

ФИЗИКА

Лабораторная работа 1.1.

«Математический маятник»

доц. Щепин В.И.
e:mail shch@istu.edu

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right)$$

Лабораторная работа 1.1. Математический маятник

Цель работы: изучение гармонических колебаний, исследование зависимости периода колебаний математического маятника от его длины и определение ускорения свободного падения. Вычисление погрешностей измерений и расчётов.

Теоретическая часть

Гармоническими колебаниями физической величины x называется процесс изменения ее во времени t по закону

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right),$$

где A – амплитуда колебаний; T – период колебаний. Величина $\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$ называется **фаза** колебаний, а φ_0 соответствует фазе в начальный момент времени ($t=0$) и называется начальной фазой. График таких колебаний представлен на рис. 1. Из определения гармонических колебаний следует, что *период колебаний* является наименьшим промежутком времени, по истечении которого движение в точности повторяется. Действительно,

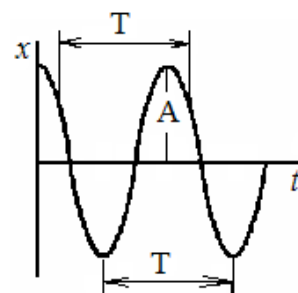


Рис. 1

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = A \sin\left[\frac{2\pi}{T}(t + T) + \varphi_0\right],$$

и за время $t=T$ совершается одно полное колебание.

Амплитуда колебаний A равна максимальному значению x . Величина

$\frac{2\pi}{T} = \omega$, называется **круговой (циклической) частотой**. Если начальная

фаза равна $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, то уравнение гармонических колебаний можно записать в виде

$$x = A \cos \omega t.$$

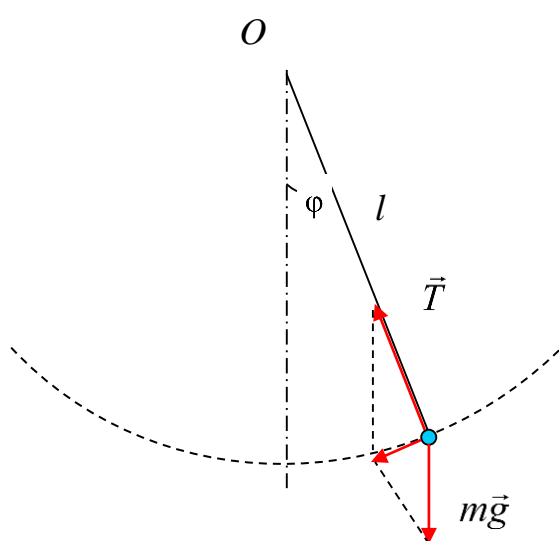


Рис. 2

Для изучения гармонических колебаний можно воспользоваться математическим маятником. **Математический маятник** – это (модель) идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на длинной нерастяжимой нити l , и совершающая колебания около положения равновесия.

Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжёлый шарик диаметром, подвешенный на длинной тонкой нерастяжимой нити при выполнении условия $d \ll l$. Длина маятника l равна расстоянию от точки подвеса до центра тяжести шарика. Можно показать, что шарик (рис. 2), отклонённый на угол φ от положения равновесия, будет совершать гармонические колебания. На него действует возвращающая квазиупругая сила, составляющая силы тяжести. Уравнение динамики вращательного движения для этих условий можно записать в виде

$$mg \sin \varphi l = -I\varepsilon,$$

где $\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ – угловое ускорение; g – ускорение свободного падения.

Для малых углов отклонения $\sin \varphi \approx \varphi$. С учетом того, что для шарика на нити можно принять $I = m \cdot l^2$, уравнение движения приобретает вид:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) аналогично общему уравнению гармонических колебаний

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0,$$

при условии, что собственная частота колебаний системы $\omega = \sqrt{g/l}$.

Можно показать, что частным решением последнего дифференциального уравнения является уравнение $x = A \cos \omega t$. Отсюда можно заключить, что математический маятник при малых углах отклонения

совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega = \sqrt{g/l}$ и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2)$$

Период колебаний маятника – это время, в течение которого маятник совершает одно полное колебание и возвращается в исходную точку.

Для определения ускорения свободного падения можно воспользоваться выражением (2), если решить его относительно g :

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}. \quad (3)$$

Действительно, достаточно измерить период колебаний T и длину маятника l , чтобы рассчитать по формуле (3) ускорение свободного падения.

Так как g – величина постоянная для данной географической точки, то видно, что при заданной длине маятника l период колебаний маятника T представляет собой постоянную величину. Поэтому при неоднократном измерении времени t одного и того же количества N колебаний, казалось бы, должен получаться неизменный результат. Однако даже при использовании сравнительно точного прибора (например, электронного секундомера) можно убедиться в том, что от опыта к опыту значение t изменяется то в бóльшую, то в мёньшую сторону. Различия в результатах измерения одной и той же величины объясняются случайными погрешностями.

Изучение погрешностей измерений и расчётов является одной из главных целей данной лабораторной работы.

Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки и входящие в неё приборы и принадлежности приведены на рис.3.

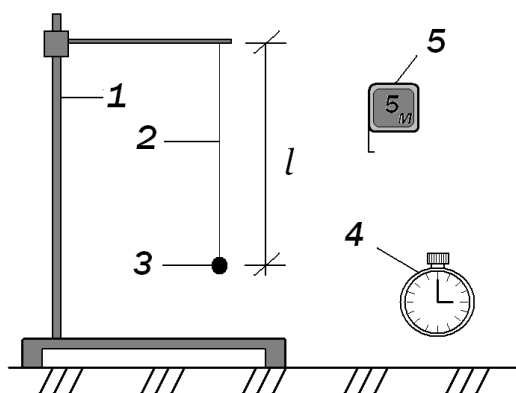


Рис. 3. Экспериментальная установка:

l – штатив; 2 – длина маятника l ; 3 – шарик; 4 – секундомер; 5 – рулетка

Рассмотрим три способа (методики) экспериментального определения ускорения свободного падения.

Первый способ. Если измерить расстояние от точки подвеса до центра тяжести шарика l , вывести из положения равновесия шарик, отклоняя его на угол $5-7^\circ$, при помощи секундомера определить время t некоторого числа n полных колебаний, затем найти период $T = t / n$, то ускорение свободного падения можно определить по формуле (3). При работе с математическим маятником имеется возможность изменять длину нити l и число колебаний n . Следует иметь в виду: при увеличении длины маятника и числа колебаний уменьшается экспериментальная погрешность.

Второй способ: измерить расстояние от точки подвеса до центра тяжести шарика l_1 , период колебания T_1 , соответствующий этой длине, как в первом способе, и подставить в формулу (2). Получим:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}. \quad (4)$$

Затем, увеличивая или уменьшая длину маятника, повторить измерения для l_2 :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}. \quad (5)$$

Преобразуем равенства (4) и (5). Для этого возведём обе части в квадрат и возьмём их разность, получим выражение $T_2^2 - T_1^2 = \frac{4\pi^2(l_2 - l_1)}{g}$, из которого расчетная формула примет окончательный вид:

$$g = 4\pi^2 \frac{(l_2 - l_1)}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (6)$$

В эту формулу входят не длины маятников, а разность этих длин, которую в некоторых случаях можно определить более точно. Следовательно, при вычислении ускорения свободного падения по формуле (6) нет необходимости определять центр тяжести шарика.

Третий способ. Период колебаний маятника увеличивается с увеличением его длины. Если измерить период колебаний T для различных длин нити l , а затем построить эту зависимость в переменных T^2 и l , то получится прямая линия с коэффициентом наклона $\alpha = \frac{T^2}{l} = \frac{4\pi^2}{g}$. Если определить наклон α из экспериментального графика $T^2(l)$, то можно рассчитать величину ускорения свободного падения g по формуле:

$$g = \frac{4\pi^2}{\alpha}. \quad (7)$$

Работу можно выполнить как на лабораторной установке, схема которой приведена на рис. 3, так и на виртуальной лабораторной установке. Кроме того, студенты заочной формы обучения могут изготовить самостоятельно математический маятник, взяв в качестве груза тело небольшого размера, например гайку М10-М16.

Порядок выполнения работы

Разобраться с тремя способами определения g при помощи математического маятника. Получить свой вариант задания на выполнение лабораторной работы у преподавателя, в котором указываются способ определения ускорения свободного падения g , длина маятника l и число колебаний n .

Замечание: Для определения времени секундомер включают в тот момент, когда шарик находится в положении максимального отклонения от положения равновесия и отсчитывают время t , в течение которого маятник совершит n полных колебаний. Расчёт погрешностей, допускаемых при

определении ускорения силы тяжести, выполняют в соответствии с методикой обработки прямых лабораторных измерений (см. с. 14–17).

Первый способ:

1. Установить заданную длину маятника l , измеряя расстояние от точки подвеса до центра масс шарика при помощи рулетки.
2. Отклонить шарик на угол $5\text{--}7^\circ$ от положения равновесия. Измерить секундомером время t некоторого числа n колебаний.
3. Повторить измерения не менее пяти раз. Результаты измерений и погрешности измерительных приборов занести в протокол (табл. 1).
4. Найти период колебаний для каждого измерения $T = t/n$.
5. Определить ускорение свободного падения g для каждого измерения по формуле

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}.$$

6. Вычислить среднее арифметическое ускорение свободного падения, подставляя средние значения \bar{l} и \bar{T} : $\bar{g} = 4\pi^2 \frac{\bar{l}}{\bar{T}^2}$.
7. Найти абсолютную погрешность $\Delta g = \bar{g} \sqrt{\varepsilon_l^2 + 4\varepsilon_T^2}$, где $\varepsilon_l, \varepsilon_T$ – относительные погрешности измерения длины и периода колебаний маятника. Погрешность измерения длины маятника определяют по цене деления рулетки, которой измеряют, а погрешность измерения периода колебаний – по методу обработки результатов прямых измерений (см. с. 16).

Таблица 1

i	$l, \text{см}$	$\Delta l, \text{мм}$	n_i	$t_i, \text{с}$	$\Delta t, \text{с}$	$\bar{t}, \text{с}$	$T, \text{с}$	$g_i, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\bar{g}, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
1									
2									
3									

Второй способ:

1. Установить заданную длину маятника l , измеряя расстояние от точки подвеса до центра масс шарика при помощи рулетки.

- Отклонить шарик на угол $5-7^\circ$ от положения равновесия. Измерить секундомером время t_1, t_2, t_3 для n_1, n_2 , и n_3 колебаний.
- Установить новую длину маятника l_2 и повторить измерения аналогично п.2. Результаты измерений и погрешности измерительных приборов занести в протокол (табл. 2).

Таблица 2

n_i	$l_1, м$	$t_1, с$	$T_1, с$	$l_2, м$	$t_2, с$	$T_2, с$	$l_2-l_1, м$	$\Delta t, с$	$\Delta l, мм$	$g_i, м/с^2$	$\bar{g}, м/с^2$
n_1											
n_2											
n_3											

- Найти период колебаний для каждого значения n ($T = t/n$).
- Определить ускорение свободного падения g_i для каждой пары значений (l, T) и трёх различных значений n по формуле

$$g = 4\pi^2 \frac{(l_2 - l_1)}{T_2^2 - T_1^2}.$$

- Рассчитать среднее арифметическое ускорения свободного падения:

$$\bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i.$$

- Найти абсолютную погрешность так же, как в первом способе, по формуле $\Delta g = \bar{g} \cdot \sqrt{2\varepsilon_l^2 + 8 \cdot \varepsilon_T^2}$, где $\varepsilon_l, \varepsilon_T$ – относительные погрешности измерения длины и периода колебаний маятника.

Третий способ:

- Установить заданную длину маятника l_1 , измеряя расстояние от точки подвеса до центра масс шарика при помощи рулетки.
- Отклонить шарик на угол $5-7^\circ$ от положения равновесия. Измерить секундомером время t_1 некоторого числа n колебаний.
- Повторить измерения не менее пяти раз, увеличивая каждый раз длину маятника l_1 примерно на $l_1/5$. Результаты измерений и погрешности измерительных приборов занести в протокол (см. табл. 1).
- Найти период колебаний для каждого измерения как $T = t/n$.
- Определить ускорение свободного падения g для каждого измерения:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}.$$

6. Вычислить среднее арифметическое ускорения свободного падения:

$$\bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i.$$

7. По полученным данным построить график функции $T^2(l)$. Найти из графика значение g , сравнить с \bar{g} .

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются гармоническими?
2. Запишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний, его решение.
3. Что такое математический маятник?
4. Запишите формулу периода колебаний математического маятника.
5. Что понимается под силой тяготения, силой тяжести и массой тела?
6. Объясните зависимость ускорения свободного падения тел от географической широты местности.