Практическая работа
Часть 1
Исследование методов моделирования динамических систем на базе аналоговых структурных моделей

Цель работы – закрепление знаний по использованию методов аналогового структурного моделирования на примере динамических объектов первого и второго порядков.

Задание

1. Исследование структурной модели динамического звена первого порядка с уравнением связи

$$T_2\dot{y} + y = k(T_1\dot{u} + u),$$

где $y(t)$ и $u(t)$ – сигналы на выходе и входе объекта соответственно.
Для заданного варианта параметров объекта получить структурную аналоговую модель динамического звена.
Получить и записать аналитическое выражение для переходной функции, построить ее.

2. Исследование структурной модели колебательного звена, заданного в форме дифференциального уравнения связи

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = ku.$$

Для заданного варианта параметров колебательной системы составить аналоговую схему моделирования.
Получить и записать аналитическое выражение для переходной функции, построить ее.

3. Моделирование системы с дифференциальным оператором второго порядка по выходной и входной переменным

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = c\ddot{u} + d\dot{u} + eu.$$

По заданному варианту параметров объекта построить структурную аналоговую модель.
Записать математическую модель динамической системы второго порядка в стандартной форме уравнений состояния. Определить и записать матрицы A, B, C и D исследуемой системы с учетом заданных по вариантам параметров объекта.

Методические указания по выполнению работы

Аналоговыми структурными моделями линейных динамических объектов принято называть модели, составленные с использованием всего трех типов структурных компонентов: интегрирующего звена, масштабирующего усилителя и сумматора. Исторически методы построения аналоговых моделей были предложены в период развития аналоговой вычислительной техники как инструмента для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Функции суммирования, усиления и интегрирования реализуются в аналоговых вычислителях в виде схемотехнических решений на базе операционного усилителя. Вместе с тем методы составления структурных схем в форме аналоговых моделей при рассмотрении объектов, имеющих один вход и один выход и описываемых обыкновенным дифференциальным уравнением, оказываются полезными при реализации вычислительных моделей, в частности, при переходе к описанию динамических объектов в пространстве состояний.

Для динамических систем, имеющих невысокий порядок производной по выходу и по входу (не выше второго и первого порядков соответственно) может быть предложен простой способ формирования структурной аналоговой модели, рассматриваемый далее на примере объекта с уравнением связи вида

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = d\dot{u} + eu. \tag{1.1}$$

Основная идея получения аналоговой модели для системы (1.1) состоит в последовательном использовании операции интегрирования с целью понижения порядка производной по выходной переменной. При этом в качестве входа модели может рассматривается только переменная $u(t)$ и исключаются операции дифференцирования входного сигнала.

Перегруппировав в ином порядке слагаемые в исходном уравнении (в левой части – старшие производные по входу и выходу, в правой – остальные члены уравнения), представим уравнение (1.1) в виде

$$\ddot{y} - d\dot{u} = eu - a\dot{y} - by. \tag{1.2}$$

Полученное уравнение принято за основу при формировании аналоговой структурной схемы, приведённой на рис. 1.1.

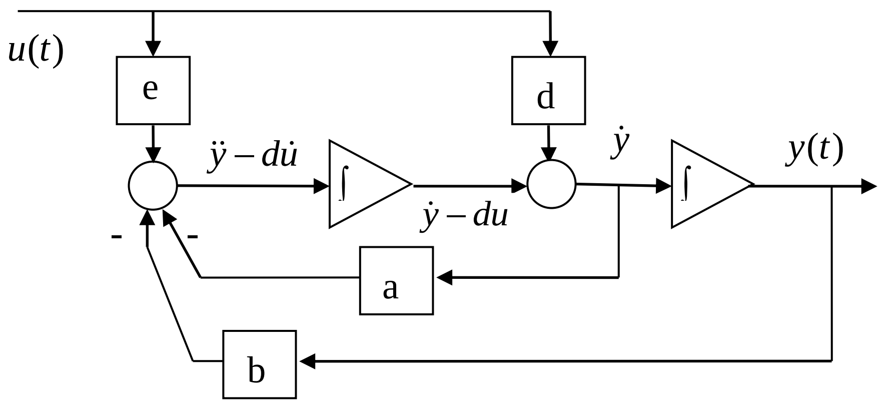

Рис. 1.1

Интегрируя левую часть уравнения (1.2), получаем на выходе интегратора линейную комбинацию первой производной по выходу и входного сигнала $\dot{y} - du.$ Очевидно, что из полученного сигнала можно выделить $\dot{y}(t),$ добавив в противофазе входной сигнал с необходимым весом. Повторно интегрируя полученный сигнал, получаем на выходе интегратора переменную $y(t).$ В соответствии с уравнением (1.2) сигнал, подаваемый на вход первого интегратора, является суммой слагаемых, входящих в правую часть уравнения. Операция суммирования трех составляющих реализована на входном сумматоре.

Предложенная методика формирования структурной схемы может быть применена при составлении моделей объектов, реализуемых в пп. 1 и 2 задания. Заметим, что отсутствие производных по входной переменной в уравнении связи в определенной степени упрощает процедуру составления структурной схемы, поскольку при этом *уравнение замыкания* (1.2) может быть записано относительно старшей производной по выходной переменной. Как следствие этого структурная схема линейной динамической системы любого порядка n при отсутствии производных по входу представляется в виде последовательной цепи n интеграторов, на вход первого из которых через сумматор подается линейная комбинация производных по выходной переменной порядка от *n-1* до 0 (с выходов соответствующих интеграторов) и входной сигнал с весом, соответствующим коэффициенту усиления системы.

При моделировании динамической системы, описание которой представлено дифференциальным уравнением общего вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + b_0 u, \qquad (1.3)$$

применяется аналоговая структурная схема, представленная на рис. 1.2.

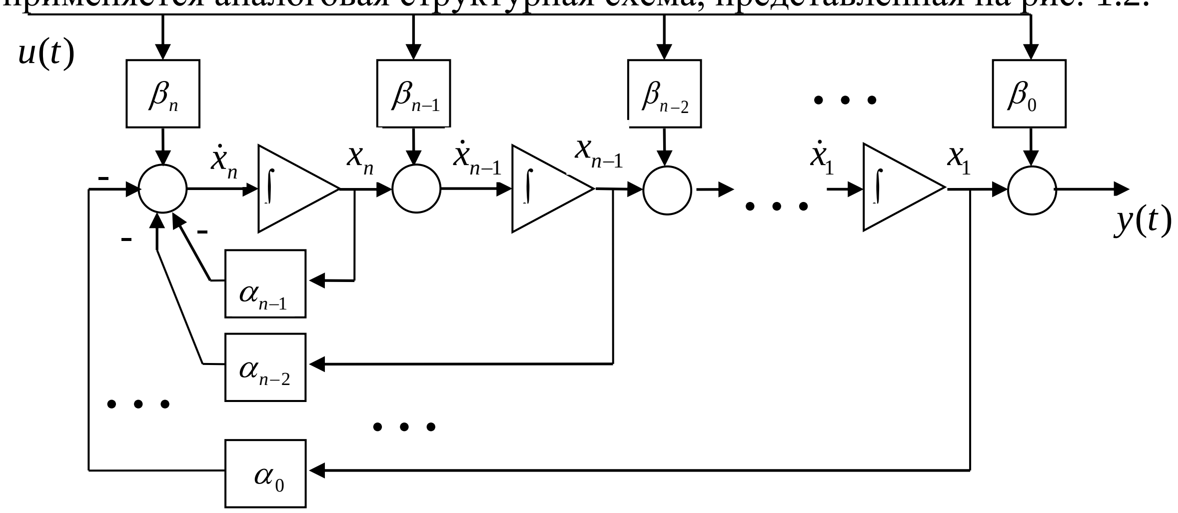

Рис. 1.2

Основной отличительной особенностью применяемой схемы является способ формирования уравнения замыкания, когда сигналы обратной связи, приходящие на входной сумматор, берутся с выходов интеграторов.

Соответствие структурной схемы уравнению (1.3) достигается в случае задания коэффициентов модели α_i и β_i через коэффициенты исходного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}
&\alpha_i = a_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \\
&\beta_0 = b_n, \\
&\beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0, \\
&\beta_2 = b_{n-2} - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-2}\beta_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\beta_n = b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - a_{n-2}\beta_{n-2} - \ldots - a_0\beta_0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Рекуррентные формулы для определения коэффициентов β_i записываются более компактно в матричной форме:

$$BI = AC \times BE,$$

где $BI = \left[b_n\; b_{n-1} \ldots b_0\right]^T$; $BE = \left[\beta_0\; \beta_1 \ldots \beta_n\right]^T$; $AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$.

На структурной схеме, изображенной на рис 1.2, сигналы на входах и выходах интеграторов обозначены соответственно как $\dot{x}_i$ и x_i (для интегратора с номером i). С учетом принятых обозначений математическая модель рассматриваемой динамической системы может быть представлена в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_i = x_{i+1} + \beta_i u, \; i = \overline{1, n-1}, \\
&\dot{x}_n = -\alpha_{n-1}x_n - \alpha_{n-2}x_{n-1} - \ldots - \alpha_0 x_1 + \beta_n u, \\
&y\; = x_1 + \beta_0 u.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Представленная форма описания (1.5) динамической системы является *моделью в пространстве состояний*, а переменные x_i образуют *вектор переменных состояния* $\vec{x} = \left(x_1\; x_2 \ldots x_n\right)^T$. Описание динамических систем в форме уравнений состояния представляет собой наиболее общий способ задания математической модели широкого класса объектов, включая нелинейные многосвязные системы. Уравнения состояния линейной динамической системы удобно записывать в матричной форме

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B\vec{u}, \\
&\vec{y} = C\vec{x} + D\vec{u},
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\vec{y} = \left(y_1\, y_2 \ldots y_r\right)^T$ и $\vec{u} = \left(u_1\, u_2 \ldots u_m\right)^T$ – соответственно векторный выход и векторный вход системы; A, B, C и D – *матрицы состояния*, *управления*, *наблюдения* и *связи вход-выход*, размерности каждой из которых определяются размерностью векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{u}$.

Для объекта (1.3) со скалярными входом и выходом, представленного *уравнениями состояния в стандартной форме* (1.5), матрицы системы (1.6) записываются в виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \; B = \left[\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n\right]^T, \; C = [1 0 \ldots 0], \; D = \beta_0 = b_n. \quad (1.7)$$

При выполнении п. 3 задания требуется составить аналоговую структурную модель системы второго порядка на основе общей схемы, представленной на рис. 1.2. Коэффициенты масштабирующих блоков α_i и β_i принимаются в соответствии с расчетными формулами (1.4) и заданными параметрами системы (по вариантам).

В качестве эталонных значений $h(t_i)$ принимаются рассчитанные для моментов t_i значения переходной функции, полученные на основе аналитического выражения

$$h(t) = L^{-1}\left[W(p)\frac{1}{p}\right],$$

где L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа, $W(p)$ – передаточная функция динамического звена, $\frac{1}{p}$ – изображение единичного скачка. Для звеньев первого и второго порядков, исследуемых в пп.1 и 2 задания, формулы для определения $h(t)$ могут быть найдены по таблицам преобразований Лапласа.

Исходные данные для проведения исследований

Таблица 1.1.

№ варианта	п. 1 задания			п. 2 задания			п. 3 задания				
	k	T_1	T_2	a	b	k	a	b	c	d	e
1	2,0	0,1	0,4	1,1	3,9	5,0	0,4	1,1	2,0	6,0	2,5
2	2.5	0,5	1,0	0,5	1,5	2,5	0,8	1,4	1,5	4,0	2,8
3	3,0	0,2	0,5	0,6	2,0	4,0	0,5	1,6	0,25	0,5	1,2
4	3,5	0,1	0,25	0,6	1,2	3,0	1,2	2,5	2,2	5,0	1,8
5	2,0	1,0	2,5	0,25	0,5	1,2	1,5	4,5	3,0	7,5	12,0
6	4,0	0,1	0,5	1,2	10,0	25,0	0,5	1,2	0,6	1,2	3,0
7	5,0	1,0	5,0	5,0	100	200	0,3	0,85	0,28	0,45	1,2
8	2,5	0,4	1,0	0,1	0,07	0,25	0,6	1,7	0,25	0,5	1,2
9	2,0	2,0	0,4	0,28	0,45	1,2	1,4	3,2	0,55	0,83	2,5
10	4,0	4,0	1,5	0,55	0,83	2,5	2,0	5,8	0,4	0,7	1,5
11	5,0	0,8	0,25	0,1	0,4	2,5	2,5	8,0	1,2	10,0	25,0
12	2,0	1,0	0,15	0,8	3,0	6,0	1,8	5,0	1,1	3,9	4,0