

## Семинар 1

### Уравнения четырехполюсников

#### Вопросы

1. Запишите уравнения четырехполюсника в А-, Y- и Z-формах.
2. Какие соотношения выполняются для коэффициентов четырехполюсника в А-, Y- и Z-формах для пассивного четырехполюсника?
3. Сколько параметров симметричного четырехполюсника в А-, Y- и Z-формах являются независимыми и как определяют остальные параметры?
4. Зачем используют различные формы уравнений четырехполюсников?
5. Изложите методы расчета первичных параметров четырехполюсника.
6. Нарисуйте П- и Т-образные схемы замещения четырехполюсника. Как вычисляются параметры элементов этих схем?

#### Пример 1

Сопротивления элементов симметричного четырехполюсника (рис. 1)  $R = 10$  Ом,  $\omega L = 10$  Ом. Рассчитать параметры четырехполюсника в А-форме.

#### Решение

Расчет параметров четырехполюсника выполним двумя способами.

1. *Способ разделения четырехполюсника*

1.1. *Простейшие четырехполюсники*

Данный четырехполюсник можно разделить на три четырехполюсника (рис. 2).

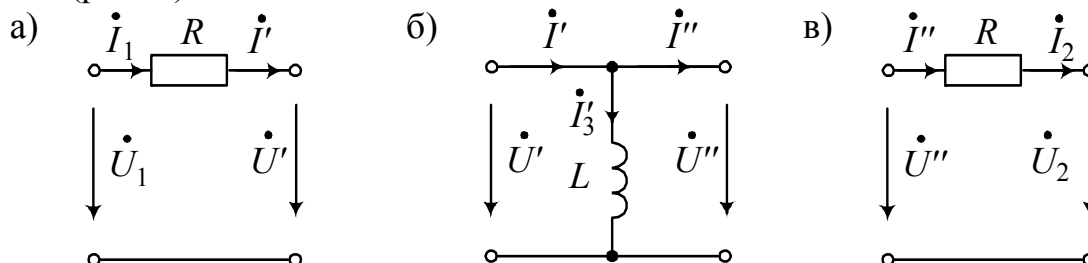


Рис. 2

Запишем уравнение четырехполюсника в А-форме:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2 \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем А-параметры каждого из четырехполюсников. Для первого и третьего четырехполюсников (рис. 2а,в) по законам Кирхгофа получаем

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}' + \dot{I}' R \\ \dot{I}_1 = \dot{I}' \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}' \\ \dot{I}' \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} \dot{U}'' = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 R \\ \dot{I}'' = \dot{I}_2 \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} \dot{U}'' \\ \dot{I}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Для второго четырехполюсника (рис. 2б) по законам Кирхгофа получаем

$$\begin{cases} \dot{U}_1'' = \dot{U}_2'' \\ \dot{I}_1'' = \dot{U}_2'' / jX_L + \dot{I}_2'' \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/jX_L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

## 1.2. Каскадное соединение простейших четырехполюсников

Простейшие четырехполюсники (рис. 2) соединены каскадно, следовательно, матрицу исходного четырехполюсника можно получить перемножением матриц

$$\begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{jX_L} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{R}{jX_L} & 2R + \frac{R^2}{jX_L} \\ \frac{1}{jX_L} & 1 + \frac{R}{jX_L} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, А-параметры четырехполюсника

$$\underline{A} = 1 - j; \underline{B} = 20 - 10j \text{ Ом}; \underline{C} = -0,1j \text{ См}; \underline{D} = 1 - j.$$

## 2. Способ холостого хода и короткого замыкания

Параметры четырехполюсника можно рассчитать, рассматривая режимы холостого хода (рис. 3а) и короткого замыкания (рис. 3б).

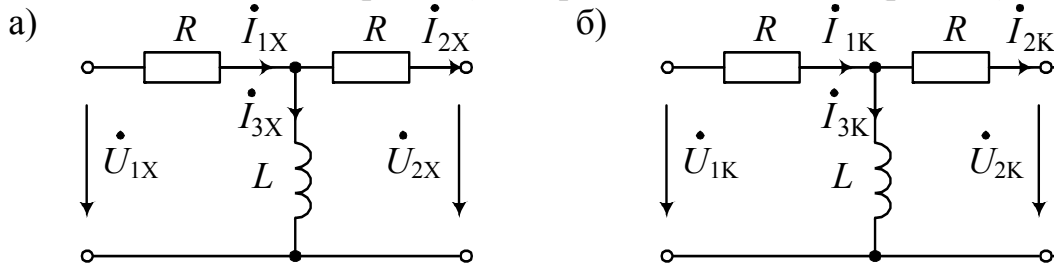


Рис. 3

### 2.1. Холостой ход

В режиме холостого хода уравнения четырехполюсника имеют вид

$$\begin{cases} \dot{U}_{1X} = \underline{A}\dot{U}_{2X}; \dot{I}_{2X} = 0. \\ \dot{I}_{1X} = \underline{C}\dot{U}_{2X} \end{cases}$$

По законам Кирхгофа для четырехполюсника (рис. 3а) получаем  $\dot{U}_{2X} = \dot{I}_{3X}jX_L$ ;  $\dot{U}_{1X} = \dot{I}_{1X}R + \dot{I}_{3X}jX_L$ ;  $\dot{I}_{1X} = \dot{I}_{3X}$ ,  $\dot{I}_{2X} = 0$ .

Преобразуя уравнений по законам Кирхгофа, получаем

$$\underline{A} = \frac{\dot{U}_{1X}}{\dot{U}_{2X}} = \frac{(R + jX_L)}{jX_L}; \underline{C} = \frac{\dot{I}_{1X}}{\dot{U}_{2X}} = \frac{1}{jX_L}.$$

### 2.2. Короткое замыкание

В режиме короткого замыкания уравнения четырехполюсника

$$\begin{cases} \dot{U}_{1K} = \underline{B}\dot{I}_{2K}; \dot{U}_{2K} = 0. \\ \dot{I}_{1K} = \underline{D}\dot{I}_{2K} \end{cases}$$

По законам Кирхгофа для четырехполюсника (рис. 3б) получаем

$$\dot{I}_{2K}R = \dot{I}_{3K}jX_L; \dot{U}_{1K} = \dot{I}_{1K}R + \dot{I}_{3K}jX_L; \dot{I}_{1K} = \dot{I}_{3K} + \dot{I}_{2K}.$$

Преобразуя уравнения Кирхгофа к виду

$$\dot{I}_{1K} = \dot{I}_{2K} \left( 1 + \frac{R}{jX_L} \right), \dot{U}_{1K} = \frac{\dot{I}_{2K}R(R + 2jX_L)}{jX_L},$$

получаем параметры четырехполюсника:

$$\underline{B} = \frac{\dot{U}_{1K}}{\dot{I}_{2K}} = \frac{R^2 + 2RjX_L}{jX_L}; \quad \underline{D} = \frac{\dot{I}_{1K}}{\dot{I}_{2K}} = 1 + \frac{R}{jX_L}.$$

### 3. Проверка

Для симметричного обратимого четырехполюсника

$$\underline{A} = \underline{D} \text{ и } \underline{AD} - \underline{BC} = \left( \frac{R + jX_L}{jX_L} \right)^2 - \frac{R^2 + 2RjX_L}{(jX_L)^2} = \frac{(jX_L)^2}{(jX_L)^2} = 1.$$

### Пример 2

Напряжение на входе четырехполюсника, рассмотренного в примере 1  $\dot{U}_1 = 100$  В. Найти напряжение  $\dot{U}_2$  на выходе четырехполюсника а) в режиме холостого хода, б) при нагрузке  $R = 10$  Ом.

### Решение

Расчет выходного напряжения в режиме холостого хода можно выполнить, исходя из А-параметров четырехполюсника. Уравнение четырехполюсника в режиме холостого хода  $\dot{U}_1 = \underline{A}\dot{U}_2$ ,  $\dot{I}_2 = 0$ . Тогда

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 / \underline{A} = 100 / (1 - j) = 50\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

Расчет напряжения на нагрузке  $R = 10$  Ом получим из уравнения четырехполюсника в А-форме

$$\dot{U}_1 = \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2 = \dot{U}_2(\underline{A} + \underline{B}/R),$$

$$\dot{U}_2 = \frac{R\dot{U}_1}{\underline{A}R + \underline{B}} = \frac{10 \cdot 100}{10(1 - j) + 20 - 10j} = \frac{100}{3 - 2j} = 23 + 15,4j \text{ Ом.}$$

### Задачи

1. Найти А-параметры П-образного четырехполюсника (рис. 4) методом холостого хода и короткого замыкания и разложением на простые четырехполюсники, если  $\underline{Z}_1 = -5j$  Ом,  $\underline{Z}_2 = 5$  Ом,  $\underline{Z}_3 = 5j$  Ом.

Ответ:  $\underline{A} = 1 - j$ ,  $\underline{B} = 5$  Ом,  $\underline{C} = 0,2$  См,  $\underline{D} = 1 + j$ .

2. Определить Y- и Z-параметры четырехполюсника (рис. 5), если  $\omega L_1 = 10$  Ом,  $\omega L_2 = 40$  Ом,  $K_{св} = 0,8$ .

Ответ:

$$Z = \begin{pmatrix} 10j & -16j \\ 16j & -40j \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -0,278j & 0,111j \\ -0,111j & 0,069j \end{pmatrix}.$$

3. Постоянные четырехполюсника  $\underline{A} = -0,5$ ,  $\underline{C} = 0,5j$  Ом<sup>-1</sup>,  $\underline{D} = -1$ . На выходе включена активная нагрузка  $\underline{Z}_H = 2$  Ом. Определить напряжения  $u_1$  на входе четырехполюсника, если  $\dot{I}_2 = j$  А.

Ответ:  $u_1 = 2 \sin(\omega t - 135^\circ)$  В.

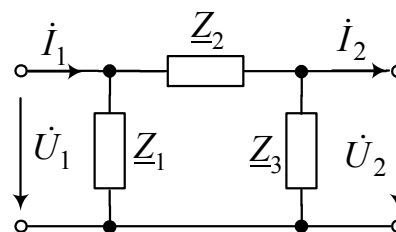


Рис. 4

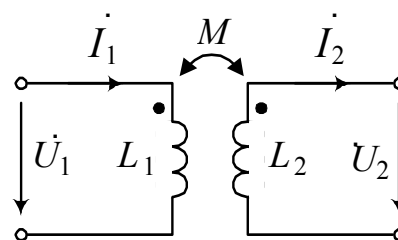


Рис. 5