

***Г.Т. АЛДОШИН, Н.Н. ДМИТРИЕВ,
А.Л. ИЛИХМЕНЕВ, В.Ю. ЧИРКОВ***

**КОЛЕБАНИЯ
МЕХАНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ**

Министерство образования и науки Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

*Г.Т. АЛДОШИН, Н.Н. ДМИТРИЕВ,
А.Л. ИЛИХМЕНЕВ, В.Ю. ЧИРКОВ*

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Пособие по выполнению
расчётно-графических и курсовых работ

Под редакцией Г.Т. Алдошина

Санкт-Петербург
2016

УДК 534.1(076)
К60

К60 **Колебания** механических систем: пособие по выполнению расчётно-графических и курсовых работ / Г.Т. Алдошин [и др.]; под ред. Г.Т. Алдошина; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2016. – 79 с.

ISBN 978-5-85546-979-0

Настоящее пособие состоит из двух разделов, посвящённых линейным колебаниям с одной и двумя степенями свободы. Каждый раздел содержит краткие теоретические сведения по теме задания и пример решения конкретной задачи. В приложении изложены обязательные требования к оформлению расчётных работ.

Для студентов технических специальностей, обучающихся по программам бакалавров, специалистов и магистров по учебным курсам «Теоретическая механика» и «Аналитическая динамика и теория колебаний».

УДК 534.1(076)

Рецензент д-р техн. наук, проф. *В.Н. Ражиков*

*Утверждено
редакционно-издательским
советом университета*

ISBN 978-5-85546-979-0

© БГТУ, 2016
© Авторы, 2016

1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1.1. Краткие сведения из теории

Процессы в природе и технике, протекающие таким образом, что их определяющие параметры поочередно возрастают и убывают, называются колебаниями. Колебания обычно возникают при отклонении системы от положения ее равновесия. Условия равновесия для системы с одной степенью свободы

$$\frac{d\Pi}{dq} = 0 ,$$

где Π – потенциальная энергия системы.

Если на систему действуют только консервативные силы, то условия равновесия имеют вид

$$Q = -\frac{d\Pi}{dq} = 0.$$

Критерий устойчивого равновесия следует из теоремы Лагранжа–Дирихле: если система, на которую наложены голономные идеальные стационарные связи и заданные силы от времени не зависят, и в некотором положении потенциальная энергия имеет *изолированный* минимум, то это положение равновесия является *устойчивым*.

Условие минимума для системы с одной степенью свободы

$$\left. \frac{d^2\Pi}{dq^2} \right|_{\text{равн.}} > 0.$$

Для рассматриваемых в пособии задач потенциальными являются силы:

- силы тяжести $F = mg$, потенциальная энергия $\Pi = mgh = mgl(1 - \cos \varphi) + \Pi_0$ (рис. 1.1,а);

- силы упругости $F = c\lambda$, потенциальная энергия $\Pi = \frac{1}{2}c\lambda^2 + \Pi_0$,

где c – продольная или крутильная жесткость пружины, λ – удлинение или закручивание пружины (рис. 1.1,б);

- сила инерции переносного движения $\mathbf{F} = -m\mathbf{w}_e$, потенциальная энергия $\Pi = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \sin^2 \varphi + \Pi_0$ (рис. 1.1,в).

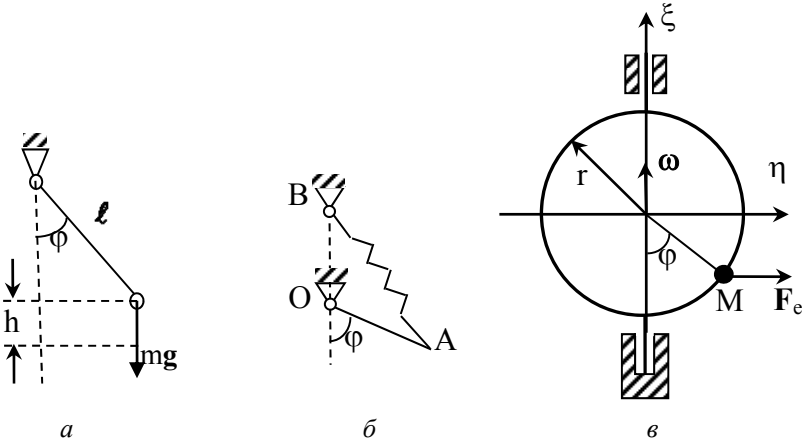


Рис. 1.1. Примеры потенциальных сил

Для исследования движения используют уравнение Лагранжа второго рода, которое широко применяют в инженерной практике, а для систем с многими степенями свободы оно практически является единственным методом составления уравнений движения. Для систем с одной степенью свободы уравнение Лагранжа второго рода имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq} \right) - \frac{dT}{dq} = Q, \quad (1.1)$$

где T – кинетическая энергия системы; q – обобщенная скорость; Q – обобщенная сила.

Колебания рассматриваются малыми в окрестности равновесия, тогда уравнение (1.1) может быть *линеаризовано* и записано в виде

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t), \quad (1.2)$$

где a – квазиинерциальный, b – диссипативный, c – квазиупругий коэффициенты; $Q(t)$ – заданная возмущающая сила.

Колебания могут быть свободными, затухающими и вынужденными.

Для свободных колебаний уравнение Лагранжа (1.2) принимает вид $a\ddot{q} + cq = 0$, или $\ddot{q} + k_0^2 q = 0$, где $k_0 = \sqrt{c/a}$ – циклическая частота колебаний. Его решение: $q(t) = A \sin(k_0 t + \alpha)$, где A – амплитуда колебаний, α – начальная фаза. Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{a/c}$.

Затухающие свободные колебания возникают, когда на систему действуют силы сопротивления. Тогда уравнение (1.2) запишется как

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k_0^2 q = 0, \quad (1.3)$$

где $2h = b/a$. Решение уравнения (1.3) определяется видом корней характеристического уравнения $\Lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k_0^2}$ и зависит от соотношения коэффициентов h и k_0 :

- в случае слабого сопротивления $h < k_0$

$$q(t) = Ae^{-ht} \sin(kt + \alpha),$$

где $k = \sqrt{k_0^2 - h^2}$ и является затухающим колебанием;

- при сильном сопротивлении $h > k_0$ и $h = k_0$ (критическое сопротивление) движение системы приобретает аperiодический характер.

Уравнение движения (1.2) при вынужденных колебаниях системы с учетом сопротивления принимает вид

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k_0^2 q = f(t), \quad (1.4)$$

где $f(t) = \frac{1}{a} Q(t)$.

Решение неоднородного уравнения (1.2) складывается из общего решения однородного уравнения $q_{\text{одн}}$ и частного решения неоднородного уравнения $q^*(t)$.

$$q(t) = q_{\text{одн}}(t) + q^*(t). \quad (1.5)$$

Решение однородного уравнения известно, частное решение ищется в виде [1]

$$q^*(t) = \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

где $G(t-\tau)$ – функция Грина.

Подставим $q^*(t)$ в исходное уравнение (1.5), для определения функции Грина получаем уравнение $\ddot{G} + 2h\dot{G} + k_0^2 G = 0$, решение которого для малого сопротивления ($h < k_0$) имеет вид

$$G(t - \tau) = \frac{1}{k} e^{-h(t-\tau)} \sin k(t - \tau),$$

так что частным решением $q^*(t)$ будет

$$q^*(t) = \frac{1}{k} \int_0^t e^{-h(t-\tau)} \sin [k(t - \tau)] f(\tau) d\tau.$$

Данное решение называется интегралом свертки или интегралом Дюамеля.

Общее решение уравнения (1.4) для произвольных начальных условий $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ представляет собой сумму решений однородного уравнения и интеграла Дюамеля:

$$q(t) = e^{-ht} \left[q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0 + hq_0}{k} \sin kt \right] + \frac{1}{k} \int_0^t e^{-h(t-\tau)} \sin [k(t - \tau)] f(\tau) d\tau. \quad (1.6)$$

Следовательно, интеграл Дюамеля есть общее решение уравнения (1.4) при нулевых начальных условиях $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$, а (1.6) определяет колебания системы при любой возмущающей силе и любых начальных условиях.

1.2. Пример выполнения задания*

Исследовать движение механической системы с одной степенью свободы, при этом следует:

- определить равновесные положения системы, находящейся под действием потенциальных сил, и исследовать их устойчивость;
- получить уравнения движения системы в окрестности равновесия и его характеристики: амплитуду, частоту, период, начальную фазу;

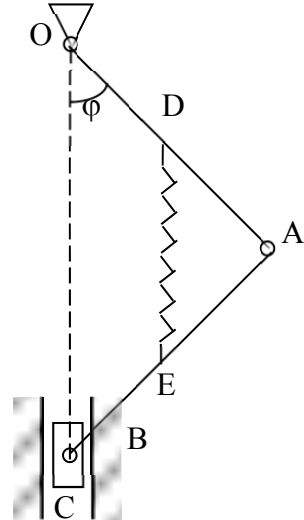
* Пример основан на задаче 53.6 из задачника И.В. Мещерского «Сборник задач по теоретической механике». СПб, Лань, 2012. 448 с.

- рассмотреть влияние сопротивления на характер движения системы;

- рассмотреть вынужденные колебания системы.

Схемы механических систем, их геометрические и инерционные характеристики приведены в вариантах задач.

Система состоит из двух однородных стержней OA и AB длины a и массы m , расположенных в вертикальной плоскости. В точке A стержни соединены шарниром. В точке O – неподвижный шарнир. В точке B стержень AB соединен шарниром с телом C массой m_1 , которое может перемещаться по вертикали, проходящей через точку O . Середины стержней OA и AB соединены пружиной жесткости c . Длина пружины в недеформированном состоянии $\ell_0 < a$.



1. Найти положения равновесия и условия их устойчивости. Массой пружины пренебречь.

2. Определить периоды малых колебаний около положений устойчивого равновесия.

3. Найти закон движения системы для малых вынужденных колебаний при условии:

- а) на кривошип действует возмущающий момент $M = M_0 \sin \omega t$,

- б) на ползун действует возмущающая сила

$$F_y = \begin{cases} F_0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases}$$

где T – период свободных колебаний системы.

За обобщенную координату выберем угол между вертикалью и стержнем OA , который обозначим через φ .

Потенциальная энергия системы

$$\begin{aligned} \Pi = mg \frac{a}{2}(1 - \cos \varphi) + mg \frac{3a}{2}(1 - \cos \varphi) + m_1 g \cdot 2a(1 - \cos \varphi) + \\ + \frac{1}{2}c(a \cos \varphi - \ell_0)^2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь слагаемые соответствуют потенциальной энергии: первое – стержня OA , второе – стержня AB , третье – ползуна B , четвертое – деформированной пружины. Упростим выражение (1.7):

$$\Pi = 2ag(m + m_1) \cdot (1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2}c(a \cos \varphi - \ell_0)^2.$$

В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия имеет минимум. Для существования экстремума функции $\Pi(\varphi)$ должно выполняться условие

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = a \sin \varphi \cdot [2g(m + m_1) - ca \cos \varphi + c\ell_0] = 0. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) имеет единственный корень $\varphi_1 = 0$ при $2g(m + m_1) > c(a - \ell_0)$ и два корня при $2g(m + m_1) \leq c(a - \ell_0)$: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \arccos \frac{2g(m + m_1) + c\ell_0}{ca}$. Вторая производная от потенциальной энергии по обобщенной координате равна

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = a \cos \varphi \cdot [2g(m + m_1) - ca \cos \varphi + c\ell_0] + ca^2 \sin^2 \varphi. \quad (1.9)$$

Подстановка корней уравнения (1.8) в выражение (1.9) позволяет определить, максимум или минимум имеет функция $\Pi(\varphi)$ в точках, «подозрительных» на экстремум.

Если выполнено условие $2g(m + m_1) > c(a - \ell_0)$, то

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = a \cdot [2g(m + m_1) - ca + c\ell_0] > 0,$$

что означает минимум потенциальной энергии при $\varphi_1 = 0$ и, следовательно, $\varphi_1 = 0$ – устойчивое положение равновесия.

При $2g(m + m_1) \leq c(a - \ell_0)$

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = a \cdot [2g(m + m_1) - ca + c\ell_0] < 0,$$

т.е. при $\varphi_1 = 0$ имеем максимум функции $\Pi(\varphi)$,

$$\left. \frac{d^2 \Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_2} = ca^2 \sin^2 \varphi_2 > 0,$$

что означает минимум функции $\Pi(\varphi)$ при

$$\varphi_2 = \arccos \frac{2g(m+m_1) + c\ell_0}{ca}.$$

Таким образом, при $2g(m+m_1) > c(a-\ell_0)$ имеется одно устойчивое состояние равновесия $\varphi_1 = 0$, при $2g(m+m_1) \leq c(a-\ell_0)$ два состояния равновесия – неустойчивое

$$\varphi_1 = 0 \text{ и устойчивое } \varphi_2 = \arccos \frac{2g(m+m_1) + c\ell_0}{ca}.$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий стержня OA , стержня AB и ползуна C . Стержень OA вращается вокруг своего конца – точки O . Поэтому

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_{OA} \omega_{OA}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ma^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} ma^2 \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическую энергию стержня AB найдем при помощи теоремы Кенига:

$$T_{AB} = \frac{1}{2} mv_E^2 + \frac{1}{2} J_{Ez} \omega_{AB}^2,$$

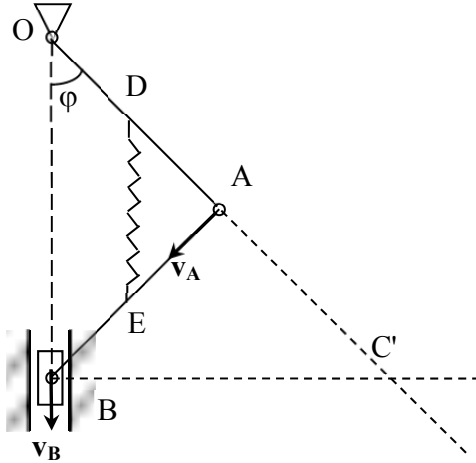
где E – центр масс стержня AB , J_{Ez} – момент инерции стержня AB относительно оси, проходящей через точку E перпендикулярно плоскости рисунка. Скорость точки E определим дифференцированием по времени ее координат:

$$x_E = \frac{a}{2} \sin \varphi, \quad y_E = \frac{3a}{2} \cos \varphi,$$

$$\dot{x}_E = \frac{a}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y}_E = -\frac{3a}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad v_E^2 = \frac{a^2}{4} \dot{\varphi}^2 (1 + 8 \sin^2 \varphi).$$

Угловая скорость стержня AB равна $\dot{\varphi}$ (в силу симметрии механизма; применение метода мгновенного центра скоростей). В итоге

$$\begin{aligned}
 T_{AB} &= \frac{1}{2} m \frac{a^2}{4} \dot{\varphi}^2 (1 + 8 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m a^2 \dot{\varphi}^2 = \\
 &= \frac{1}{6} m a^2 \dot{\varphi}^2 + m a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$



Отметим, что кинетическую энергию шатуна AB можно найти по формуле $T_{AB} = \frac{1}{2} J_{C'} \omega_{AB}^2$, где $J_{C'}$ – момент инерции стержня AB относительно мгновенной оси вращения, проходящей через мгновенный центр скоростей (точку C') перпендикулярно плоскости механизма. Мгновенный центр скоростей – точка пересечения перпендикуляров, проведенных к скоростям \mathbf{v}_A и \mathbf{v}_B . Угловая скорость ω_{AB} определяется методом мгновенного центра скоростей:

$$\left. \begin{aligned}
 v_A &= \omega_{OA} OA = \dot{\varphi} OA \\
 v_A &= \omega_{AB} C' A
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{\dot{\varphi} OA}{C' A}.$$

Так как $\angle AC'B = \angle ABC' = \frac{\pi}{2} - \varphi$, то треугольник ABC' равнобедренный и $AB = AC' = a$. Поэтому $\omega_{AB} = \dot{\varphi}$.

Момент инерции $J_{C'}$ находится по теореме Штейнера

$$\begin{aligned}
J_{C'} &= J_E + m_{AB} C' E^2 = \\
&= \frac{1}{12} m_{AB} AB^2 + m_{AB} \left(C' B^2 + BE^2 - 2C' B \cdot BE \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right) = \\
&= \frac{1}{3} m_{AB} a^2 + 2m_{AB} a^2 \sin^2 \varphi.
\end{aligned}$$

В итоге кинетическая энергия шатуна AB

$$T_{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_{AB} a^2 + 2m_{AB} a^2 \sin^2 \varphi \right) \cdot \dot{\varphi}^2 = \left(\frac{1}{6} m_{AB} a^2 + m_{AB} a^2 \sin^2 \varphi \right) \cdot \dot{\varphi}^2,$$

что совпадает с формулой (1.10).

Кинетическая энергия ползуна C

$$T_C = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d}{dt} (2a \cos \varphi) \right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot 4a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.$$

Таким образом, кинетическая энергия системы

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \frac{a^2}{4} \dot{\varphi}^2 (1 + 8 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m a^2 \dot{\varphi}^2 + \\
&+ \frac{1}{2} m_1 \cdot 4a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{2} a^2 \dot{\varphi}^2 \left[\frac{2}{3} m + (2m + 4m_1) \sin^2 \varphi \right]. \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Величина обобщенной координаты φ в положении равновесия может быть отличной от нуля (например, $\varphi = \varphi_2 \neq 0$). Поэтому введем новую переменную ψ : $\varphi = \psi + \varphi_{\text{рв}}$, $\dot{\varphi} = \dot{\psi}$. Кинетическую энергию перепишем в виде

$$\begin{aligned}
T &\approx \frac{1}{2} a^2 \dot{\psi}^2 \left[\frac{2}{3} m + (2m + 4m_1) \sin^2 \varphi_{\text{рв}} \right] = \frac{1}{2} J_* \dot{\psi}^2, \\
J_* &= a^2 \left[\frac{2}{3} m + (2m + 4m_1) \sin^2 \varphi_{\text{рв}} \right].
\end{aligned}$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = 2ag(m + m_1) \cdot (1 - \cos(\psi + \varphi_{\text{рв}})) + \frac{1}{2} c \left[a \cos(\psi + \varphi_{\text{рв}}) - \ell_0 \right]^2;$$

$$\frac{d\Pi}{d\psi} = a \sin(\psi + \varphi_{\text{PB}}) \cdot \left[2g(m + m_1) - ca \cos(\psi + \varphi_{\text{PB}}) + c\ell_0 \right];$$

$$\frac{d^2\Pi}{d\psi^2} = a \cos(\psi + \varphi_{\text{PB}}) \cdot \left[2g(m + m_1) - ca \cos(\psi + \varphi_{\text{PB}}) + c\ell_0 \right] + ca^2 \sin^2(\psi + \varphi_{\text{PB}});$$

$$\left. \frac{d\Pi}{d\psi} \right|_{\psi=0} = a \sin \varphi_{\text{PB}} \cdot \left[2g(m + m_1) - ca \cos \varphi_{\text{PB}} + c\ell_0 \right] = 0;$$

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\psi^2} \right|_{\psi=0} = a \cos \varphi_{\text{PB}} \cdot \left[2g(m + m_1) - ca \cos \varphi_{\text{PB}} + c\ell_0 \right] + ca^2 \sin^2 \varphi_{\text{PB}}.$$

Обобщенная сила

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{d\Pi}{d\psi} = -a \sin(\psi + \varphi_{\text{PB}}) \cdot \left[2g(m + m_1) - ca \cos(\psi + \varphi_{\text{PB}}) + c\ell_0 \right] \Big|_{\psi \ll 1} \approx \\ &\approx -a \left(\sin \varphi_{\text{PB}} + \cos \varphi_{\text{PB}} \cdot \psi \right) \cdot \left[2g(m + m_1) + c\ell_0 - ca \cos \varphi_{\text{PB}} + \psi \cdot ca \sin \varphi_{\text{PB}} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{При } \varphi_{\text{PB}} = \varphi_1 = 0 \quad Q_1 &\approx -a \left[2g(m + m_1) + c\ell_0 - ca \right] \cdot \psi = -c_1 \psi, \\ c_1 &= a \left[2g(m + m_1) + c\ell_0 - ca \right]. \end{aligned}$$

$$\text{При } \varphi_{\text{PB}} = \varphi_2 \quad Q_2 \approx -ca^2 \sin^2 \varphi_2 \cdot \psi = -c_2 \psi, \quad c_2 = ca^2 \sin^2 \varphi_2.$$

Уравнения Лагранжа второго рода позволяют записать следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_i, \quad i = 1, 2; \\ J_* \ddot{\psi} + c_i \psi &= 0 \Rightarrow \ddot{\psi} + k_i^2 \psi = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $k_i^2 = c_i / J_*$ – квадрат собственной частоты колебаний системы около i -го положения устойчивого равновесия. Решение уравнения (1.12) имеет вид

$$\psi = C_1 \cos k_i t + C_2 \sin k_i t, \quad (1.13)$$

в котором постоянные C_1 и C_2 находятся из начальных условий.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний под действием момента $M = M_0 \sin \omega t$, приложенного к кривошипу OA , получается, если добавить в правую часть уравнения (1.12) обобщенную силу, обусловленную этим моментом. Возможная работа момента M

$$\delta A(M) = M \cdot \delta \varphi = M_0 \sin \omega t \cdot \delta(\varphi_{\text{прв}} + \psi) = M_0 \sin \omega t \cdot \delta \psi,$$

и, следовательно, $Q(M) = M_0 \sin \omega t$, откуда уравнение вынужденных колебаний записывают в виде $J_* \ddot{\psi} + c_i \psi = M_0 \sin \omega t$,

$$\ddot{\psi} + k_i^2 \psi = \frac{M_0}{J_*} \sin \omega t. \quad (1.14)$$

Частное решение уравнения (1.14) будем искать в виде

$$\psi_{\text{частн}} = A \sin \omega t. \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что

$$\dot{\psi}_{\text{частн}} = A\omega \cos \omega t, \quad \ddot{\psi}_{\text{частн}} = -A\omega^2 \sin \omega t. \quad (1.16)$$

Подставим (1.15) и (1.16) в (1.14) и найдем величину A :

$$-A\omega^2 \sin \omega t + k_i^2 A \sin \omega t = \frac{M_0}{J_*} \sin \omega t \Rightarrow A = \frac{M_0}{J_* (k_i^2 - \omega^2)}.$$

В итоге решение уравнения (1.14) записываем в виде

$$\psi = C_1 \cos k_i t + C_2 \sin k_i t + \frac{M_0}{J_* (k_i^2 - \omega^2)} \sin \omega t, \quad (1.17)$$

откуда

$$\dot{\psi} = -C_1 k_i \sin k_i t + C_2 k_i \cos k_i t + \frac{M_0 \omega}{J_* (k_i^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (1.18)$$

При начальных условиях $\psi(0) = \psi_0$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$ равенства (1.17) и (1.18) позволяют найти постоянные C_1 и C_2 :

$$\psi_0 = C_1, \quad \dot{\psi}_0 = C_2 k_i + \frac{M_0 \omega}{J_* (k_i^2 - \omega^2)} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{k_i} \left(\dot{\psi}_0 - \frac{M_0 \omega}{J_* (k_i^2 - \omega^2)} \right),$$

после чего выражение (1.17) переписывают в виде

$$\psi = \psi_0 \cos k_i t + \frac{1}{k_i} \left(\dot{\psi}_0 - \frac{M_0 \omega}{J_* (k_i^2 - \omega^2)} \right) \sin k_i t + \frac{M_0}{J_* (k_i^2 - \omega^2)} \sin \omega t. \quad (1.19)$$

Соотношение (1.19) является решением задачи о вынужденных колебаниях под действием возмущающего момента.

Пусть теперь на ползун действует возмущающая сила

$$F_y = \begin{cases} F_0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Решение на промежутке времени $0 \leq t \leq T$ зависит от вида обобщенной силы, которую создает ненулевая сила F_y , при $t > T$ возмущающая сила обращается в ноль и система начинает совершать свободные колебания. При этом следует учесть, что $\psi(T)$, $\dot{\psi}(T)$, соответствующие решению на промежутке времени $t \in [0, T]$, задают начальные условия свободных колебаний при $t > T$.

Перемещение ползуна определяется зависимостью

$$y_C = 2a \cos \varphi = 2a \cos(\varphi_{\text{рв}} + \psi),$$

следовательно, $\delta y_C = -2a \sin(\varphi_{\text{рв}} + \psi) \delta \psi$, и возможная работа силы F_y при $t \in [0, T]$ принимает вид $\delta A = F_0 \delta y_C = -F_0 \cdot 2a \sin(\varphi_{\text{рв}} + \psi) \delta \psi$. Откуда обобщенная сила

$$\begin{aligned} Q(F_y) &= -F_0 \cdot 2a \sin(\varphi_{\text{рв}} + \psi) = -F_0 \cdot 2a (\sin \varphi_{\text{рв}} \cos \psi + \cos \varphi_{\text{рв}} \sin \psi) \approx \\ &\approx -F_0 \cdot 2a (\sin \varphi_{\text{рв}} + \cos \varphi_{\text{рв}} \cdot \psi). \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение движения системы:

$$\begin{aligned} J_* \ddot{\psi} + c_i \psi &= -F_0 \cdot 2a \sin \varphi_{\text{рв}} - F_0 \cdot 2a \cos \varphi_{\text{рв}} \cdot \psi, \\ J_* \ddot{\psi} + (c_i + F_0 \cdot 2a \cos \varphi_{\text{рв}}) \psi &= -F_0 \cdot 2a \sin \varphi_{\text{рв}}, \\ \ddot{\psi} + \frac{(c_i + F_0 \cdot 2a \cos \varphi_{\text{рв}})}{J_*} \psi &= -\frac{F_0 \cdot 2a \sin \varphi_{\text{рв}}}{J_*}. \end{aligned}$$

Его решение:

$$\psi_1 = C_1 \cos \tilde{k}_i t + C_2 \sin \tilde{k}_i t - \frac{2F_0 a \sin \varphi_{\text{рв}}}{c_i + 2F_0 a \cos \varphi_{\text{рв}}}, \quad \tilde{k}_i = \sqrt{\frac{c_i + 2F_0 a \cos \varphi_{\text{рв}}}{J_*}}.$$

Подстановка начальных условий $\psi(0) = \psi_0$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$ позволяет определить C_1 и C_2 , после чего решение уравнения движения принимает вид

$$\psi_1 = \frac{\dot{\psi}_0}{\tilde{k}_i} \sin \tilde{k}_i t + \left(\psi_0 + \frac{2F_0 a \sin \varphi_{\text{рв}}}{c_i + 2F_0 a \cos \varphi_{\text{рв}}} \right) \cos \tilde{k}_i t - \frac{2F_0 a \sin \varphi_{\text{рв}}}{c_i + 2F_0 a \cos \varphi_{\text{рв}}}.$$

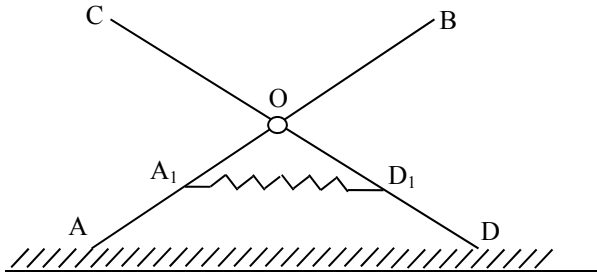
При $t > T$ сила F_y обращается в ноль, и движение системы описывается уравнением свободных колебаний (1.12), в решении которого (1.13) следует заменить t на разность $t - T$:

$$\psi_2 = \psi_1(T) \cos k_i(t - T) + \frac{\dot{\psi}_1(T)}{k_i} \sin k_i(t - T). \quad (1.20)$$

Отметим, что зависимость (1.20) имеет место, если $\psi_1(T)$ и $\dot{\psi}_1(T)$ не удовлетворяют условиям равновесия системы.

1.3. Варианты заданий

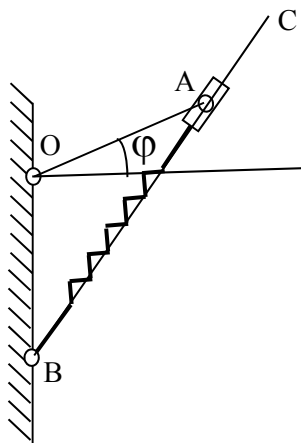
Вариант 1. Однородные стержни AB и DC длиной 2ℓ и весом P каждый соединены между собой шарниром O и пружиной A_1D_1 , жесткость которой равна c , $AA_1 = A_1O = OD_1 = D_1D = \ell/2$. Стержни установлены на горизонтальном основании, как показано на чертеже.



Определить:

- 1) длину недеформированной пружины, если в положении равновесия $\varphi = 45^\circ$; основание считать абсолютно гладким;
- 2) условие устойчивости указанного положения равновесия;
- 3) период малых свободных колебаний системы около указанного положения равновесия;
- 4) вынужденные малые колебания системы, если основание совершает вертикальные колебания по закону $y = A \sin \omega t$ ($A\omega^2 < g$) и к точкам A и D приложены силы сопротивления: $\Phi_A = -bv_A$, $\Phi_D = -bv_D$.

Вариант 2. В кривошипно-кулисном механизме кривошип OA и кулиса BC – однородные стержни весом P и $2P$ соответственно, $OA = OB = \ell$, $BC = 2\ell$, вес ползуна равен P , жесткость пружины c . Механизм находится в вертикальной плоскости.



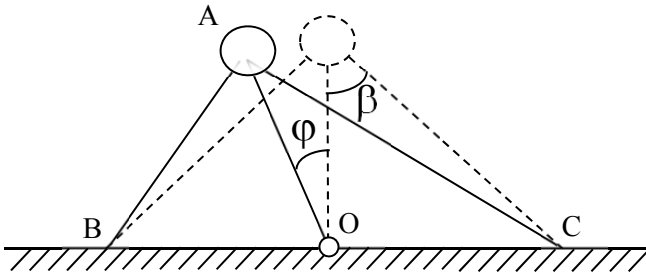
Определить:

- 1) длину недеформированной пружины, если в одном из положений равновесия $\varphi = 0$;
- 2) условия устойчивости указанного положения равновесия, а также положения равновесия при $\varphi = 90^\circ$;
- 3) период малых свободных колебаний системы около положения равновесия $\varphi = 0$;

4) вынужденные малые колебания системы около положения $\varphi = 0$ под действием приложенного к кривошипу момента $M = M_0 \sin \omega t$ и с учетом силы трения между ползуном и кулисой $\Phi = -bv_{Ar}$, где v_{Ar} – скорость ползуна относительно кулисы;

5) наибольшее значение амплитуды вынужденных колебаний.

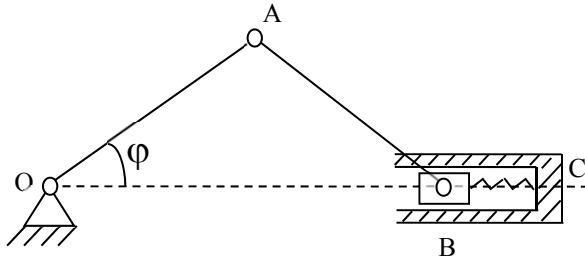
Вариант 3. Груз весом P , находящийся на конце невесомого стержня OA длиной ℓ , удерживается в вертикальном положении при помощи двух упругих оттяжек AB и AC , расположенных в одной плоскости со стержнем и образующих с ним углы $\beta = 30^\circ$. При вертикальном положении стержня оттяжки не напряжены, жесткость каждой из них равна c и на сжатие не работает.



Определить:

- 1) условие устойчивости вертикального положения стержня;
- 2) уравнение малых вынужденных колебаний груза, если на него действует горизонтальная сила $F_x = F_0 + F_1 \cos \omega t$;
- 3) условие, которому должна удовлетворять жесткость оттяжки, чтобы не наблюдалось явление резонанса;
- 4) уравнение малых вынужденных колебаний груза под действием приложенной к нему горизонтальной ударной силы, импульс которой равен S и которая повторяется через каждые τ , с.

Вариант 4. Кривошипно-шатунный механизм установлен в вертикальной плоскости; кривошип и шатун – однородные стержни длиной ℓ и весом P каждый, вес ползуна B также равен P . К ползуну прикреплен пружина, конец которой C неподвижен. Длина пружины в свободном состоянии равна ℓ_0 , жесткость c .

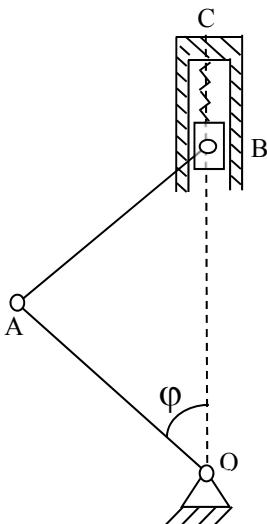


Определить:

- 1) расстояние OC , при котором равновесное положение системы соответствует углу $\varphi = 45^\circ$;
- 2) условие устойчивости данного положения равновесия;
- 3) период малых свободных колебаний системы около этого положения равновесия;
- 4) малые вынужденные колебания системы при условии:
 - а) на кривошип действует возмущающий момент $M = M_0 \sin \omega t$,
 - б) на ползун действует возмущающая сила

$$F_x = \begin{cases} F_0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases}$$

где T – период свободных колебаний системы.



Вариант 5. Кривошипно-шатунный механизм установлен в вертикальной плоскости; кривошип и шатун – однородные стержни длиной ℓ и весом P каждый, вес ползуна также равен P . Длина пружины в свободном состоянии равна ℓ_0 , жесткость c , расстояние $OC = 3\ell$.

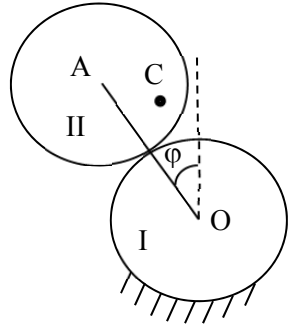
Определить:

- 1) равновесные положения механизма;
- 2) условие устойчивости равновесного положения системы при $\varphi = 0$;
- 3) период малых колебаний системы около указанного положения равновесия;
- 4) вынужденные малые колебания системы около положения равновесия $\varphi = 0$ при условии:

а) на кривошип действует возмущающий момент $M = M_0 \sin \omega t$,
а на ползун – сила сопротивления $\Phi_B = -bv_B$,

б) основание, на котором установлен механизм, совершает поступательное движение в горизонтальном направлении по закону $x = A \sin \omega t$.

Вариант 6. Эпициклический механизм состоит из неподвижного колеса I радиуса $r_1 = r$, однородного водила OA весом P и подвижного колеса II радиусом $r_2 = r$ и весом P_2 . Центр тяжести подвижного колеса находится на расстоянии от его оси ($AC = \ell$). Момент инерции этого колеса относительно его оси J . В одном из равновесных состояний механизма центр тяжести кривошипа занимает крайнее верхнее положение, а центр тяжести подвижного колеса лежит ниже точки A .



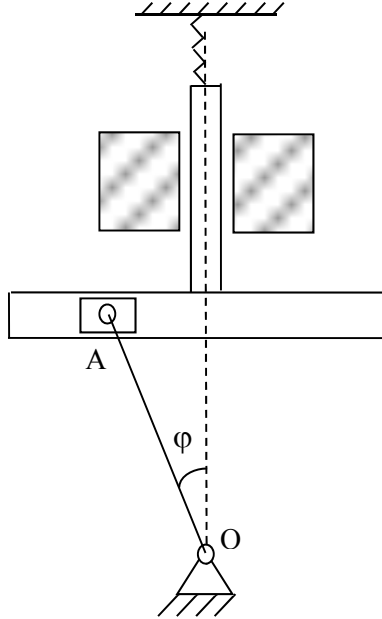
Определить:

- 1) условие устойчивости указанного положения равновесия;
- 2) период малых свободных колебаний системы около данного положения равновесия;
- 3) вынужденные колебания системы при условии, что на кривошип OA действует возмущающий момент

$$M = \begin{cases} M_0 & \text{при } (n-1)T \leq t \leq nT, \\ -M_0 & \text{при } nT \leq t \leq (n+1)T, \end{cases}$$

где M_0 – малая величина, T – период свободных колебаний системы, $n = 1, 2, 3, \dots$, а на планетарное колесо – силы сопротивления (силы поверхностного трения, приложенные с обеих сторон колеса, причем элементарная сила сопротивления равна $\Delta\Phi_i = -bv_i \Delta S_i$, где v_i – скорость элемента ΔS_i поверхности колеса, к которому приложена сила $\Delta\Phi_i$).

Вариант 7. Кулиса весом P_1 поддерживается пружиной жесткости c ; вес камня A равен P_2 . Кривошип – однородный стержень весом P_3 и длиной ℓ . В крайнем верхнем положении пружина недеформирована.



Определить:

- 1) равновесные положения механизма и их устойчивость (исследовать);
- 2) период малых колебаний системы около устойчивого положения равновесия, отвечающего $\varphi = 60^\circ$;
- 3) вынужденные малые колебания системы около указанного положения равновесия, если на кривошип действует возмущающий момент

$$M = \begin{cases} M_0 & \text{при } (n-1)T \leq t \leq nT, \\ 0 & \text{при } nT \leq t \leq (n+1)T, \end{cases}$$

где M_0 – малая величина, T – период свободных колебаний системы. Кроме того, действует сила сопротивления, приложенная к кулисе и равная $\Phi = -bv_{Ay}$.

Вариант 8. Маятник представляет собой однородный стержень OA длиной R и весом P . Конец A стержня поддерживается пружиной, другой конец которой прикреплен к точке B , расположенной на одной вертикали с точкой O . Длина пружины в свободном состоянии ℓ , а жесткость c , $OB = OA = \ell$.

Определить:

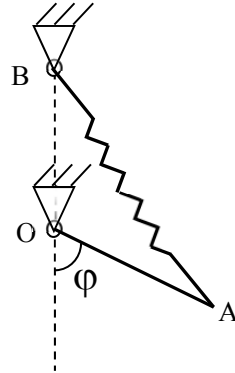
1) при каком условии крайнее нижнее положение маятника будет устойчивым;

2) период малых свободных колебаний около крайнего нижнего его положения;

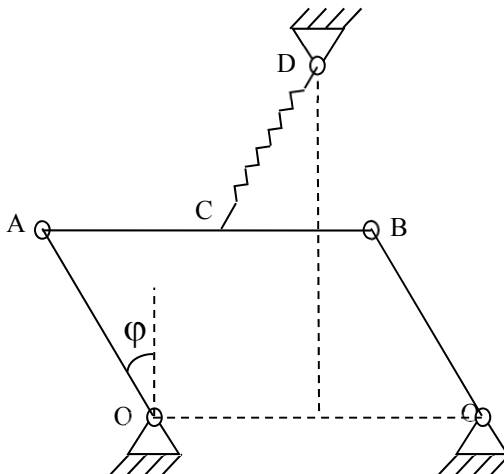
3) вынужденные малые колебания маятника, если на него действует горизонтальная возмущающая сила, приложенная к точке A и изменяющаяся по закону $F_y = P \sin \omega t$, а также силы сопротивления, которые направлены перпендикулярно стержню. Элементарная сила сопротивления равна $\Delta \Phi_i = -bv_i \Delta \ell_i$, где v_i – скорость произвольной точки стержня, $\Delta \ell_i$ – длина элементарного отрезка стержня;

4) малые колебания стержня при нулевых начальных условиях, если на него действует горизонтальная возмущающая сила, приложенная в точке A и изменяющаяся по закону

$$F_y = \begin{cases} P & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$



Вариант 9. Однородный стержень AB длиной ℓ и весом P соединен шарнирами A и B с однородными стержнями, длины которых ℓ и вес P .



В середине AB , в точке C , прикреплена пружина DC , жесткость которой равна c . В крайнем верхнем положении механизма пружина имеет длину ℓ .

Определить:

1) какому условию должна удовлетворять длина недеформированной пружины, чтобы крайнее верхнее положение механизма было устойчивым;

2) период малых свободных колебаний около положения $\varphi = 0$;

3) вынужденные малые колебания системы около положения $\varphi = 0$, если к точке A приложены:

а) горизонтальная возмущающая сила, изменяющаяся по закону

$$F = \begin{cases} F & \text{при } nT \leq t \leq (n+1)T, \\ -F & \text{при } (n+1)T \leq t \leq (n+2)T; \end{cases}$$

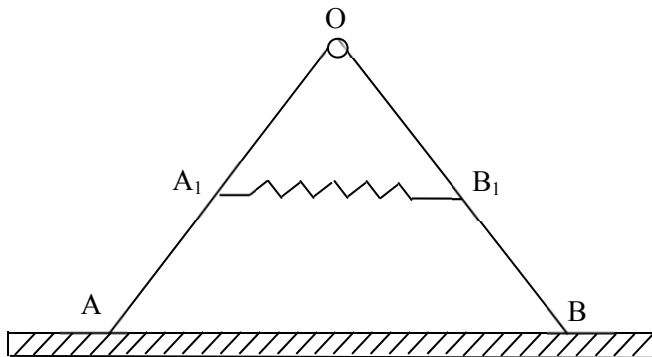
б) сила сопротивления $\Phi_A = -bv_A$;

4) малые колебания системы под действием горизонтальной возмущающей силы

$$F = \begin{cases} F & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Начальные условия нулевые.

Вариант 10. Однородные стержни AO и OB длиной 2ℓ и весом P каждый соединены между собой шарниром O и пружиной A_1B_1 , жесткость которой c , $AA_1 = A_1O = OB_1 = B_1B$. Стержни установлены на горизонтальном основании, как показано на чертеже.



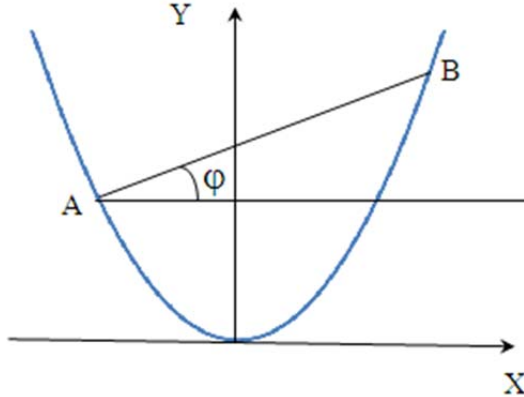
Определить:

- 1) длину недеформированной пружины, если в положении равновесия $\varphi = 30^\circ$; основание считать абсолютно гладким;
- 2) условие устойчивости указанного положения равновесия;
- 3) период малых свободных колебаний системы, если к точке O приложена вертикальная возмущающая сила \mathbf{F} , а к точкам A и B – силы сопротивления Φ_A и Φ_B , причем

$$F_y = \begin{cases} -F_0 & \text{при } (n-1)T \leq t \leq nT, \\ 0 & \text{при } nT \leq t \leq (n+1)T, \end{cases}$$

где T – период свободных колебаний системы; $\Phi_A = -bv_A$, $\Phi_B = -bv_B$.

Вариант 11. Однородный стержень весом P и длиной ℓ может скользить концами A и B по параболе $y = x^2/a$, расположенной в вертикальной плоскости.



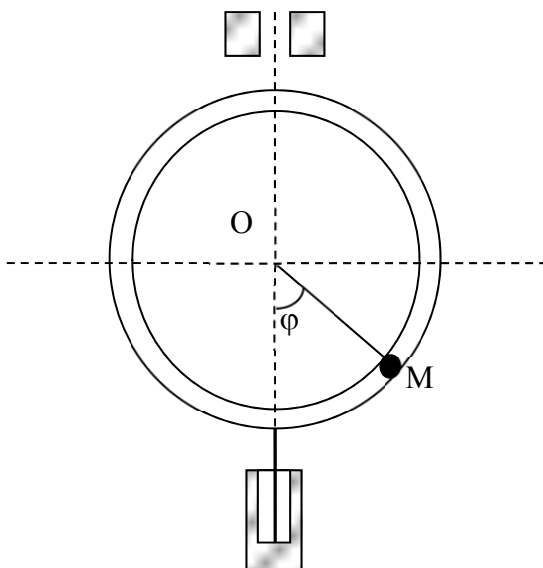
Определить:

- 1) положение равновесия стержня (силы трения в точках A и B не учитывать);
- 2) условия устойчивости этих положений;
- 3) периоды свободных колебаний стержня около найденных устойчивых положений равновесия;
- 4) вынужденные малые колебания стержня около положения равновесия $\varphi \neq 0$ под действием вертикальной возмущающей силы \mathbf{F} ,

приложенной к центру масс стержня, и сил сопротивления Φ_A и Φ_B , приложенных к точкам A и B , причем $F_y = F_0 \sin \omega t$, $\Phi_A = -bv_A$, $\Phi_B = -bv_B$;

5) наибольшее значение амплитуды вынужденных колебаний.

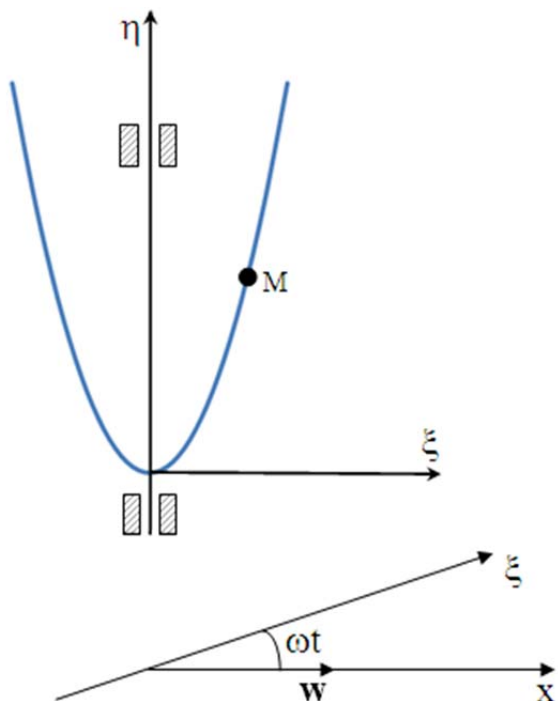
Вариант 12. Окружность радиусом R вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. По окружности без трения может скользить материальная точка M , имеющая массу m .



Определить:

- 1) равновесные положения точки в ее движении относительно окружности и исследовать устойчивость этих положений;
- 2) периоды свободных малых колебаний точки около устойчивых положений равновесия;
- 3) малые вынужденные колебания точки около устойчивых положений равновесия, если окружность совершает еще колебания вдоль вертикали по закону $x = A \sin \omega t$, а на точку действует сила сопротивления $\Phi = -bv_r$, где v_r – скорость точки относительно окружности.

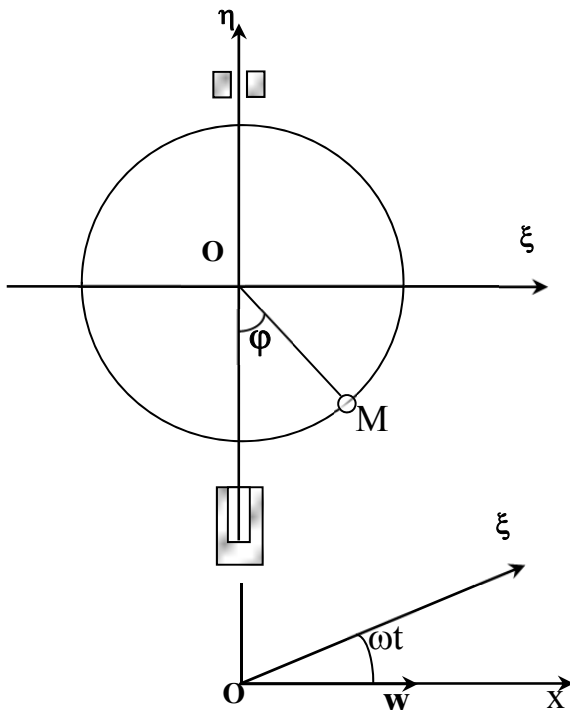
Вариант 13. Парабола $\eta = \xi^2/a$ вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси $O\eta$. По параболе может скользить без трения материальная точка M , имеющая массу m .



Определить:

- 1) равновесные положения точки в ее движении относительно параболы;
- 2) устойчивость этих положений;
- 3) периоды свободных малых колебаний точки около устойчивых положений равновесия;
- 4) малые вынужденные колебания точки около устойчивых положений равновесия, если ось вращения $O\eta$ совершает еще поступательное движение вдоль оси Ox с постоянным ускорением w , а на точку действует сила сопротивления $\Phi = -bv_r$, где v_r – скорость точки относительно параболы.

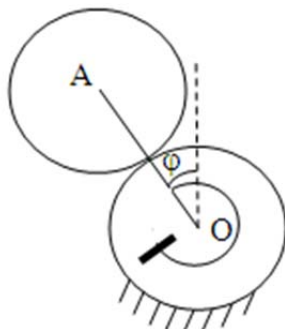
Вариант 14. Окружность радиусом R равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси $O\eta$. По окружности может скользить без трения материальная точка M , имеющая массу m .



Определить:

- 1) равновесные положения точки в ее движении относительно окружности;
- 2) устойчивость этих положений;
- 3) периоды свободных малых колебаний точки около устойчивых положений равновесия;
- 4) малые вынужденные колебания точки около устойчивого положения равновесия $\varphi = 0$, если ось вращения окружности $O\eta$ движется поступательно вдоль оси Ox с постоянным ускорением w , а на точку действует сила сопротивления $\Phi = -b\mathbf{v}_r$, где \mathbf{v}_r – скорость точки относительно окружности.

Вариант 15. Однородное подвижное зубчатое колесо массой m и радиусом r находится во внешнем зацеплении с неподвижным колесом того же радиуса. На кривошип OA , весом которого можно пренебречь, действует момент спиральной пружины $M_{пр} = -c\varphi$. Одно из положений равновесия соответствует углу $\varphi = 45^\circ$.



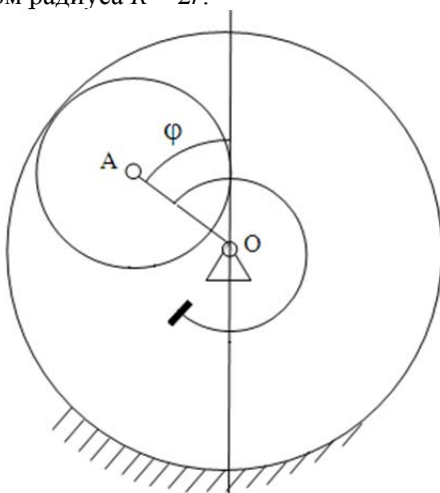
Определить:

- 1) коэффициент жесткости пружины c ;
- 2) условие устойчивости указанного положения равновесия;
- 3) период малых колебаний T механизма около указанного положения равновесия;
- 4) вынужденные малые колебания механизма около положения $\varphi = 45^\circ$, если на кривошип действует возмущающий момент

$$M_{oz} = \begin{cases} M & \text{при } (n-1)T \leq t \leq nT, \\ -M & \text{при } nT \leq t \leq (n+1)T, \end{cases}$$

а на торцевую поверхность колеса действуют силы сопротивления. Элементарная сила сопротивления равна: $\Delta F_{ci} = -bv_i \Delta s_i$, где v_i – скорость произвольной точки колеса.

Вариант 16. Однородное подвижное зубчатое колесо массой m и радиусом r находится во внутреннем зацеплении с неподвижным зубчатым колесом радиуса $R = 2r$.



Кривошип OA , весом которого можно пренебречь, удерживается в вертикальном верхнем положении спиральной пружиной, создающей момент $M_{\text{пр}} = -c\varphi$.

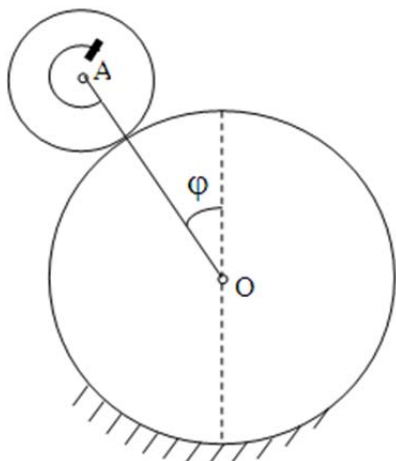
Определить:

- 1) равновесные положения механизма, если $c > 2mgr$;
- 2) условия устойчивости равновесных положений механизма;
- 3) периоды малых колебаний механизма около устойчивых положений механизма;
- 4) вынужденные малые колебания механизма около устойчивого верхнего вертикального положения кривошипа, если на кривошип действует возмущающий момент

$$M_{oz} = \begin{cases} M & \text{при } (n-1)\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{nT}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{nT}{2} \leq t \leq (n+1)\frac{T}{2}, \end{cases}$$

где T – период свободных колебаний около рассматриваемого положения равновесия.

Вариант 17. Однородное подвижное зубчатое колесо массой m и радиусом r находится во внешнем зацеплении с неподвижным колесом радиуса $R = 2r$. Между планетарным колесом и кривошипом OA



поставлена спиральная пружина, создающая момент, пропорциональный углу поворота планетарного колеса относительно кривошипа (коэффициент пропорциональности c). В вертикальном верхнем положении кривошипа пружина находится в свободном состоянии.

Пренебрегая весом кривошип, определить:

- 1) равновесные положения механизма, если $c > \frac{3}{4}mgr$;
- 2) условия устойчивости этих положений;
- 3) периоды малых колебаний системы около устойчивых положений равновесия;

4) вынужденные малые колебания механизма около устойчивого верхнего вертикального положения кривошипа, если на кривошип действует

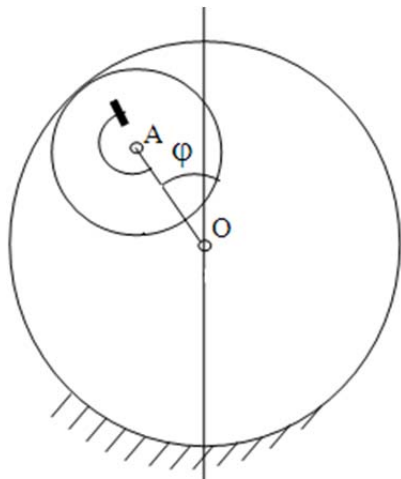
а) возмущающий момент

$$M_{oz} = \begin{cases} M & \text{при } (n-1)T \leq t \leq nT, \\ -M & \text{при } nT \leq t \leq (n+1)T, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

б) возмущающий момент

$$M_{oz} = \begin{cases} M & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$

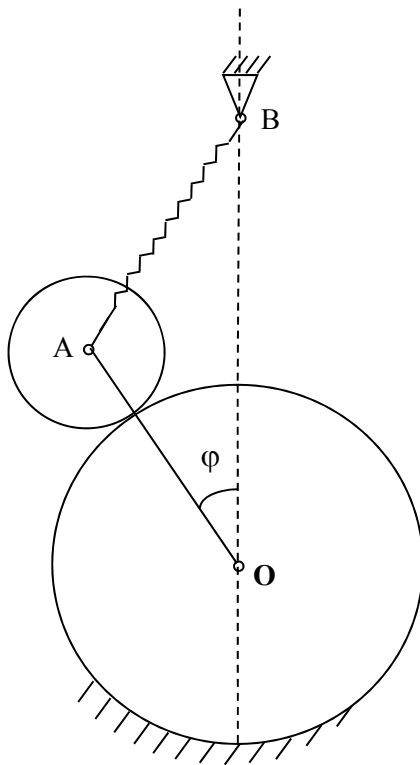
Вариант 18. Однородное подвижное зубчатое колесо массы m и радиуса r находится во внутреннем зацеплении с неподвижным зубчатый колесом радиуса $R = 2r$. Между подвижным колесом и кривошипом OA поставлена спиральная пружина, создающая момент, пропорциональный углу поворота планетарного колеса относительно кривошипа (коэффициент пропорциональности c). В одном из равновесных положений механизма $\varphi = \pi/6$.



Определить, пренебрегая весом кривошипа:

- 1) коэффициент пропорциональности c , если в вертикальном верхнем положении кривошипа пружина находится в свободном состоянии;
- 2) условие устойчивости данного положения равновесия;
- 3) период малых колебаний системы около этого положения равновесия;
- 4) вынужденные колебания системы, если на кривошип действует момент $M_z = M_0 \sin \omega t$, а на колесо – сила сопротивления; сила сопротивления, приложенная к элементарной площадке ΔS_i колеса, равна $\Delta F_{ci} = -b v_i \Delta S_i$, где v_i – скорость точки, принадлежащей элементарной площадке ΔS_i .

Вариант 19. Однородное подвижное зубчатое колесо массой m и радиусом r находится во внешнем зацеплении с неподвижным колесом радиуса $R = 2r$. Ось подвижного колеса поддерживается пружиной AB , жесткость которой равна c , и конец B находится на одной вертикали с центром O неподвижного колеса $OB = 2OA = 6r$.



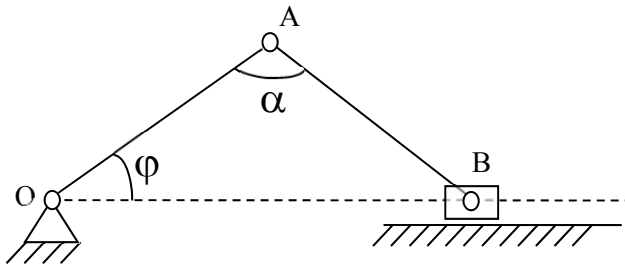
Пренебрегая весом кривошипа OA , определить:

- 1) длину пружины в свободном состоянии, при которой положение равновесия $\varphi = 0$ является устойчивым;
- 2) период T свободных малых колебаний системы около данного положения равновесия;
- 3) вынужденные малые колебания системы около положения равновесия, если на кривошип действует возмущающий момент

$$M_{Oz} = \begin{cases} M & \text{для } (n-1)T \leq t \leq nT, \\ -M & \text{для } nT \leq t \leq (n+1)T, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

а на планетарное колесо – силы сопротивления; сила сопротивления, приложенная к элементарной площадке, равна $\Delta F_{ci} = -bv_i \Delta S_i$, где v_i – скорость точки элементарной площадки.

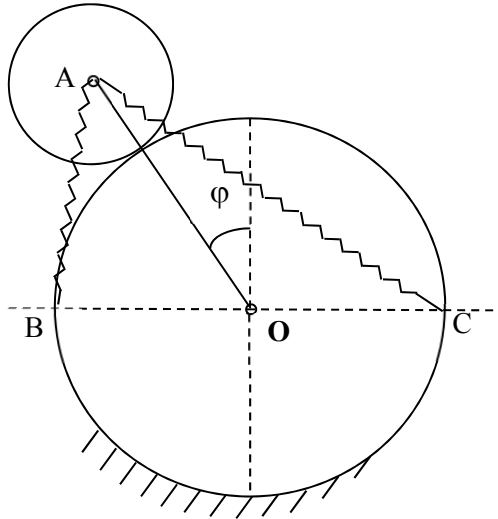
Вариант 20. Кривошипно-шатунный механизм расположен в вертикальной плоскости. Кривошип и шатун – однородные стержни весом P и длиной ℓ каждый, вес ползуна $2P$. Между кривошипом и шатуном поставлена спиральная пружина, которая создает момент, пропорциональный углу между ними: $M = c\alpha$ (угол $\alpha = \alpha_0 < \pi/3$ соответствует недеформированному состоянию пружины).



Определить:

- 1) коэффициент жесткости c спиральной пружины, если в положении равновесия $\varphi = \pi/3$;
- 2) условие устойчивости указанного положения равновесия, проверив, что найденная в п.1 жесткость пружины удовлетворяет этому условию устойчивости;
- 3) период малых свободных колебаний системы около положения равновесия;
- 4) вынужденные малые колебания системы, если на кривошип действует возмущающий момент $M_{Oz} = M_0 \sin \omega t$, а на ползун сила сопротивления $\Phi = -bv_B$.

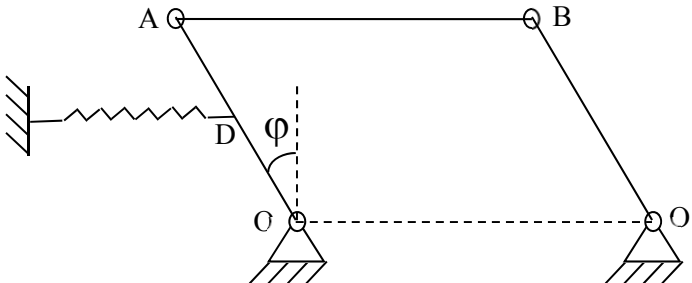
Вариант 21. Однородное зубчатое колесо массой m и радиусом r находится во внешнем зацеплении с неподвижным колесом радиуса $R = 2r$. К оси подвижного колеса прикреплены две одинаковые пружины, концы которых B и C расположены на горизонтальном диаметре неподвижного колеса. При $\varphi = 0$ пружины находятся в свободном состоянии.



Пренебрегая весом кривошипа OA , определить:

- 1) жесткость пружины, при которой положение $\varphi = 0$ является положением устойчивого равновесия;
- 2) период малых свободных колебаний системы около данного положения равновесия;
- 3) малые колебания системы около положения равновесия $\varphi = 0$ при нулевых начальных условиях, если на кривошип действует момент $M_z = M_0 e^{-t/T}$, где T – период свободных колебаний системы.

Вариант 22. Шарнирный параллелограмм состоит из трех одинаковых стержней длиной ℓ и весом P каждый. В середине звена OA к нему присоединена пружина, жесткость которой равна c .



Определить:

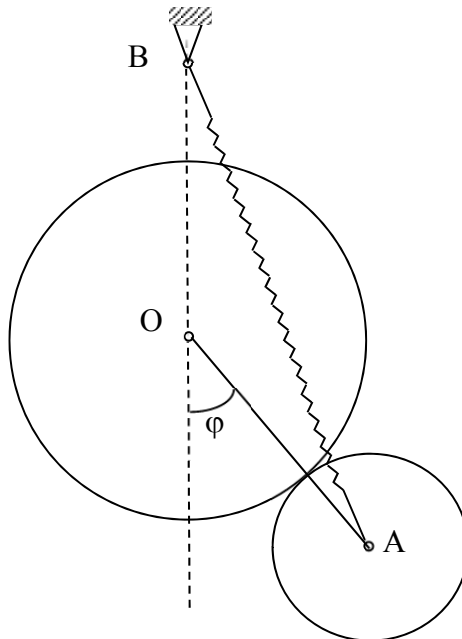
1) при каком условии положение механизма, отвечающее $\varphi = 0$, будет устойчивым;

2) период малых свободных колебаний механизма около положения $\varphi = 0$;

3) вынужденные малые колебания механизма под действием горизонтальной силы, приложенной в точке B и изменяющейся по закону $F_x = F_0 \sin \omega t$, а также сил сопротивления, распределенных по всем звеньям механизма. Сила сопротивления, приложенная к элементарному отрезку звена $\Delta \ell_i$, равна $\Delta \Phi_i = -b v_i \Delta \ell_i$, где v_i – скорость точки, принадлежащей элементарному отрезку;

4) колебания системы при нулевых начальных условиях, если в точке B приложена горизонтальная сила, изменяющаяся по закону $F_x = nt$ для $0 \leq t \leq T$, $F_x = 0$ для $t > T$, где T – период свободных колебаний системы.

Вариант 23. Однородное планетарное зубчатое колесо радиусом r и массой m находится во внешнем зацеплении с неподвижным колесом радиуса $R = 2r$.



Ось планетарного колеса поддерживается пружиной, другой конец которой B неподвижен и лежит на вертикали, проходящей через центр колеса O ($OB = OA$). Жесткость пружины и ее длина в свободном состоянии равны соответственно c и $2r$.

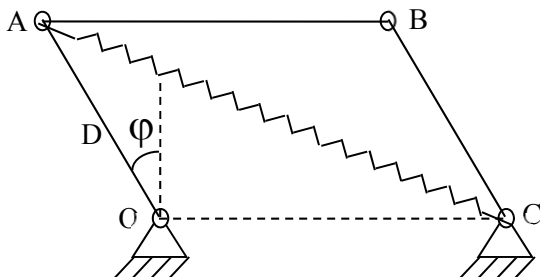
Пренебрегая весом кривошипа, определить:

- 1) равновесные положения системы;
- 2) условия существования и устойчивости равновесных положений;
- 3) период свободных колебаний системы около устойчивого равновесного положения $\varphi = 0$;
- 4) малые вынужденные колебания системы около положения $\varphi = 0$, если на планетарное колесо действует возмущающий момент

$$M_{Oz} = \begin{cases} M & \text{для } (n-1)T \leq t \leq nT, \\ -M & \text{для } nT \leq t \leq (n+1)T, \end{cases}$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$; T – период свободных малых колебаний системы около указанного положения равновесия.

Вариант 24. Шарнирный четырехзвенник $OABC$ состоит из однородных стержней, каждый из которых имеет длину ℓ и вес P . Пружина прикреплена к точкам A и C .



Определить:

- 1) какому условию должна удовлетворять жесткость пружины, чтобы крайнее верхнее положение механизма ($\varphi = 0$) было положением устойчивого равновесия;
 - 2) период малых свободных колебаний системы около указанного в п.1 устойчивого положения равновесия;
 - 3) вынужденные малые колебания системы около положения $\varphi = 0$, если к точке A приложены:
- а) горизонтальная возмущающая сила $F_x = P \sin \omega t$,

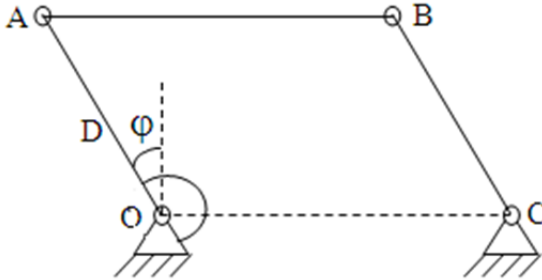
б) сила сопротивления $\Phi_A = -bv_A$;

4) малые колебания системы при нулевых начальных условиях под действием горизонтальной возмущающей силы, приложенной к точке A ,

$$F_x = \begin{cases} F & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases}$$

где T – период свободных колебаний системы.

Вариант 25. Шарнирный четырехзвенник $OABC$ состоит из однородных стержней, каждый из которых имеет длину ℓ и вес P . Спиральная пружина прикреплена одним концом к звену OA , а другим к основанию механизма; момент, создаваемый пружиной, пропорционален углу закручивания φ .



Определить:

1) какому условию должен удовлетворять коэффициент жесткости спиральной пружины с тем, чтобы крайнее верхнее положение механизма ($\varphi = 0$) было положением устойчивого равновесия;

2) период малых свободных колебаний системы около указанного в п.1 устойчивого положения равновесия;

3) вынужденные малые колебания системы около положения $\varphi = 0$, если на звено BC действует:

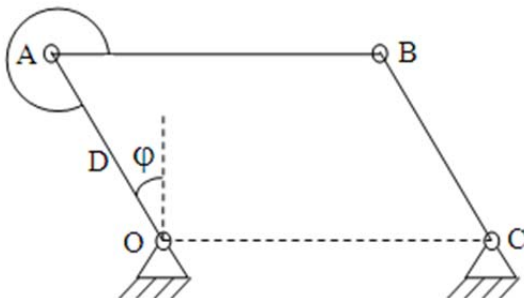
а) возмущающий момент $M_z = M_0 \sin \omega t$,

б) момент сил сопротивления $M_C = -b\omega_{BC}$;

4) малые колебания системы при нулевых начальных условиях под действием возмущающего момента, приложенного к звену BC ,

$$M = \begin{cases} M_0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Вариант 26. Шарнирный четырехзвенник $OABC$ состоит из однородных стержней, каждый из которых имеет длину ℓ и вес P . Спиральная пружина прикреплена одним концом к звену OA , другим – к звену AB ; момент, создаваемый пружиной, пропорционален углу ее закручивания.



Определить:

- 1) какому условию должен удовлетворять коэффициент жесткости пружины, чтобы крайнее верхнее положение механизма ($\varphi = 0$) было положением устойчивого равновесия;
- 2) период малых свободных колебаний системы около указанного в п.1 устойчивого положения равновесия;
- 3) вынужденные малые колебания системы около положения $\varphi = 0$, если на звено BC действует:

а) возмущающий момент

$$M_{Oz} = \begin{cases} M & \text{для } (n-1)T \leq t \leq nT, \\ -M & \text{для } nT \leq t \leq (n+1)T, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

б) момент сопротивления $M = -b\omega_{BC}$.

2. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

2.1. Краткие сведения из теории

Уравнения Лагранжа второго рода для систем с n степенями свободы при голономных и идеальных связях могут быть представлены в виде

— — — — —

Здесь $(q_1, \dots, q_n) = q^T$ – обобщенные координаты; $T = T(t, q, \dot{q})$ – кинетическая энергия системы; $\Pi = \Pi(t, q)$ – потенциальная энергия системы; $Q_{kн}$ – составляющие обобщенных сил, соответствующие неконсервативным силам, совершающим возможную работу.

Кинетическая энергия системы как функция обобщенных координат и их производных по времени

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q, t) \dot{q} + A_1^T(q, t) \dot{q} + A_0(q, t),$$

где $A(q, t) = \{a_{ij}(q, t)\}_{i,j=1}^n$ – матрица; $A_1(q, t)$ – вектор-столбец; $A_0(q, t)$ – скаляр. Если определитель $\det A(q, t) \neq 0$, то система уравнений (2.1) разрешима относительно обобщенных ускорений $\ddot{q}_k, k = 1, \dots, n$, т.е. представима в виде $\ddot{q}_k = f_k(t, q, \dot{q})$; $k = 1, \dots, n$, подготовленном для численного интегрирования.

Уравнения малых колебаний являются линеаризацией уравнений (2.1) в окрестности положения устойчивого равновесия системы.

1. *Автономные консервативные системы.* При стационарности связей и консервативных сил, совершающих возможную работу, кинетическая и потенциальная энергии равны

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q}, \quad \Pi = \Pi(q).$$

Положения равновесия соответствуют точкам, подозрительным на экстремум потенциальной энергии, т.е. при этом $q_k = q_{k*} = \text{const}$,

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \right|_{q=q_*} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

что позволяет найти положения равновесия системы.

Матрица

$$C_{n \times n} = \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q_*} \right\}_{i,j=1}^n$$

называется матрицей квазиупругих коэффициентов. Если она является положительно определенной, то в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет локальный изолированный минимум, и это положение равновесия автономной консервативной системы устойчиво. Если матрица C отрицательно определенная, то в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет локальный изолированный максимум, и это положение равновесия автономной консервативной системы неустойчиво. Данные условия – достаточные условия устойчивости или неустойчивости равновесия автономной консервативной системы.

Для установления положительной или отрицательной определенности матрицы C , а соответственно условий устойчивости или неустойчивости равновесия автономной консервативной системы может быть использован критерий Сильвестра. Если матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

то составим определители матриц левого верхнего угла этой матрицы:

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \dots, \Delta_n = \det C.$$

При а) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ матрица C положительно определенная и равновесие устойчиво; при б) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0$ и т.д. (знак определителей Δ_k чередуется) матрица C отрицательно определенная и равновесие неустойчиво.

Матрица $A(q_*) = \{a_{ij}(q_*)\}_{i,j=1}^n$, присутствующая в выражении кинетической энергии, называется матрицей инерционных коэффициентов. Уравнения малых колебаний автономной консервативной системы около положения устойчивого равновесия имеют вид

$$A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} = 0, \quad \bar{q} = q - q_*. \quad (2.2)$$

Решение системы (2.2) представимо в виде

$$\bar{q} = \sum_{k=1}^n V^{(k)} \sin(\omega_k t + \alpha_k). \quad (2.3)$$

Здесь $V^{(k)}$ – столбцы, т.е. $[V^{(k)}]^T = (V_1^{(k)}, V_2^{(k)}, \dots, V_n^{(k)})$; ω_k – корни уравнения $\det(C - \omega^2 A) = 0$, называемого уравнением частот, т.е. собственные частоты колебаний системы ($\omega_k^2 > 0$ при положительной определенности матриц A и C); $V^{(k)}$ удовлетворяют однородным системам уравнений с нулевым определителем

$$(C - \omega_k^2 A)V^{(k)} = 0; \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Окончательно все постоянные, входящие в решение (2.3), определяются из уравнений (2.4) и начальных условий.

Решению (2.3) соответствует наложение друг на друга колебаний с частотами, равными собственным частотам колебаний системы.

2. *Автономные неконсервативные системы.* При стационарности связей и сил, совершающих возможную работу, уравнения (2.1), подвергшиеся линеаризации в окрестности устойчивого равновесия, принимают вид

$$A\ddot{\bar{q}} + B\dot{\bar{q}} + \bar{C}\bar{q} = 0, \quad (2.5)$$

где $B_{n \times n} = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Решение системы (2.5) представимо в виде

$$\bar{q} = \sum_{k=1}^n V^{(k)} e^{\lambda_k t}. \quad (2.6)$$

Здесь λ_k – корни уравнения $\det(A\lambda^2 + B\lambda + \bar{C}) = 0$; столбцы $V^{(k)}$ удовлетворяют однородным системам уравнений с нулевым определителем

$$(A\lambda_k^2 + B\lambda_k + \bar{C})V^{(k)} = 0; \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Если λ_k – комплексные корни вида $\lambda_k = \beta_k \pm \omega_k i$, то соответствующий член в решении (2.6) может быть заменен на $V^{(k)} e^{\beta_k t} \sin(\omega_k t + \alpha_k)$, где $V^{(k)}$ удовлетворяют системе уравнений, получающейся из (2.7) отделением вещественной части от мнимой. Окончательно постоянные, входящие в (2.6), определяются из (2.7) и начальных условий.

Замечание. Если хотя бы у одного из корней $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, то это свидетельствует о неустойчивости равновесия.

Решению (2.6) соответствует возможное стремление к устойчивому равновесию с возможными колебаниями (в том числе затухающими).

3. *Вынужденные колебания.* После линеаризации уравнений (2.1) в окрестности положения устойчивого равновесия приходим к системе вида

$$A\ddot{\bar{q}} + B\dot{\bar{q}} + \bar{C}\bar{q} = Q_6(t), \quad (2.8)$$

где обобщенные силы, явно зависящие от времени, представили приближенно в виде вектор-столбца $Q_6(t)$. Решение $\bar{q}(t) = \bar{q}_{og}(t) + \bar{q}_6(t)$, где $\bar{q}_{og}(t)$ – общее решение соответствующей однородной системы (см. пп. 1, 2), описывающее свободные малые колебания; $\bar{q}_6(t)$ – частное решение неоднородной системы (2.8), соответствующее вынужденным колебаниям. Оно зависит от вида $Q_6(t)$.

Если $Q_6(t) = F_1 \sin pt + F_2 \cos pt$ (F_1, F_2 – n -мерные столбцы), то $\bar{q}_6(t) = E_1 \sin pt + E_2 \cos pt$. Столбцы E_1, E_2 находят из системы уравнений, получающейся подстановкой $\bar{q}_6(t)$ в (2.8):

$$\begin{aligned} (C - Ap^2)E_1 - BpE_2 &= F_1, \\ BpE_1 + (C - Ap^2)E_2 &= F_2. \end{aligned}$$

Для автономных консервативных систем при действии возмущающих сил

$$A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} = Q_6(t). \quad (2.9)$$

Если $Q_6(t) = F \sin pt$, то частное решение, соответствующее вынужденным колебаниям, можно искать в виде $\bar{q}_6(t) = E \sin pt$. Тогда из (2.9) следует

$$(C - Ap^2)E = F. \quad (2.10)$$

При $p \neq \omega_k$, $k = 1, \dots, n$ (одной из собственных частот колебаний системы) определитель линейной системы (2.10) ненулевой и

$$E = (C - Ap^2)^{-1}F.$$

Если $p = \omega_k$ (одной из собственных частот колебаний системы), то система (2.10) также может иметь решение, так как она неоднородна (это зависит от значений элементов столбца F). То есть при совпадении частоты возмущающей силы с одной из собственных частот колебаний для системы с несколькими степенями свободы резонанс может и не наступить (условие резонанса здесь зависит не только от частоты, но и от амплитуды возмущающих сил).

В резонансном случае $p = \omega_k$ решение ищется с использованием в $\bar{q}_6(t)$ членов вида $t^j \sin(pt + \alpha)$.

2.2. Пример выполнения задания

Рассмотрим вариант 24 (рис. 2.1). Возьмем $m_1 = m_2 = 0,6$ кг; $m_5 = m_6 = 0,1$ кг; $m_3 = 0,2$ кг; $m_4 = 0,1$ кг; $l = 0,7$ м; $a = 1$ м; $l_0 = 0,2$ м; $c = 7,5$ г Н/м; $c_1 = 10$ г Н/м; $l_1 = 0,56$ м; $b = 0,1$ Н · с/м.

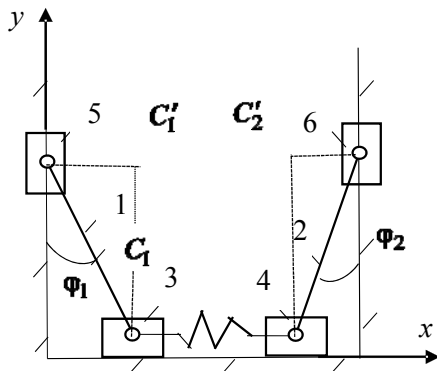


Рис. 2.1

1. Пусть обобщенные координаты – углы φ_1 и φ_2 , образуемые стержнями с вертикальными направляющими. Кинетическая энергия системы состоит из кинетических энергий тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6.$$

Для стержня 1 $T_1 = J_{C'_1 z'} \omega_1^2 / 2$. Момент инерции стержня 1 относительно оси, проходящей через его мгновенный центр скоростей C'_1 перпендикулярно плоскости движения, равен

$$J_{C'_1 z'} = J_{C_1 z} + m_1 |C_1 C'_1|^2 = \frac{m_1 l^2}{12} + m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_1 l^2,$$

поэтому $T_1 = m_1 l^2 \dot{\phi}_1^2 / 6$. Аналогично для стержня 2

$$T_2 = J_{C'_2 z'} \omega_2^2 / 2 = m_2 l^2 \dot{\phi}_2^2 / 6.$$

Для ползуна 3 $T_3 = m_3 v_3^2 / 2$. Составляющая скорости

$$v_{3x} = \dot{x}_3 = \frac{d}{dt} (l \sin \varphi_1) = l \cos \varphi_1 \cdot \dot{\phi}_1.$$

Поэтому $T_3 = m_3 l^2 (\cos \varphi_1)^2 \dot{\phi}_1^2 / 2$. Аналогично для ползуна 4

$$T_4 = m_4 v_4^2 / 2, v_{4x} = \dot{x}_4 = \frac{d}{dt} (a - l \sin \varphi_2) = -l \cos \varphi_2 \cdot \dot{\phi}_2$$

и $T_4 = m_4 l^2 (\cos \varphi_2)^2 \dot{\phi}_2^2 / 2$.

Для ползунов 5 и 6 $T_5 = m_5 v_5^2 / 2$,

$$v_{5y} = \dot{y}_5 = \frac{d}{dt} (l \cos \varphi_1) = -l \sin \varphi_1 \cdot \dot{\phi}_1$$

и $T_5 = m_5 l^2 (\sin \varphi_1)^2 \dot{\phi}_1^2 / 2$, $T_6 = m_6 v_6^2 / 2 = m_6 l^2 (\sin \varphi_2)^2 \dot{\phi}_2^2 / 2$.

В результате

$$T = \frac{\dot{\phi}_1^2}{2} l^2 \left(\frac{m_1}{3} + m_3 (\cos \varphi_1)^2 + m_5 (\sin \varphi_1)^2 \right) + \frac{\dot{\phi}_2^2}{2} l^2 \left(\frac{m_2}{3} + m_4 (\cos \varphi_2)^2 + m_6 (\sin \varphi_2)^2 \right). \quad (2.11)$$

Потенциальная энергия системы включает в себя члены, соответствующие консервативным силам тяжести тел и силе упругости пружины. Для сил тяжести

$$P_1 = m_1 g y_{C_1} + m_2 g y_{C_2} + m_3 g y_3 + m_4 g y_4 + m_5 g y_5 + m_6 g y_6.$$

Координаты центров масс стержней $y_{C_1} = \frac{l}{2} \cos \varphi_1$, $y_{C_2} = \frac{l}{2} \cos \varphi_2$, для ползунов $y_3 = y_4 = 0$, $y_5 = l \cos \varphi_1$, $y_6 = l \cos \varphi_2$. Поэтому

$$P_1 = gl \cos \varphi_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_5 \right) + gl \cos \varphi_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_6 \right).$$

Для силы упругости пружин $\Pi_2 = c\lambda^2/2 + c_1\lambda_1^2/2$, где деформация пружин $\lambda = a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0$, $\lambda_1 = l \cos \varphi_1 - l_1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Pi = & gl \cos \varphi_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_5 \right) + gl \cos \varphi_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_6 \right) + \\ & + \frac{c}{2} (a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0)^2 + \frac{c_1}{2} (l \cos \varphi_1 - l_1)^2. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа второго рода для рассматриваемой системы с двумя степенями свободы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k}; \quad k = 1, 2.$$

Выполняя дифференциальные операции для вычисления левых частей уравнений Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= \dot{\varphi}_1 l^2 \left(\frac{m_1}{3} + m_3 (\cos \varphi_1)^2 + m_5 (\sin \varphi_1)^2 \right); \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= \ddot{\varphi}_1 l^2 \left(\frac{m_1}{3} + m_3 (\cos \varphi_1)^2 + m_5 (\sin \varphi_1)^2 \right) + \\ &+ \dot{\varphi}_1^2 l^2 \cdot 2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 (m_5 - m_3); \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= \dot{\varphi}_1^2 l^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 (m_5 - m_3); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} &= \dot{\varphi}_2 l^2 \left(\frac{m_2}{3} + m_4 (\cos \varphi_2)^2 + m_6 (\sin \varphi_2)^2 \right); \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) &= \ddot{\varphi}_2 l^2 \left(\frac{m_2}{3} + m_4 (\cos \varphi_2)^2 + m_6 (\sin \varphi_2)^2 \right) + \\ &+ \dot{\varphi}_2^2 l^2 \cdot 2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 (m_6 - m_4); \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= \dot{\varphi}_2^2 l^2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 (m_6 - m_4). \end{aligned}$$

Обобщенные силы

$$\begin{aligned} Q_{\varphi_1} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = gl \sin \varphi_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_5 \right) + \\ &+ c(a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) l \cos \varphi_1 + c_1 l \sin \varphi_1 (l \cos \varphi_1 - l_1); \\ Q_{\varphi_2} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = gl \sin \varphi_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_6 \right) + \\ &+ c(a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) l \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

С учетом взятых численных данных уравнения Лагранжа примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 l^2 \left(\frac{m_1}{3} + m_3 (\cos \varphi_1)^2 + m_5 (\sin \varphi_1)^2 \right) - \dot{\varphi}_1^2 l^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 m_5 = \\ = gl \sin \varphi_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_5 \right) + c(a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) l \cos \varphi_1 + \\ + c_1 l \sin \varphi_1 (l \cos \varphi_1 - l_1); \\ \ddot{\varphi}_2 l^2 \left(\frac{m_2}{3} + m_4 (\cos \varphi_2)^2 + m_6 (\sin \varphi_2)^2 \right) = \\ = gl \sin \varphi_2 \left(\frac{m_2}{2} + m_6 \right) + c(a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) l \cos \varphi_2, \end{aligned}$$

или в разрешенном относительно обобщенных ускорений:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 = \frac{\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{3 + (\cos \varphi_1)^2} + \frac{4g \sin \varphi_1}{l(3 + (\cos \varphi_1)^2)} + \\ + \frac{c(a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) \cos \varphi_1}{m_5 l (3 + (\cos \varphi_1)^2)} + \frac{c_1 \sin \varphi_1 (l \cos \varphi_1 - l_1)}{m_5 l (3 + (\cos \varphi_1)^2)}; \\ \ddot{\varphi}_2 = \frac{4g \sin \varphi_2}{3l} + \frac{c(a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) \cos \varphi_2}{3lm_5}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В положении равновесия $\partial \Pi / \partial \varphi_1 = \partial \Pi / \partial \varphi_2 = 0$. Используя (2.12) найдем, что положения равновесия соответствуют углам $\varphi_{1*} = \varphi_{2*} = \arctg(3/4)$, т.е. $\sin \varphi_{1*} = 3/5$, $\cos \varphi_{1*} = 4/5$. Для выяснения устойчивости равновесия найдем вторые производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} = -4m_5 gl \cos \varphi_1 + \\ + c[l^2 (\cos \varphi_1)^2 + (a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) l \sin \varphi_1] + \\ + c_1 [l^2 (\sin \varphi_1)^2 - l \cos \varphi_1 (l \cos \varphi_1 - l_1)]; \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = cl^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2; \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} = -4m_5 gl \cos \varphi_2 + \\ + c[l^2 (\cos \varphi_2)^2 + (a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) l \sin \varphi_2]. \end{aligned}$$

Элементы матрицы квазиупругих коэффициентов

$$c_{11} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} |_{(\varphi_{1*}, \varphi_{2*})} = 4,942g, \quad c_{12} = c_{21} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} |_{(\varphi_{1*}, \varphi_{2*})} = 2,352g;$$

$$c_{22} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} |_{(\varphi_{1*}, \varphi_{2*})} = 2,002g,$$

т.е. матрица квазиупругих коэффициентов

$$C = \begin{pmatrix} 4,942g & 2,352g \\ 2,352g & 2,002g \end{pmatrix}.$$

Ее определители Сильвестра

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \det C = g^2[4,942 \cdot 2,002 - 2,352^2] > 0,$$

и найденное положение равновесия системы устойчиво.

В соответствии с видом кинетической энергии (2.11) элементы матрицы инерционных коэффициентов

$$a_{11} = l^2 \left(\frac{m_1}{3} + m_3 (\cos \varphi_1)^2 + m_5 (\sin \varphi_1)^2 \right) |_{\varphi_{1*}} = \frac{91}{25} m_5 l^2;$$

$$a_{12} = a_{21} = 0;$$

$$a_{22} = l^2 \left(\frac{m_2}{3} + m_4 (\cos \varphi_2)^2 + m_6 (\sin \varphi_2)^2 \right) |_{\varphi_{2*}} = 3m_5 l^2.$$

Приближенные уравнения малых колебаний в окрестности положения равновесия имеют вид

$$a_{11} \ddot{\varphi}_1 + c_{11}(\varphi_1 - \varphi_{1*}) + c_{12}(\varphi_2 - \varphi_{2*}) = 0;$$

$$a_{22} \ddot{\varphi}_2 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_{1*}) + c_{22}(\varphi_2 - \varphi_{2*}) = 0. \quad (2.14)$$

Для их решения прежде всего найдем собственные частоты колебаний системы из уравнения $\det(C - \omega^2 A) = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Решим полученное биквадратное уравнение относительно ω^2 :

$$\omega_1 = 6,655 \text{ c}^{-1}, \quad \omega_2 = 18,992 \text{ c}^{-1}.$$

Решение уравнений (2.14) имеет вид

$$\varphi_1 = \varphi_{1*} + V_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + V_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2);$$

$$\varphi_2 = \varphi_{2*} + V_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + V_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (2.15)$$

Так как

$$(c_{11} - \omega_1^2 a_{11})V_1^{(1)} + c_{12}V_2^{(1)} = 0 ,$$

$$(c_{11} - \omega_2^2 a_{11})V_1^{(2)} + c_{12}V_2^{(2)} = 0 ,$$

то при взятых исходных данных $V_2^{(1)} = 5,686 \cdot 10^{-1} V_1^{(1)} ;$

$$V_2^{(2)} = -1,417 V_1^{(2)} , \text{ т.е.}$$

$$\varphi_1 = \varphi_{1*} + V_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + V_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) ; \quad (2.16)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{2*} + 5,686 \cdot 10^{-1} V_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - 1,417 V_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Произвольные постоянные, входящие в решение (2.16), ищутся из начальных условий. Задав при $t = 0$: $\varphi_1 = \pi/6$, $\varphi_2 = \text{arctg}(3/4)$, $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$, получим

$$(\pi/6) - \text{arctg}(3/4) = V_1^{(1)} \sin \alpha_1 + V_1^{(2)} \sin \alpha_2 ,$$

$$0 = 5,686 \cdot 10^{-1} V_1^{(1)} \sin \alpha_1 - 1,417 V_1^{(2)} \sin \alpha_2 ;$$

$$0 = V_1^{(1)} \omega_1 \cos \alpha_1 + V_1^{(2)} \omega_2 \cos \alpha_2 ;$$

$$0 = 5,686 \cdot 10^{-1} V_1^{(1)} \omega_1 \cos \alpha_1 - 1,417 V_1^{(2)} \omega_2 \cos \alpha_2 .$$

Решим последнюю систему уравнений:

$$V_1^{(1)} \sin \alpha_1 = -8,556 \cdot 10^{-2}; \quad V_1^{(2)} \sin \alpha_2 = -3,433 \cdot 10^{-2} ;$$

$$V_1^{(1)} \cos \alpha_1 = V_1^{(2)} \cos \alpha_2 = 0 .$$

На основании (2.16) имеем приближенное решение

$$\varphi_1 = \text{arctg}(3/4) - 8,556 \cdot 10^{-2} \cos \omega_1 t - 3,433 \cdot 10^{-2} \cos \omega_2 t ; \quad (2.17)$$

$$\varphi_2 = \text{arctg}(3/4) - 4,866 \cdot 10^{-2} \cos \omega_1 t + 4,866 \cdot 10^{-2} \cos \omega_2 t .$$

Графики, соответствующие численному решению уравнений (2.13) и решениям (2.17), приведены на рис. 2.2 и 2.3. Колебания с частотами ω_1 и ω_2 накладываются друг на друга.

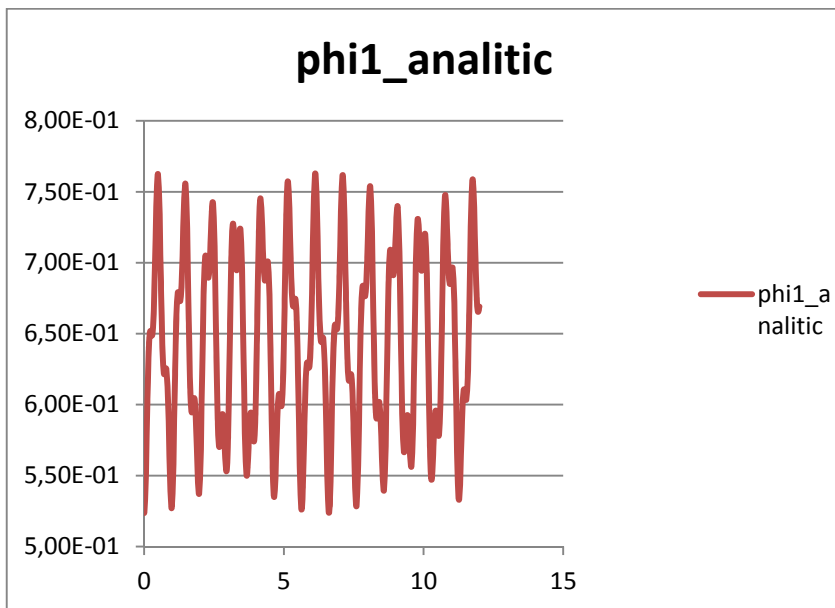
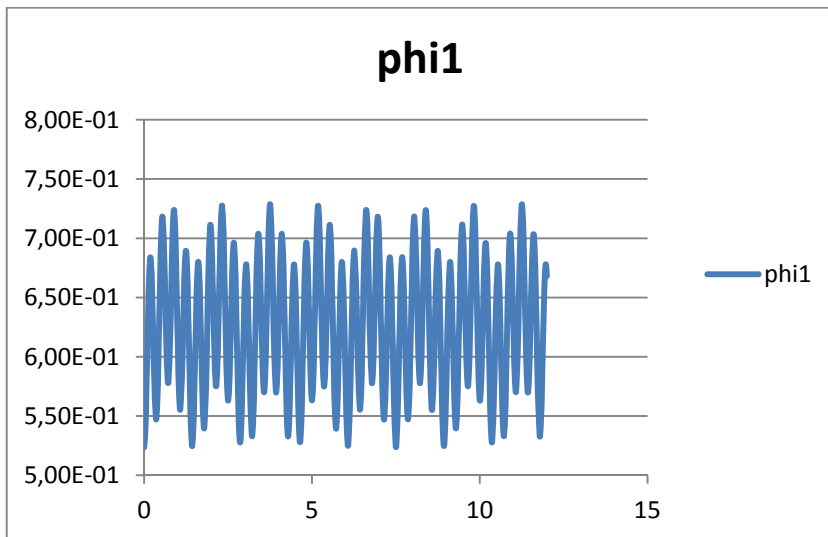


Рис. 2.2

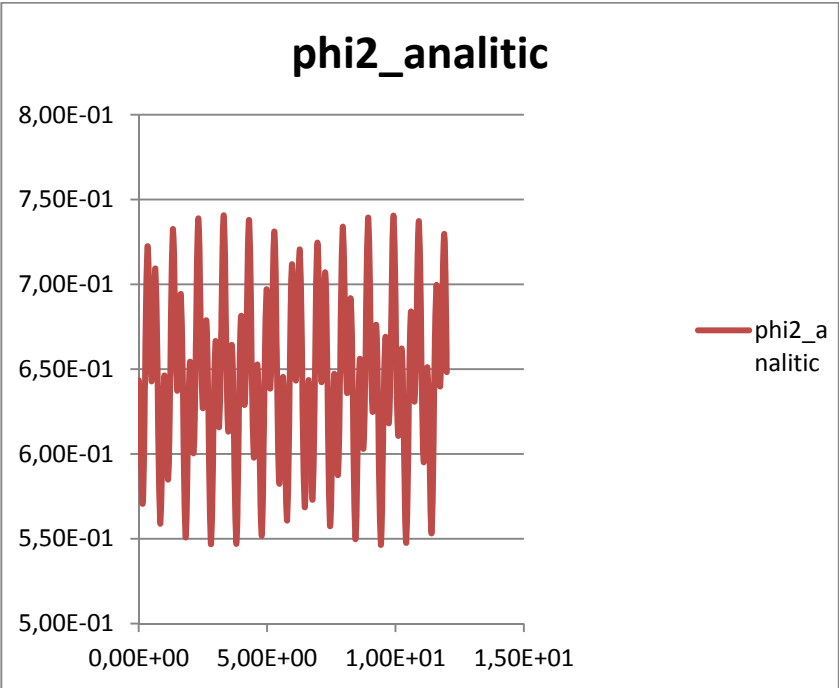
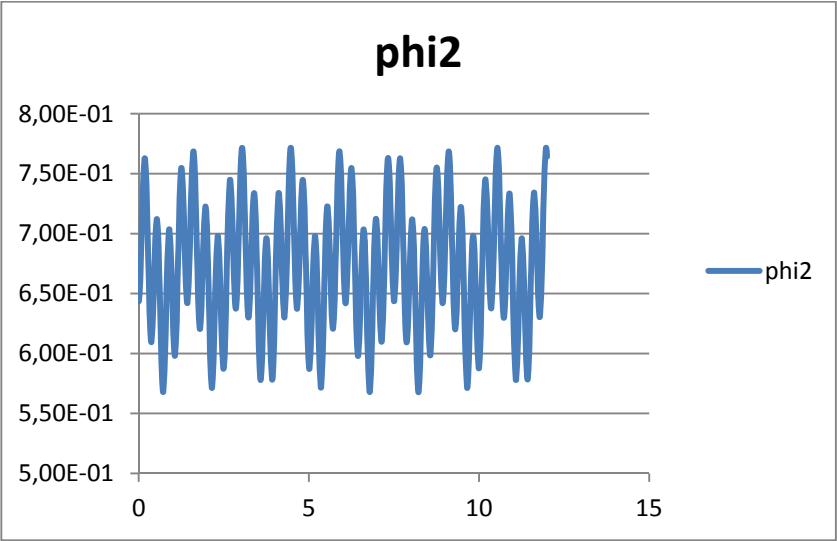


Рис. 2.3

2. Пусть на ползун 3 действует сила сопротивления движению $\vec{F}_3 = -b\vec{v}_3$. Ее возможная работа

$$\delta A_3 = -b\dot{x}_3\delta x_3 = -b\frac{d}{dt}(l\sin\varphi_1)\delta(l\sin\varphi_1) = -bl^2(\cos\varphi_1)^2\dot{\varphi}_1\delta\varphi_1.$$

Соответствующий член в выражении для обобщенной силы $Q_3 = -bl^2(\cos\varphi_1)^2\dot{\varphi}_1$, а его линейное приближение $Q_3 \approx -bl^2(\cos\varphi_{1*})^2\dot{\varphi}_1 = -0,64bl^2\dot{\varphi}_1$.

Уравнения (2.13) при наличии сопротивления примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 = & \frac{\dot{\varphi}_1^2 \cos\varphi_1 \sin\varphi_1}{3 + (\cos\varphi_1)^2} + \frac{4g \sin\varphi_1}{l(3 + (\cos\varphi_1)^2)} + \frac{c_1 \sin\varphi_1 (l \cos\varphi_1 - l_1)}{m_5 l (3 + (\cos\varphi_1)^2)} + \\ & + \frac{c(a - l \sin\varphi_1 - l \sin\varphi_2 - l_0) \cos\varphi_1}{m_5 l (3 + (\cos\varphi_1)^2)} - \frac{b(\cos\varphi_1)^2 \dot{\varphi}_1}{m_5 (3 + (\cos\varphi_1)^2)}; \\ \ddot{\varphi}_2 = & \frac{4g \sin\varphi_2}{3l} + \frac{c(a - l \sin\varphi_1 - l \sin\varphi_2 - l_0) \cos\varphi_2}{3lm_5}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Линеаризованные уравнения (аналог (2.14)) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{\varphi}_1 + c_{11}(\varphi_1 - \varphi_{1*}) + c_{12}(\varphi_2 - \varphi_{2*}) + 0,64bl^2\dot{\varphi}_1 = 0; \\ a_{22}\ddot{\varphi}_2 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_{1*}) + c_{22}(\varphi_2 - \varphi_{2*}) = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Решение системы (2.19) ищем в виде

$$\varphi_1 = \varphi_{1*} + \sum_{k=1}^2 V_1^{(k)} e^{\lambda_k t}, \quad \varphi_2 = \varphi_{2*} + \sum_{k=1}^2 V_2^{(k)} e^{\lambda_k t}.$$

Уравнение $\det(A\lambda^2 + B\lambda + \bar{C}) = 0$ принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + 0,64bl^2\lambda + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & a_{22}\lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \\ 10,92m_5^2 l^4 \lambda^4 + 1,92bm_5 l^4 \lambda^3 + \\ + 22,113 m_5 g l^2 \lambda^2 + 1,281 bgl^2 \lambda + 4,361 g^2 = 0, \text{ т.е.} \end{vmatrix}$$

$$\lambda^4 + 0,175 \lambda^3 + 405,005 \lambda^2 + 23,466 \lambda + 15977,948 = 0.$$

Его корни

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -6,313 \cdot 10^{-2} \pm 18,992 i, \\ \lambda_{3,4} &= -2,4775 \cdot 10^{-2} \pm 6,655 i. \end{aligned}$$

Решение системы (2.19) после перехода к вещественным функциям:

$$\varphi_1 = \varphi_{1*} + V_1^{(1)} e^{-2,477 \cdot 10^{-2} t} \sin(6,655 t + \alpha_1) + V_1^{(2)} e^{-6,313 \cdot 10^{-2} t} \sin(18,99 t + \alpha_2); \quad (2.20)$$

$$\varphi_2 = \varphi_{2*} + V_2^{(1)} e^{-2,477 \cdot 10^{-2} t} \sin(6,655 t + \alpha_1) + V_2^{(2)} e^{-6,313 \cdot 10^{-2} t} \sin(18,992 t + \alpha_2).$$

По-прежнему $V_2^{(1)} = 5,686 \cdot 10^{-1} V_1^{(1)}$; $V_2^{(2)} = -1,417 V_1^{(2)}$. При поставленных ранее начальных условиях

$$\begin{aligned} (\pi/6) - \arctg(3/4) &= V_1^{(1)} \sin \alpha_1 + V_1^{(2)} \sin \alpha_2, \\ 0 &= 5,686 \cdot 10^{-1} V_1^{(1)} \sin \alpha_1 - 1,417 V_1^{(2)} \sin \alpha_2; \\ 0 &= -2,477 \cdot 10^{-2} V_1^{(1)} \sin \alpha_1 + 6,655 V_1^{(1)} \cos \alpha_1 - \\ &\quad - 6,313 \cdot 10^{-2} V_1^{(2)} \sin \alpha_2 + 18,992 V_1^{(2)} \cos \alpha_2; \\ 0 &= -2,477 \cdot 10^{-2} \cdot (5,686 \cdot 10^{-1}) V_1^{(1)} \sin \alpha_1 + \\ &\quad + 6,655 \cdot (5,686 \cdot 10^{-1}) V_1^{(1)} \cos \alpha_1 - \\ &\quad - 6,313 \cdot 10^{-2} \cdot (-1,417) V_1^{(2)} \sin \alpha_2 + \\ &\quad + 18,992 \cdot (-1,417) V_1^{(2)} \cos \alpha_2, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} V_1^{(1)} \sin \alpha_1 &= -8,556 \cdot 10^{-2}; & V_1^{(2)} \sin \alpha_2 &= -3,433 \cdot 10^{-2}; \\ V_1^{(1)} \cos \alpha_1 &= -3,185 \cdot 10^{-4}; & V_1^{(2)} \cos \alpha_2 &= -1,141 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Тогда решение (2.20) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arctg(3/4) + e^{-2,477 \cdot 10^{-2} t} (-3,185 \cdot 10^{-4} \sin 6,655 t - \\ &\quad - 8,556 \cdot 10^{-2} \cos 6,655 t) + \\ &+ e^{-6,313 \cdot 10^{-2} t} (-1,141 \cdot 10^{-4} \sin 18,992 t - 3,433 \cdot 10^{-2} \cos 18,992 t); \quad (2.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \arctg(3/4) + e^{-2,477 \cdot 10^{-2} t} (-1,811 \cdot 10^{-4} \sin 6,655 t - \\ &\quad - 4,866 \cdot 10^{-2} \cos 6,655 t) + \\ &+ e^{-6,313 \cdot 10^{-2} t} (1,617 \cdot 10^{-4} \sin 18,992 t + 4,866 \cdot 10^{-2} \cos 18,992 t). \end{aligned}$$

Графики, соответствующие численному решению уравнений (2.18) и решению (2.21), показаны на рис. 2.4 и 2.5. Частоты затухающих колебаний из-за малости сопротивления близки к ω_1 и ω_2 , затухание колебаний идет достаточно медленно.

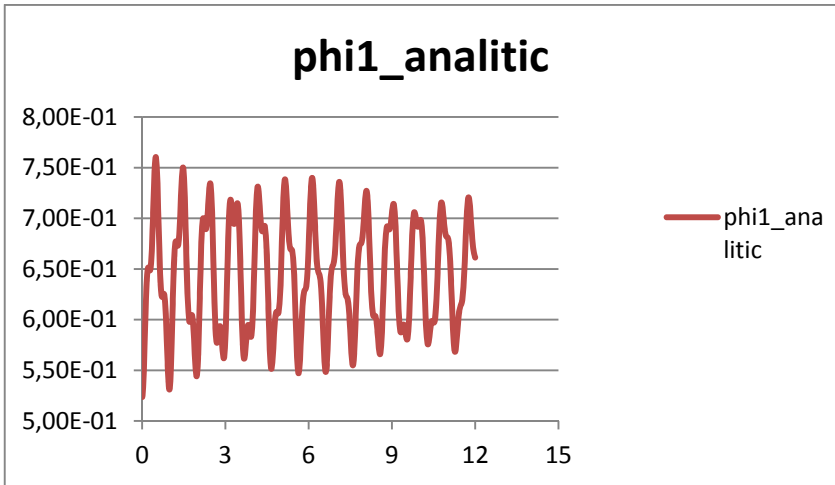
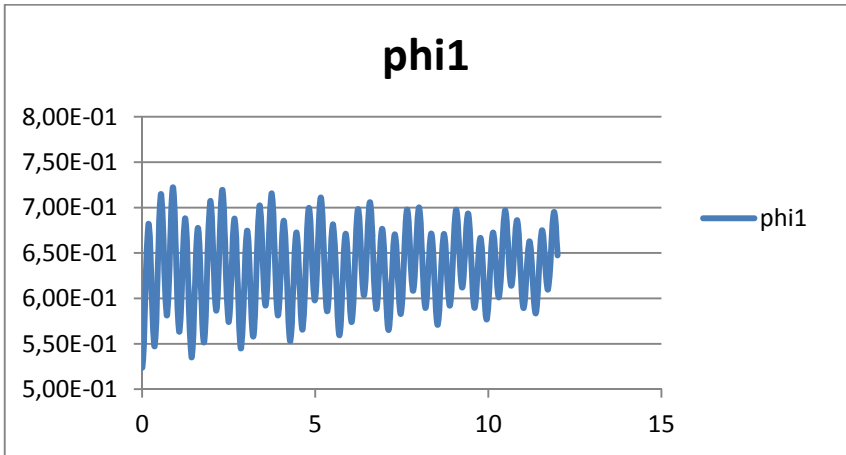


Рис. 2.4

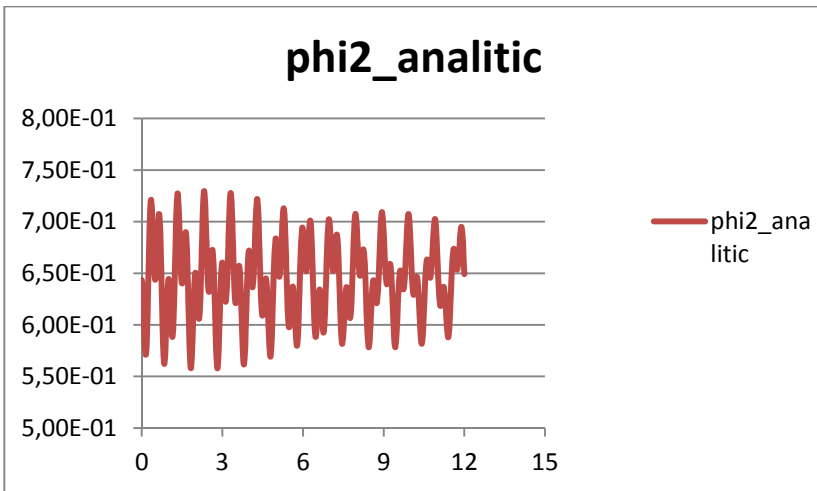
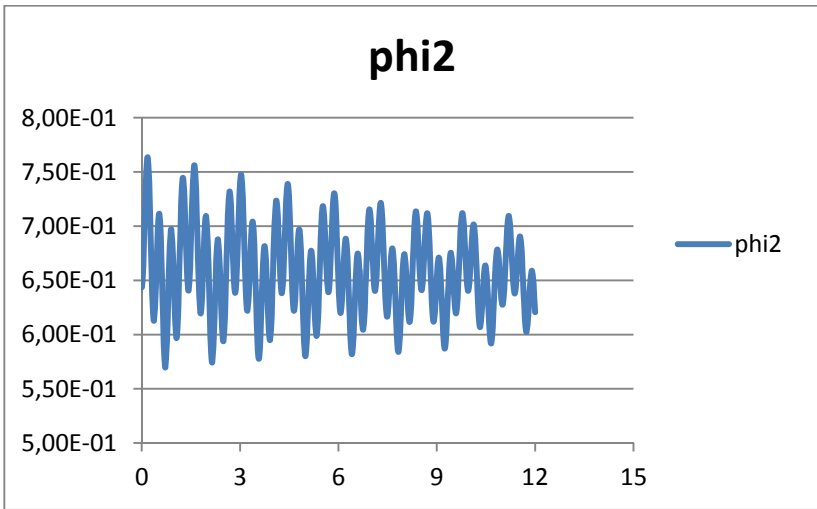


Рис. 2.5

3. Пусть на ползун 3 действует горизонтальная возмущающая сила $F_{3x} = F_0 \sin p_1 t$. Ее возможная работа

$$\delta A_B = F_0 \sin p_1 t \delta(l \sin \varphi_1) = F_0 \sin p_1 t \cdot l \cos \varphi_1 \cdot \delta \varphi_1 .$$

Соответствующий член в выражении обобщенной силы имеет вид $Q_{\varphi_1 B} = F_0 l \sin p_1 t \cos \varphi_1$. Его линеаризация в окрестности положения равновесия $Q_{\varphi_1 B} \approx F_0 l \sin p_1 t \cos \varphi_{1*}$. Тогда на основании (2.13) точные дифференциальные уравнения движения системы в отсутствие сил сопротивления имеют вид

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{3 + (\cos \varphi_1)^2} + \frac{4g \sin \varphi_1}{l(3 + (\cos \varphi_1)^2)} + \frac{c_1 \sin \varphi_1 (l \cos \varphi_1 - l_1)}{m_5 l (3 + (\cos \varphi_1)^2)} + \frac{c(a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) \cos \varphi_1}{m_5 l (3 + (\cos \varphi_1)^2)} + \frac{F_0 \cos \varphi_1 \sin p_1 t}{m_5 l (3 + (\cos \varphi_1)^2)}; \quad (2.22)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{4g \sin \varphi_2}{3l} + \frac{c(a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) \cos \varphi_2}{3lm_5}.$$

Приближенные уравнения малых колебаний (на основании (2.14)):

$$a_{11}\ddot{\varphi}_1 + c_{11}(\varphi_1 - \varphi_{1*}) + c_{12}(\varphi_2 - \varphi_{2*}) = F_0 l \cos \varphi_{1*} \sin p_1 t; \quad (2.23)$$

$$a_{22}\ddot{\varphi}_2 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_{1*}) + c_{22}(\varphi_2 - \varphi_{2*}) = 0.$$

Общее решение соответствующей однородной системы сохраняет вид (2.16), частное решение для вынужденных колебаний ищем в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 - \varphi_{1*} \\ \varphi_2 - \varphi_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \sin p_1 t,$$

тогда

$$(c_{11} - p_1^2 a_{11})E_1 + c_{12}E_2 = F_0 l \cos \varphi_{1*};$$

$$c_{12}E_1 + (c_{22} - p_1^2 a_{22})E_2 = 0.$$

Взяв $p_1 = 10 \text{ с}^{-1}$ (т.е. $p_1 \neq \omega_1$, $p_1 \neq \omega_2$), найдем

$$E_1 = \frac{F_0 l \cos \varphi_{1*} (c_{22} - p_1^2 a_{22})}{(c_{11} - p_1^2 a_{11})(c_{22} - p_1^2 a_{22}) - c_{12}^2};$$

$$E_2 = -\frac{F_0 l \cos \varphi_{1*} \cdot c_{12}}{(c_{11} - p_1^2 a_{11})(c_{22} - p_1^2 a_{22}) - c_{12}^2}.$$

При $F_0 = 20 \text{ Н}$ $E_1 = -1,477 \cdot 10^{-1}$, $E_2 = 6,779 \cdot 10^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arctg(3/4) + V_1^{(1)} \sin(6,655 t + \alpha_1) + \\ &+ V_1^{(2)} \sin(18,992 t + \alpha_2) - 1,447 \cdot 10^{-1} \sin 10 t; \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}(3/4) + 5,686 \cdot 10^{-1} V_1^{(1)} \sin(6,655 t + \alpha_1) - 1,4171 V_1^{(2)} \sin(18,992 t + \alpha_2) + 6,779 \cdot 10^{-1} \sin 10 t .$$

При поставленных ранее начальных условиях

$$\begin{aligned} (\pi/6) - \operatorname{arctg}(3/4) &= V_1^{(1)} \sin \alpha_1 + V_1^{(2)} \sin \alpha_2 ; \\ 0 &= 5,686 \cdot 10^{-1} V_1^{(1)} \sin \alpha_1 - 1,4171 V_1^{(2)} \sin \alpha_2 ; \\ 0 &= 6,655 V_1^{(1)} \cos \alpha_1 + 18,992 V_1^{(2)} \cos \alpha_2 - 1,477 ; \\ 0 &= 5,686 \cdot 10^{-1} \cdot 6,655 V_1^{(1)} \cos \alpha_1 - \\ &- 1,417 \cdot 18,992 V_1^{(2)} \cos \alpha_2 + 6,779 , \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} V_1^{(1)} \sin \alpha_1 &= -8,556 \cdot 10^{-2}, \quad V_1^{(2)} \sin \alpha_2 = -3,433 \cdot 10^{-2} ; \\ V_1^{(1)} \cos \alpha_1 &= -3,546 \cdot 10^{-1}, \quad V_1^{(2)} \cos \alpha_2 = 2,020 \cdot 10^{-1} . \end{aligned}$$

Окончательно приближенное решение принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \operatorname{arctg}(3/4) - 3,546 \cdot 10^{-1} \sin(6,655 t) - \\ &- 8,556 \cdot 10^{-2} \cos(6,655 t) + 2,020 \cdot 10^{-1} \sin(18,992 t) - \\ &- 3,433 \cdot 10^{-2} \cos(18,992 t) - 1,477 \cdot 10^{-1} \sin 10 t ; \\ \varphi_2 &= \operatorname{arctg}(3/4) - 2,016 \cdot 10^{-1} \sin(6,655 t) - \\ &- 4,866 \cdot 10^{-2} \cos(6,655 t) - 2,863 \cdot 10^{-1} \sin(18,992 t) + \\ &+ 4,866 \cdot 10^{-2} \cos(18,992 t) + 6,779 \cdot 10^{-1} \sin 10 t . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Графики для φ_1 и φ_2 , соответствующие результатам численного интегрирования уравнений (2.22) и приближенному решению (2.24), приведены на рис. 2.6 и 2.7. Они показывают, что при взятой амплитуде возмущающей силы нелинейность является существенной.

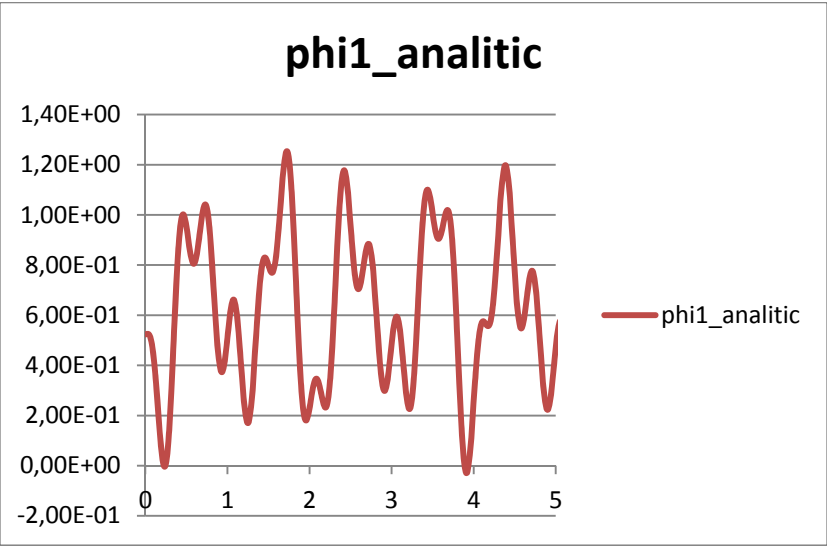
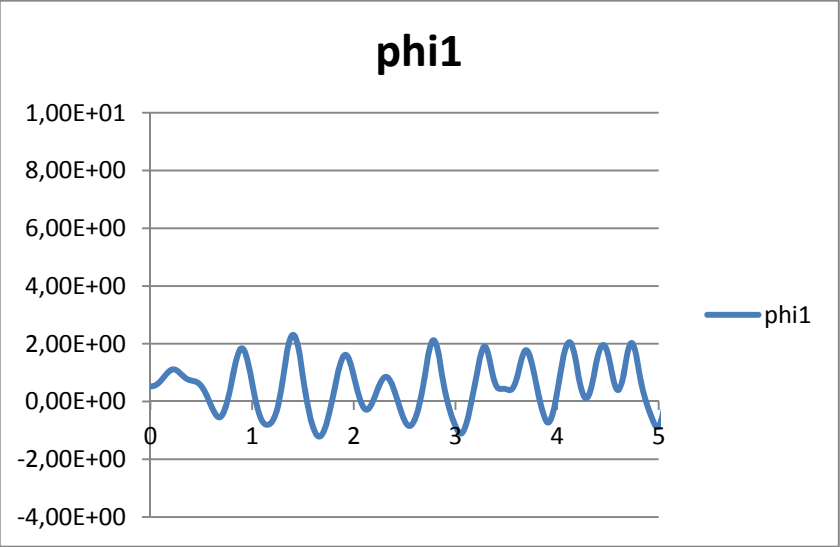


Рис. 2.6

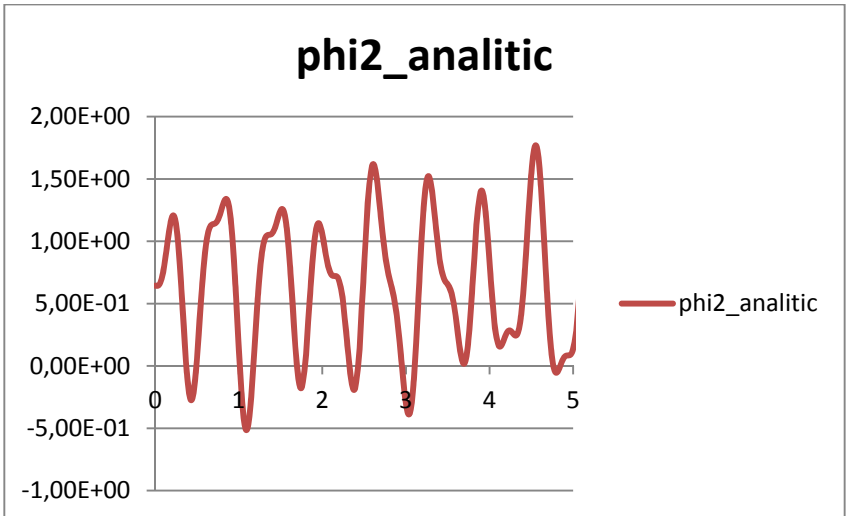
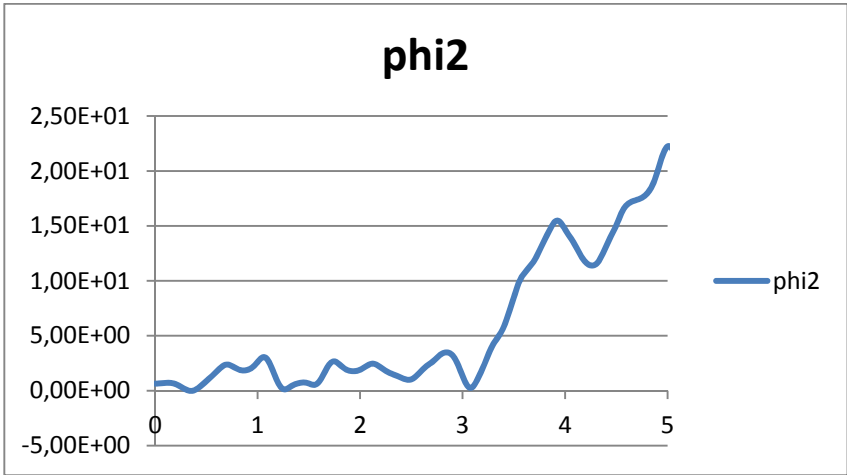


Рис. 2.7

4. При сопротивлении движению ползуна 3 уравнения Лагранжа второго рода ведут к уравнениям

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 = & \frac{\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{3 + (\cos \varphi_1)^2} + \frac{4g \sin \varphi_1}{l(3 + (\cos \varphi_1)^2)} + \frac{c_1 \sin \varphi_1 (l \cos \varphi_1 - l_1)}{m_5 l (3 + (\cos \varphi_1)^2)} + \\ & + \frac{c(a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) \cos \varphi_1}{m_5 l (3 + (\cos \varphi_1)^2)} - \frac{b(\cos \varphi_1)^2 \dot{\varphi}_1}{m_5 (3 + (\cos \varphi_1)^2)} + \\ & + \frac{F_0 \cos \varphi_1 \sin p_1 t}{m_5 l (3 + (\cos \varphi_1)^2)}; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{4g \sin \varphi_2}{3l} + \frac{c(a - l \sin \varphi_1 - l \sin \varphi_2 - l_0) \cos \varphi_2}{3lm_5}.$$

В этом случае приближенные уравнения малых колебаний принимают вид (на основании (2.19)):

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{\varphi}_1 + c_{11}(\varphi_1 - \varphi_{1*}) + c_{12}(\varphi_2 - \varphi_{2*}) + 0,64bl^2 \dot{\varphi}_1 = \\ = F_0 l \cos \varphi_{1*} \sin p_1 t; \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$a_{22} \ddot{\varphi}_2 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_{1*}) + c_{22}(\varphi_2 - \varphi_{2*}) = 0.$$

Общее решение соответствующей однородной системы сохраняет вид (2.20), частное решение для вынужденных колебаний ищем в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 - \varphi_{1*} \\ \varphi_2 - \varphi_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} \sin p_1 t + \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \cos p_1 t,$$

тогда

$$\begin{aligned} (c_{11} - p_1^2 a_{11})G_1 + c_{12}G_2 - 0,64bl^2 p_1 H_1 = F_0 l \cos \varphi_{1*}; \\ (c_{11} - p_1^2 a_{11})H_1 + c_{12}H_2 + 0,64bl^2 p_1 G_1 = 0; \\ c_{12}G_1 + (c_{22} - p_1^2 a_{22})G_2 = 0; \\ c_{12}H_1 + (c_{22} - p_1^2 a_{22})H_2 = 0. \end{aligned}$$

Решим последнюю систему:

$$\begin{aligned} G_1 = 8,081 \cdot 10^{-2}, \quad H_1 = -1,828 \cdot 10^{-4}, \\ G_2 = 3,786 \cdot 10^{-1}, \quad H_2 = -8,567 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \arctg(3/4) + V_1^{(1)} e^{-2,477 \cdot 10^{-2} t} \sin(6,655 t + \alpha_1) + \\ & + V_1^{(2)} e^{-6,313 \cdot 10^{-2} t} \sin(18,992 t + \alpha_2) + 8,081 \cdot 10^{-2} \sin 10 t - \\ & - 1,8286 \cdot 10^{-4} \cos 10 t; \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \arctg(3/4) + 5,686 \cdot 10^{-1} V_1^{(1)} e^{-2,477 \cdot 10^{-2} t} \sin(6,655 t + \alpha_1) - \\ - 1,4171 V_1^{(2)} e^{-6,313 \cdot 10^{-2} t} \sin(18,992 t + \alpha_2) + 3,786 \cdot 10^{-1} \sin 10 t - \\ - 8,5677 \cdot 10^{-4} \cos 10 t .$$

При поставленных ранее начальных условиях

$$\begin{aligned} (\pi/6) - \arctg(3/4) &= V_1^{(1)} \sin \alpha_1 + V_1^{(2)} \sin \alpha_2 - 1,828 \cdot 10^{-4} ; \\ 0 &= 5,686 \cdot 10^{-1} V_1^{(1)} \sin \alpha_1 - 1,4171 V_1^{(2)} \sin \alpha_2 - 8,567 \cdot 10^{-4} ; \\ 0 &= -2,477 \cdot 10^{-2} V_1^{(1)} \sin \alpha_1 + 6,655 V_1^{(1)} \cos \alpha_1 - \\ &- 6,313 \cdot 10^{-2} V_1^{(2)} \sin \alpha_2 + 18,992 V_1^{(2)} \cos \alpha_2 + 8,081 \cdot 10^{-1} ; \\ 0 &= -5,686 \cdot 10^{-1} \cdot 2,477 \cdot 10^{-2} V_1^{(1)} \sin \alpha_1 + \\ &+ 5,686 \cdot 10^{-1} \cdot 6,655 V_1^{(1)} \cos \alpha_1 + 1,417 \cdot 6,313 \cdot 10^{-2} V_1^{(2)} \sin \alpha_2 - \\ &- 1,4171 \cdot 18,992 V_1^{(2)} \cos \alpha_2 + 3,786 , \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} V_1^{(1)} \sin \alpha_1 &= -8,500 \cdot 10^{-2}; \quad V_1^{(2)} \sin \alpha_2 = -3,471 \cdot 10^{-2} ; \\ V_1^{(1)} \cos \alpha_1 &= -3,734 \cdot 10^{-1}; \quad V_1^{(2)} \cos \alpha_2 = 8,809 \cdot 10^{-2} . \end{aligned}$$

В результате приближенное решение принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arctg(3/4) + e^{-2,477 \cdot 10^{-2} t} [-3,734 \cdot 10^{-1} \sin(6,655 t) - \\ &- 8,5 \cdot 10^{-2} \cos(6,655 t)] + e^{-6,313 \cdot 10^{-2} t} [+8,809 \cdot 10^{-2} \sin(18,992 t) - \\ &- 3,471 \cdot 10^{-2} \cos(18,992 t)] + 8,081 \cdot 10^{-2} \sin 10 t - \\ &- 1,828 \cdot 10^{-4} \cos 10 t ; \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \arctg(3/4) - e^{-2,477 \cdot 10^{-2} t} [-2,123 \cdot 10^{-1} \sin(6,655 t) - \\ &- 4,834 \cdot 10^{-2} \cos(6,655 t)] + \\ &+ e^{-6,313 \cdot 10^{-2} t} [-1,248 \cdot 10^{-1} \sin(18,992 t) + \\ &+ 4,919 \cdot 10^{-2} \cos(18,992 t)] + \\ &+ 3,786 \cdot 10^{-1} \sin 10 t - 8,567 \cdot 10^{-4} \cos 10 t . \end{aligned}$$

Графики для φ_1 и φ_2 , соответствующие результатам численного интегрирования уравнений (2.25) и приближенному решению (2.27), приведены на рис. 2.8 и 2.9. Здесь также видно существенное значение нелинейности.

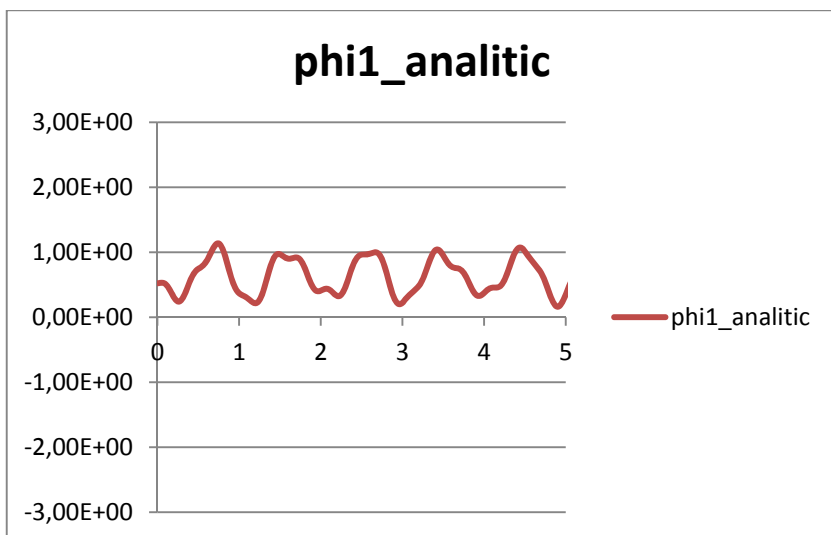
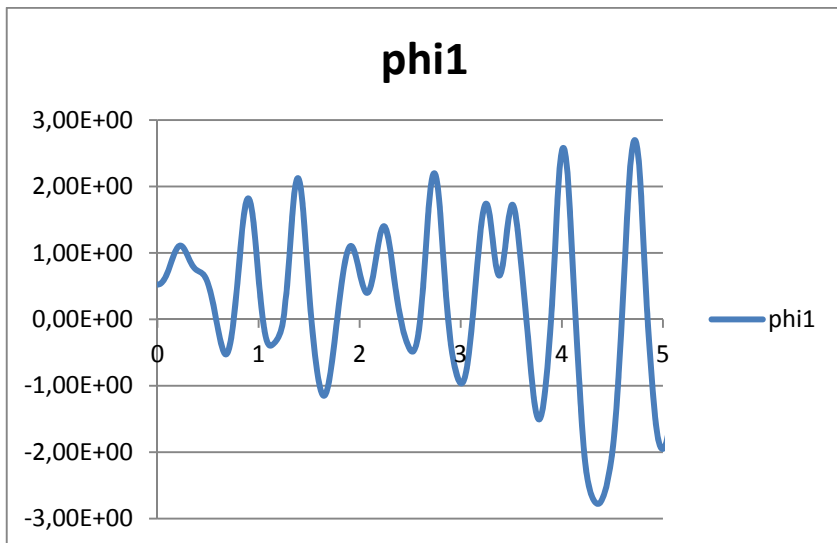


Рис. 2.8

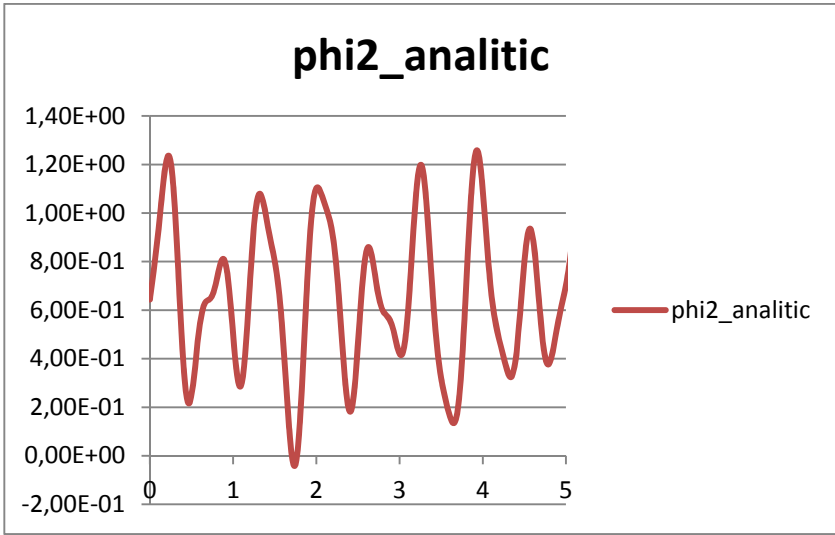
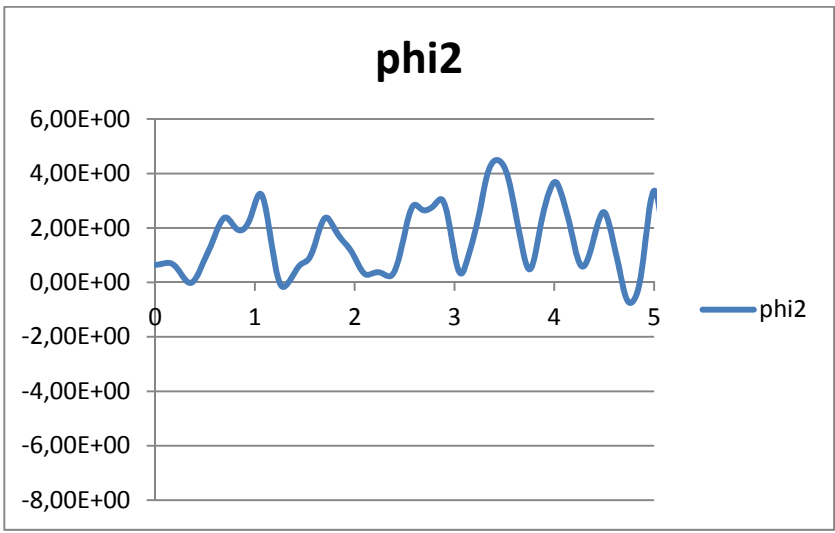


Рис. 2.9

2.3. Варианты задания

Для рассматриваемой системы (рис. 2.10) в соответствии с номером варианта найти закон движения при заданных начальных условиях на основе уравнений Лагранжа второго рода и уравнений малых колебаний около положения устойчивого равновесия. Сравнить результаты. Числовые значения параметров системы задать самостоятельно. Начальные условия задать не слишком сильно отличающимися от соответствующих положению устойчивого равновесия. В заданиях, содержащих пункты а, б и т.д., выполнить один из пунктов по указанию преподавателя.

Вариант 1. Точечные грузы 1 массы m_1 и 2 массы m_2 соединяет шарнирно присоединенный однородный стержень 3 массы m_3 и длины l . Груз 1 подвешен на вертикальной пружине жесткости s .

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии силы сопротивления движению груза 1
 $\vec{F}_1 = -b\vec{v}_1$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на груз 1 возмущающей силы $F_{1x} = F_0 \sin p_1 t$;

б) при действии на стержень возмущающего момента
 $M_z = M_0 \sin p_2 t$;

в) при действии на груз 2 возмущающей силы $F_{2x} = F_0 \sin p_3 t$;

г) при действии на груз 2 возмущающей силы $F_{2y} = F_0 \sin p_4 t$;

д) при действии на груз 2 постоянной по модулю F_0 возмущающей силы, образующей с осью y угол $p_5 t$.

Вариант 2. Точечные грузы А массы m_1 и В массы m_2 соединяет шарнирно присоединенный однородный стержень АВ массы m_3 и длины l . Груз А прикреплен к двум горизонтальным пружинам жесткости s каждая.

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии силы сопротивления движению груза А
 $\vec{F}_A = -b\vec{v}_A$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии в точке А возмущающей силы $F_{Ay} = F_0 \sin p_1 t$;

б) при действии на стержень возмущающего момента
 $M_z = M_0 \sin p_2 t$;

- в) при действии в точке B возмущающей силы $F_{Bx} = F_0 \sin p_3 t$;
- г) при действии в точке B возмущающей силы $F_{By} = F_0 \sin p_4 t$;
- д) при действии в точке B постоянной по модулю F_0 возмущающей силы, образующей с осью u угол $p_5 t$.

Вариант 3. Одинаковые однородные стержни OA и AB массы m и длины l соединены друг с другом и с неподвижной точкой O цилиндрическими шарнирами.

Найти закон движения системы:

- 1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;
- 2) при наличии момента сопротивления вращению стержня OA
 $\vec{M}_A = -b\vec{\omega}_{OA}$;
- 3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:
 - а) при действии на стержень OA возмущающего момента
 $M_{OAz} = M_0 \sin p_1 t$;
 - б) при действии на стержень AB возмущающего момента
 $M_{ABz} = M_0 \sin p_2 t$;
 - в) при действии в точке B возмущающей силы $F_{Bx} = F_0 \sin p_3 t$;
 - г) при действии в точке B возмущающей силы $F_{By} = F_0 \sin p_4 t$;
 - д) при действии в точке B постоянной по модулю F_0 возмущающей силы, образующей с осью u угол $p_5 t$.

Вариант 4. По платформе l массы m_1 , способной перемещаться по горизонтали, может перекатываться без проскальзывания сплошной однородный цилиндр 2 массы m_2 . Платформа соединена с вертикальными стенками двумя одинаковыми пружинами жесткости c_1 , центр цилиндра соединен с корпусом платформы горизонтальной пружиной жесткости c_2 .

Найти закон движения системы:

- 1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;
- 2) при наличии силы сопротивления движению платформы
 $\vec{F}_1 = -b\vec{v}_1$;
- 3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:
 - а) при действии на платформу возмущающей силы
 $F_{1x} = F_0 \sin p_1 t$;
 - б) при действии в центре цилиндра возмущающей силы
 $F_{2x} = F_0 \sin p_2 t$;
 - в) при действии на цилиндр возмущающего момента вдоль оси цилиндра $M_z = M_0 \sin p_3 t$.

Вариант 5. Сплошной однородный цилиндр l массы m_1 может перекатываться по неподвижной горизонтальной плоскости без проскальзывания. Ось цилиндра соединена с неподвижной вертикальной стенкой пружинами общей жесткости c . К оси цилиндра шарнирно присоединен однородный стержень 3 массы m_3 и длины l , несущий на конце точечный груз 2 массы m_2

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии силы сопротивления движению оси цилиндра

$$\vec{F}_A = -b\vec{v}_A ;$$

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на ось цилиндра возмущающей силы

$$F_{1y} = F_0 \sin p_1 t,$$

б) при действии на цилиндр возмущающего момента

$$M_{1z} = M_0 \sin p_2 t ;$$

в) при действии на стержень возмущающего момента

$$M_{3z} = M_0 \sin p_3 t ;$$

г) при действии на груз 2 возмущающей силы $F_{2x} = F_0 \sin p_4 t ;$

д) при действии на груз 2 возмущающей силы $F_{2y} = F_0 \sin p_5 t ;$

е) при действии на груз 2 постоянной по модулю F_0 возмущающей силы, образующей с осью u угол $p_6 t$.

Значение F_0 взять таким, при котором цилиндр не отрывается от опорной горизонтальной плоскости.

Вариант 6. Внутри сплошной однородной трубы массы M и радиуса R , шарнирно присоединенной к оси O , может без проскальзывания перекатываться сплошной однородный цилиндр массы m и радиуса r .

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии момента сопротивления вращению трубы

$$\vec{M} = -b\vec{\omega} ;$$

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии возмущающего момента, приложенного к трубе $M_z = M_0 \sin p_1 t ;$

б) при действии возмущающего момента, приложенного к цилиндру $M_z = M_0 \sin p_2 t ;$

в) при действии возмущающей силы, приложенной к оси цилиндра $F_x = F_0 \sin p_3 t ;$

г) при действии возмущающей силы, приложенной к оси цилиндра $F_y = F_0 \sin p_4 t ;$

е) при действии в оси цилиндра постоянной по модулю F_0 возмущающей силы, образующей с течением времени с осью y угол $p_5 t$.

Значение F_0 взять таким, при котором цилиндр не отрывается от трубы.

Вариант 7. Сплошной однородный цилиндр l массы m_1 и радиуса r может перекаатываться без проскальзывания по внутренней поверхности неподвижной трубы радиуса R . К оси цилиндра цилиндрическим шарниром присоединен однородный стержень 2 массы m_2 и длины l , несущий на конце точечный груз 3 массы m_3 .

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии момента сопротивления вращению цилиндра

$$\vec{M}_{Az} = -b\vec{\omega}_1;$$

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на цилиндр возмущающего момента

$$M_{Az} = M_0 \sin p_1 t;$$

б) при действии в точке B возмущающей силы $F_{Bx} = F_0 \sin p_2 t$;

в) при действии в точке B возмущающей силы $F_{By} = F_0 \sin p_3 t$;

в) при действии на стержень возмущающего момента

$$M_z = M_0 \sin p_3 t;$$

г) при действии в точке B постоянной по модулю возмущающей силы F_0 , образующей с течением времени с осью y угол $p_4 t$.

Значение F_0 взять таким, при котором цилиндр не отрывается от внутренней поверхности трубы.

Вариант 8. Однородный стержень OA массы m_1 и длины l цилиндрическими шарнирами соединен с неподвижной точкой O и с пружиной жесткости c и длины в недеформированном состоянии l_0 , несущей на конце точечный груз 2 массы m_2 .

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии момента сопротивления вращению стержня OA

$$\vec{M}_O = -b\vec{\omega}_{OA};$$

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на стержень OA возмущающего момента

$$M_z = M_0 \sin p_1 t;$$

б) при действии на груз 2 возмущающей силы $F_{2x} = F_0 \sin p_2 t$;

в) при действии на груз 2 возмущающей силы $F_{2y} = F_0 \sin p_3 t$;

д) при действии на груз 2 постоянной по модулю F_0 возмущающей силы, образующей с осью y с течением времени угол $p_4 t$.

Вариант 9. По треугольной призме 1 массы m_1 с углом α , скользящей по горизонтали, может перекатываться без проскальзывания сплошной однородный цилиндр 2 массы m_2 и радиуса r . Призма соединена с неподвижной вертикальной стенкой пружинами общей жесткости c_1 , ось цилиндра соединена с призмой пружиной жесткости c_2 .

Найти закон движения системы:

- 1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;
- 2) при наличии силы сопротивления движению призмы

$$\vec{F}_1 = -b\vec{v}_1 ;$$

- 3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на призму горизонтальной возмущающей силы

$$F_{1x} = F_0 \sin p_1 t ;$$

б) при действии на цилиндр возмущающего момента

$$M_{2z} = M_0 \sin p_2 t ;$$

в) при действии в оси цилиндра постоянной по модулю возмущающей силы F_0 , образующей с течением времени с осью x угол $p_3 t$.

Значение F_0 взять таким, при котором цилиндр не отрывается от призмы.

Вариант 10. Груз 1 массы m_1 скользит по горизонтали и прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости c . К грузу привязана невесомая нерастяжимая нить длины l , перекинутая через блок 2 – сплошной однородный диск массы m_2 и радиуса r , и несущая на конце материальную точку 3 массы m_3 . Расстояние от центра блока до вертикали, проходящей через конец недеформированной пружины, равно a .

Найти закон движения системы:

- 1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;
- 2) при действии на груз 1 силы сопротивления $\vec{F}_1 = -b\vec{v}_1$;
- 3) в отсутствие сопротивления и при наличии его при действии на груз 1 горизонтальной возмущающей силы $F_{1y} = F_0 \sin pt$.

Вариант 11. Груз 1 массы m_1 скользит по горизонтали и прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости c_1 . К грузу привязана невесомая нерастяжимая нить, перекинутая через блок 2 – сплошной однородный диск массы m_2 и радиуса r , и несущая вертикальную пружину жесткости c_2 с грузом 3 массы m_3 на конце.

Найти закон движения системы:

- 1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;
- 2) при действии силы сопротивления $\vec{F}_1 = -b\vec{v}_1$:
 - а) на груз 1;
 - б) на груз 3;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на груз 1 горизонтальной возмущающей силы

$$F_{1x} = F_0 \sin p_1 t ;$$

б) при действии на груз 3 вертикальной возмущающей силы

$$F_{3y} = F_0 \sin p_2 t .$$

Вариант 12. Тележка 1 массы m_1 на четырех колесах может без проскальзывания перекатываться по неподвижной горизонтальной плоскости и прикреплена к неподвижной вертикальной стенке пружинами общей жесткости c_1 . Колеса 3 считать однородными дисками массы m_3 . По тележке перекатывается без проскальзывания однородный цилиндр 2 массы m_2 и радиуса r , ось которого соединена с неподвижной вертикальной стенкой горизонтальной пружины жесткости c_2 .

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии силы сопротивления движению тележки

$$\vec{F}_1 = -b\vec{v}_1 ;$$

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на тележку горизонтальной возмущающей силы $F_{1x} = F_0 \sin p_1 t$;

б) при действии на ось цилиндра горизонтальной возмущающей силы $F_{2x} = F_0 \sin p_2 t$;

в) при действии на цилиндр возмущающего момента $M_{2z} = M_0 \sin p_3 t$.

Вариант 13. Тележка 1 массы m_1 на четырех колесах может без проскальзывания перекатываться по неподвижной горизонтальной плоскости и прикреплена к неподвижной вертикальной стенке пружинами общей жесткости c_1 . Колеса 3 считать однородными дисками массы m_3 . По тележке перекатывается без проскальзывания однородный цилиндр 2 массы m_2 и радиуса r , ось которого соединена с вертикальной стенкой тележки горизонтальной пружины жесткости c_2 .

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии силы сопротивления движению тележки $\vec{F}_1 = -b\vec{v}_1$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на тележку горизонтальной возмущающей силы $F_{1x} = F_0 \sin p_1 t$;

б) при действии на ось цилиндра горизонтальной возмущающей силы $F_{2x} = F_0 \sin p_2 t$;

в) при действии на цилиндр возмущающего момента $M_{2z} = M_0 \sin p_3 t$.

Вариант 14. Угольник, состоящий из двух жестко связанных перпендикулярных однородных стержней 1, 3 масс m_1 и m_3 и длин l_1 и l_3 соответственно, присоединен к неподвижной точке O цилиндрическим шарниром и расположен в вертикальной плоскости. По стержню 1 может без проскальзывания перекатываться сплошной однородный диск 2 массы m_2 и радиуса r , ось которого соединена со стержнем 3 пружиной жесткости c_1 , имеющей в недеформированном состоянии длину l_0 . К концу стержня 1 шарнирно прикреплен невесомый упругий стержень с жесткостью на растяжение c_2 , другой конец которого может перемещаться по горизонтальным направляющим. При горизонтальном положении стержня 1 этот стержень недеформирован.

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии:

а) момента сопротивления повороту угольника $\vec{M}_1 = -b\vec{\omega}_1$;

б) силы сопротивления движению ползуна D $\vec{F}_D = -b\vec{v}_D$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на угольник возмущающего момента $M_z = M_0 \sin p_1 t$;

б) при действии возмущающего момента, приложенного к диску $M_{2z} = M_0 \sin p_2 t$;

в) при действии в оси диска постоянной по модулю F_0 возмущающей силы, образующей с течением времени с осью x угол $p_3 t$.

Параметры системы задать так, чтобы она имела положение устойчивого равновесия.

Параметры возмущающего воздействия взять такими, чтобы диск не отрывался от стержня 1.

Вариант 15. Однородный стержень 1 массы m_1 и длины l присоединен к неподвижной точке O цилиндрическим шарниром, ось которого горизонтальна. На стержень надет ползун 2 массы m_2 , соединенный с точкой O пружиной жесткости c , длина которой в недеформированном состоянии равна l_0 .

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии:

а) момента сопротивления вращению стержня l $\vec{M}_1 = -b\vec{\omega}_1$;

б) силы сопротивления проскальзыванию ползуна 2 относительно стержня $\vec{F}_2 = -b\vec{v}_{2r}$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на стержень возмущающего момента $M_{1z} = M_0 \sin p_1 t$;

б) при действии на ползун 2 вертикальной возмущающей силы $F_{2x} = F_0 \sin p_2 t$;

в) при действии на ползун 2 горизонтальной возмущающей силы $F_{2y} = F_0 \sin p_3 t$;

г) при действии на ползун 2 постоянной по модулю F_0 возмущающей силы, образующей с осью u с течением времени угол $p_4 t$.

Вариант 16. Однородный стержень l массы m_1 и длины l присоединен к неподвижной точке O цилиндрическим шарниром, ось которого горизонтальна. Его повороту препятствует спиральная пружина жесткости c_ϕ , которая не деформирована при нижнем вертикальном положении стержня. На стержень надет ползун 2 массы m_2 , соединенный с точкой O пружиной жесткости c , длина которой в недеформированном состоянии равна l_0 .

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии:

а) момента сопротивления вращению стержня l $\vec{M}_1 = -b\vec{\omega}_1$;

б) силы сопротивления проскальзыванию ползуна 2 относительно стержня $\vec{F}_2 = -b\vec{v}_{2r}$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на стержень l возмущающего момента $M_{1z} = M_0 \sin p_1 t$;

б) при действии на ползун 2 вертикальной возмущающей силы $F_{2x} = F_0 \sin p_2 t$;

в) при действии на ползун 2 горизонтальной возмущающей силы $F_{2y} = F_0 \sin p_3 t$;

г) при действии на ползун 2 постоянной по модулю возмущающей силы F_0 , образующей с осью u с течением времени угол $p_4 t$.

Вариант 17. Корпус l массы m_1 может перемещаться по вертикали и прикреплен к основанию двумя пружинами жесткости c . Внутри корпуса к точке O присоединен цилиндрическим шарниром одно-

родный стержень 2 массы m_2 и длины l , шарнирно соединенный с осью сплошного однородного цилиндра 3 массы m_3 и радиуса r , перекатывающегося без проскальзывания по поверхности цилиндрической полости.

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при действии:

а) на корпус 1 силы сопротивления $\vec{F}_1 = -b\vec{v}_1$;

б) на стержень 2 момента сопротивления вращению $\vec{M}_2 = -b\vec{\omega}_2$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на корпус 1 вертикальной возмущающей силы

$$F_{1x} = F_0 \sin p_1 t ;$$

б) при действии на стержень 2 возмущающего момента

$$M_{2z} = M_0 \sin p_2 t ;$$

в) при действии в оси цилиндра 3 вертикальной возмущающей силы $F_{3x} = F_0 \sin p_3 t ;$

г) при действии в оси цилиндра 3 постоянной по модулю возмущающей силы F_0 , образующей с осью y с течением времени угол $p_5 t$.

Вариант 18. Тележка 1 массы m_1 на четырех колесах может без проскальзывания перекатываться по неподвижной горизонтальной плоскости и прикреплена к неподвижной вертикальной стенке пружинами общей жесткости c . Колеса считать однородными дисками 4 массы m_4 . Внутри корпуса тележки к точке O присоединен цилиндрическим шарниром однородный стержень 2 массы m_2 и длины l , шарнирно соединенный с осью сплошного однородного цилиндра 3 массы m_3 и радиуса r , перекатывающегося без проскальзывания по поверхности цилиндрической полости.

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при действии:

а) на тележку силы сопротивления $\vec{F}_1 = -b\vec{v}_1$;

б) на стержень момента сопротивления вращению $\vec{M}_2 = -b\vec{\omega}_2$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на тележку горизонтальной возмущающей силы $F_{1y} = F_0 \sin p_1 t ;$

б) при действии на стержень 2 возмущающего момента $M_{2z} = M_0 \sin p_2 t ;$

в) при действии в оси цилиндра 3 вертикальной возмущающей силы $F_{3x} = F_0 \sin p_3 t ;$

г) при действии в оси цилиндра 3 постоянной по модулю возмущающей силы F_0 , образующей с осью y с течением времени угол $p_4 t$.

Вариант 19. Однородный стержень OA массы m_1 и длины l цилиндрическими шарнирами соединен с неподвижной точкой O и с невесомым вертикальным упругим стержнем AB жесткости c и длины в недеформированном состоянии l_0 , несущем на конце B ползун 2 массы m_2 . Кулиса 3 массы m_3 , проходящая через ползун, может совершать движение по вертикали.

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при действии:

а) на стержень OA момента сопротивления вращению $\vec{M}_{OA} = -b\vec{\omega}_{OA}$;

б) силы сопротивления движению кулисы 3 $\vec{F}_3 = -b\vec{v}_3$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на стержень OA возмущающего момента $M_{1z} = M_0 \sin p_1 t$;

б) при действии на кулису 3 возмущающей силы $F_{3x} = F_0 \sin p_2 t$;

в) при действии на ползун 2 постоянной по модулю возмущающей силы F_0 , образующей с осью y с течением времени угол $p_3 t$.

Вариант 20. Ползун 1 массы m_1 , помещенный в горизонтальные направляющие, соединен с точечным грузом 3 массы m_3 шарнирно присоединенным однородным стержнем 2 массы m_2 и длины l . Ползун и вертикальную стенку соединяет горизонтальная пружина жесткости c , ползун и стержень – круговая пружина жесткости c_φ , не напряженная при вертикальном «нижнем» положении стержня.

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии силы сопротивления движению ползуна 1

$\vec{F}_1 = -b\vec{v}_1$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на ползун 1 возмущающей силы $F_{1y} = F_0 \sin p_1 t$;

б) при действии на груз 3 вертикальной возмущающей силы $F_{3x} = F \sin p_2 t$;

в) при действии на груз 3 горизонтальной возмущающей силы $F_{3y} = F_0 \sin p_3 t$;

г) при действии на груз 3 постоянной по модулю возмущающей силы F_0 , образующей с течением времени с осью y угол $p_4 t$.

Вариант 21. Одинаковые однородные стержни массы m и длины l прикреплены к неподвижным цилиндрическим шарнирам, находящимся на одной горизонтали на расстоянии $O_1 O_2 = a$ друг от друга. Середины стержней соединены пружиной жесткости c , длина которой в ненапряженном состоянии равна a .

Найти закон движения системы:

- 1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;
- 2) при наличии момента сопротивления вращению одного из стержней $\vec{M} = -b\vec{\omega}$;
- 3) в отсутствие сопротивления и при наличии его при действии на один из стержней возмущающего момента $M_z = M_0 \sin pt$.

Вариант 22. На соединенный с неподвижной точкой O цилиндрическим шарниром однородный стержень l массы m_1 и длины l надет точечный ползун 2 массы m_2 . Он соединен с точкой O пружиной жесткости c_1 , длина которой в недеформированном состоянии равна l_0 , а с ползуном 3 массы m_3 , способным перемещаться по вертикали – горизонтальным невесомым упругим стержнем жесткости c_2 . Этот стержень не деформирован при вертикальном положении стержня l .

Найти закон движения системы:

- 1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;
- 2) при наличии:
 - а) момента сопротивления вращению стержня l $\vec{M}_1 = -b\vec{\omega}_1$;
 - б) силы сопротивления относительно скольжению ползуна 2 $\vec{F}_2 = -b\vec{v}_{2r}$;
 - в) силы сопротивления скольжению ползуна 3 $\vec{F}_3 = -b\vec{v}_3$;
- 3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:
 - а) при действии на стержень l возмущающего момента $M_{1z} = M_0 \sin p_1 t$;
 - б) при действии на ползун 2 вертикальной возмущающей силы $F_{2x} = F_0 \sin p_2 t$;
 - в) при действии на ползун 2 горизонтальной возмущающей силы $F_{2y} = F_0 \sin p_3 t$;

г) при действии на ползун 2 постоянной по модулю возмущающей силы F_0 , образующей с осью y с течением времени угол $p_4 t$.

Вариант 23. Середина однородного стержня 2 массы m_2 и длины l шарнирно соединена с ползунком 1 массы m_1 , помещенным в вертикальные направляющие. Концы стержня шарнирно соединены с невесомыми вертикальными упругими стержнями жесткости c , несущими на концах ползуны 3, 4 масс m_3 и m_4 , помещенные в горизонтальную направляющую.

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии силы сопротивления движению ползуна 1 $\vec{F}_1 = -b\vec{v}_1$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его при действии на ползун 1 вертикальной возмущающей силы $F_{1x} = F_0 \sin pt$.

Вариант 24. Ползуны 3, 4, 5, 6, способные двигаться по горизонтальным и вертикальным направляющим, шарнирно соединены с однородными стержнями 1, 2 длины l , массы m и пружиной жесткости c , длина которой в недеформированном состоянии равна l_0 . К ползуну 5 присоединена пружина жесткости c_1 и длины в свободном состоянии l_1 . Массы ползунков $m_3, m_4, m_5 = m_6$. Расстояние между вертикальными направляющими ползунков равно a .

Найти закон движения системы:

1) в отсутствие каких-либо дополнительных сил;

2) при наличии силы сопротивления движению:

а) ползун 3 $\vec{F}_3 = -b\vec{v}_3$;

б) ползун 4 $\vec{F}_4 = -b\vec{v}_4$;

в) ползун 5 $\vec{F}_5 = -b\vec{v}_5$;

г) ползун 6 $\vec{F}_6 = -b\vec{v}_6$;

3) в отсутствие сопротивления и при наличии его:

а) при действии на ползун 3 возмущающей силы $F_{3x} = F_0 \sin p_1 t$;

б) при действии на ползун 4 возмущающей силы $F_{4x} = F_0 \sin p_2 t$;

в) при действии на ползун 5 возмущающей силы $F_{5y} = F_0 \sin p_3 t$;

г) при действии на ползун 6 возмущающей силы $F_{6y} = F_0 \sin p_4 t$.

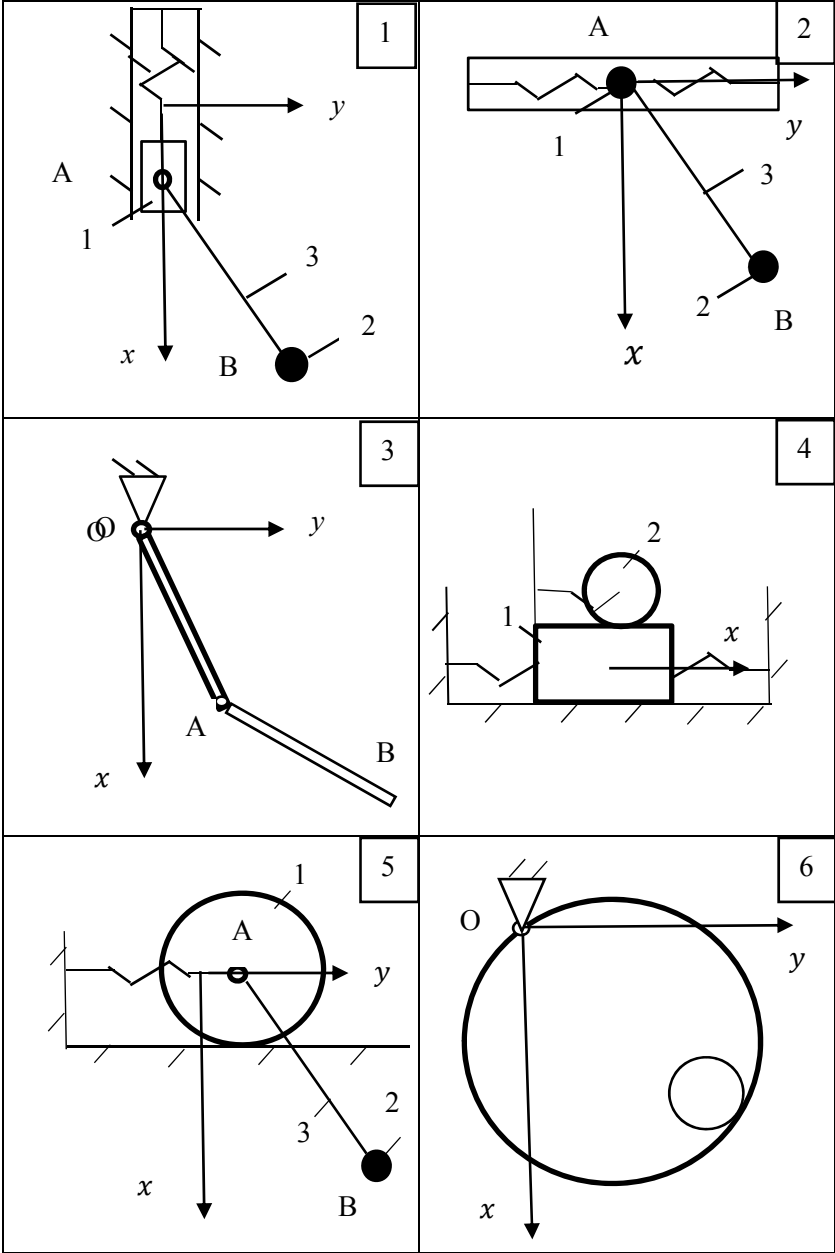


Рис. 2.10

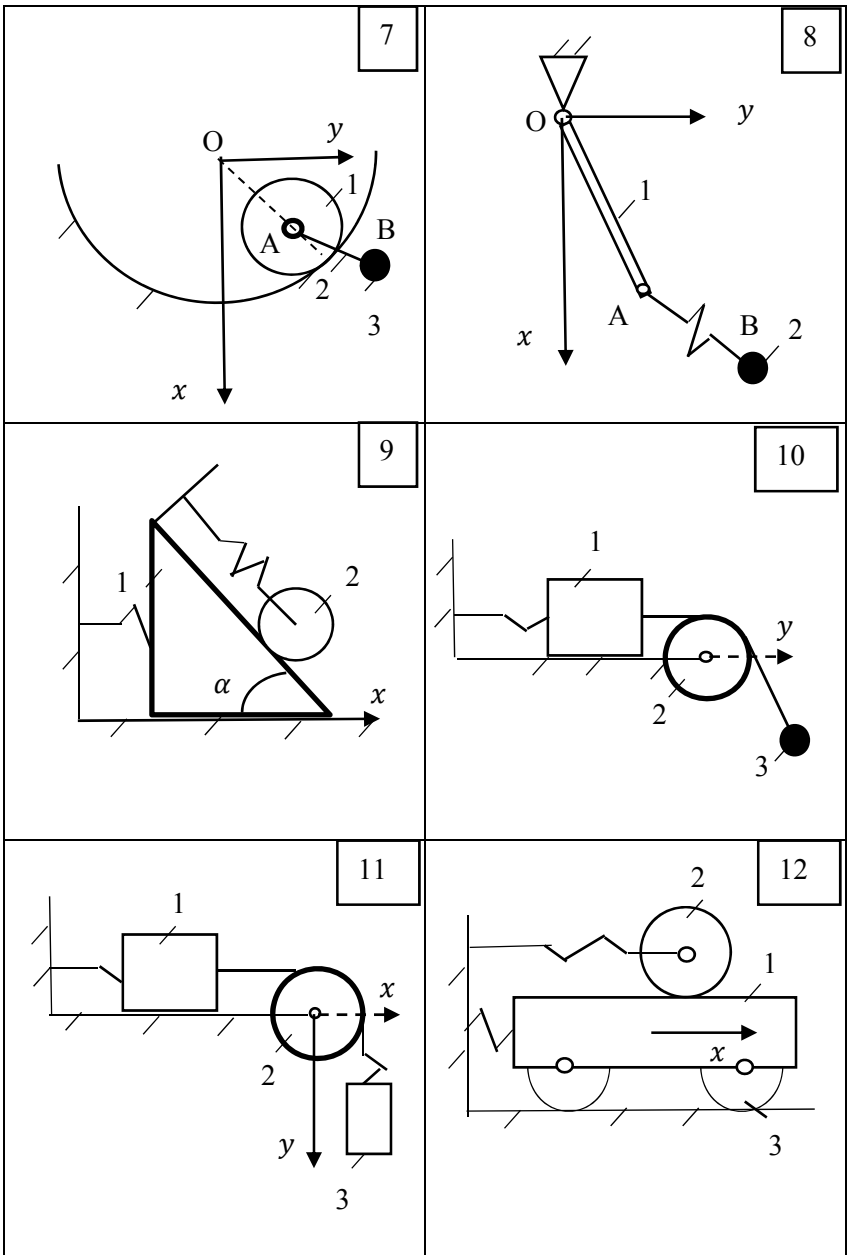


Рис. 2.10 (продолжение)

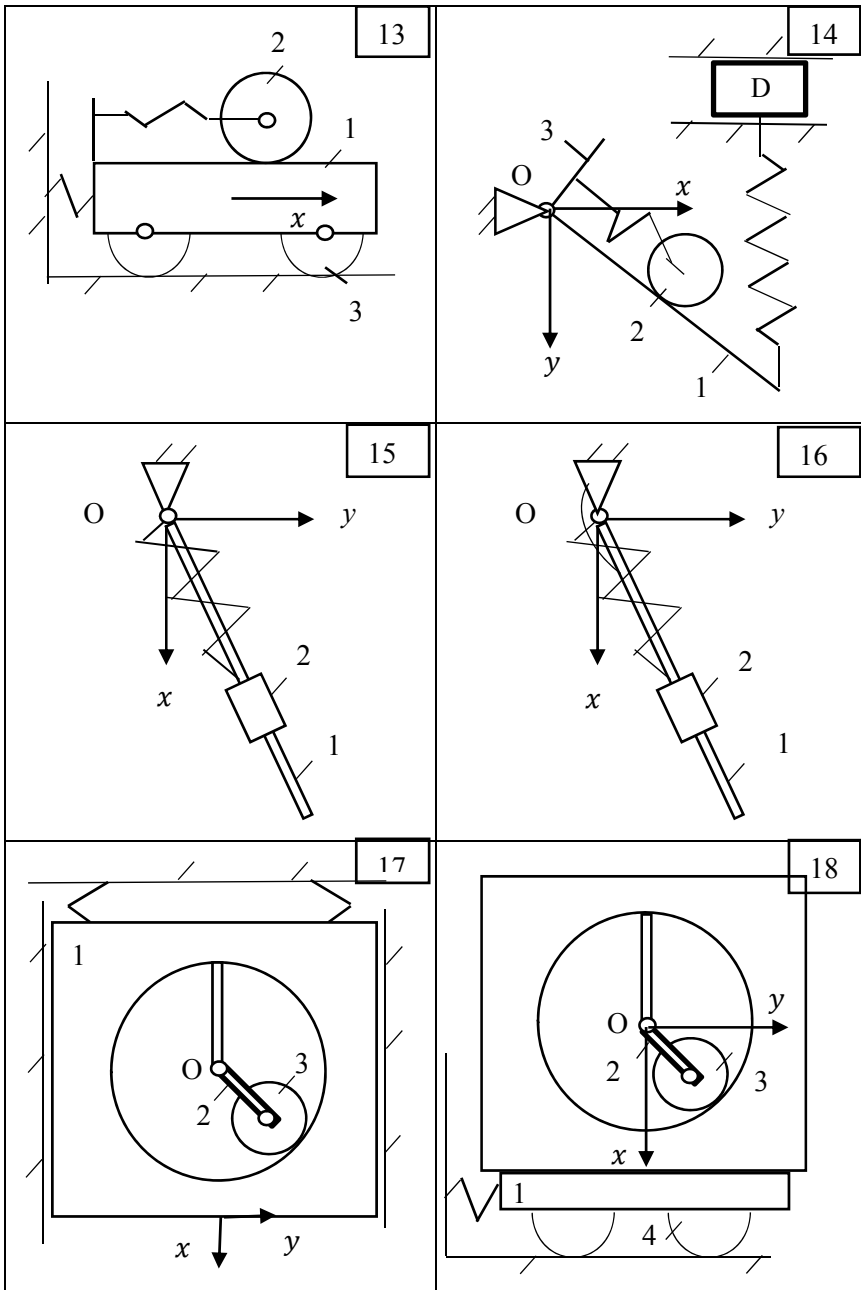


Рис. 2.10 (продолжение)

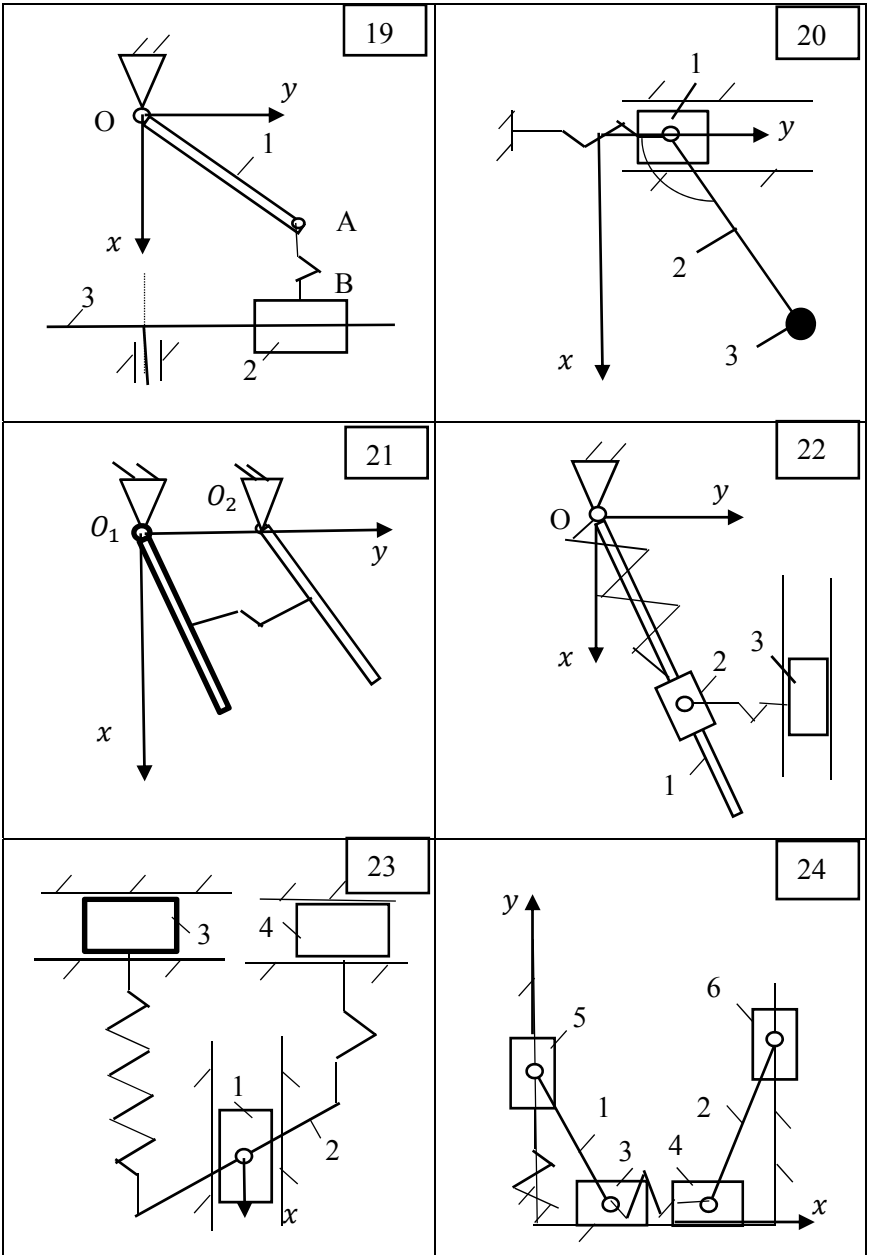


Рис. 2.10 (окончание)

Библиографический список

1. *Алдошин, Г.Т.* Теория линейных и нелинейных колебаний: учебное пособие / Г.Т. Алдошин. СПб.: Лань. 2013.
2. *Бутенин, Н.В.* Курс теоретической механики. Т.2 / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, В.Р. Меркин. СПб.: Лань. 2002.
3. *Курс теоретической механики* / Под ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2002.

**ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ
РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ**

Каждое задание оформляется на одной стороне листов бумаги формата А4. Первая страница – титульный лист, образец которого приведён в прил. 2. Вторая страница начинается с полной формулировки условия задачи, схемы механизма, рассматриваемого в задании, исходных данных для расчёта. Решение задачи должно сопровождаться подробными объяснениями, в которых нужно указать, какая теорема, принцип и т.п. применяется в расчётах. Схемы механизмов, расчётные схемы (изображения тел с приложенными к ним силами, скоростями, ускорениями и т.д.) должны быть чёткими и с соблюдением пропорций, чтобы изображаемые величины были не слишком малыми или слишком большими. Текст может быть рукописным, но небрежно оформленные работы не принимаются, в этих случаях работа должна быть распечатана на компьютере.

При защите работы студент должен быть готов к ответу на вопросы, касающиеся теории и методов выполнения работы.

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА

Балтийский государственный технический университет
«Военмех» им. Д.Ф. Устинова
Кафедра теоретической механики и баллистики

Расчётно-графическая работа №____
по разделу «Динамика»
Вариант №____

Выполнил: _____

Группа _____

Проверил: _____

Санкт-Петербург

20__

СО Д Е Р Ж А Н И Е

1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	3
1.1. Краткие сведения из теории	3
1.2. Пример выполнения задания	6
1.3. Варианты заданий.....	15
2. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ	36
2.1. Краткие сведения из теории	36
2.2. Пример выполнения задания	40
2.3. Варианты задания	60
<i>Библиографический список</i>	76
П р и л о ж е н и е 1. Требования к оформлению расчётно-графической работы.....	77
П р и л о ж е н и е 2. Образец оформления титульного листа.....	78

*Алдошин Геннадий Тихонович, Дмитриев Никита Николаевич,
Илихменев Андрей Львович, Чирков Вадим Юрьевич*

Колебания механических систем

Редактор *Г.В. Никитина*

Корректор *Л.А. Петрова*

Компьютерная верстка: *С.В. Кацуба*

Подписано в печать 16.08. 2016. Формат бумаги 60×84/16. Бумага документная.

Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,6. Тираж 150 экз. Заказ № 136 .

Балтийский государственный технический университет

Типография БГТУ

190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д.1