_\tau|_{t=1,5 \text{ с}} = \frac{2 \cdot 1,5}{\sqrt{1+1,5^2}} \approx 1,66 \text{ см/с}^2;$$

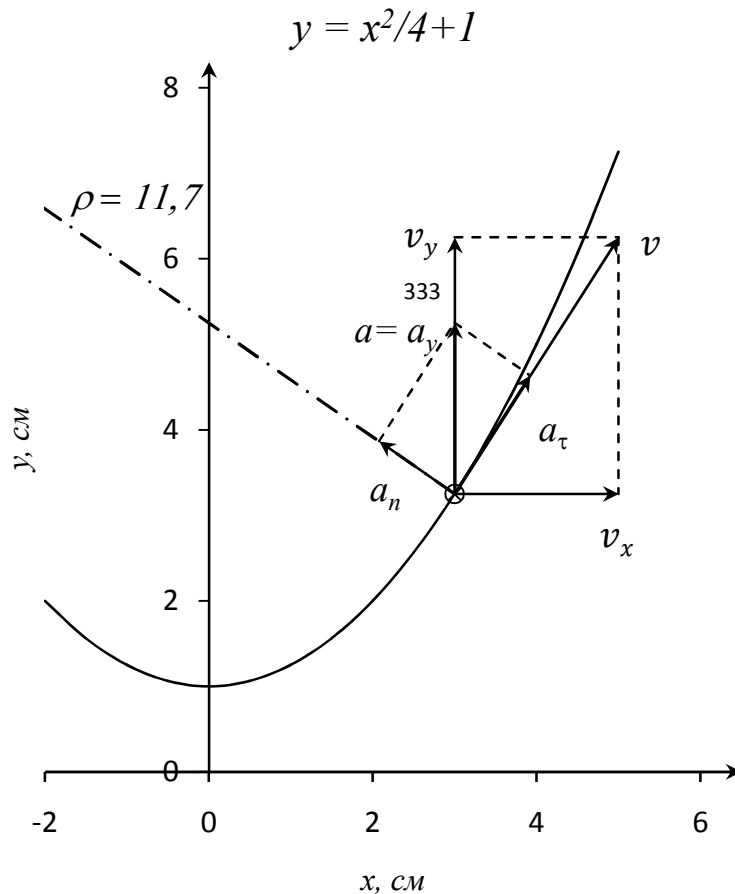
$$a_n = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{v};$$

$$a_n = \frac{2 \cdot 2 - 2t \cdot 0}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}; \quad a_n|_{t=1,5 \text{ с}} = \frac{2}{\sqrt{1+1,5^2}} \approx 1,11 \text{ см/с}^2.$$

Определим радиус кривизны траектории в момент времени:  $t = t_1 = 1,5 \text{ с}$ :

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(3,61)^2}{1,11} = \frac{13}{1,11} \approx 11,71 \text{ см}.$$

Чтобы показать радиус кривизны траектории в данной точке  $M$ , надо следовать правилу: радиус кривизны траектории в данной точке исходит из центра кривизны  $K$ , который находится на оси главной нормали  $n$ , то есть  $KM = \rho$ .



**Рис. 5**

Построение траектории точки, а также векторов скорости и ускорения точки показано в соответствующих масштабах на рис. 5. При этом вектор скорости должен быть направлен по касательной к траектории, а вектор ускорения необходимо построить двумя способами: по составляющим  $a_x = \ddot{x}$  и  $a_y = \ddot{y}$ , и по составляющим  $a_\tau$  и  $a_n$ .

Ответ: траектория – парабола:  $y = \frac{x^2}{4} + 1$  ( $x > 0, y > 0$ );  $v = 3,61$  см/с;  $a = 2$  см/с<sup>2</sup>;  $a_n = 1,11$  см/с<sup>2</sup>;  $a_\tau = 1,66$  см/с<sup>2</sup>;  $\rho = 11,71$  см.

### Задание К2

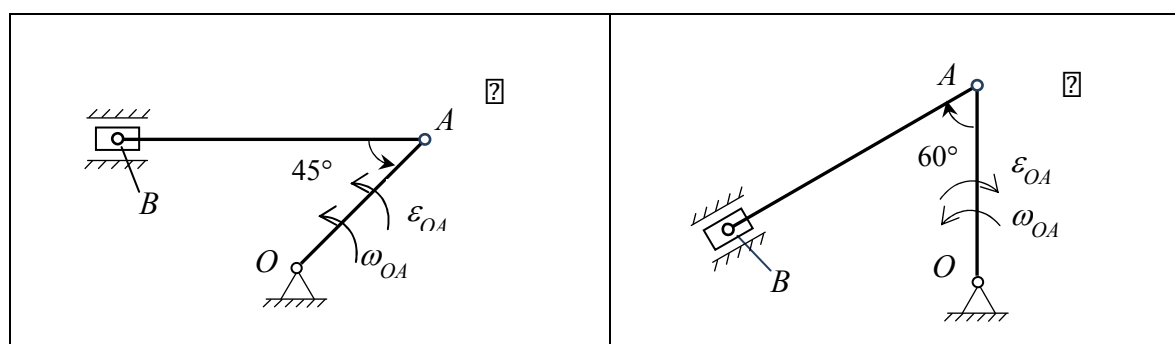
**Тема: Определение скорости и ускорения точки тела при плоскопараллельном движении.**

Для заданных положений кривошипно-ползунного механизма (схемы 0-5, рис.6), колеса (схемы 6-7, рис.6), механизма из стержня и связанных с ним ползунов (схемы 8-9, рис. 6) определить скорость и ускорение точки В, угловую скорость и ускорение звена АВ или колеса.

Для выполнения задания К2 необходимо по последней цифре шифра (ПЦЗК) выбрать схему из рис. 6, а по дню рождения (ДР) из таблицы 4 – данные о геометрических размерах и кинематических величинах.

Таблица4

ПЦЗК	Величина	ДР									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0-5	$OA$ , см	30	20	40	25	30	20	40	15	25	40
	$AB$ , см	75	55	70	35	45	50	60	40	30	55
	$\omega_{OA}$ , рад/с	1	2	0,5	4	1	3	8	5	2	3
	$\varepsilon_{OA}$ , рад/с <sup>2</sup>	2	0,5	1	2	0,5	5	3	2	1	2
6-7	$R$ , см	20	15	25	10	30	40	55	50	35	55
	$v_A$ , см/с	10	15	20	40	30	35	5	25	30	40
	$a_A$ , см/с <sup>2</sup>	20	5	10	25	45	10	20	10	20	15
8-9	$AB$ , см	25	20	30	45	10	40	50	45	55	30
	$v_A$ , см/с	40	15	5	20	35	40	10	30	35	45
	$a_A$ , см/с <sup>2</sup>	20	10	2	30	50	15	25	20	25	20



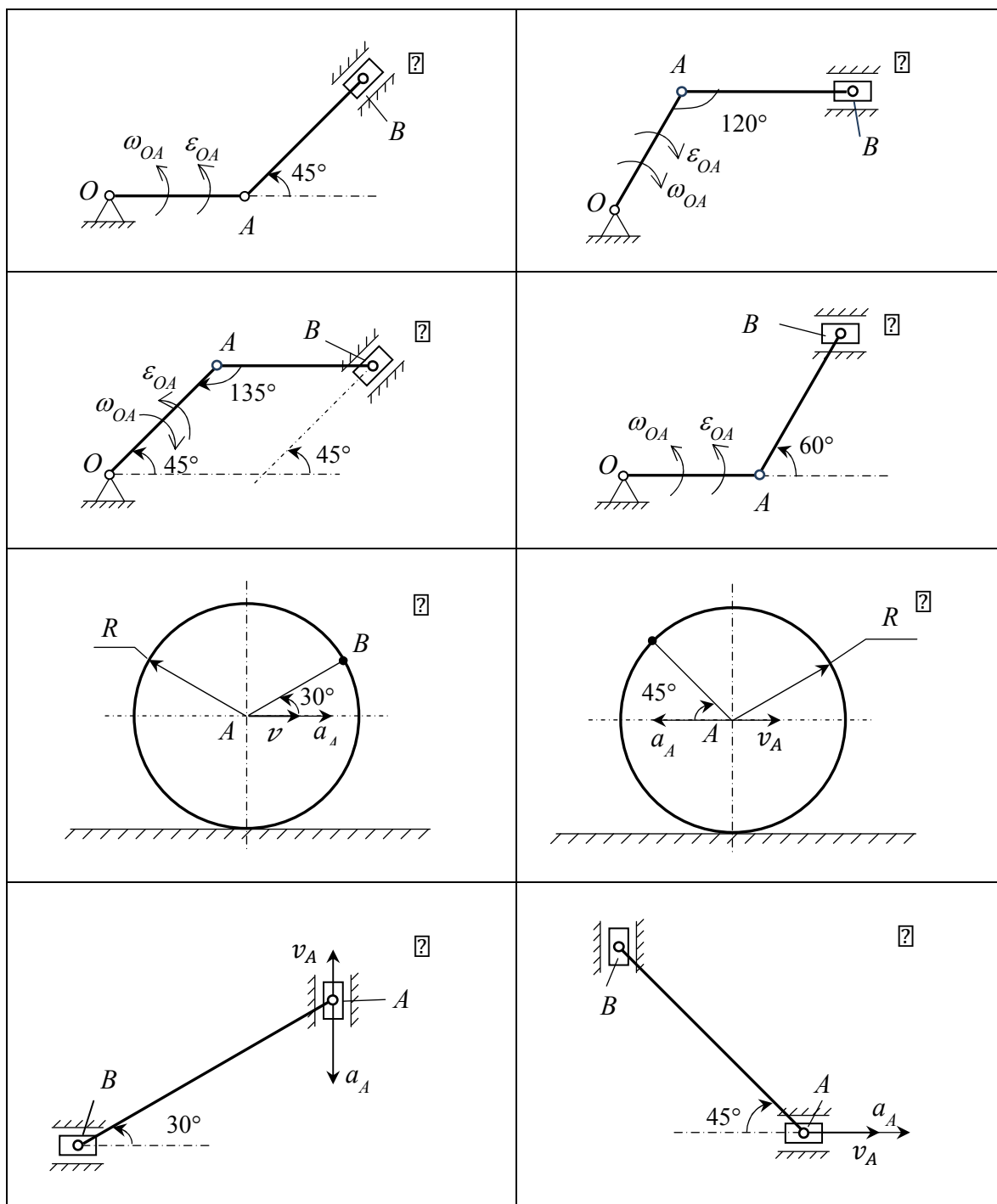


Рис. 6

## Пример решения задания К. 2

Схема кривошипно-ползунного механизма показана на рис.7.

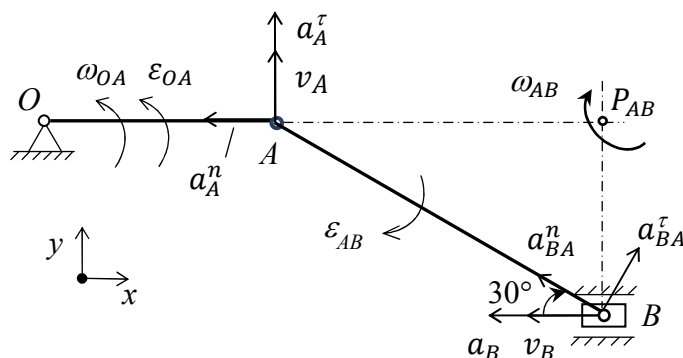


Рис. 7

Стержень  $OA$  – кривошип;  $AB$  – шатун; тело  $B$  – ползун.  $\omega_{OA}$  – угловая скорость кривошипа,  $\varepsilon_{OA}$  – угловое ускорение.

Дано:  $OA = 30$  см;  $AB = 50$  см;  $\omega_{OA} = 1$  рад/с;  $\varepsilon_{OA} = 2$  рад/с<sup>2</sup>.

Найти: скорость, ускорение ползуна  $B$  и угловое ускорение звена  $AB$ .

### Решение

В кривошипно-ползунном механизме шатун  $AB$  совершает плоскопараллельное движение. Скорость точки  $B$  будем определять, используя понятие мгновенного центра скоростей (точка  $P_{AB}$ ). Скорость точки  $A$

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1 \cdot 30 = 30 \text{ см/с.}$$

Вектор скорости точки  $A$  направлен перпендикулярно  $OA$  в сторону угловой скорости  $\omega_{OA}$ . Для определения положения мгновенного центра скоростей шатуна  $AB$  восстановим перпендикуляры к скоростям точек  $A$  и  $B$  шатуна  $AB$ . Точка их пересечения – мгновенный центр скоростей  $P_{AB}$  звена  $AB$  (рис.7).

$$v_A = \omega_{AB} \cdot AP_{AB}; v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB},$$

где  $\omega_{AB}$  угловая скорость звена  $AB$ .

$$AP_{AB} = AB \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 43,3 \text{ см;}$$

$$BP_{AB} = AB \cdot \sin 30^\circ = 50 \cdot 0,5 = 25 \text{ см;}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{30}{43,3} \approx 0,69 \text{ рад/с;}$$

$$v_B = 0,69 \cdot 25 = 17,3 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Для определения ускорения точки  $B$  составим векторную формулу для этого ускорения по теореме об ускорениях точек плоской фигуры, приняв точку  $A$  за полюс:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (1)$$

Вычислим ускорения:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1^2 \cdot 30 = 30 \text{ см/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 30 = 60 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0,69^2 \cdot 50 \approx 24,0 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

В формуле (1) неизвестно угловое ускорение  $\varepsilon_{AB}$  звена  $AB$ .

Все вектора, входящие в формулу (1), можно показать на схеме (рис.7), причём направления векторов  $\vec{a}_B$  и  $\vec{a}_{BA}^\tau$  выбираются произвольно. Выберем систему координат  $Oxy$ , совместив ось  $x$  с неизвестным ускорением  $\vec{a}_B$ . Проектируя уравнение (1) на ось  $x, y$ , получим

$$\text{пр. } X: -a_B = -a_A^n - a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ + a_{BA}^\tau \cdot \cos 60^\circ; \quad (2)$$

$$\text{пр. } Y: 0 = a_A^\tau + a_{BA}^n \cdot \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau \cdot \sin 60^\circ. \quad (3)$$

Из уравнения (3)

$$a_{BA}^\tau = \frac{-a_A^\tau - a_{BA}^n \cdot \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \approx \frac{-60 - 24,0 \cdot 0,5}{0,86} \approx -83,1 \text{ см/с}^2.$$

Знак минус обозначает, что вектор  $\vec{a}_{BA}^\tau$ , выбранный по направлению произвольно, фактически направлен в противоположную сторону и это определяет направление углового ускорения  $\varepsilon_{AB}$ .

Из уравнения (2):

$$a_B = a_A^n + a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ - a_{BA}^\tau \cdot \cos 60^\circ = 30 + 23,8 \cdot 0,87 + 82,6 \cdot 0,5 \approx 92,4 \text{ см/с}^2;$$

Угловое ускорение  $\varepsilon_{AB}$  звена  $AB$ :

$$\varepsilon_{AB} = \frac{|a_{BA}^\tau|}{AB} = \frac{92,4}{50} = 1,85 \text{ рад/с}^2.$$

$$\text{Ответ: } v_B = 17,3 \text{ см/с}; a_B = 92,4 \text{ см/с}^2; \varepsilon_{AB} = 1,85 \text{ рад/с}^2.$$

### Задание К3

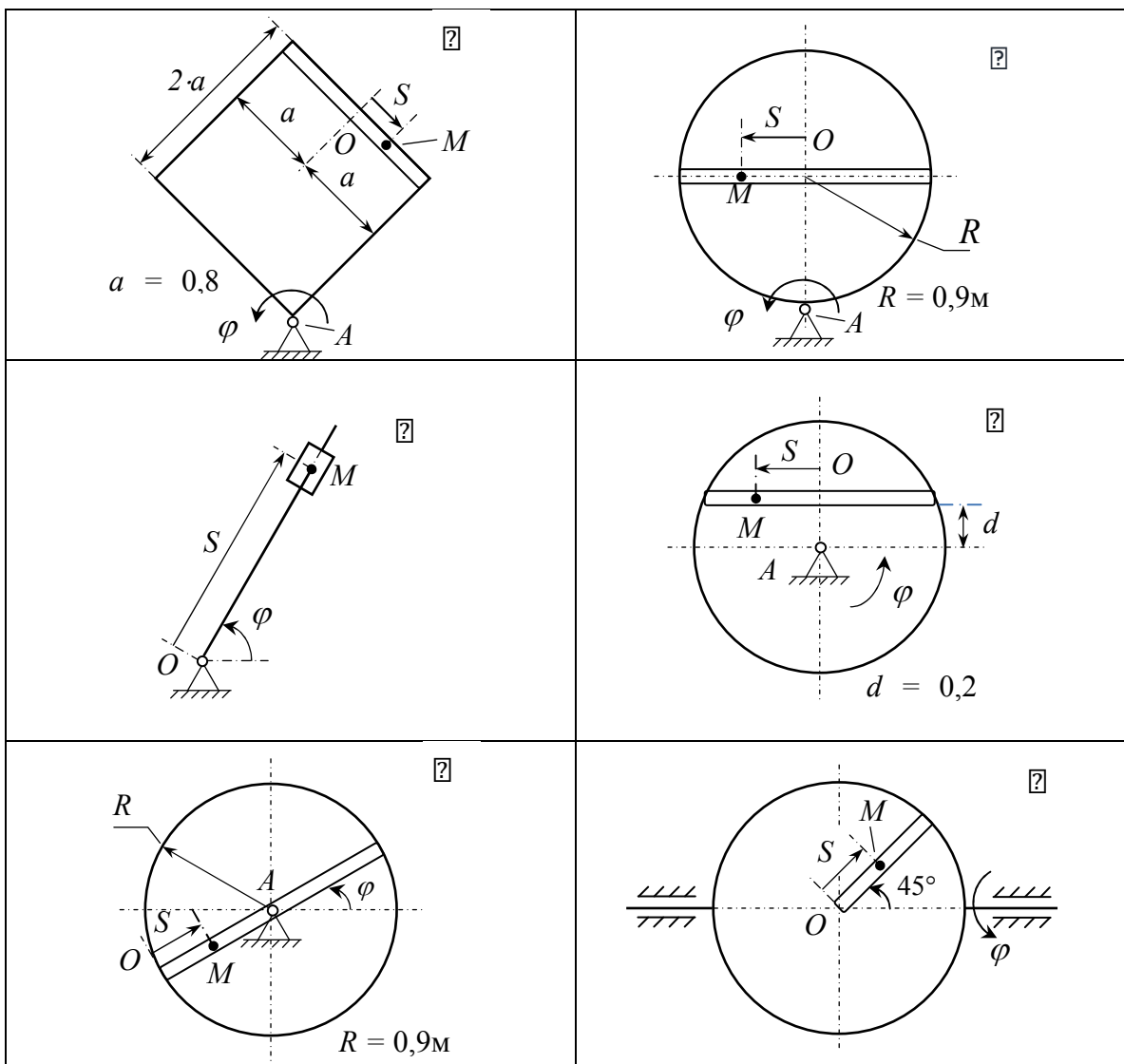
Тема: Определение абсолютных скорости и ускорения точки при сложном движении.

При заданном законе переносного вращательного движения  $\varphi = f_1(t)$  рад/с, и законе относительного прямолинейного движения точки  $S = f_2(t)$  при  $t = 1$  с, определить абсолютные скорость и ускорение точки при сложном движении (рис.8, табл.5).

Таблица 5

ПЦЗК	ДР	Величина	
		$\varphi$ , рад	$S$ , м

0	0	$3t + t^2$	$0,4t^2$
1	1	$3t^2$	$0,2t^3$
2	2	$6 + 2t^2$	$0,3t^2$
3	3	$4t^2$	$0,1t^2$
4	4	$8 + t^3$	$0,2 + 0,1t^2$
5	5	$4 + t^2$	$0,6t^2$
6	6	$t - t^2$	$0,5t^2$
7	7	$7t^2$	$0,4t + 0,2t^2$
8	8	$2t^2$	$0,6t + 0,15t^2$
9	9	$5t^2$	$0,1t + 0,6t^2$





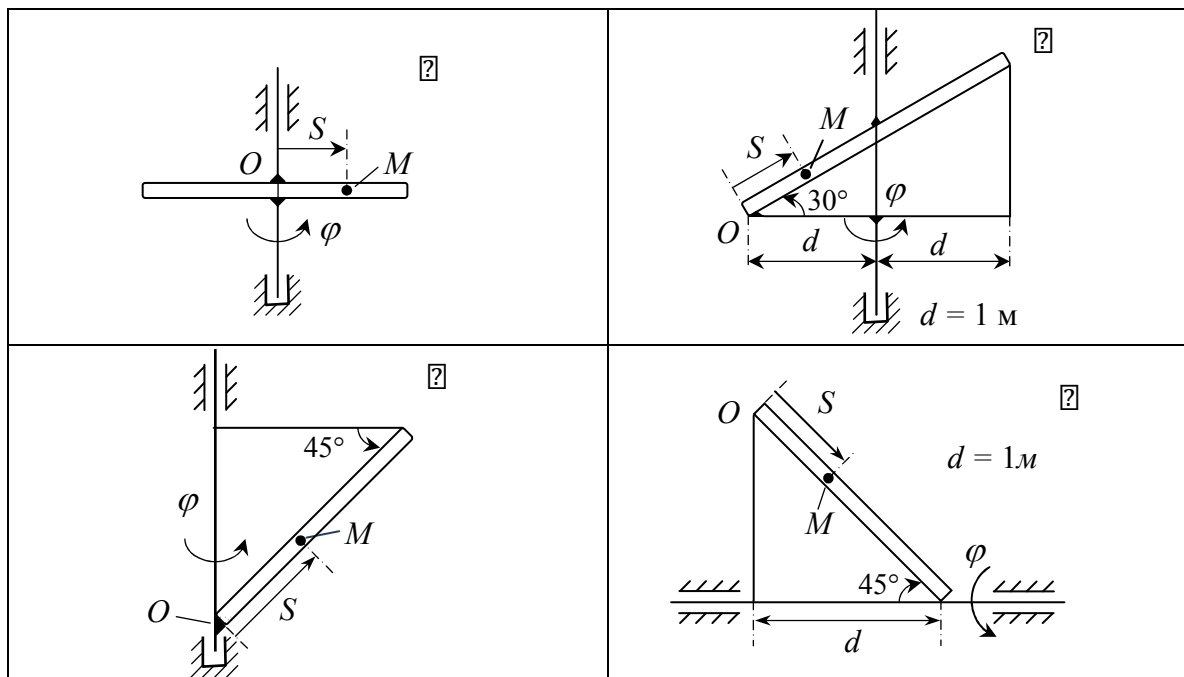


Рис. 8

### Пример решения задания КЗ

Пластина с трубкой (рис.9) совершает переносное вращательное движение вокруг вертикальной оси по закону  $\varphi = 2t^2$  рад, а в трубке точка совершает относительное прямолинейное движение по закону  $S = 0,1t^3$  м ( $t$  в секундах). Для момента времени  $t = 1$  с определить абсолютные скорость и ускорение точки  $M$ .

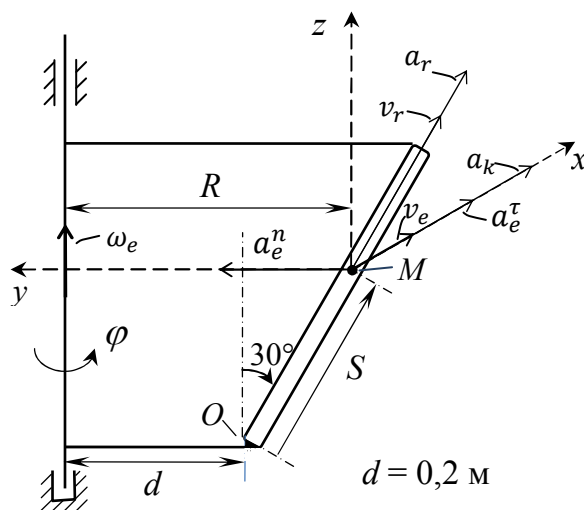


Рис. 9

### Решение

Определим положение точки  $M$  в момент  $t = 1$  с.

$$S = 0,1 \text{ м.}$$

По теореме сложения скоростей абсолютная скорость  $\vec{v}_a$  определяется по формуле

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

где  $\vec{v}_e$  – переносная скорость;  $\vec{v}_r$  – относительная скорость.

$$\text{Тогда } v_e = \omega_e \cdot R,$$

где  $\omega_e$  – угловая скорость переносного движения;

$R$  – радиус окружности, которую описывает точка в момент  $t = 1$  с.

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(2t^2)}{dt} = 4t \text{ рад/с.}$$

$$\text{При } t = 1 \text{ с} \Rightarrow \omega_e = 4 \text{ рад/с.}$$

$$R = d + S \cdot \sin 30^\circ = 0,2 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ м;}$$

$$v_e = 4 \cdot 0,25 = 1,0 \text{ м/с.}$$

Вектор  $\vec{v}_e$  направлен перпендикулярно плоскости пластины в сторону вращения (рис.9).

$$v_r = \frac{dS}{dt} = \frac{d(0,1t^3)}{dt} = 0,3t^2 \text{ м/с.}$$

$$\text{При } t = 1 \text{ с} \Rightarrow v_r = 0,3 \text{ м/с.}$$

Направлен вектор  $\vec{v}_r$  по направлению трубки от точки  $O$ .

Так как  $\vec{v}_e \perp \vec{v}_r$ , то абсолютную скорость можно определить, используя теорему Пифагора.

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{1^2 + 0,3^2} \approx 1,04 \text{ м/с.}$$

Вектор абсолютной скорости  $\vec{v}_a$  на рис.9,  $a$  не показан.

По теореме сложения ускорений определим абсолютное ускорение

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k,$$

где  $\vec{a}_e$  – переносное ускорение;

$\vec{a}_r$  – относительное ускорение;

$\vec{a}_k$  – кориолисово ускорение.

Так как переносное движение вращательное, то

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau.$$

Следовательно,

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_k. \quad (*)$$

Определим величины ускорений, входящих в правую часть последней формулы:

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot R = 4^2 \cdot 0,25 = 4 \text{ М/с}^2;$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot R = 4 \cdot 0,25 = 1 \text{ М/с}^2;$$

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega_e}{dt} = \frac{d(4t)}{dt} = 4 \text{ рад/с}^2;$$

$$a_r = \frac{d^2 S}{dt^2} = 0,6 \cdot t \text{ М/с}^2;$$

$$\text{При } t = 1 \text{ с} \Rightarrow a_r = 0,6 \text{ М/с}^2;$$

$$a_k = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin(\hat{\vec{\omega}_e \vec{v}_r}).$$

Направление вектора  $\vec{\omega}_e$ , показано на рис.9. Тогда угол  $(\hat{\vec{\omega}_e \vec{v}_r}) = 30^\circ$ ;

$$a_k = 2 \cdot 4 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 1,2 \text{ М/с}^2.$$

Направления векторов  $\vec{a}_e^n$ ,  $\vec{a}_e^\tau$ ,  $\vec{a}_r$ ,  $\vec{a}_k$  покажем на рис.9. На этом рисунке показана также система прямоугольных координат  $Mxyz$ . Уравнение (\*) спроектируем на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\text{пр. } X: \quad a_{ax} = a_e^\tau + a_k = 1 + 1,2 = 2,2 \text{ М/с}^2;$$

$$\text{пр. } Y: \quad a_{ay} = a_e^n - a_r \cdot \sin 30^\circ = 4 - 0,6 \cdot 0,5 = 3,7 \text{ М/с}^2;$$

$$\text{пр. } Z: \quad a_{az} = a_r \cdot \cos 30^\circ = 0,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,6 \cdot 0,87 = 0,52 \text{ М/с}^2.$$

Тогда

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{2,2^2 + 3,7^2 + 0,52^2} \approx 4,3 \text{ М/с}^2.$$

На рис. 9б показан вектор абсолютного ускорения точки  $M$ , построенный по проекциям на оси координат:

**Рис 9б**

$$\text{Ответ: } v_a = 1,04 \text{ М/с}; \quad a_a = 4,3 \text{ М/с}^2.$$

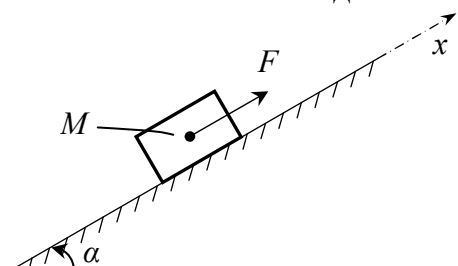
#### 4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

## Задание Д1

**Тема: Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки (вторая задача динамики материальной точки).**

Найти: уравнение прямолинейного движения тела  $M$  массой  $m$  принимаемого за материальную точку и находящегося под действием переменной силы  $\vec{F} = X\vec{i}$ , где  $X$  – проекция силы на ось  $X$ , при заданных начальных условиях:  $t = 0, x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$ . Тело движется по шероховатой поверхности, которая наклонена к горизонту под углом  $\alpha$ , коэффициент трения скольжения  $f$ .

Схема показана на рис.10 и является одинаковой для всех вариантов шифра. Из табл. 6 по первой цифре шифра (ДР) определяется угол  $\alpha$ , а по второй цифре шифра (МР) выбираются остальные исходные величины для задачи.



**Рис. 10**

Таблица 6

ДР	$\alpha$ , град	МР	Величина				
			$m$ , кг	$\vec{F}$ , Н	$f$	$x_{0, \text{м}}$	$\dot{x}_0, \frac{\text{м}}{\text{с}}$
0	30	0	2	$5 \cdot \sin((\pi/3)t) \cdot \vec{i}$	0,10	0	1
1	5	1	4	$(2t^2 + 5) \cdot \vec{i}$	0,15	1	2
2	20	2	6	$e^{2t} \cdot \vec{i}$	0,20	2	3
3	60	3	8	$4 \cdot \cos((\pi/6)t) \cdot \vec{i}$	0,18	3	4
4	0	4	10	$(7t^2 + 3) \cdot \vec{i}$	0,22	4	1
5	35	5	12	$-3 \cdot \sin((\pi/2)t) \cdot \vec{i}$	0,24	5	2
6	50	6	14	$-e^{4t} \cdot \vec{i}$	0,26	1	3
7	75	7	16	$(1 - e^{-3t}) \cdot \vec{i}$	0,12	2	4
8	25	8	18	$(4t + 1) \cdot \vec{i}$	0,28	3	1

9	10	9	20	$(1 - t^2) \cdot \vec{i}$	0,30	4	2
---	----	---	----	---------------------------	------	---	---

### Пример решения задания Д1

Схема тела, расположенного на наклонной плоскости, показана на рис.11.

Дано:  $m = 4$  кг;  $\vec{F} = 3t^2 \cdot \vec{i}$  Н;  $f = 0,25$ ;  $\alpha = 30^\circ$ . При  $t = 0 \Rightarrow x_0 = 1$  м;  $\dot{x}_0 = 3$  м/с.

Найти: уравнение прямолинейного движения тела *положительно* на *направлении* *оси*  $x$  ( $\dot{x} > 0$ ).

### Решение

Кроме силы  $\vec{F}$  приложим к телу силу веса  $m\vec{g}$ , нормальную реакцию  $N$  и силу трения скольжения  $\vec{F}_{mp}$  (рис.11). Составим дифференциальное уравнение движения тела.

$$m\ddot{x} = \sum_{j=1}^n F_{jx} = \sum_{j=1}^3 F_{jx};$$

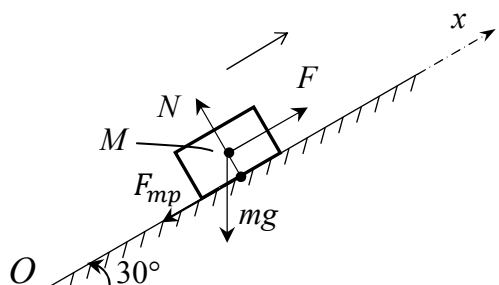


Рис. 11

$$m\ddot{x} = F - m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_{mp}. \quad (1)$$

Найдем силу трения  $F_{mp}$ :

$$F_{mp} = fN = f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Преобразуем (1) к виду:

$$m\ddot{x} = 3t^2 - mg \cdot \sin \alpha - fmg \cdot \cos \alpha. \quad (2)$$

Представим (2) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{3t^2}{m} - g \cdot \sin \alpha - f \cdot g \cdot \cos \alpha, \text{ или} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{3}{m} \cdot t^2 - g \cdot \sin \alpha - f \cdot g \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\int d\dot{x} = \frac{3}{m} \int t^2 dt - g \cdot \sin \alpha \int dt - f g \cdot \cos \alpha \int dt;$$

$$\dot{x} = \frac{3}{m} \cdot \frac{t^3}{3} - g \cdot \sin \alpha \cdot t - fg \cdot \cos \alpha \cdot t + C_1. \quad (4)$$

Произвольную постоянную интегрирования  $C_1$  определим, подставляя в первый интеграл (4) исходного дифференциального уравнения (3) начальные условия: при  $t = 0 \Rightarrow \dot{x}_0 = 3$  м/с:

$$C_1 = 3 \text{ м/с.}$$

Тогда (4) примет вид

$$\dot{x} = \frac{t^3}{m} - g \cdot \sin \alpha \cdot t - fg \cdot \cos \alpha \cdot t + 3. \quad (5)$$

Представим (5) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{m} - g \cdot \sin \alpha \cdot t - fg \cdot \cos \alpha \cdot t + 3.$$

Разделим переменные и проинтегрируем второй раз

$$\int dx = \frac{1}{m} \int t^3 dt - g \cdot \sin \alpha \int t \cdot dt - fg \cdot \cos \alpha \int t \cdot dt + 3 \int dt;$$

$$x = \frac{t^4}{4m} - g \cdot \sin \alpha \cdot \frac{t^2}{2} - fg \cdot \cos \alpha \cdot \frac{t^2}{2} + 3t + C_2. \quad (6)$$

$C_2$  определим, подставляя во второй интеграл (6) исходного дифференциального уравнения (3) начальные условия: при  $t = 0 \Rightarrow x_0 = 1$  м:

$$1 = \frac{0^4}{4m} - g \cdot \sin \alpha \cdot \frac{0^2}{2} - fg \cdot \cos \alpha \cdot \frac{0^2}{2} + 3 \cdot 0 + C_2.$$

$$C_2 = 1 \text{ м.}$$

Тогда

$$x = \frac{t^4}{4m} - g \cdot \sin \alpha \cdot \frac{t^2}{2} - fg \cdot \cos \alpha \cdot \frac{t^2}{2} + 3t + 1. \quad (7)$$

С учетом исходных данных представим (7) в виде

$$x = \frac{t^4}{16} - 9,8 \cdot 0,5 \cdot \frac{t^2}{2} - 0,25 \cdot 9,8 \cdot 0,87 \cdot \frac{t^2}{2} + 3 \cdot t + 1;$$

$$x(t) = 0,062 \cdot t^4 - 3,51 \cdot t^2 + 3 \cdot t + 1, \text{ м.}$$

Ответ:  $x(t) = 0,062 \cdot t^4 - 3,51 \cdot t^2 + 3 \cdot t + 1, \text{ м.}$

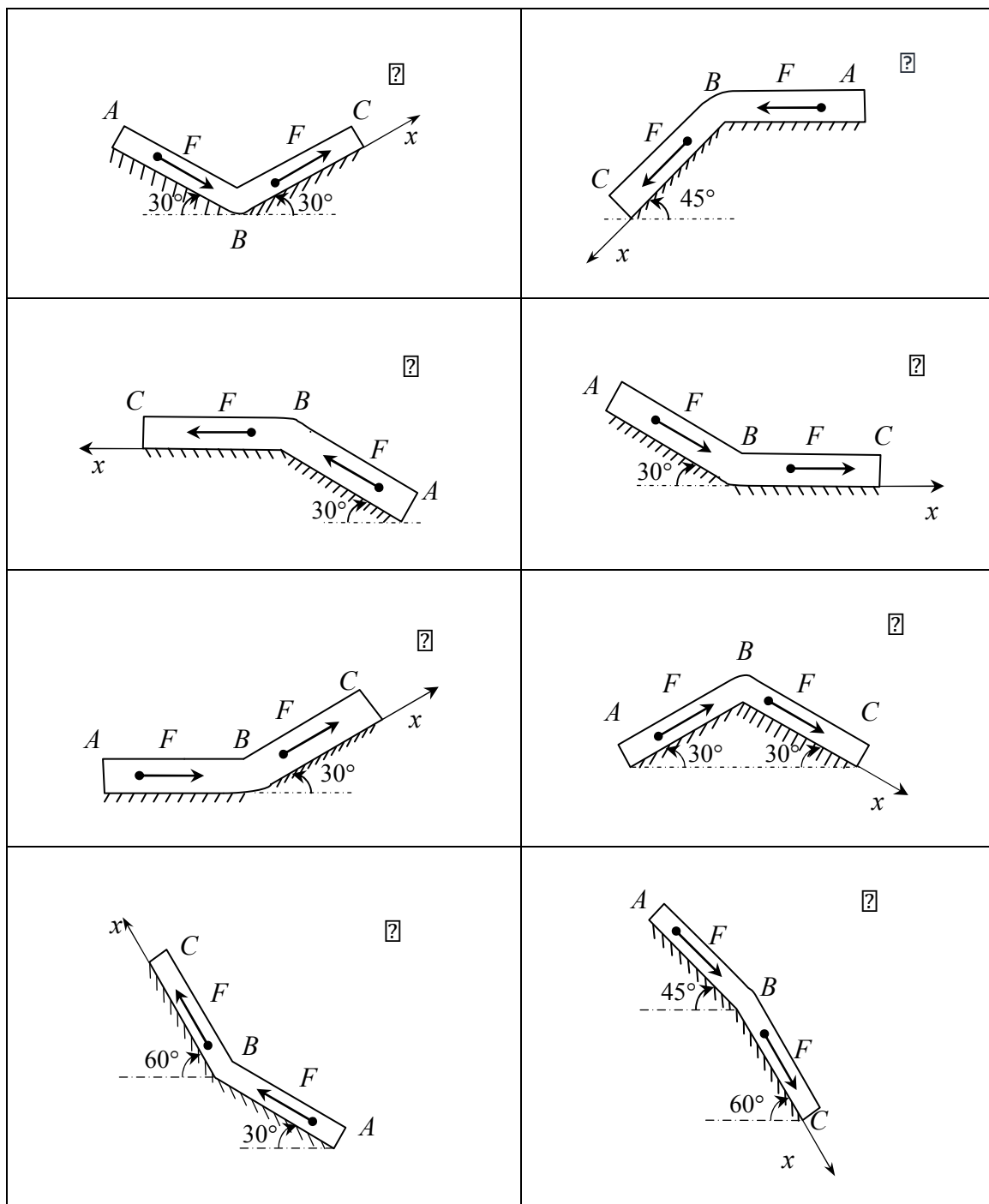
## Задание Д2

**Тема:** Теорема об изменении кинетической энергии точки и теорема об изменении количества движения точки.

Тело массой  $m$ , которое можно принять за материальную точку, получив начальную скорость  $v_A$ , движется в изогнутой трубе  $ABC$ . Труба расположена в вертикальной

плоскости и имеет два прямых участка  $AB$  и  $BC$ . На тело действует кроме силы тяжести постоянная сила  $F$  (направление ее показано на рис.12), а также сила трения скольжения с коэффициентом  $f$ . В точке  $B$  тело, не изменяя своей скорости, переходит на участок  $BC$ . Расстояние  $AB = l$ , время движения на участке  $BC$  равно  $\tau$ . Определить скорости тела в точке  $B$  и в точке  $C$  (рис. 12, табл. 7).

Схема выбирается по ПЦЗК из рис.12. Из табл.7 по первой цифре шифра (ДР) определяются исходные данные.



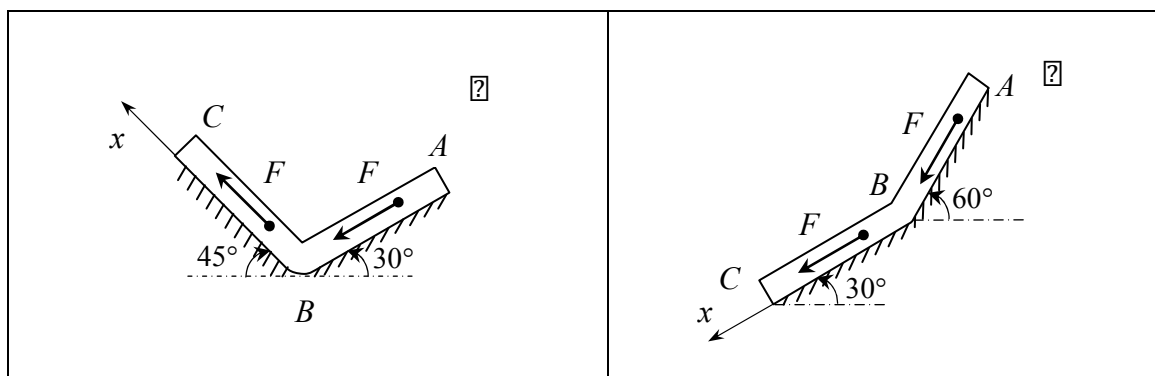


Рис. 12

Таблица 7

ПЦЗК	ДР	Величина					
		$m, \text{ кг}$	$v_A, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$F, \text{ Н}$	$AB = l, \text{ м}$	$f$	$\tau, \text{ с}$
0	0	0,1	0,5	6	0,4	0,2	2
1	1	0,3	0,6	8	0,2	0,1	3
2	2	0,4	0,8	9	0,3	0,15	4
3	3	0,6	0,7	10	0,5	0,2	1
4	4	0,2	0,5	7	0,4	0,3	2
5	5	0,4	0,6	8	0,5	0,1	4
6	6	0,5	0,7	10	0,2	0,15	2
7	7	0,3	0,5	12	0,4	0,25	5
8	8	0,5	0,6	9	0,3	0,1	3
9	9	0,4	0,8	7	0,5	0,3	4

### Пример решения задания Д2

Схема трубы  $ABC$  показана на рис. 13.



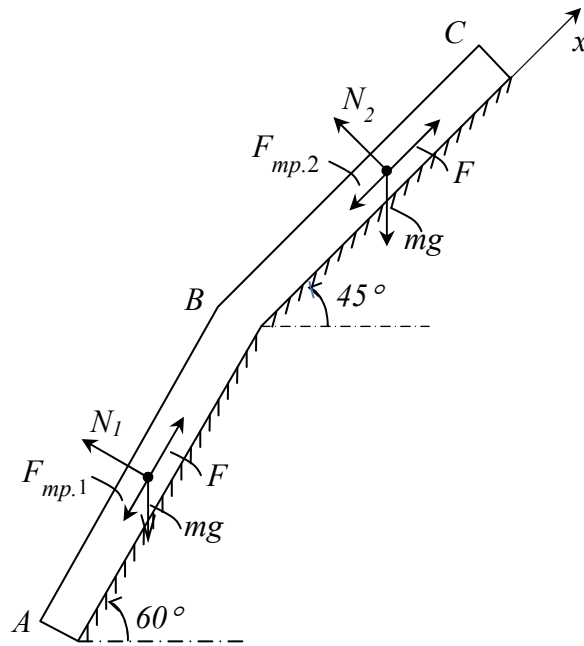


Рис. 13

Дано:  $m = 0,5$  кг;  $v_A = 0,6$  м/с;  $AB = l = 0,3$  м;  $F = 8$  Н;  $f = 0,1$ ;  $\tau = 3$  с.

Найти: скорость тела в точках В и С. Для определения скорости  $v_B$  воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки, для определения скорости  $v_C$  применить теорему об изменении количества движения материальной точки.

### Решение

Покажем на рис.13 промежуточные положения тела на участке  $AB$  и приложим к нему силу  $\vec{F}$ , силу веса  $m\vec{g}$ , нормальную реакцию  $\vec{N}_1$  и силу трения  $\vec{F}_{mp.1}$ .

$$F_{mp.1} = f \cdot N_1 = f \cdot m \cdot g \cdot \cos 60^\circ = 0,1 \cdot 0,5 \cdot 9,8 \cdot 0,5 = 0,245 \text{ Н.}$$

По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки имеем

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \sum_{j=1}^n A(\vec{F}_j); \quad (1)$$

Сумма работ сил, приложенных к телу на участке  $AB$ , равна:

$$\sum_{j=1}^n A(\vec{F}_j) = A(\vec{F}) + A(m\vec{g}) + A(\vec{N}_1) + A(\vec{F}_{mp.1});$$

$$A(\vec{F}) = F \cdot l \cdot \cos 0^\circ = 8 \cdot 0,3 \cdot 1 = 2,4 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$A(m\vec{g}) = m \cdot g \cdot \sin 60^\circ \cdot l \cdot \cos 180^\circ = -0,5 \cdot 9,8 \cdot 0,866 \cdot 0,3 \approx -1,27 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$A(\vec{N}_1) = N_1 \cdot l \cdot \cos 90^\circ = N_1 \cdot 0,3 \cdot 0 = 0 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

Сила перпендикулярная перемещению не производит работы.

$$A(\vec{F}_{mp.1}) = F_{mp.1} \cdot l \cdot \cos 180^\circ = -0,245 \cdot 0,3 \approx -0,074 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\sum_{j=1}^n A(\vec{F}_j) = 2,4 - 1,27 + 0 - 0,074 = 1,05 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Из формулы (1) имеем

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \sum_{j=1}^n A(\vec{F}_j)}{m}} + v_A^2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,03}{0,5}} + 0,6^2 = 2,14 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Покажем на рис.13 промежуточное положение теланаучастке  $BC$  и приложим к нему силы  $\vec{F}$ ,  $m\vec{g}$ ,  $\vec{N}_2$ ,  $\vec{F}_{mp.2}$ .

$$F_{mp.2} = f \cdot N_2 = f \cdot m \cdot g \cdot \cos 45^\circ = 0,1 \cdot 0,5 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,35 \text{ Н}.$$

По теореме об изменении количества движения материальной точки на участке  $BC$  имеем

$$mv_{Cx} - mv_{Bx} = \sum_{j=1}^n S_{jx}. \quad (2)$$

Сумма проекций на ось  $x$  импульсов всех сил, приложенных к телу на участке  $BC$ , равна:

$$\sum_{j=1}^n S_{jx} = (-m \cdot g \cdot \sin 45^\circ + F - F_{mp.2}) \cdot \tau = \left( -0,5 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 8 - 0,35 \right) \cdot 3$$

$$\approx 12,7 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Из формулы (2) имеем

$$v_{Cx} = \frac{\sum_{j=1}^n S_{jx}}{m} + v_B = \frac{12,7}{0,5} + 2,14 \approx 27,3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Ответ:  $v_B = 2,14 \text{ м/с}$ ;  $v_C = 27,3 \text{ м/с}$ .

### Задание Д3

**Тема: Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.**

Однородный каток  $D$  массой  $m_D$  и радиусом  $R_D$  соединен гибкой нерастяжимой нитью с телом  $A$  массой  $m_A$ . Нить переброшена через блок  $B$  массой  $m_B$  (блок  $B$  считать однородным круглым диском). К оси катка  $C$  (рис. 14, схемы 2; 6-7; 9), или к телу  $A$  (рис. 14, схемы 0; 3-5; 8), или к свободному концу нити (рис. 14, схема 1) приложена постоянная сила  $F$ . Каток катится без скольжения, коэффициент трения скольжения тела о плоскость  $f$ , угол наклона плоскости  $\alpha$ . К катку приложен тормозящий момент  $M_{\text{торм}}$  (рис. 14 схемы 0-1; 3-5; 8) или вращающий момент  $M_{\text{вр}}$  (рис. 14, схемы 2; 6-7; 9). Трением в подшипнике блока  $B$  и трением качения при движении катка  $D$  пренебречь. Нить параллельна плоскости. Определить скорость тела  $A$ , когда оно пройдет путь  $S$ , а также ускорение тела  $A$ . В начальный момент система находилась в покое (рис. 14, табл. 8).

Таблица 8

ПЦЗК	ДР	Величина					МР	Величина		
		$m_A$ , кг	$m_B$ , кг	$m_D$ , кг	$F$ , Н	$f$		$\alpha$ , град.	$R_D$ , м	$S$ , м
0	0	1	3	4	30	0,10	0	20	0,3	2
1	1	2	4	1	40	0,12	1	30	0,1	3
2	2	3	5	2	50	0,14	2	40	0,6	4
3	3	5	3	1	60	0,16	3	50	0,4	5
4	4	2	4	5	70	0,18	4	60	0,3	6
5	5	3	5	4	40	0,20	5	20	0,5	2
6	6	4	2	3	50	0,22	6	30	0,7	3
7	7	5	3	1	60	0,24	7	40	0,4	4
8	8	2	4	5	70	0,26	8	50	0,6	5
9	9	3	5	2	90	0,28	9	60	0,25	6

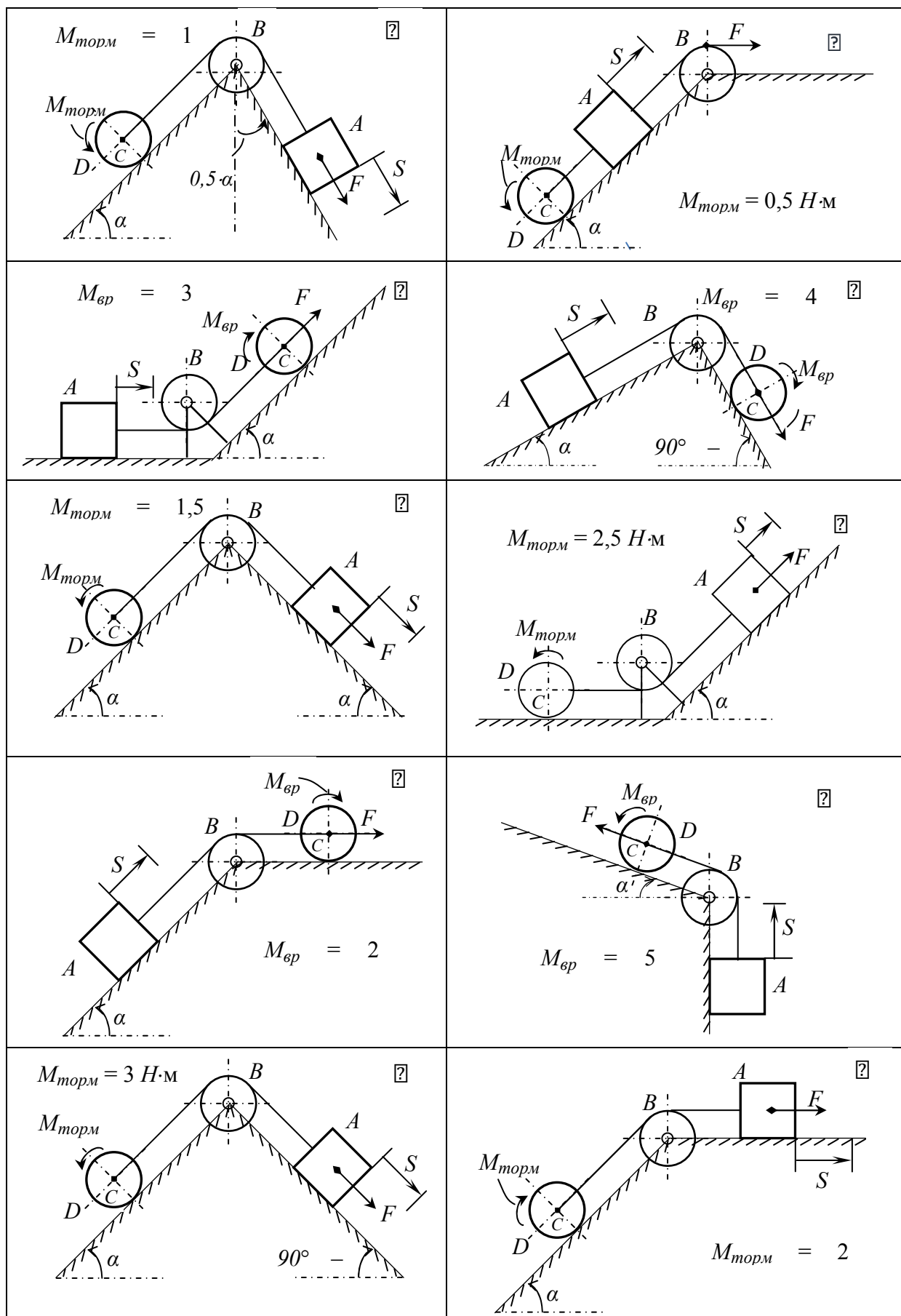


Рис. 14

### Пример решения задания Д. 3

Механическая система показана на рис. 15.

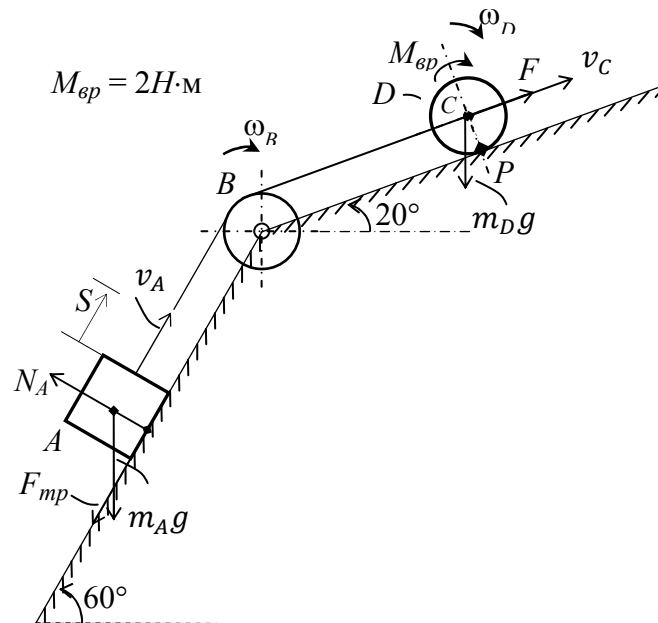


Рис. 15

Дано:  $m_A = 4 \text{ кг}$ ;  $m_B = 3 \text{ кг}$ ;  $m_D = 5 \text{ кг}$ ;  $F = 50 \text{ Н}$ ;  $f = 0,2$ ;  $S = 4 \text{ м}$ ;  $R_D = 0,2 \text{ м}$ ;  $v_0 = 0$ .

Найти: скорость и ускорение тела  $A$ , когда оно в составе механической системы из состояния покоя пройдёт путь  $S$ .

#### Решение

По теореме об изменении кинетической энергии механической системы для неизменяемой механической системы имеем

$$T_1 - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i^e; T_0 = 0;$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^n A_i^e; T_1 = T_A + T_B + T_D.$$

Вычислим кинетическую энергию системы:

Кинетическая энергия тела  $A$ , совершающего поступательное движение:

$$T_A = \frac{m_A \cdot v_A^2}{2} = \frac{4 \cdot v_A^2}{2} = 2v_A^2.$$

Кинетическая энергия блока  $B$ , совершающего вращательное движение:

$$T_B = \frac{J_B \omega_B^2}{2} = \frac{1,5 \cdot R_B^2 \cdot v_A^2}{2 R_B^2} = 0,75 \cdot v_A^2,$$

где момент инерции блока  $J_B$  и круговая частота его вращения  $\omega_B$ :

$$J_B = \frac{1}{2} m_B \cdot R_B^2 = 1,5 \cdot R_B^2; \quad \omega_B = \frac{v_A}{R_B}.$$

Каток  $D$  совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическая энергия:

$$T_D = \frac{m_D \cdot v_C^2}{2} + \frac{J_D \omega_D^2}{2}.$$

Так как нить, связывающая тело  $A$  и каток  $D$  нерастяжимая, то скорости тела  $A$  и центра  $C$  катка  $D$  одинаковы  $v_C = v_A$ , а поскольку качение тела  $D$  происходит без скольжения (по условию задачи), то в точке контакта катка  $D$  с поверхностью пути находится мгновенный центр скоростей, точка  $P$  и плоскопараллельное движение катка можно представить как мгновенное вращательное движение вокруг точки  $P$  и записать выражение  $v_C = \omega_D \cdot R_D$ , из которого определяется угловая скорость  $\omega_D$ :  $\omega_D = \frac{v_A}{R_D}$ .

$$J_D = \frac{1}{2} m_D \cdot R_D^2 = 2,5 \cdot R_D^2;$$

$$T_D = \frac{5 \cdot v_A^2}{2} + \frac{2,5 \cdot R_D^2 \cdot v_A^2}{2 \cdot R_D^2} = 3,75 \cdot v_A^2;$$

$$T_1 = 2 \cdot v_A^2 + 0,75 \cdot v_A^2 + 3,75 \cdot v_A^2 = 6,5 \cdot v_A^2.$$

Приложим к телам  $A$ ,  $B$ ,  $D$  внешние силы, действующие на эти тела:  $m_A \vec{g}$ ,  $\vec{N}_A$ ,  $\vec{F}_{mp}$ ,  $m_D \vec{g}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{M}_{вр}$ . Здесь следует отметить, что на рис. 15 не представлены внешние силы  $m_B \vec{g}$ , реакции в подшипнике  $B \vec{X}_B$  и  $\vec{Y}_B$ , нормальная реакция  $\vec{N}_D$ , сила трения скольжения  $\vec{F}_{mp}^D$ , так как они не совершают работы на заданном перемещении:  $m_B \vec{g}$ ,  $\vec{X}_B$  и  $\vec{Y}_B$  приложены в неподвижной точке, а  $\vec{N}_D$  и  $\vec{F}_{mp}^D$  приложены в мгновенном центре скоростей, то есть у них нет перемещения.

Вычислим сумму работ внешних сил, приложенных к системе

$$\sum_{i=1}^n A_i^e = A(m_A g) + A(F_{mp}) + A(F) + A(m_D g) + A(M_{вр}).$$

Работа силы тяжести тела  $A$ :

$$A(m_A \vec{g}) = m_A \cdot g \cdot \sin 60^\circ \cdot S \cdot \cos 180^\circ = -4 \cdot 9,8 \cdot 0,87 \cdot S \approx -34 \cdot S \text{ Н} \cdot \text{м};$$

Сила трения и её работа:

$$F_{mp} = f \cdot N_A = f \cdot m_A \cdot g \cdot \cos 60^\circ = 0,2 \cdot 4 \cdot 9,8 \cdot 0,5 \approx 3,9 \text{ Н};$$

$$A(\vec{F}_{mp}) = F_{mp} \cdot S \cdot \cos 180^\circ = -3,9 \cdot S \text{ Н} \cdot \text{м};$$

Работа постоянной внешней силы  $\vec{F}$ :

$$A(\vec{F}) = F \cdot S \cdot \cos 0^\circ = 50 \cdot S \text{ Н} \cdot \text{м};$$

Работа силы тяжести тела  $D$ :

$$A(m_D \vec{g}) = m_D \cdot g \cdot \sin 20^\circ \cdot S \cdot \cos 180^\circ = -5 \cdot 9,8 \cdot 0,34 \cdot S = -16,7 \cdot S \text{ Н} \cdot \text{м};$$

Работа вращающего момента  $M_{вр}$ :

$$A(\vec{M}_{вр}) = M_{вр} \cdot \varphi_D = M_{вр} \cdot \frac{S}{R_D} = 2 \cdot \frac{S}{0,2} = 10 \cdot S \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\sum_{i=1}^n A_i^e = -34,1 \cdot S - 3,9 \cdot S + 50 \cdot S - 16,7 \cdot S + 10 \cdot S =$$

$$= 5,3 \cdot S \text{ Н} \cdot \text{м}, \text{ или } 5,3 \cdot S \text{ Дж.}$$

$$6,5 \cdot v_A^2 = 5,3 \cdot S.$$

(1)

$$v_A = \sqrt{\frac{5,3 \cdot S}{6,5}} = \sqrt{\frac{5,3 \cdot 4}{6,5}} \approx 1,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Продифференцируем (1) по времени:

$$6,5 \cdot 2v_A \frac{dv_A}{dt} = 5,3 \cdot \frac{dS}{dt}; \quad \frac{dv_A}{dt} = a_A; \quad \frac{dS}{dt} = v_A;$$

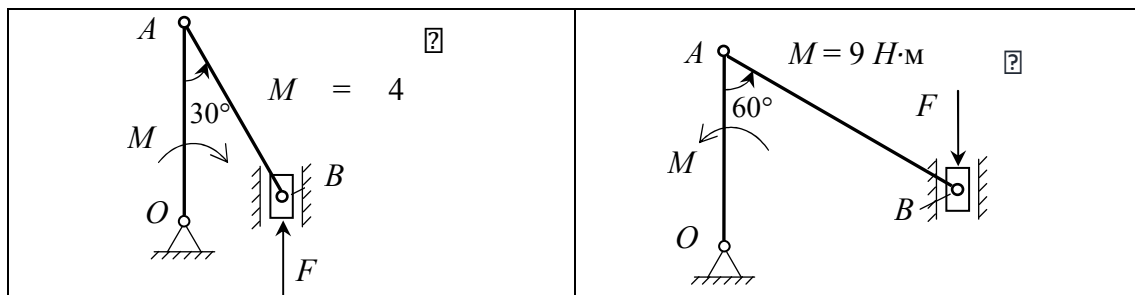
$$13a_A = 5,3; \quad a_A = \frac{5,3}{13} \approx 0,41 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

Ответ:  $v_A = 1,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad a_A = 0,41 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$

#### Задание Д4

**Тема: Принцип возможных перемещений.**

В кривошипно-ползунном механизме (рис. 16) к кривошипу  $OA$  приложен момент  $M$ , а к ползуну  $B$  сила  $F$ . Заданы длины кривошипа  $OA$  и шатуна  $AB$ . Для заданного положения механизма определить  $F$  (схемы 0-4) при заданном  $M$  и определить  $M$  (схемы 5-9) при заданной силе  $F$  в положении равновесия (рис. 16, табл. 9).



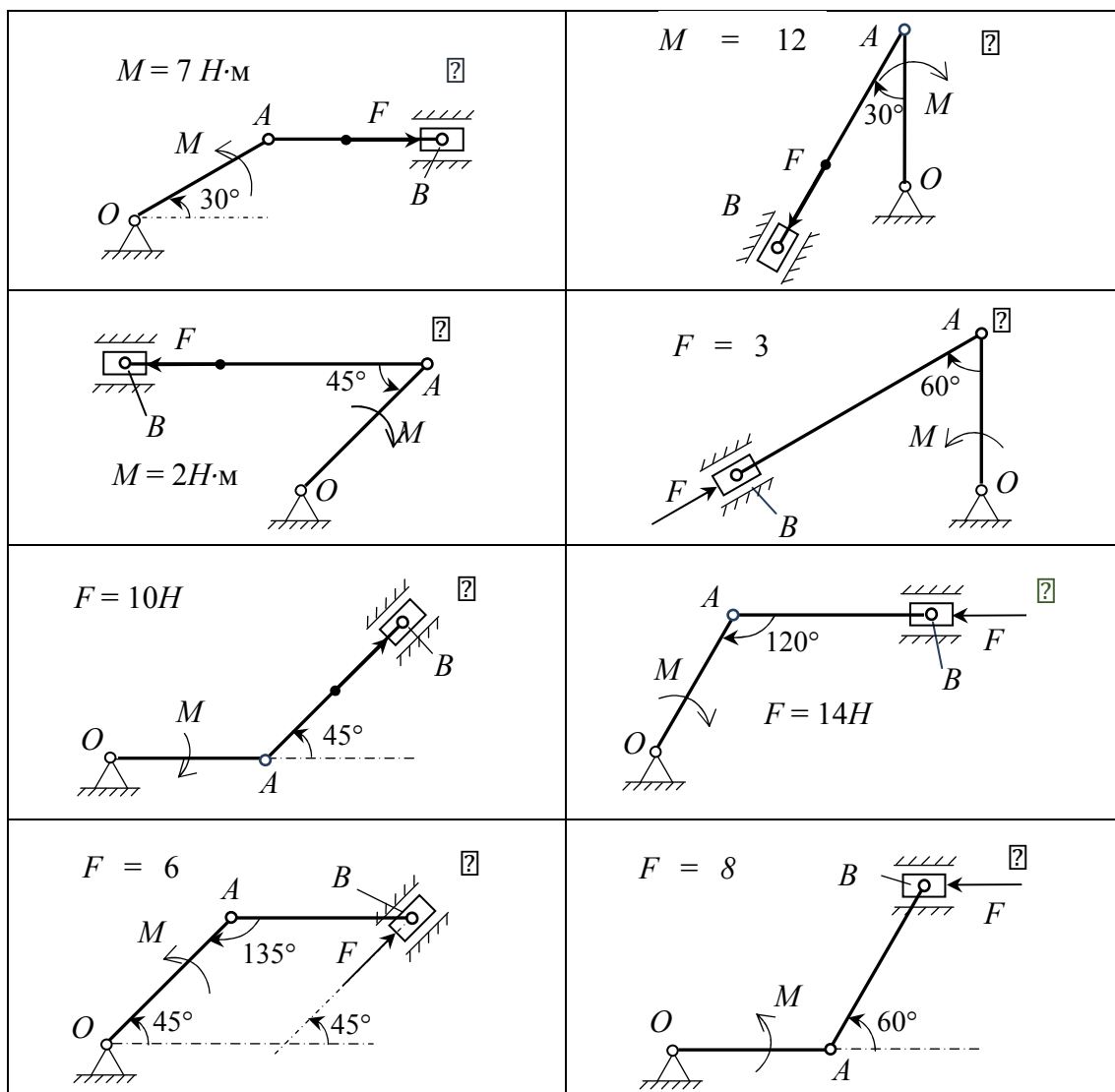


Рис. 16

Таблица 9

Величина	ДР									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
OA, м	0,2	0,4	0,7	0,4	0,6	0,4	0,7	0,3	0,9	0,5
AB, м	0,5	0,6	0,9	0,8	1,1	0,7	1,2	0,8	1,3	0,7
ПЦЗК										
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

### Пример решения задания Д4

Схема кривошипно-ползунного механизма показана на рис. 17.

Дано:  $OA = 0,3$  м;  $AB = 0,5$  м;  $M = 4$  Н·м.

Найти: силу  $F$  в положении равновесия механизма.



## Решение

На механизм действуют активная сила  $F$  и пара сил с моментом  $M$ . Сообщим механизму возможные перемещения и составим уравнение элементарных работ по принципу возможных перемещений:

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta s_i \cdot \cos(\vec{F}_i, \vec{\delta s}_i) = 0;$$

$$\delta A = M \cdot \delta \varphi - F \cdot \delta s_2 = 0. \quad (1)$$

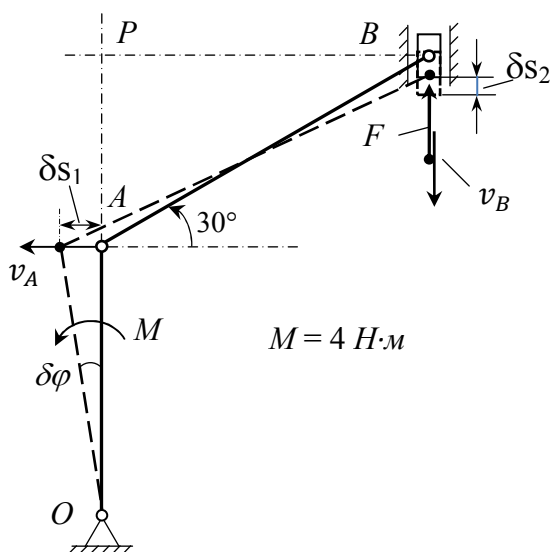


Рис. 17

Найдём соотношение между  $\delta \varphi$  и  $\delta s_1$ :

$$\delta \varphi = \frac{\delta s_1}{OA} = \frac{\delta s_1}{0,3}.$$

Возможные перемещения  $\delta s_1$  и  $\delta s_2$  пропорциональны скоростям точек  $A$  и  $B$ . Найдём положение мгновенного центра скоростей – точку  $P$  (рис. 17).

Тогда

$$\frac{\delta s_1}{\delta s_2} = \frac{AP}{BP}; \quad \delta s_1 = \delta s_2 \frac{AP}{BP};$$

$$AP = AB \cdot \sin 30^\circ = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ м};$$

$$BP = AB \cdot \cos 30^\circ = 0,5 \cdot 0,87 \approx 0,43 \text{ м};$$

$$\delta s_1 = \delta s_2 \frac{0,25}{0,43} \approx 0,58 \cdot \delta s_2; \quad (2)$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_2 \cdot 0,58}{0,3} \approx 1,93 \cdot \delta s_2.$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$M \cdot \delta s_2 \cdot 1,93 - F \cdot \delta s_2 = 0;$$

$$F = M \cdot 1,93 = 4 \cdot 1,93 = 7,72 \text{ Н}.$$

Ответ:  $F = 7,72 \text{ Н}$ .

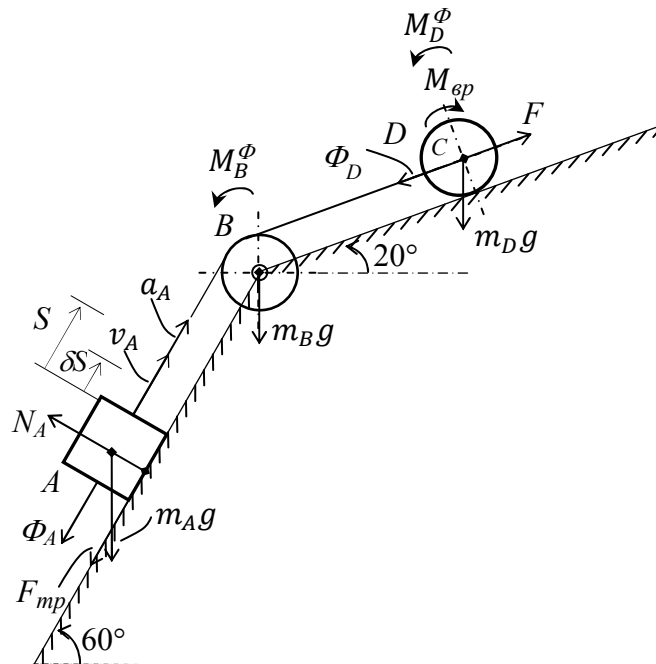
### Задание Д5

**Тема: Общее уравнение динамики и уравнение Лагранжа второго рода**

По условиям задачи Д. 3, рис. 14 и табл. 8 определить ускорение груза  $A$ , используя общее уравнение динамики и уравнение Лагранжа второго рода.

### Пример решения задания Д5

Схема механизма показана на рис. 18.



**Рис. 18**

Дано:  $m_A = 4 \text{ кг}$ ;  $m_B = 3 \text{ кг}$ ;  $m_D = 5 \text{ кг}$ ;  $F = 50 \text{ Н}$ ;  $f = 0,2$ ;  $R_D = 0,2 \text{ м}$ ;  $M_{\phi p} = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

Найти: ускорение тела  $A$ .

### Решение

Общее уравнение динамики может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta s_i \cdot \cos(\vec{F}_i \cdot \delta \vec{s}_i) + \sum_{i=1}^n \Phi_i \cdot \delta s_i \cdot \cos(\vec{\Phi}_i \cdot \delta \vec{s}_i) = 0.$$

Для данной механической системы задаваемые силы, участвующие в движении и совершающие элементарную работу:

$$m_A \vec{g}, \vec{F}_{mp}, \vec{F}, m_D \vec{g}, M_{bp}.$$

$$F_{mp} = f \cdot N_A = f \cdot m_A g \cdot \cos 60^\circ = 0,2 \cdot 4 \cdot 9,8 \cdot 0,5 = 3,9 \text{ Н}.$$

Приложим задаваемые силы к телам  $A, B, D$  (рис. 18). Вычислим и приложим к телам  $A, B, D$  силы инерции (рис. 18).

Тело  $A$  совершает поступательное движение:  $\vec{\Phi}_A = -m_A \cdot \vec{a}_A$ .

$$\Phi_A = m_A \cdot a_A = 4 \cdot a_A.$$

Тело  $B$  совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси (центр масс расположен на оси вращения), и момент сил инерции тела  $B$  определится по формуле:  $\vec{M}_B^\Phi = -J_B \cdot \vec{\varepsilon}_B$

$$M_B^\Phi = J_B \cdot \varepsilon_B = \frac{1}{2} m_B R_B^2 \cdot \frac{a_A}{R_B} = 1,5 R_B \cdot a_A;$$

$$J_B = \frac{1}{2} m_B R_B^2; \varepsilon_B = \frac{a_A}{R_B}.$$

Тело  $D$  совершает плоскопараллельное движение. Тогда:

$$\vec{\Phi}_D = -m_D \cdot \vec{a}_C, \vec{M}_D^\Phi = -J_D \cdot \vec{\varepsilon}_D.$$

$$\Phi_D = m_D \cdot a_C = 5 \cdot a_A; a_C = a_A;$$

$$M_D^\Phi = J_D \cdot \varepsilon_D = \frac{1}{2} m_D R_D^2 \cdot \frac{a_A}{R_D} = 2,5 R_D \cdot a_A;$$

$$J_D = \frac{1}{2} m_D R_D^2; \omega_D = \frac{v_C}{R_D} = \frac{v_A}{R_D}; \varepsilon_D = \frac{d\omega_D}{dt} = \frac{1}{R_D} \frac{dv_A}{dt} = \frac{a_A}{R_D}.$$

Сообщим механической системе возможное перемещение (рис. 18). Составим уравнение элементарных работ всех задаваемых сил и сил инерции, соответствующее общему уравнению динамики:

$$\begin{aligned} -m_A g \cdot \sin 60^\circ \cdot \delta s - \Phi_A \cdot \delta s - F_{mp} \cdot \delta s - M_B^\Phi \cdot \delta \varphi_B - m_D g \cdot \sin 20^\circ \cdot \delta s - \\ - \Phi_D \cdot \delta s - M_D^\Phi \cdot \delta \varphi_D + F \cdot \delta s + M_{bp} \cdot \delta \varphi_D = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\delta \varphi_B = \frac{\delta s}{R_B}; \delta \varphi_D = \frac{\delta s}{R_D}.$$

Подставив в уравнение (1) значения сил и моментов:

$$-4 \cdot 9,8 \cdot 0,87 \cdot \delta s - 4 \cdot a_A \cdot \delta s - 3,9 \cdot \delta s - 1,5 \cdot R_B \cdot a_A \cdot \frac{\delta s}{R_B} - 5 \cdot 9,8 \cdot 0,34 \cdot \delta s -$$

$$-5 \cdot a_A \cdot \delta s - 2,5 \cdot R_D \cdot a_A \cdot \frac{\delta s}{R_D} + 50 \cdot \delta s + 2 \cdot \frac{\delta s}{0,2} = 0.$$

Сокращая на  $\delta s$ :

$$-34,1 - 4 \cdot a_A - 3,9 - 1,5 \cdot a_A - 16,7 - 5 \cdot a_A - 2,5 \cdot a_A + 50 + 10 = 0;$$

$$5,3 = 13a_A; a_A = \frac{5,3}{13} \approx 0,41 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Полученный результат соответствует результату, полученному в задании Д3.

Определим ускорение тела  $A$ , используя уравнение Лагранжа второго рода. Данная механическая система имеет одну степень свободы. За обобщённую координату принимаем путь стела  $A$ . Уравнение Лагранжа второго рода в этом случае имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s. \quad (2)$$

Имеем  $v_A = \dot{s}$ ;  $a_A = \ddot{s}$ .

Обобщённую силу  $Q_s$  определим из равенства

$$Q_s = \frac{\delta A_s}{\delta s}.$$

Элементарная работа активных сил  $\delta A_s$  определится аналогично примеру к заданию Д3:

$$\delta A_s = -m_A g \cdot \sin 60^\circ \delta s - F_{mp} \cdot \delta s + F \cdot \delta s - m_D g \cdot \sin 20^\circ \delta s + M_{bp} \cdot \delta \varphi_D;$$

$$F_{mp} = f \cdot N_A = f \cdot m_A g \cdot \cos 60^\circ = 3,9 \text{ Н}; \quad \delta \varphi_D = \frac{\delta s}{R_D};$$

$$\begin{aligned} \delta A_s &= -4 \cdot 9,8 \cdot 0,87 \cdot \delta s - 3,9 \cdot \delta s + 50 \cdot \delta s - 5 \cdot 9,8 \cdot 0,34 \cdot \delta s + 2 \cdot \frac{\delta s}{0,2} \\ &= 5,3 \cdot \delta s. \end{aligned}$$

Тогда

$$Q_s = \frac{5,3 \cdot \delta s}{\delta s} = 5,3 \text{ Н}.$$

Кинетическая энергия механической системы определена в примере к задаче Д.3:

$$T = 6,5 \cdot v_A^2 = 6,5 \cdot \dot{s}^2.$$

Имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = 13 \cdot \dot{s}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = 13 \cdot \ddot{s}; \quad \frac{\partial T}{\partial s} = 0.$$

Подставив соответствующие значения в уравнение (2), получим:

$$13 \cdot \ddot{s} = 5,3; \ddot{s} = a_A = \frac{5,3}{13} \approx 0,41 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Полученный результат также совпал с аналогичным, полученным в примере к заданию Д3.

Ответ:  $a_A = 0,41 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ .

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Учебник для вузов. – Изд. 12-е, исправленное – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 608 с.
2. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. Учебник – М.: Высшая школа, 2006. – 416 с.
3. Теоретическая механика: учебник / Н. Г. Васько [и др.] – Изд. 2-е, испр. и доп. – Ростов н/д: Феникс, 2015. – 302 с.: ил. – (Высшее образование).

### РЕСУРСЫ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ»

1. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» [Электронный ресурс] / официальный сайт: Web-матер компания Binardi – Электронные данные. – М., 2010 – Режим доступа: [www.e.lanbook.com](http://www.e.lanbook.com), раздел СПбГЛТУ, свободный. Загл. с экрана. – яз. рус.
2. Общедоступные Интернет-ресурсы.
3. Сайт кафедры «Механика» СПбГЛТУ.

## Оглавление

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ .....	3
2. УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА.....	5
3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1.....	7
Задание С1.Равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. ....	8
Задание С2.Равновесие составной конструкции под действием произвольной плоской системы сил.....	11
Задание К1. Кинематика точки. ....	15
Задание К2. Определение скорости и ускорения точки тела при плоскопараллельном движении. ....	19
Задание К3. Определение абсолютных скорости и ускорения точки при сложном движении. ....	23
4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2.....	27
Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки (вторая задача динамики материальной точки). ....	28
Задание Д2. Теорема об изменении кинетической энергии точки и теорема об изменении количества движения точки.....	30
Задание Д3. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы. ....	35
Задание Д4.Принцип возможных перемещений. ....	39
Задание Д5.Общее уравнение динамики и уравнение Лагранжа второго рода .....	42
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	45
РЕСУРСЫ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ» .....	45